

# Caractérisation du vide comprimé par comptage de photons

## Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Méthode de caractérisation par comptage de photons</b>	<b>155</b>
8.1.1	Représentation du vide comprimé général par sa matrice de covariance	155
8.1.2	Estimation par double comptage	155
8.1.3	Estimation par le maximum de vraisemblance	156
<b>8.2</b>	<b>Autres méthodes : classique et homodyne</b>	<b>157</b>
8.2.1	Modèle général de l'amplificateur paramétrique monomode	157
8.2.2	Méthode "classique"	159
8.2.3	Méthode "homodyne"	159
<b>8.3</b>	<b>Caractérisations expérimentales</b>	<b>160</b>
8.3.1	Dispositif expérimental	160
8.3.2	Mesures de référence	160
8.3.3	Efficacité de détection par comptage	161
8.3.4	Estimation par double comptage	163
8.3.5	Estimation par le maximum de vraisemblance	164
8.3.6	Discussion	165
<b>8.4</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>166</b>
<b>8.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>166</b>

---

Toute application utilisant des états comprimés de la lumière dans des protocoles de communication ou de calcul quantique devra nécessairement faire face au problème de la caractérisation de ces états. Un état quantique peut être complètement décrit par sa fonction de Wigner, que l'on peut reconstruire expérimentalement grâce à des procédures de tomographie quantique (voir la section 7.3.2 et les références [17, 27, 29]). D'une autre manière, on peut rappeler qu'un état gaussien est parfaitement déterminé par les moments d'ordre un et deux pour ses composantes de quadrature [18]. Une autre description complète d'un état gaussien est alors donnée par les moyennes des quadratures  $X$  et  $P$  et la matrice de covariance  $\gamma$  de l'état (introduite à la section 2.2.3). Il est ensuite possible de calculer différents autres paramètres caractéristiques, comme la réduction maximale du bruit quantique observable [116] ou la pureté de l'état [121, 122].

Pour déterminer la matrice de covariance d'un état gaussien, la technique généralement utilisée consiste à effectuer des mesures homodynes des quadratures, ce qui n'est qu'une autre manière d'effectuer une tomographie quantique de l'état. Jaromir Fiurášek et Nicolas Cerf ont récemment proposé une méthode alternative pour obtenir la matrice de covariance d'un état gaussien sans recourir à une détection homodyne [123], ou plus précisément sans aucun faisceau oscillateur local intense pour servir de référence de phase. Le schéma proposé repose exclusivement sur des techniques de comptage non-discriminantes en nombres de photons, utilisant des lames partiellement réfléchissantes et des détecteurs de photon uniques comme les photodiodes à avalanche.

Pour caractériser un état gaussien quelconque, le dispositif de Fiurášek et Cerf nécessite des mesures conjointes sur deux copies de l'état quantique. Cependant, cette méthode peut heureusement se réduire à des mesures sur une seule copie si on sait a priori que les valeurs moyennes des quadratures sont nulles, c'est-à-dire que l'état quantique est centré sur l'origine de l'espace des phases. Ainsi, dans le cas des états vides comprimés, une caractérisation complète peut être obtenue simplement à partir de techniques de comptage de photons sur une seule copie, et sans nécessiter de stabilité interférométrique. Les seules hypothèses requises sont que l'état caractérisé soit gaussien et centré sur l'origine de l'espace des phases.

Lors d'une collaboration avec Jaromir Fiurášek et Nicolas Cerf, nous avons expérimentalement mis en œuvre cette proposition théorique et discuté de sa faisabilité et de sa pertinence pour caractériser des états vides comprimés produits par le dispositif présenté au chapitre précédent [124]. La section 8.1 rappelle brièvement le principe théorique de la méthode de caractérisation par comptage de photons présentée dans [123]. Pour valider les résultats de cette technique, nous avons utilisé deux méthodes de référence, basées sur des mesures classiques du gain paramétrique et sur des mesures homodynes. L'exploitation de ces références sera abordée à la section 8.2 avant de discuter en détail nos résultats expérimentaux (section 8.3). Enfin, des simulations numériques (section 8.4) permettent d'illustrer l'utilisation de la méthode de comptage avec des conditions différentes de celles imposées par l'expérience.

