

# Élaboration d'un schéma à neuf points paramétré par deux scalaires

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Description du schéma 9P2s</b>	<b>114</b>
<b>5.2</b>	<b>Analyse de l'erreur en pression</b>	<b>119</b>
5.2.1	Distribution angulaire	119
5.2.2	Minimisation de l'anisotropie	121
<b>5.3</b>	<b>Analyse de l'erreur en saturation</b>	<b>121</b>
5.3.1	Distribution angulaire	121
5.3.2	Minimisation de l'anisotropie	125
<b>5.4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>129</b>
5.4.1	Cas radial	129
5.4.2	Cas à 5 puits	130
5.4.3	Cas digitations	130

---

Les schémas 9P1s et MD1f décrits dans les chapitres précédents ont notablement réduit l'effet d'orientation de maillage sur des maillages peu allongés. Toutefois, force est de constater qu'ils n'ont pas tenu leurs promesses lorsque le rapport des longueurs  $\Delta y/\Delta x$  s'éloigne de 1. En particulier, la performance peu probante du schéma MD1f semble fermer la porte à la piste d'une amélioration directe du schéma de transport en saturation.

Pour lutter plus efficacement contre l'effet d'orientation de maillage, le schéma 9P1s est repris en le faisant dépendre de deux paramètres scalaires au lieu d'un, une minimisation à deux variables étant « meilleure » qu'à une variable. Toute la difficulté réside cependant dans la recherche d'une discrétisation à deux paramètres de l'équation en pression qui puisse s'exprimer au moyen d'un bilan de flux au sens des volumes finis.

Une fois le nouveau schéma 9P2s défini, toute la machinerie de l'analyse d'erreur des chapitres 3 et 4 peut être relancée en §5.2 et §5.3 afin de déterminer les paramètres optimaux minimisant l'anisotropie. Comme au chapitre 3, une minimisation approchée est retenue, donnant des formules explicites. Les résultats obtenus avec ce schéma 9P2s sont les meilleurs comme le démontre la section §5.4.

## 5.1 Description du schéma 9P2s

Pour insérer un deuxième paramètre de réglage dans le schéma, nous repartons de la discrétisation du laplacien.

### Construction sur le laplacien

La construction du nouveau schéma, appelé schéma 9P2s pour schéma à 9 points à 2 scalaires, repose sur celle du schéma 9P1s du chapitre 3. Cependant, la description des flux ainsi que la prise en compte des mailles diagonales se font de manière différente. Pour ne pas alourdir les notations, les exposants en temps ne sont pas mis ; en cas d'ambiguïté, ils pourront être précisés. Suivant chaque direction 1-D horizontale et verticale, les approximations par différences finies sont obtenues

$$\begin{aligned} (-\Delta_h^H p)_{i,j} &= \frac{-p_{i-1,j} + 2p_{i,j} - p_{i+1,j}}{\Delta x^2}, \\ (-\Delta_h^V p)_{i,j} &= \frac{-p_{i,j-1} + 2p_{i,j} - p_{i,j+1}}{\Delta y^2}, \end{aligned}$$

et la combinaison linéaire suivante est réalisée pour obtenir la discrétisation du laplacien en 2-D :

$$\begin{aligned} (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} &= \theta_x (-\Delta_h^H p)_{i,j+1} + (1 - 2\theta_x) (-\Delta_h^H p)_{i,j} + \theta_x (-\Delta_h^H p)_{i,j-1} \\ &\quad + \theta_y (-\Delta_h^V p)_{i+1,j} + (1 - 2\theta_y) (-\Delta_h^V p)_{i,j} + \theta_y (-\Delta_h^V p)_{i-1,j}. \end{aligned}$$

Ce schéma 9P2s comprend deux paramètres  $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ , soit un par direction, contrairement à un unique paramètre pour le schéma précédent. Cette discrétisation peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} &= -\alpha p_{i-1,j+1} - \beta_V p_{i,j+1} - \alpha p_{i+1,j+1} \\ &\quad - \beta_H p_{i-1,j} + (2\beta_H + 2\beta_V - 4\alpha) p_{i,j} - \beta_H p_{i+1,j} \\ &\quad - \alpha p_{i-1,j-1} - \beta_V p_{i,j-1} - \alpha p_{i+1,j-1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec

$$\alpha = \frac{\theta_x}{\Delta x^2} + \frac{\theta_y}{\Delta y^2}, \quad \beta_H = \frac{1 - 2\theta_x}{\Delta x^2} - \frac{2\theta_y}{\Delta y^2}, \quad \text{et} \quad \beta_V = \frac{1 - 2\theta_y}{\Delta y^2} - \frac{2\theta_x}{\Delta x^2}.$$

**Proposition 5.1.** *Sous la condition*

$$\theta_x \frac{\Delta y}{\Delta x} + \theta_y \frac{\Delta x}{\Delta y} < \frac{1}{2} \min \left( \frac{\Delta x}{\Delta y}, \frac{\Delta y}{\Delta x} \right),$$

le laplacien discret (5.1) possède la structure monotone suivante :

- l'élément diagonal  $2\beta_H + 2\beta_V + 4\alpha$  est strictement positif ;
- les éléments extra-diagonaux  $-\alpha$ ,  $-\beta_V$ ,  $-\beta_H$  sont négatifs ;
- la somme des éléments d'une ligne est nulle.

En multipliant l'équation (5.1) par le volume de la maille  $\Delta x \Delta y$ , la discrétisation peut se formuler comme suit

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta y (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} &= \theta_x \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i,j+1} - p_{i+1,j+1}) - \theta_x \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i-1,j+1} - p_{i,j+1}) \\
 &\quad + \theta_y \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i+1,j} - p_{i+1,j+1}) - \theta_y \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i+1,j-1} - p_{i+1,j}) \\
 &\quad + (1 - 2\theta_x) \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i,j} - p_{i+1,j}) - (1 - 2\theta_x) \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i-1,j} - p_{i,j}) \\
 &\quad + (1 - 2\theta_y) \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i,j} - p_{i,j+1}) - (1 - 2\theta_y) \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i,j-1} - p_{i,j}) \\
 &\quad + \theta_x \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i,j-1} - p_{i+1,j-1}) - \theta_x \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i-1,j-1} - p_{i,j-1}) \\
 &\quad + \theta_y \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i-1,j} - p_{i-1,j+1}) - \theta_y \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j}). \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Cette équation fait apparaître des termes qui correspondent à des flux au sens volumes finis. Ceux-ci sont

$$\begin{aligned}
 F_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i,j} - p_{i+1,j}), & F_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i-1,j} - p_{i,j}), \\
 F_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i,j} - p_{i,j+1}), & F_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i,j-1} - p_{i,j}), \\
 F_{i+\frac{1}{2},j+1} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i,j+1} - p_{i+1,j+1}), & F_{i-\frac{1}{2},j+1} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i-1,j+1} - p_{i,j+1}), \\
 F_{i+1,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i+1,j} - p_{i+1,j+1}), & F_{i+1,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i+1,j-1} - p_{i+1,j}), \\
 F_{i+\frac{1}{2},j-1} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i,j-1} - p_{i+1,j-1}), & F_{i-\frac{1}{2},j-1} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_{i-1,j-1} - p_{i,j-1}), \\
 F_{i-1,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i-1,j} - p_{i-1,j+1}), & F_{i-1,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j}).
 \end{aligned}$$

Il ne s'agit là que de flux horizontaux et verticaux, les flux diagonaux n'apparaissent pas pour le moment dans cette discrétisation. À l'aide de ces flux, l'équation (5.2) se réécrit alors avec le bilan de flux

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta y (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} &= \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j+1} - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j+1} + \theta_y F_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \theta_y F_{i+1,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + (1 - 2\theta_x) F_{i+\frac{1}{2},j} - (1 - 2\theta_x) F_{i-\frac{1}{2},j} + (1 - 2\theta_y) F_{i,j+\frac{1}{2}} - (1 - 2\theta_y) F_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j-1} - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j-1} + \theta_y F_{i-1,j+\frac{1}{2}} - \theta_y F_{i-1,j-\frac{1}{2}}. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

Cette discrétisation fait intervenir douze flux, représentés sur la figure 5.1. Or, pour la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$  et un schéma à 9 points, seulement huit flux doivent être considérés : deux flux horizontaux, deux flux verticaux et quatre flux diagonaux. Afin de créer ces flux diagonaux, des flux horizontaux et verticaux sont ajoutés et soustraits à l'équation (5.3).

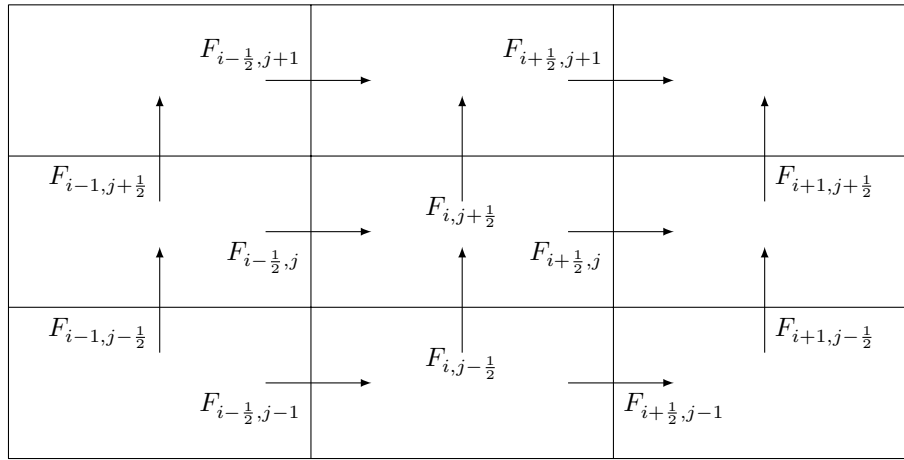


FIGURE 5.1 – Représentation des douze flux de la discrétisation du laplacien.