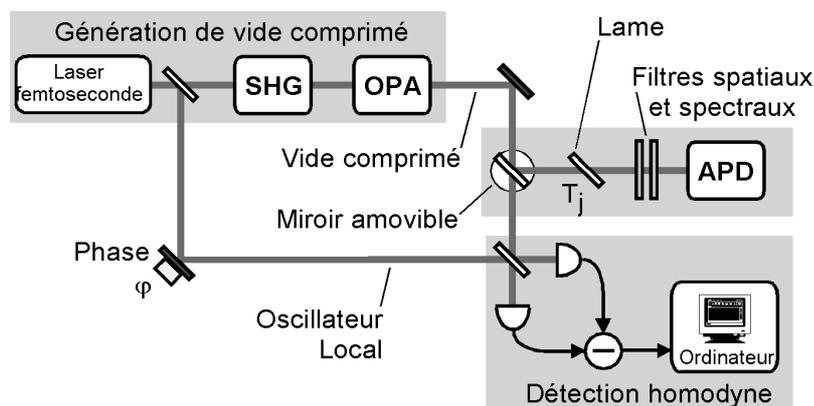


Figure 8.1: Schéma de principe de l'expérience de génération et de caractérisation du vide comprimé impulsif.

## Méthode de caractérisation par comptage de photons

Les résultats théoriques exposés dans cette section reprennent pour l'essentiel ceux énoncés par Fiurášek et Cerf dans la description de leur nouvelle méthode de caractérisation [123, 124]. Tout au plus un nouvel éclairage est donné dans la direction d'une mise en œuvre expérimentale. Ces calculs se focalisent sur le cas d'un état vide gaussien issu d'un mélange statistique (i.e. de pureté  $\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  a priori différente de un). Un traitement complet de la méthode de caractérisation par comptage pour des états gaussiens quelconques est présenté dans [123].

### 8.1.1 Représentation du vide comprimé général par sa matrice de covariance

Un état gaussien général (a priori non pur), dont les quadratures sont de valeurs moyennes nulles, est théoriquement déterminé parfaitement par la donnée de sa matrice de covariance associée  $\gamma$  qui comprend les moments d'ordre deux des variables conjuguées  $X$  et  $P$ . Suivant la définition présentée à la section 2.2.3,  $\gamma$  est définie avec notre normalisation  $N_0$  du bruit quantique :

$$\gamma = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} \langle X^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle \\ \frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle & \langle P^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Afin de déterminer la réduction maximale du bruit quantique observable et le degré de pureté de l'état, il faut simplement mesurer les deux quantités invariantes de  $\gamma$  par changement de référentiel, à savoir sa trace  $\text{Tr}(\gamma)$  et son déterminant  $\det(\gamma)$ . La réduction maximale de bruit (*squeezing*), i.e. la plus petite variance en quadrature mesurable  $V_{\min}$  pour un état, est déterminée par la plus petite valeur propre de la matrice de covariance. Ceci s'exprime en fonction de la trace et du déterminant de  $\gamma$  par [123] :

$$V_{\min} = \frac{N_0}{2} \left[ \text{Tr}(\gamma) - \sqrt{\text{Tr}^2(\gamma) - 4 \det(\gamma)} \right] \quad (8.2)$$

Par ailleurs, la pureté  $\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  pour un mélange statistique vaut [122] :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\det(\gamma)}} \quad (8.3)$$

### 8.1.2 Estimation par double comptage

Le principe de base de la caractérisation par comptage est illustré sur la figure 8.1. Le vide comprimé impulsif, produit par amplification paramétrique dégénérée [111], est envoyé sur une lame partiellement réfléchissante de transmission variable  $T$  avant d'être mesuré par une photodiode à avalanche (APD : *Avalanche PhotoDiode*). Ce dernier élément permet de discriminer entre la présence ou l'absence d'au moins un photon dans l'impulsion, fournissant un clic ou une absence de clic. La caractérisation par comptage repose sur des mesures de la probabilité de non-comptage de photon (non-clic) pour différentes valeurs de la transmission de la lame. En théorie, deux transmissions  $T_1$  et  $T_2$  suffisent pour déterminer la matrice de covariance  $\gamma$ , ce que nous appelons la méthode par "double comptage". Dans le cadre d'une expérience réelle entachée d'incertitudes et de bruits, il peut être avantageux d'effectuer un plus grand nombre de mesures pour différentes valeurs de transmission, ce qui constitue la méthode par "maximum de vraisemblance".

L'action de la photodiode à avalanche d'efficacité limitée  $\eta_{\text{apd}}$  peut être modélisée par une lame de transmission  $\eta_{\text{apd}}$  suivie d'un détecteur idéal effectuant une mesure dichotomique décrite par les projecteurs  $\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|$  (absence de clic) et  $\Pi_1 = 1 - \Pi_0$  (un clic).