La modification est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta y (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} &= (1 - 2\theta_x)F_{i+\frac{1}{2},j} - (1 - 2\theta_x)F_{i-\frac{1}{2},j} + (1 - 2\theta_y)F_{i,j+\frac{1}{2}} - (1 - 2\theta_y)F_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j+1} + \theta_y F_{i,j+\frac{1}{2}} - \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j+1} + \theta_y F_{i,j+\frac{1}{2}} - \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \theta_y F_{i+1,j+\frac{1}{2}} + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j} - \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j} \\
 &\quad - \theta_y F_{i+1,j-\frac{1}{2}} + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j} - \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j} \\
 &\quad + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j-1} - \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}} + \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j-1} - \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}} + \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \theta_y F_{i-1,j+\frac{1}{2}} - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j} + \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j} \\
 &\quad - \theta_y F_{i-1,j-\frac{1}{2}} - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j} + \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j}.
 \end{aligned}$$

En réarrangeant ces flux, une somme de huit termes peut être mise en évidence, à savoir

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta y (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} &= (1 - 4\theta_x)F_{i+\frac{1}{2},j} - (1 - 4\theta_x)F_{i-\frac{1}{2},j} + (1 - 4\theta_y)F_{i,j+\frac{1}{2}} - (1 - 4\theta_y)F_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \theta_y F_{i,j+\frac{1}{2}} + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j+1} + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j} + \theta_y F_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad - \left( \theta_y F_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j} + \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j-1} + \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + \left( \theta_y F_{i,j+\frac{1}{2}} - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j+1} - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j} + \theta_y F_{i-1,j+\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad - \left( \theta_y F_{i+1,j-\frac{1}{2}} - \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j} - \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j-1} + \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

La discrétisation du laplacien s'écrit alors en faisant intervenir les flux diagonaux

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta y (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} &= \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j} + \tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\nearrow} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{\nearrow} + \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\nwarrow} - \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{\nwarrow}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j} &= (1 - 4\theta_x)F_{i+\frac{1}{2},j}, & \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j} &= (1 - 4\theta_x)F_{i-\frac{1}{2},j}, \\
 \tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}} &= (1 - 4\theta_y)F_{i,j+\frac{1}{2}}, & \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}} &= (1 - 4\theta_y)F_{i,j-\frac{1}{2}}, \\
 \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\nearrow} &= \theta_y F_{i,j+\frac{1}{2}} + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j+1} + \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j} + \theta_y F_{i+1,j+\frac{1}{2}}, \\
 \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{\nearrow} &= \theta_y F_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j} + \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j-1} + \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}}, \\
 \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\nwarrow} &= \theta_y F_{i,j+\frac{1}{2}} - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j+1} - \theta_x F_{i-\frac{1}{2},j} + \theta_y F_{i-1,j+\frac{1}{2}}, \\
 \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{\nwarrow} &= \theta_y F_{i+1,j-\frac{1}{2}} - \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j} - \theta_x F_{i+\frac{1}{2},j-1} + \theta_y F_{i,j-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Les flux diagonaux sont désignés par les exposants  $\nearrow$  pour les diagonales positives (allant du bas à gauche vers le haut à droite) et par un exposant  $\nwarrow$  pour les diagonales négatives (allant du bas à droite vers le haut à gauche). Un flux diagonal est composé de deux flux horizontaux et de deux flux verticaux, correspondant en quelque sorte aux chemins possibles entre la maille centrale et la maille diagonale, voir figure 5.2.

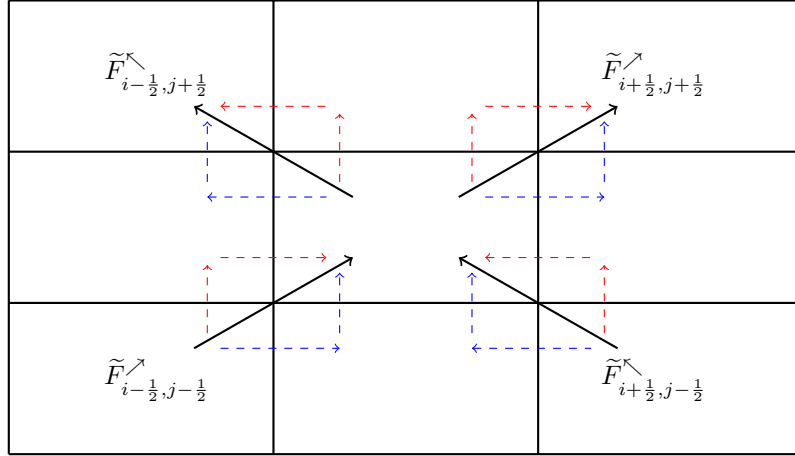


FIGURE 5.2 – Contributions pour les flux diagonaux.

### Résolution de l'équation en pression

La généralisation de ce schéma au système diphasique (2.4) est aisée puisqu'il suffit de reporter les flux  $F$  utilisés par le schéma 5P et définis en (2.51a)- (2.51b) dans (5.4). Ils englobent donc les facteurs  $\kappa\lambda$ . En ajoutant les termes sources, la discrétisation de l'équation en pression (2.4b) est alors

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j} + \tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}} \\
 + \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\nearrow} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{\nearrow} + \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\nwarrow} - \tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{\nwarrow} = \Delta x \Delta y q_{i,j}^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Cette discrétisation est valable pour les arêtes intérieures au maillage. Concernant les arêtes aux bords, les flux sont quelque peu modifiés de sorte à prendre en compte les

conditions aux limites (2.9). Comme pour le schéma 9P1s, les flux diagonaux aux bords sont pris nuls ce qui implique une modification pour les flux directs associés. Pour une arête sur le bord gauche, les flux  $\tilde{F}_{1/2,j+1/2}^{\nwarrow}$  et  $\tilde{F}_{1/2,j-1/2}^{\nearrow}$  sont annulés et le flux  $\tilde{F}_{1/2,j}$  est identique à celui du schéma 5P. De plus, il vient

$$\tilde{F}_{1,j+1/2} = (1 - 2\theta_y)F_{1,j+1/2}, \quad \tilde{F}_{1,j-1/2} = (1 - 2\theta_y)F_{1,j-1/2} \quad (5.6)$$

où  $F_{1,j+1/2}$  et  $F_{1,j-1/2}$  sont donnés (3.7). Il en va de même pour les flux horizontaux sur le bord haut. Concernant les bords verticaux, la discrétisation sur le bord bas annule les flux  $\tilde{F}_{i-1,1/2}^{\nearrow}$  et  $\tilde{F}_{i+1,1/2}^{\nwarrow}$  et deux flux en sont impactés, à savoir

$$\tilde{F}_{i+1/2,1} = (1 - 2\theta_x)F_{i+1/2,1}, \quad \tilde{F}_{i-1/2,1} = (1 - 2\theta_x)F_{i-1/2,j}. \quad (5.7)$$

Le flux  $\tilde{F}_{i,1/2}$  est identique à celui du schéma 5P. Les flux verticaux sur le bord haut se discrétisent de la même manière.

La discrétisation (5.5) avec les flux (5.4), (5.6), (5.7) aboutit à la résolution d'un système linéaire de la forme (2.56).

### Résolution de l'équation en saturation

Une fois les pressions calculées, les huit flux  $\tilde{F}$  peuvent être évalués et utilisés dans l'équation en saturation (2.4c), discrétisée de manière identique au schéma 9P1s par

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} &+ (f(s)\tilde{F})_{i+1/2,j} - (f(s)\tilde{F})_{i-1/2,j} \\ &+ (f(s)\tilde{F})_{i,j+1/2} - (f(s)\tilde{F})_{i,j-1/2} \\ &+ (f(s)\tilde{F})_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow} - (f(s)\tilde{F})_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow} \\ &+ (f(s)\tilde{F})_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow} - (f(s)\tilde{F})_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow} = \Delta x \Delta y q_{w;i,j}^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

avec

$$(f(s)\tilde{F})_{i+1/2,j} = f(s_{i,j}^n) [\tilde{F}_{i+1/2,j}]^+ + f(s_{i+1,j}^n) [\tilde{F}_{i+1/2,j}]^-, \quad (5.9a)$$

$$(f(s)\tilde{F})_{i,j+1/2} = f(s_{i,j}^n) [\tilde{F}_{i,j+1/2}]^+ + f(s_{i,j+1}^n) [\tilde{F}_{i,j+1/2}]^-, \quad (5.9b)$$

$$(f(s)\tilde{F})_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow} = f(s_{i,j}^n) [\tilde{F}_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow}]^+ + f(s_{i+1,j+1}^n) [\tilde{F}_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow}]^-, \quad (5.9c)$$

$$(f(s)\tilde{F})_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow} = f(s_{i,j}^n) [\tilde{F}_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow}]^+ + f(s_{i-1,j+1}^n) [\tilde{F}_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow}]^-, \quad (5.9d)$$

où

$$[\tilde{F}]^+ = \max(0, \tilde{F}), \quad [\tilde{F}]^- = \min(0, \tilde{F}).$$

La prise en compte des bords ainsi que les termes sources s'effectue de manière identique à celle du schéma 9P1s.

Étant explicite, la discrétisation de l'équation en saturation nécessite le calcul d'une condition CFL [32] de sorte que le pas de temps  $\Delta t^n$  ne soit pas pris trop grand et alors garantir la stabilité du schéma.

La quantité  $\langle \sigma F \rangle_{i,j}$  donnée en (2.62), est adaptée ici pour le schéma 9P2s. En reprenant les définitions (2.61), celle-ci est écrite en chaque maille  $\mathcal{M}_{i,j}$  par

$$\begin{aligned} \langle \sigma \tilde{F} \rangle_{i,j} &= \sigma_{i-1/2,j} [\tilde{F}_{i-1/2,j}]^+ - \sigma_{i+1/2,j} [\tilde{F}_{i+1/2,j}]^- \\ &\quad + \sigma_{i,j-1/2} [\tilde{F}_{i,j-1/2}]^+ - \sigma_{i,j+1/2} [\tilde{F}_{i,j+1/2}]^- \\ &\quad + \sigma_{i-1/2,j-1/2} [\tilde{F}_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow}]^+ - \sigma_{i+1/2,j+1/2} [\tilde{F}_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow}]^- \\ &\quad + \sigma_{i+1/2,j-1/2} [\tilde{F}_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow}]^+ - \sigma_{i-1/2,j+1/2} [\tilde{F}_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow}]^-. \end{aligned}$$

Cette quantité est positive et correspond aux flux entrants dans la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$ .

**Proposition 5.2.** *Sous la condition*

$$\frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x \\ 1 \leq j \leq N_y}} \langle \sigma \tilde{F} \rangle_{i,j} \leq 1 \quad (5.10)$$

et en l'absence de termes sources ( $q^{n+1} = q_w^{n+1} = 0$ ), le schéma (5.8), (2.60) satisfait le principe du maximum, c'est-à-dire que  $s_{i,j}^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $s_{i,j}^n$  et des saturations des huit mailles voisines au temps  $n$ .

DÉMONSTRATION. La preuve est semblable à celle réalisée pour le schéma 9P1s.  $\square$

## 5.2 Analyse de l'erreur en pression

Le schéma 9P2s va être étudié dans cette partie grâce à une analyse de Fourier. Les équations sont discrétisées de manière similaire à celle du schéma 9P1s du chapitre précédent, le raisonnement est alors semblable mais s'effectuant sur deux paramètres plutôt que sur un seul. On commence par se focaliser exclusivement sur l'équation  $-\Delta p^{n+1} = q^{n+1}$  pour voir si deux paramètres y apportent un avantage par rapport à ce qui a été vu en §3.2.

### 5.2.1 Distribution angulaire

Comme pour le schéma 9P1s, l'analyse de Fourier va s'effectuer sur l'approximation du laplacien. Il s'agit ici de la même analyse que celle §3.2, utilisant cette fois deux paramètres et non un. Pour rappel, la discrétisation 2-D avec le schéma 9P2s est

$$\begin{aligned} (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} &= \theta_x (-\Delta_h^H p)_{i,j+1} + (1 - 2\theta_x) (-\Delta_h^H p)_{i,j} + \theta_x (-\Delta_h^H p)_{i,j-1} \\ &\quad + \theta_y (-\Delta_h^V p)_{i+1,j} + (1 - 2\theta_y) (-\Delta_h^V p)_{i,j} + \theta_y (-\Delta_h^V p)_{i-1,j}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Le vecteur d'onde utilisé est noté

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

de sorte à écrire les pressions comme en (3.12). Ainsi, en faisant passer une exponentielle, il vient

$$(-\Delta p)_{i,j} = \mathcal{F}[-\Delta](\mathbf{k}) p_{i,j} \quad \text{et} \quad (-\Delta_h^\theta p)_{i,j} = \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) p_{i,j}$$

où  $\mathcal{F}[-\Delta]$  désigne le symbole exact du laplacien et  $\mathcal{F}[-\Delta_h^\theta]$  le symbole approché. L'erreur entre les deux symboles est définie par

$$\mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) - \mathcal{F}[-\Delta](\mathbf{k}).$$

De plus, on introduit  $S = \sin^2 \varphi$ .

**Théorème 5.1.** *Pour  $\Delta x$  et  $\Delta y$  suffisamment petits, l'erreur du schéma 9P2s sur le laplacien est*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k}) = & -|\mathbf{k}|^4 \left[ S^2 \left\{ \frac{1}{12}(\Delta x^2 + \Delta y^2) - (\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2) \right\} \right. \\ & \left. + S \left\{ -\frac{1}{6} \Delta x^2 + (\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2) \right\} + \frac{\Delta x^2}{12} \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \end{aligned} \quad (5.13)$$

DÉMONSTRATION. Toutes les pressions  $p_{i\pm 1, j\pm 1}$  sont écrites sous forme d'exponentielle comme dans (3.12). Dans chacune des formules, la pression au centre de la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$  apparaît. Après calculs à partir de (5.11), ce symbole approché vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) = & \frac{-e^{-Ik\Delta x} + 2 - e^{Ik\Delta x}}{\Delta x^2} (\theta_x e^{I\ell\Delta y} + (1 - 2\theta_x) + \theta_x e^{-I\ell\Delta y}) \\ & + \frac{-e^{-I\ell\Delta y} + 2 - e^{I\ell\Delta y}}{\Delta y^2} (\theta_y e^{Ik\Delta x} + (1 - 2\theta_y) + \theta_y e^{-Ik\Delta x}). \end{aligned}$$

Les formules de trigonométrie (3.15) sont utiles afin de réduire chaque partie de l'expression pour aboutir à

$$\mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) = \frac{4 \sin^2(\frac{k\Delta x}{2})}{\Delta x^2} \left( 1 - 4\theta_x \sin^2\left(\frac{\ell\Delta y}{2}\right) \right) + \frac{4 \sin^2(\frac{\ell\Delta y}{2})}{\Delta y^2} \left( 1 - 4\theta_y \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \right).$$

Ce symbole approché peut s'écrire autrement grâce notamment aux développements limités du  $\sin^2$  détaillés en (3.16). Alors,

$$\mathcal{F}[-\Delta_h^\theta](\mathbf{k}) = k^2 + \ell^2 - \left[ \frac{1}{12}(k^4 \Delta x^2 + \ell^4 \Delta y^2) + k^2 \ell^2 (\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2) \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4).$$

Le symbole exact du laplacien étant  $k^2 + \ell^2$ , l'erreur d'approximation sur le laplacien est définie par la différence entre ces deux dernières quantités

$$\mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\mathbf{k}) = - \left[ \frac{1}{12}(k^4 \Delta x^2 + \ell^4 \Delta y^2) + k^2 \ell^2 (\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2) \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \quad (5.14)$$

En utilisant (5.12), l'erreur (5.14) devient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^\theta(\varphi) = & -|\mathbf{k}|^4 \left[ \frac{1}{12}(\cos^4 \varphi \Delta x^2 + \sin^4 \varphi \Delta y^2) + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2) \right] \\ & + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4). \end{aligned}$$

Le changement de variable  $S = \sin^2 \varphi$  est également utilisé, il vient alors  $\cos^2 \varphi = 1 - S$ . En réarrangeant selon les puissances de  $S$ , le résultat (5.13) est obtenu.  $\square$



À une erreur d'ordre 4 près, l'erreur  $\mathcal{E}_{\Delta x, \Delta y}^{\theta}(\mathbf{k})$  est le produit de  $|\mathbf{k}|^4$  et d'un facteur ne dépendant que de  $S = \sin^2 \varphi$ . Ce facteur, noté

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}^{\theta}(S) = S^2 & \left\{ \frac{1}{12}(\Delta x^2 + \Delta y^2) - (\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2) \right\} \\ & + S \left\{ -\frac{1}{6} \Delta x^2 + (\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2) \right\} + \frac{\Delta x^2}{12} \end{aligned}$$

est désormais appelé *erreur angulaire* en pression du schéma 9P2s.

REMARQUE 5.1. Dans le cas où  $\theta_x = \theta_y = \theta$ , cette erreur (5.13) est égale à l'expression (3.20) du schéma 9P1s.  $\square$

### 5.2.2 Minimisation de l'anisotropie

La dépendance de  $\tilde{\mathcal{E}}^{\theta}(S)$  par rapport à  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$  ne se fait qu'à travers la combinaison  $\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2$ . Cette erreur est représentée pour différents couples  $(\theta_x, \theta_y)$  sur la figure 5.3. Comme pour le schéma 9P1s, l'erreur la moins anisotrope

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\star}(S) = \frac{1}{12} [(\Delta y^2 - \Delta x^2)S + \Delta x^2]$$

est atteinte lorsque l'erreur (5.13) est une droite, soit encore pour

$$\frac{1}{12}(\Delta x^2 + \Delta y^2) - (\theta_x \Delta y^2 + \theta_y \Delta x^2) = 0.$$

Cette condition définit le couple  $(\theta_x, \theta_y)$  en fonction d'un paramètre libre  $\vartheta = \theta_x - \theta_y$  par

$$\theta_x^{\vartheta} = \frac{1}{12} + \vartheta \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{et} \quad \theta_y^{\vartheta} = \frac{1}{12} - \vartheta \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

REMARQUE 5.2. Si  $\vartheta$  est pris nul, alors les deux paramètres  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont identiques et cette condition donne la valeur optimale  $\theta = \frac{1}{12}$  trouvée pour le schéma 9P1s.  $\square$

## 5.3 Analyse de l'erreur en saturation

À ce stade, il apparaît que l'introduction d'un deuxième paramètre n'améliore en rien le résultat du problème de minimisation de l'anisotropie de la pression. Nous allons à présent voir qu'il n'en est pas de même pour la minimisation de l'erreur d'anisotropie en saturation, qui est la grandeur pertinente à analyser.