Pour un état de matrice densité  $\hat{\rho}$ , la probabilité de non-clic est donnée par  $P = \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle$ . Afin de relier cette probabilité à la matrice de covariance  $\gamma$ , il est utile d'exploiter la fonction Q de Husimi associée à l'état, qui est une autre description de l'opérateur densité  $\hat{\rho}$  dans l'espace des phases. Pour un état gaussien centré sur l'origine de l'espace des phases, la fonction Q s'exprime par [18] :

$$Q(x, p) = \frac{1}{2\pi N_0} \langle \alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi N_0 \sqrt{\det(\gamma + I)}} \exp \left[ -\frac{1}{N_0} r^T (\gamma + I)^{-1} r \right] \quad (8.4)$$

où  $r = (x, p)$ ,  $\alpha = (x + ip)/(2\sqrt{N_0})$  et  $I$  est la matrice identité. Avec cette définition, il est immédiat de voir que la probabilité de projection de l'état  $\hat{\rho}$  sur le vide s'écrit :

$$P = 2\pi N_0 Q(0) = \frac{2}{\sqrt{\det(\gamma + I)}} \quad (8.5)$$

(pour le cas d'un mode vide simple,  $\det(\gamma + I) = 4$  et la probabilité de non-clic vaut 1).

La procédure de caractérisation fonctionne en effectuant plusieurs mesures de la probabilité de non-clic  $P_j$  pour différentes valeurs de la transmission de la lame  $T_j$ . La matrice de covariance  $\gamma_j$  de l'état après passage au travers de la lame s'écrit  $\gamma_j = T_j\gamma + (1 - T_j)I$ , où  $\gamma$  est la matrice de covariance de l'état initial. En introduisant  $\gamma_j$  dans l'équation (8.5), on obtient après quelques calculs :

$$\frac{4}{P_j^2} = (\eta_{\text{apd}} T_j)^2 \det(\gamma) + \eta_{\text{apd}} T_j (2 - \eta_{\text{apd}} T_j) \text{Tr}(\gamma) + (2 - \eta_{\text{apd}} T_j)^2 \quad (8.6)$$

Ceci montre que  $P_j$  dépend de la transmission totale  $\eta_{\text{apd}} T_j$ , de la trace et du déterminant de la matrice de covariance  $\gamma$  de l'état initial. On peut remarquer de plus que  $4/P_j^2$  est une fonction *linéaire* des deux inconnues  $\text{Tr}(\gamma)$  et  $\det(\gamma)$ . Deux mesures de  $P_j$  pour deux transmissions  $T_j$  différentes suffisent selon (8.6) pour constituer un système de deux équations d'inconnues  $\text{Tr}(\gamma)$  et  $\det(\gamma)$ . Ce système peut alors facilement s'inverser pour fournir les estimations de  $\text{Tr}(\gamma)$  et  $\det(\gamma)$  :

$$\text{Tr}(\gamma) = \frac{2}{\eta_{\text{apd}}(T_2 - T_1)} \left( \frac{T_2}{T_1 P_1^2} - \frac{T_1}{T_2 P_2^2} \right) + 2 - \frac{2}{\eta_{\text{apd}} T_1} - \frac{2}{\eta_{\text{apd}} T_2} \quad (8.7)$$

$$\det(\gamma) = \frac{2}{\eta_{\text{apd}}(T_1 - T_2)} \left( \frac{2 - \eta_{\text{apd}} T_2}{\eta_{\text{apd}} T_1 P_1^2} - \frac{2 - \eta_{\text{apd}} T_1}{\eta_{\text{apd}} T_2 P_2^2} \right) + \frac{(2 - \eta_{\text{apd}} T_1)(2 - \eta_{\text{apd}} T_2)}{\eta_{\text{apd}}^2 T_1 T_2} \quad (8.8)$$

Ensuite, connaissant la trace et le déterminant de  $\gamma$ , on peut estimer les propriétés de réduction de bruit de l'état ainsi que sa pureté par les équations (8.2) et (8.3).

### 8.1.3 Estimation par le maximum de vraisemblance

La méthode ci-dessus, basée sur des mesures pour seulement deux valeurs de transmission, n'est pas forcément la plus avantageuse ou la plus précise lorsqu'il s'agit de caractériser une expérience réelle présentant d'inévitables bruits et incertitudes supplémentaires. Une procédure plus réaliste consiste à effectuer des mesures pour des valeurs de transmission  $T_j$  aussi nombreuses que possible, puis d'essayer d'extraire le maximum d'information (en terme de précision) de ces multiples mesures. Pour améliorer la précision sur l'estimation à partir de plusieurs mesures, une possibilité est de mettre en œuvre une procédure dite par maximum de vraisemblance (à ce sujet, voir par exemple les références [118, 119, 120]). Le principe de cette méthode est de fournir

les paramètres variables  $\text{Tr}(\gamma)$  et  $\det(\gamma)$  les plus à même de produire les données expérimentales mesurées.