### 5.3.1 Distribution angulaire

Comme en §3.3, le flux fractionnaire est supposé linéaire ( $f(s) = s$ ) et la vitesse d'écoulement est considérée comme uniforme  $\mathbf{u} = {}^t(a, b)$  avec  $a$  et  $b$  positifs. Sans termes sources et en choisissant des propriétés pétrophysiques simples ( $\phi = 1$  et  $\kappa\lambda = 1$ ), l'équation sur laquelle l'analyse va être réalisée est alors identique à celle utilisée §4.2 à savoir

$$\partial_t s + a \partial_x s + b \partial_y s = 0.$$

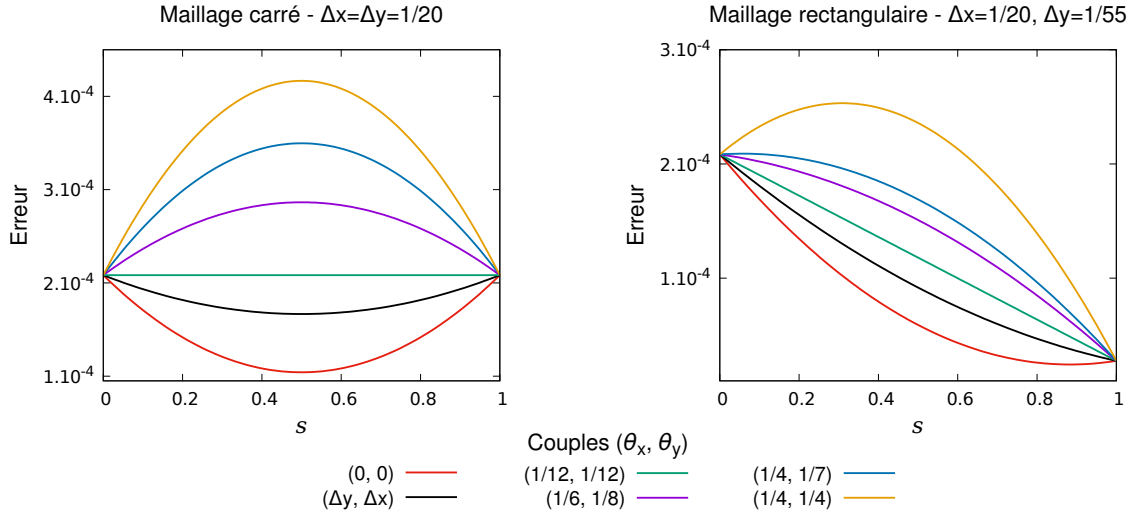


FIGURE 5.3 – Polynôme d'erreur (5.13) pour différents couples  $(\theta_x, \theta_y)$  - Mailles carrées (à gauche) et rectangulaires (à droite).

Soit  $\mathbf{k} = {}^t(k, \ell)$  le vecteur d'onde utilisé pour l'analyse de Fourier. L'erreur d'approximation sur l'équation en saturation (2.4c) est définie par

$$\mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla])(\mathbf{k}) - \mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla]_h^\theta)(\mathbf{k})$$

où  $\mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla])(\mathbf{k})$  correspond au symbole exact de l'opérateur spatial et  $\mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla]_h^\theta)(\mathbf{k})$  correspond au symbole approché.

**Théorème 5.2.** *Pour  $\Delta x$  et  $\Delta y$  suffisamment petits, l'erreur d'approximation du schéma 9P2s en saturation est*

$$\mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \frac{a\Delta x}{2}k^2 + \left[ b(1 - 4\theta_y) + 4a\theta_x \frac{\Delta y}{\Delta x} \right] \frac{\Delta y}{2}\ell^2 + 4\theta_y b\Delta x k\ell + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.15a)$$

si  $a\Delta y\theta_x - b\Delta x\theta_y \geq 0$  et

$$\mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \frac{b\Delta y}{2}\ell^2 + \left[ a(1 - 4\theta_x) + 4b\theta_y \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] \frac{\Delta x}{2}k^2 + 4\theta_x a\Delta y k\ell + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.15b)$$

si  $a\Delta y\theta_x - b\Delta x\theta_y \leq 0$ .

DÉMONSTRATION. Les flux calculés grâce à l'équation en pression s'écrivent à l'aide des composantes de la vitesse

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+1/2,j} &= \tilde{F}_{i-1/2,j} = (1 - 4\theta_x)a\Delta y, \\ \tilde{F}_{i,j+1/2} &= \tilde{F}_{i,j-1/2} = (1 - 4\theta_y)b\Delta x, \\ \tilde{F}_{i+1/2,j+1/2}^{\nearrow} &= \tilde{F}_{i-1/2,j-1/2}^{\nearrow} = 2\theta_x a\Delta y + 2\theta_y b\Delta x, \\ \tilde{F}_{i-1/2,j+1/2}^{\nwarrow} &= \tilde{F}_{i+1/2,j-1/2}^{\nwarrow} = -2\theta_x a\Delta y + 2\theta_y b\Delta x. \end{aligned}$$

Pour connaître le signe des décentrement des saturations, il faut supposer  $0 \leq \theta_x, \theta_y \leq 1/4$  pour les flux horizontaux et verticaux. De plus, il faut distinguer les cas où  $-\theta_x a \Delta y + \theta_y b \Delta x \leq 0$  et  $-\theta_x a \Delta y + \theta_y b \Delta x \geq 0$  afin de déterminer les décentrement des saturations selon le signe des flux diagonaux  $\tilde{F}^{\nwarrow}$ . Le premier cas, qui revient à  $b/a \leq \theta_x \Delta y / \theta_y \Delta x$ , est d'abord considéré ici. Les décentrement des saturations sont alors entièrement connus et l'équation en saturation discrétisée par le schéma 9P2s (5.8) devient

$$\begin{aligned} s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x \Delta y} & \left( (1 - 4\theta_x) a \Delta y (s_{i,j} - s_{i-1,j}) + (1 - 4\theta_y) b \Delta x (s_{i,j} - s_{i,j-1}) \right. \\ & + (2\theta_x a \Delta y + 2\theta_y b \Delta x) (s_{i,j} - s_{i-1,j-1}) \\ & \left. + (2\theta_x a \Delta y - 2\theta_y b \Delta x) (s_{i,j} - s_{i-1,j+1}) \right). \end{aligned}$$

Le symbole de l'équation est déterminé sur la partie spatiale de cette équation, préalablement divisée par le volume d'une maille  $\Delta x \Delta y$ . En s'aidant des transformées inverses de Fourier (3.12), celui-ci s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla]_h^\theta(\mathbf{k})) &= (1 - 4\theta_x) \frac{a}{\Delta x} (1 - e^{-Ik\Delta x}) + (1 - 4\theta_y) \frac{b}{\Delta y} (1 - e^{-I\ell\Delta y}) \\ &+ 2 \left( \theta_x \frac{a}{\Delta x} + \theta_y \frac{b}{\Delta y} \right) (1 - e^{-Ik\Delta x - I\ell\Delta y}) \\ &+ 2 \left( \theta_x \frac{a}{\Delta x} - \theta_y \frac{b}{\Delta y} \right) (1 - e^{-Ik\Delta x + I\ell\Delta y}). \end{aligned}$$

Avec  $|k|\Delta x \ll 1$  et  $|\ell|\Delta y \ll 1$ , les formules de Taylor donnant

$$\begin{aligned} 1 - e^{-Ik\Delta x} &= Ik\Delta x + \frac{k^2 \Delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3), \\ 1 - e^{-I\ell\Delta y} &= I\ell\Delta y + \frac{\ell^2 \Delta y^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta y^3) \end{aligned}$$

permettent de poursuivre les calculs du symbole approché. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla]_h^\theta(\mathbf{k})) &= (1 - 4\theta_x) \frac{a}{\Delta x} \left[ Ik\Delta x + \frac{k^2 \Delta x^2}{2} \right] + (1 - 4\theta_y) \frac{b}{\Delta y} \left[ I\ell\Delta y + \frac{\ell^2 \Delta y^2}{2} \right] \\ &+ 2 \left( \theta_x \frac{a}{\Delta x} + \theta_y \frac{b}{\Delta y} \right) \left[ I(k\Delta x + \ell\Delta y) + \frac{(k\Delta x + \ell\Delta y)^2}{2} \right] \\ &+ 2 \left( \theta_x \frac{a}{\Delta x} - \theta_y \frac{b}{\Delta y} \right) \left[ I(k\Delta x - \ell\Delta y) + \frac{(k\Delta x - \ell\Delta y)^2}{2} \right] \\ &+ \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2), \end{aligned}$$

qui après simplifications devient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla]_h^\theta(\mathbf{k})) &= I(ak + b\ell) + \frac{a\Delta x}{2} k^2 + \left[ b(1 - 4\theta_y) + 4a\theta_x \frac{\Delta y}{\Delta x} \right] \frac{\Delta y}{2} \ell^2 + 4\theta_y b \Delta x k \ell \\ &+ \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2). \end{aligned}$$

Comme le symbole exact de l'équation en saturation est  $I(ak + b\ell)$ , l'erreur en saturation est retrouvée. Un raisonnement identique permet de conclure quant aux résultats pour le cas où  $a\Delta y\theta_x - b\Delta x\theta_y \leq 0$ .  $\square$

Les vecteurs d'onde et de vitesse sont passés en coordonnées polaires via

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

avec  $\tan \gamma \leq \theta_x \Delta y / \theta_y \Delta x$  pour respecter le critère  $b/a \leq \theta_x \Delta y / \theta_y \Delta x$ . L'angle formé entre le vecteur d'onde et le vecteur vitesse est noté  $\Omega = \varphi - \gamma$ .

**Théorème 5.3.** Avec  $\Delta x$  et  $\Delta y$  suffisamment petits, l'erreur avec le schéma 9P2s sur l'équation en saturation devient

$$\mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \Omega, \sin \Omega \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}^\theta(\gamma) & \tilde{B}^\theta(\gamma) \\ \tilde{B}^\theta(\gamma) & \tilde{C}^\theta(\gamma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2),$$

où

$$\tilde{A}^\theta(\gamma) = \frac{\Delta x}{2} \cos^3 \gamma + 2 \cos \gamma \sin^2 \gamma \left[ 2\theta_y \Delta x + \theta_x \frac{\Delta y^2}{\Delta x} \right] + \frac{\Delta y}{2} (1 - 4\theta_y) \sin^3 \gamma, \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^\theta(\gamma) &= \frac{\Delta y}{2} (1 - 4\theta_y) \cos \gamma \sin^2 \gamma - 2\theta_y \Delta x \sin^3 \gamma \\ &\quad + \cos^2 \gamma \sin \gamma \left[ 2\theta_y \Delta x + 2\theta_x \frac{\Delta y^2}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \right], \end{aligned} \quad (5.17b)$$

$$\tilde{C}^\theta(\gamma) = 2\theta_x \frac{\Delta y^2}{\Delta x} \cos^3 \gamma + \frac{\Delta y}{2} (1 - 4\theta_y) \cos^2 \gamma \sin \gamma + \cos \gamma \sin^2 \gamma \left[ \frac{\Delta x}{2} - 4\theta_y \Delta x \right] \quad (5.17c)$$

si  $b/a \leq \theta_x \Delta y / \theta_y \Delta x$  et

$$\tilde{A}^\theta(\gamma) = \frac{\Delta x}{2} (1 - 4\theta_x) \cos^3 \gamma + 2 \cos^2 \gamma \sin \gamma \left[ 2\theta_x \Delta y + \theta_y \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right] + \frac{\Delta y}{2} \sin^3 \gamma, \quad (5.17d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^\theta(\gamma) &= -\frac{\Delta x}{2} (1 - 4\theta_x) \cos^2 \gamma \sin \gamma + 2\theta_x \Delta y \cos^3 \gamma \\ &\quad + \cos^2 \gamma \sin \gamma \left[ -2\theta_x \Delta y - 2\theta_y \frac{\Delta x^2}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{2} \right], \end{aligned} \quad (5.17e)$$

$$\tilde{C}^\theta(\gamma) = 2\theta_y \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \sin^3 \gamma + \frac{\Delta x}{2} (1 - 4\theta_x) \cos \gamma \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \sin \gamma \left[ \frac{\Delta y}{2} - 4\theta_x \Delta y \right] \quad (5.17f)$$

si  $b/a \geq \theta_x \Delta y / \theta_y \Delta x$ .

DÉMONSTRATION. En injectant (5.16) dans (5.15), l'erreur sur le symbole approché peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\mathcal{E}^\theta(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \varphi, \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A^\theta(\gamma) & B^\theta(\gamma) \\ B^\theta(\gamma) & C^\theta(\gamma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

en posant

$$\begin{aligned} A^\theta(\gamma) &= \frac{\Delta x}{2} \cos \gamma, \\ B^\theta(\gamma) &= 2\theta_y \Delta x \sin \gamma, \\ C^\theta(\gamma) &= \frac{\Delta y}{2} \left[ (1 - 4\theta_y) \sin \gamma + 4\theta_x \frac{\Delta y}{\Delta x} \cos \gamma \right]. \end{aligned}$$

Grâce aux formules de passage d'un angle à l'autre (4.22) et (4.23), le résultat souhaité est trouvé.  $\square$

Les trois erreurs (5.17), appelées respectivement erreur longitudinale, erreur en terme croisé et erreur transverse, sont représentées sur la figure 5.4 en fonction de l'angle  $S = \sin^2 \gamma$  et pour différents couples  $(\theta_x, \theta_y)$ . La courbe rouge représente les erreurs pour le schéma 5P. Les autres courbes correspondent à des couples de paramètres pris sans justification. Le comportement de chacune de ces erreurs est semblable à celui des schémas précédents, constaté sur le schéma MD1f figure 4.5 et sur le schéma 9P1s figure 3.3.

Comme en §3.3.2, la quantité  $\tilde{A}^\theta$  vue comme une fonction de  $S = \sin^2 \gamma$  est appelée *erreur angulaire* en saturation du schéma 9P2s. Soit  $S^* = \sin^2 \gamma^*$  le point de transition correspondant au changement de signe de  $-a\theta_x \Delta y + b\theta_y \Delta x$ . Il vaut

$$S^* = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} = \frac{z^2 \theta_x^2}{z^2 \theta_x^2 + \theta_y^2}. \quad (5.18)$$

Contrairement, au schéma 9P1s, ce point de transition dépend des paramètres  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . En variable  $S$ , les valeurs de  $\tilde{A}$  sont alors, si  $S \leq S^*$ ,

$$\tilde{A}^\theta(S) = \frac{\Delta x}{2}(1 - S)^{3/2} + 2(1 - S)^{1/2}S \left[ 2\theta_y \Delta x + \theta_x \frac{\Delta y^2}{\Delta x} \right] + \frac{\Delta y}{2}(1 - 4\theta_y)S^{3/2}$$

et, si  $S \geq S^*$ ,

$$\tilde{A}^\theta(S) = \frac{\Delta x}{2}(1 - 4\theta_x)(1 - S)^{3/2} + 2(1 - S)S^{1/2} \left[ 2\theta_x \Delta y + \theta_y \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right] + \frac{\Delta y}{2}S^{3/2}.$$

### 5.3.2 Minimisation de l'anisotropie

La référence la moins anisotrope pour l'erreur longitudinale est toujours la droite

$$\tilde{A}^*(S) = \frac{\Delta x}{2}(1 - S) + \frac{\Delta y}{2}S, \quad (5.19)$$

pour les mêmes raisons qu'en §3.3.2. La minimisation peut se faire de manière exacte, à savoir

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \int_0^1 |\tilde{A}^\theta(S) - \tilde{A}^*(S)|^2 dS$$

ou de manière approchée, en demandant l'alignement du point de transition ( $S^*, \tilde{A}^\theta(S^*)$ ) sur la droite idéale. Cela revient à imposer

$$\tilde{A}^{\theta^b}(S^*) = \tilde{A}^*(S^*). \quad (5.20)$$

La différence essentielle avec le Chapitre 3 est que cette fois,  $S^*$  dépend aussi de  $\theta^b$  et sa position influe sur la forme de la courbe  $\tilde{A}^\theta(S)$ . La position « idéale » du point de raccordement se situe en  $S = 1/2$ , valeur pour laquelle la courbe d'erreur longitudinale sera autant en dessous qu'au dessus de la courbe idéale (5.19). Le problème de sous-optimalité à résoudre concernant l'erreur longitudinale est alors

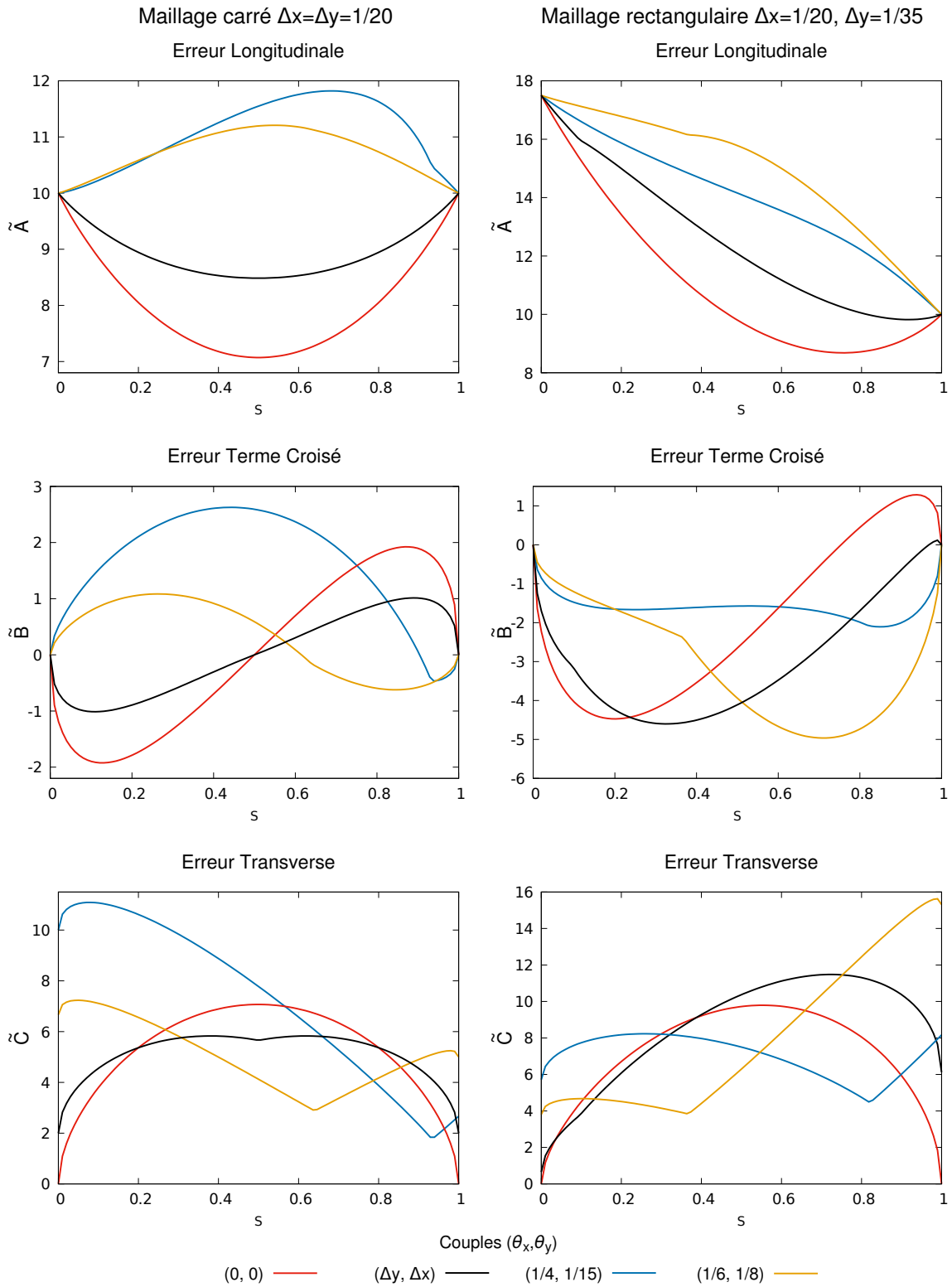


FIGURE 5.4 – Erreurs longitudinales, termes croisés et transverses pour des maillages carrés et rectangulaires selon différents couples  $(\theta_x, \theta_y)$ .

Trouver un couple  $(\theta_x^b, \theta_y^b)$  tel que  $S^*$  soit proche de  $1/2$  et tel que  $\tilde{A}^{\theta^b}(S^*) = \tilde{A}^*(S^*)$ .

La résolution de ce problème se fait en deux temps. Dans un premier temps, le résultat ci-après permet d'exprimer  $\theta^b$  en fonction de  $z = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  et d'un paramètre libre  $\omega$  représentant  $\omega = z\theta_x/\theta_y$ .

**Théorème 5.4.** *Si  $\omega = z\frac{\theta_x^b}{\theta_y^b}$  est fixé, alors la solution au problème de minimisation (5.20) est*

$$\theta_x^b(z, \omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}(z\omega^2 + 1) - (1 + z\omega^3)}{8z\omega}, \quad (5.21a)$$

$$\theta_y^b(z, \omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}(z\omega^2 + 1) - (1 + z\omega^3)}{8\omega^2}, \quad (5.21b)$$

où  $z = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

DÉMONSTRATION. Au point  $S^*$ , on a  $\sin^2 \gamma^* = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}$  et  $\cos^2 \gamma^* = \frac{1}{1 + \omega^2}$ . Ainsi, la droite idéale (5.19) prend la valeur

$$\tilde{A}^*(S^*) = \frac{\Delta x}{2(1 + \omega^2)} + \frac{\Delta y \omega^2}{2(1 + \omega^2)}.$$

L'erreur longitudinale (5.17a) évaluée au point de transition est

$$\tilde{A}^{\theta}(S^*) = \frac{\Delta x}{2} \frac{1}{(1 + \omega^2)^{3/2}} + 2 \left( 2\theta_y \Delta x + \theta_x \frac{\Delta y^2}{\Delta x} \right) \frac{\omega^2}{(1 + \omega^2)^{3/2}} + \frac{\Delta y}{2} (1 - 4\theta_y) \frac{\omega^3}{(1 + \omega^2)^{3/2}}.$$

Ces deux dernières expressions doivent être égales, c'est pourquoi il vient, après simplification par le dénominateur  $2(1 + \omega^2)^{3/2}$ ,

$$\sqrt{1 + \omega^2}(\Delta x + \Delta y \omega^2) = \Delta x + 4 \left( 2\theta_y \Delta x + \theta_x \frac{\Delta y^2}{\Delta x} \right) \omega^2 + \Delta y (1 - 4\theta_y) \omega^3.$$

L'expression de  $\omega$  permet d'écrire  $\theta_x$  en fonction de  $\theta_y$  par

$$\theta_x = \frac{\omega \theta_y}{z}. \quad (5.22)$$

En divisant par  $\Delta x$  afin de faire apparaître  $z$  et en remplaçant  $\theta_x$  par (5.22), cela donne

$$\sqrt{1 + \omega^2}(1 + z\omega^2) = 1 + (8\theta_y + 4\omega z\theta_y) + z\omega^3(1 - 4\theta_y)\omega^2.$$

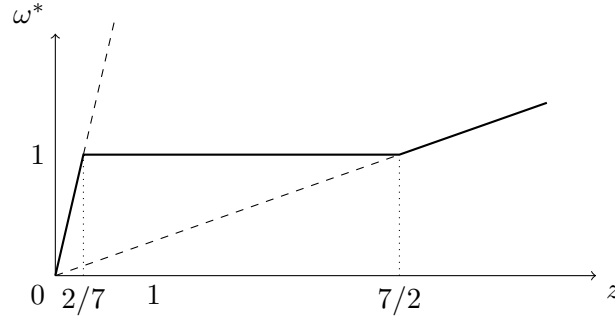
On en tire que

$$\theta_y^b(z, \omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}(z\omega^2 + 1) - (1 + z\omega^3)}{8\omega^2},$$

et en combinant avec (5.22), il vient

$$\theta_x^b(z, \omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}(z\omega^2 + 1) - (1 + z\omega^3)}{8z\omega}.$$

□


 FIGURE 5.5 – Tracé de la fonction  $\omega^*$ .

Ces fonctions (5.21) sont fortement non linéaires et possèdent les relations de symétrie suivantes

$$\theta_x^b(1/z, 1/\omega) = \theta_y^b(z, \omega) \quad \text{et} \quad \theta_y^b(1/z, 1/\omega) = \theta_x^b(z, \omega).$$

Dans un second temps, il convient de préciser la dépendance de  $\omega$  par rapport à  $z$ . On veut naturellement que  $\omega$  soit proche de 1, pour que  $S^*$  soit proche de  $1/2$  (voir formule (5.18)). Néanmoins, cela n'est pas possible car il faut aussi s'assurer que  $\theta_x$  et  $\theta_y$  soient compris entre 0 et  $1/4$ . Le compromis proposé est le suivant.

**Proposition 5.3.** *Le couple de paramètres sous-optimal défini en (5.21) respecte la condition  $0 \leq \theta_x(z, \omega), \theta_y(z, \omega) \leq 1/4$  pour*

$$\omega^*(z) = \begin{cases} \frac{7z}{2} & \text{si } 0 \leq z \leq 2/7, \\ 1 & \text{si } 2/7 \leq z \leq 7/2, \\ \frac{2z}{7} & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. La positivité n'est pas un problème car  $(1 + z\omega^2)\sqrt{1 + \omega^2} \geq 1 + z\omega^3$  est toujours vérifié. Pour  $\omega = 1$ , il faut  $\frac{1}{1+2\sqrt{2}} \leq z \leq 1 + 2\sqrt{2}$  pour respecter la condition d'infériorité à  $1/4$ . Cependant,  $\theta_x^b$  dépasse  $1/4$  pour une valeur  $\omega > \frac{7}{2}z$ . Ainsi et pour préserver les relations de symétrie, le paramètre  $\omega$  est décrit par la fonction de la proposition 5.3 et tracée sur la figure 5.5.  $\square$

REMARQUE 5.3. Ce couple de paramètres correspond au paramètre sous-optimal du schéma 9P1s lorsque  $\theta_x = \theta_y$  et pour un maillage carré, à savoir

$$\theta^* = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}.$$

Cette valeur est également celle trouvée par Eymard, Masson et Guichard dans leur article de 2012 [43].  $\square$

Sur la figure 5.6 sont tracées les erreurs longitudinales pour différents rapports de mailles et pour différents couples de paramètres  $\theta$ . Pour les deux premières images, le rapport de mailles reste inférieur à  $7/2$ , la valeur  $\omega$  vaut 1 et les courbes jaune et bleue



sont alors confondues. Lorsque le rapport de mailles est plus grand (à droite sur la figure), la valeur de  $\omega$  ne vaut plus 1 et alors la courbe jaune représentant l'erreur longitudinale avec le couple de paramètres sous-optimaux  $\theta^b$  et avec  $\omega^*$  se dissocie de la courbe bleue où  $\omega = 1$ .

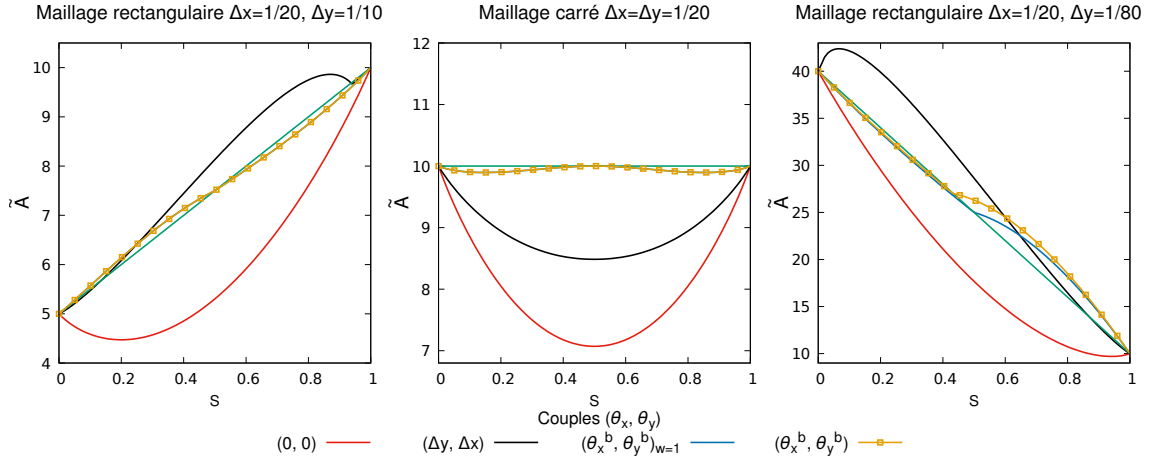


FIGURE 5.6 – Distribution angulaire longitudinale avec plusieurs couples  $(\theta_x, \theta_y)$  utilisés dans le schéma 9P2s.

## 5.4 Résultats numériques

Le schéma 9P2s a été appliqué aux trois cas tests de référence et les résultats obtenus sont présentés dans cette partie. Le premier cas test est celui où la solution analytique au problème (2.69) caractérise un écoulement radial. Le second cas test permet de comparer les résultats sur maillage diagonal et sur maillage parallèle ainsi que d'étudier les instants de percées d'eau au niveau des puits producteurs. Enfin, le dernier cas test montre le comportement de ce schéma face aux instabilités du système.

### 5.4.1 Cas radial

Sur ce cas radial, le schéma 5P avait montré une déformation de la solution sur maillage carré (figure 2.15), le schéma MD1f et le travail effectué sur le terme de transport n'avait pas permis d'améliorer l'effet d'axes (figure 4.8) tandis que le schéma 9P1s obtenait une solution parfaitement radiale sur maillage carré mais se déformait en ovale sur maillage rectangulaire (figure 3.5). Ici, les résultats du schéma 9P2s sont présentés sur la figure 5.7. À gauche, et comme pour le schéma 9P1s, la solution est bien radiale sur maillage carré. À droite, le maillage est rectangulaire avec  $z = 1/3$ . La solution est légèrement déformée mais garde un aspect radial tout de même.

Pour compléter l'analyse visuelle, les figures 5.8 et 5.9 montrent les profils de pression et de saturation sur maillages carré et rectangulaire. Les figures de gauche, représentant les profils de pression, ne permettent pas de conclure sur une prédominance d'un axe en particulier alors que, pour les profils de saturations à droite des images, seul le maillage

rectangulaire (figure 5.9) met en évidence une légère avance du choc sur l'axe médian horizontal (en bleu) par rapport à la solution analytique (en rouge). Pour un maillage carré, les trois courbes numériques se superposent parfaitement et correspondent bien au profil radial attendu.

Le couple de paramètres calculé §5.4 est sous-optimal pour un rapport de mailles compris entre  $2/7$  et  $7/2$ . Les précédents résultats faisaient partie de cet intervalle. La figure 5.10 montre le résultat pour un maillage dont le rapport de mailles est  $z = 1/5$ , soit inférieur à  $2/7$ . Le paramètre  $\omega$  n'est alors plus égal à 1 et l'erreur longitudinale ne croise pas l'erreur isotrope en  $S = 1/2$  mais un peu avant. La forme de la solution obtenue est plutôt radiale et sans effet d'axes. Un petit décroché apparaît cependant dans les diagonales du maillage. Le profil de saturation à droite de la figure 5.10 montre que la position du choc sur l'axe médian vertical est en retard (en jaune) par rapport à la position du choc analytique (en rouge). Les profils sur les autres axes sont, quant à eux, légèrement en avance.

### 5.4.2 Cas à 5 puits

Le maillage utilisé pour ce cas test est formé de mailles carrées et reprend le problème étudié §2.4.2. Les résultats du schéma 9P2s étant bons pour une solution radiale §5.4.1, ce cas test va conforter ces résultats sur maillage diagonal et parallèle. En effet, sur la figure 5.11, les solutions obtenues en fin de simulation sont identiques sur les deux maillages. Les résultats avec le schéma 5P (figure 2.21) montraient une forte différence entre les deux maillages, l'effet de l'orientation de maillage a ici totalement disparu.

Les courbes de production d'eau au niveau des quatre puits producteurs sont présentées sur la figure 5.12. Là encore, les résultats sont encourageants avec notamment, un instant de percée d'eau quasiment identique pour les deux maillages. Cette conclusion avait déjà été obtenue pour le schéma 9P1s (figure 3.9), cependant les courbes se dissociaient par la suite, ce qui n'est pas le cas ici avec une bonne superposition des courbes de production d'eau.

Bien que le schéma 9P1s aboutît à de bonnes conclusions, le schéma 9P2s a grandement amélioré les résultats sur maillage diagonal et maillage parallèle.

### 5.4.3 Cas digitations

La section §2.2 avait permis de mettre en évidence les instabilités du système pour des rapports de viscosité supérieurs à une valeur limite et ce cas test, détaillé §2.4.3, corroborait ces résultats en créant des digitations au niveau du front de saturation lorsque la résolution s'effectuait avec le schéma 5P (figure 2.23). Pour ce cas, le rapport de mailles est de  $z = 1/2$  ce qui correspond à une valeur de transition de  $S^* = 1/2$ . La saturation obtenue avec le schéma 9P2s à différents instants de simulation est présentée sur la figure 5.13. Le schéma 9P2s utilisé avec le couple de paramètres sous-optimal calculé §5.4 ne fait pas apparaître les digitations au cours de la simulation.

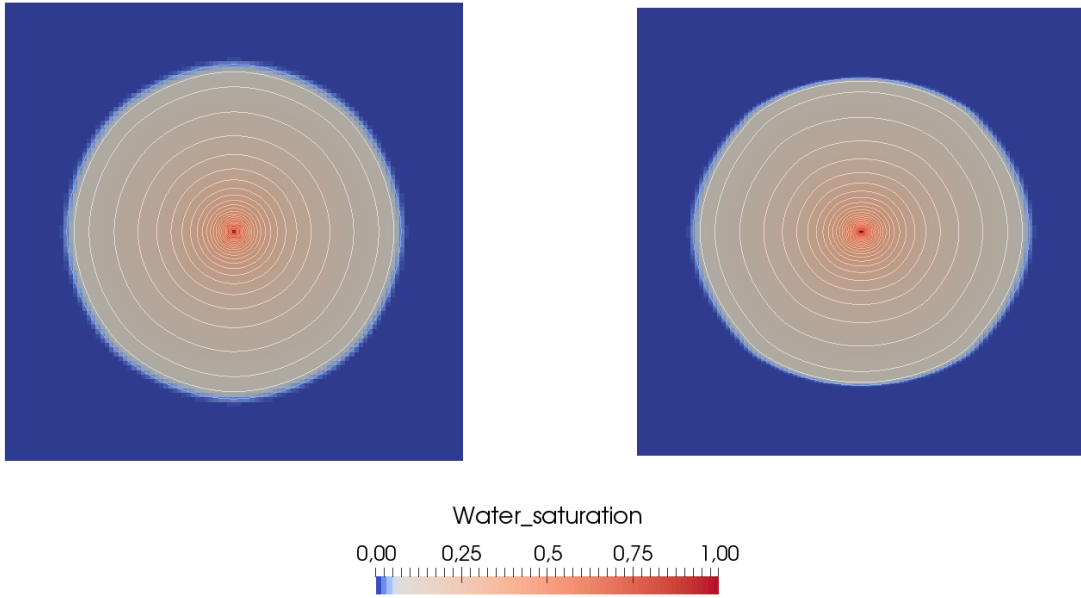


FIGURE 5.7 – Champs de saturation au temps  $T = 0.05s$  obtenu sur maillage carré (à gauche) et sur maillage rectangulaire (à droite) avec le schéma 9P2s pour  $M = 200$ .

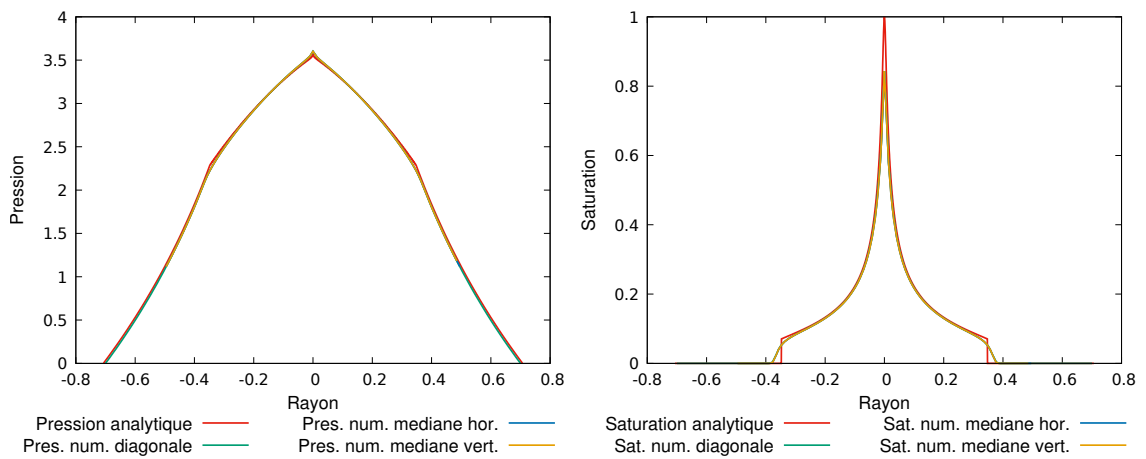


FIGURE 5.8 – Coupes selon différentes directions en pression (à gauche) et en saturation (à droite) de la solution obtenue avec le schéma 9P2s pour  $M = 200$  en maillage carré  $101 \times 101$ .

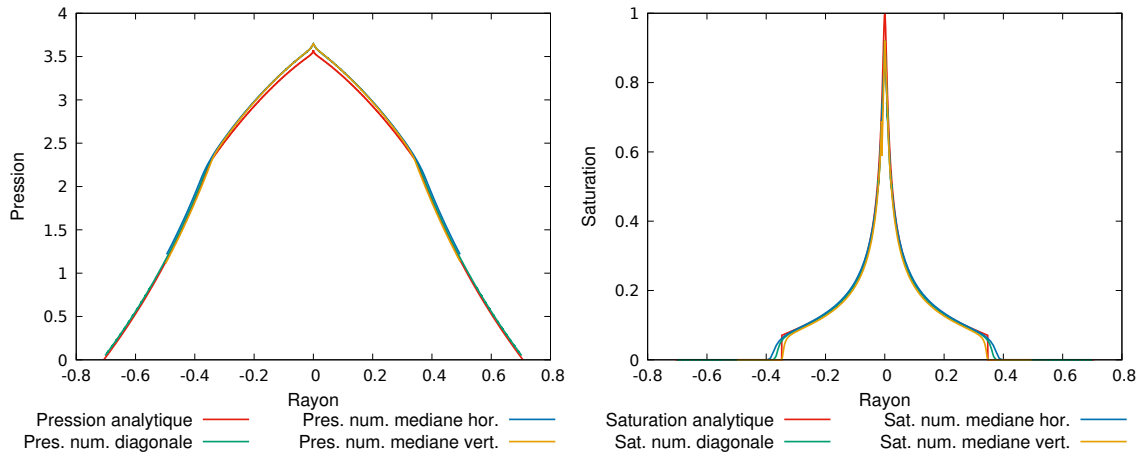


FIGURE 5.9 – Coupes selon différentes directions en pression (à gauche) et en saturation (à droite) de la solution obtenue avec le schéma 9P2s pour  $M = 200$  en maillage rectangulaire  $101 \times 301$ .

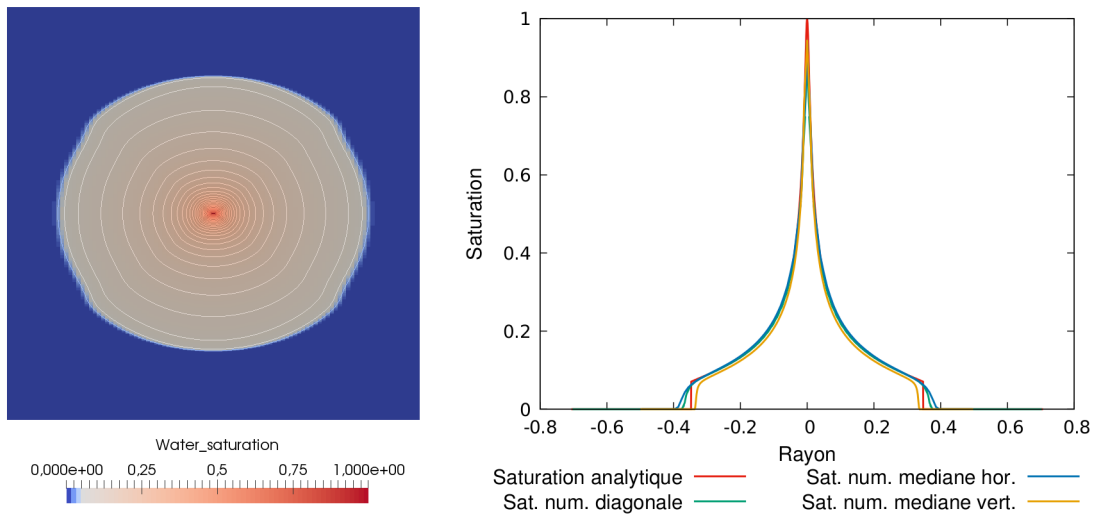


FIGURE 5.10 – Champ de saturation (à gauche) et coupes en saturation selon différentes directions (à droite) de la solution obtenue avec le schéma 9P2s pour  $M = 200$  en maillage rectangulaire  $101 \times 501$ .

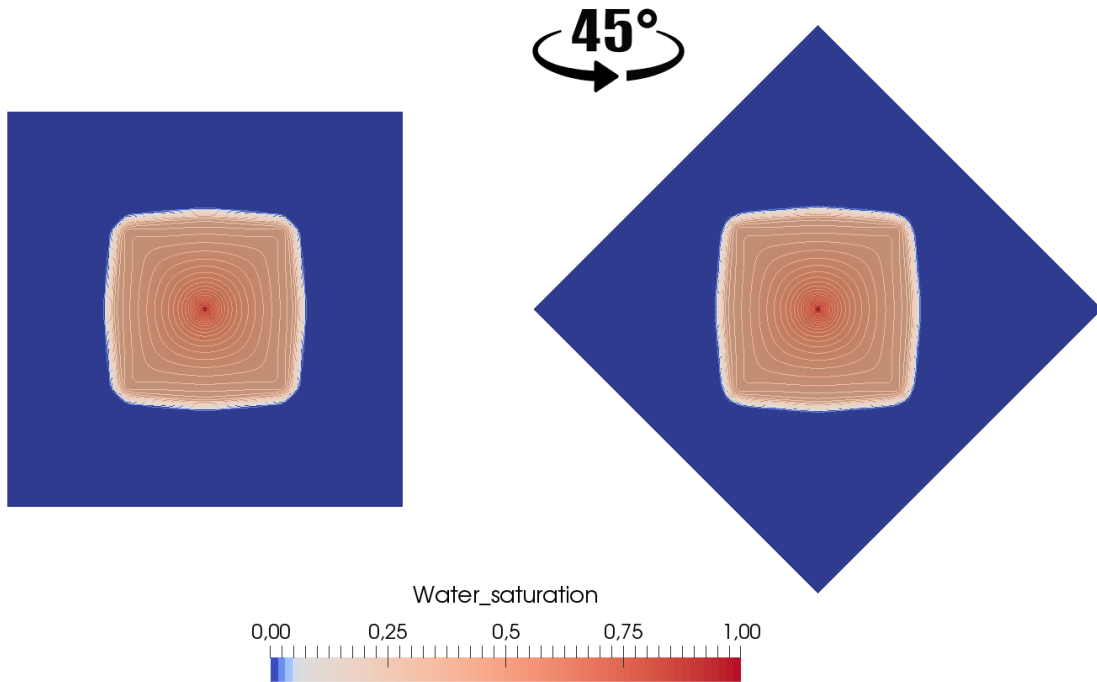


FIGURE 5.11 – Champs de saturation au temps  $T = 200$  jours pour  $M = 100$ , obtenu avec le schéma 9P2s en maillage diagonal (à gauche) et maillage parallèle (à droite).

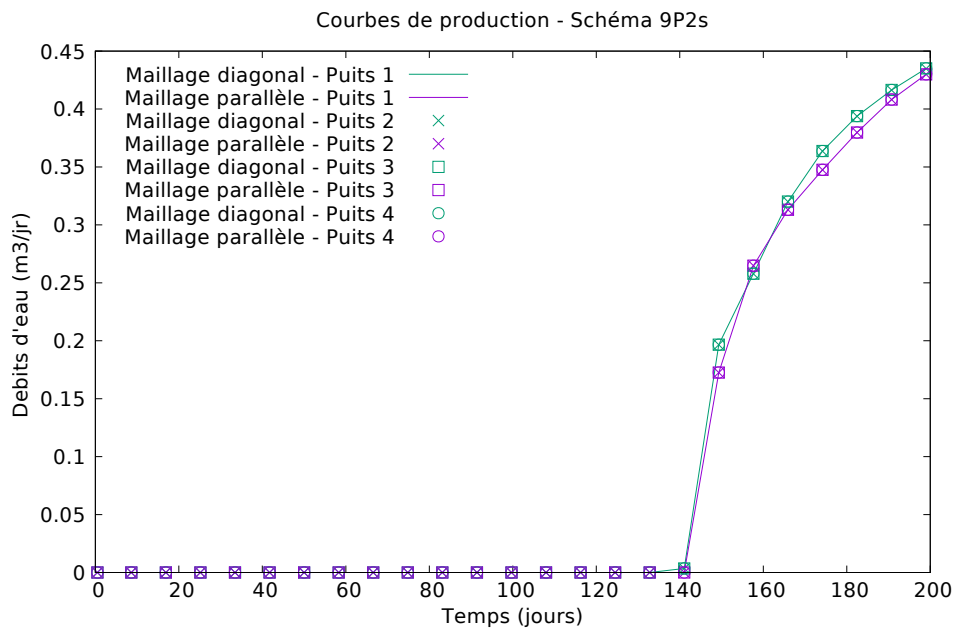


FIGURE 5.12 – Courbes de production d'eau au cours du temps aux puits producteurs pour  $M = 100$  en maillages diagonal et parallèle avec le schéma 9P2s.

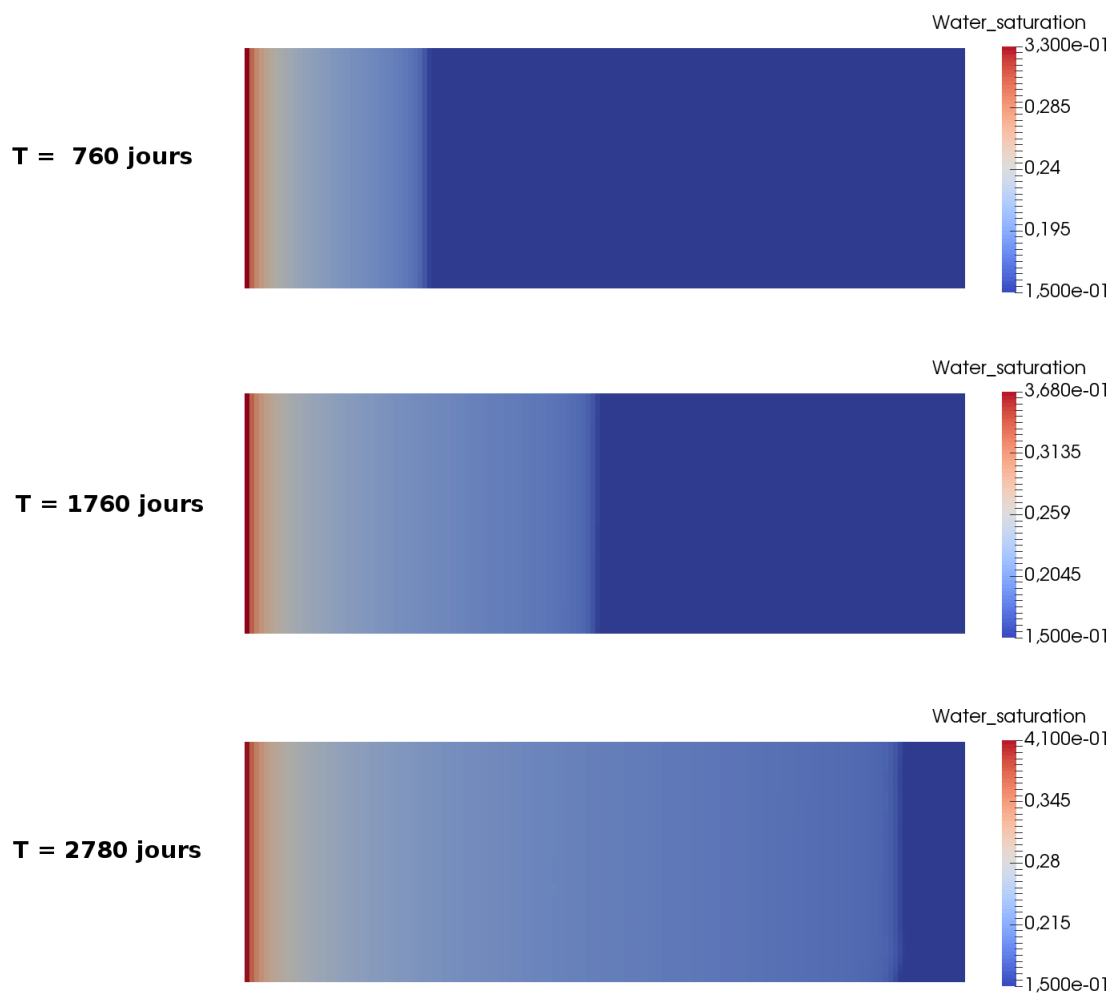


FIGURE 5.13 – Champ de saturation à différents temps de simulation pour le cas digitations avec le schéma 9P2s.