Dans le cas général de l'application de la méthode par maximum de vraisemblance, on cherche à estimer un paramètre  $\Upsilon$  à partir d'une série de  $n$  mesures de la variable  $x$ . La forme de la densité de probabilité  $p(x|\Upsilon)$  de  $x$  conditionnée par  $\Upsilon$  est connue, mais pas la valeur de  $\Upsilon$ . On introduit alors la densité conjointe de probabilité conditionnée pour l'ensemble des mesures :

$$\mathcal{L}(\Upsilon) = \prod_{j=1}^n p(x_j|\Upsilon) \quad (8.9)$$

Cette fonction de  $\Upsilon$  est appelée la fonction de vraisemblance des données. Le meilleur estimateur selon la méthode de maximum de vraisemblance est donné par la valeur du paramètre  $\Upsilon$  qui maximise la fonction  $\mathcal{L}$  [118, 119, 120].

Dans notre cas, la fonction de vraisemblance des données s'écrit :

$$\mathcal{L}(\text{Tr}(\gamma), \det(\gamma)) = \prod_{j=1}^n P_j^{N_{\text{rep}} - C_j} (1 - P_j)^{C_j} \quad (8.10)$$

Ici  $C_j$  désigne le nombre de clics de photodétection par seconde mesurés pour la transmission  $T_j$ ,  $N_{\text{rep}}$  est la cadence de répétition des impulsions,  $n$  le nombre de transmissions différentes utilisées. La probabilité de non-clic  $P_j$  est reliée à  $\text{Tr}(\gamma)$ ,  $\det(\gamma)$  et  $T_j$  par la formule (8.6). Nous devons aussi prendre en compte certaines contraintes additionnelles sur les valeurs que peuvent prendre les paramètres  $\text{Tr}(\gamma)$  et  $\det(\gamma)$ . Le fait que la matrice de covariance  $\gamma$  soit définie positive et doive satisfaire la relation d'incertitude d'Heisenberg  $\det(\gamma) \geq 1$  impose les contraintes :

$$1 \leq \det(\gamma) \leq \left( \frac{\text{Tr}(\gamma)}{2} \right)^2 \quad (8.11)$$

Avant d'exposer les résultats de ces méthodes originales de caractérisation d'un vide comprimé, nous présentons d'autres techniques utilisées comme références pour estimer la fiabilité de la méthode de comptage.

## 8.2 Autres méthodes : classique et homodyne

Pour prendre en compte un état le plus général possible (i.e. de pureté a priori différente de un), nous devons affiner le modèle de base de l'amplificateur paramétrique monomode pour exploiter au mieux les informations fournies par les mesures classiques de gains paramétriques et les mesures homodynes.

### 8.2.1 Modèle général de l'amplificateur paramétrique monomode

Si on reprend les résultats de l'étude du vide comprimé présentée au chapitre 7, il apparaît que l'inverse du gain de déamplification n'est pas égal au gain d'amplification. Dans ce cas, l'état produit n'est pas pur mais correspond à un mélange statistique. Pour prendre en considération cette particularité, il faut améliorer le modèle simple de l'amplificateur paramétrique dégénéré (section 2.4.3) qui prédit une amplification  $e^{+2r}$  et une déamplification  $e^{-2r}$ .

De la manière la plus générale, un état gaussien monomode – dont les quadratures sont de valeurs moyennes nulles – s'exprime comme le résultat de l'action d'un opérateur de compression sur un état thermique gaussien [122, 117]. Traduit en termes de dispositifs d'optique quantique,

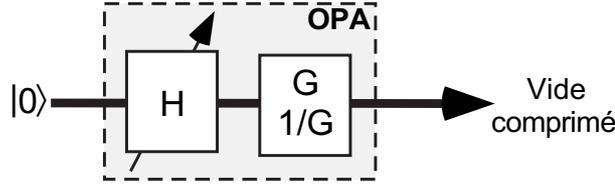


Figure 8.2: *Modèle général d'une source paramétrique monomode d'état vide comprimé.  $H$  est le gain d'un amplificateur non-dégénéré indépendant en phase,  $G$  et  $1/G$  sont les gains paramétriques d'amplification et de déamplification d'un amplificateur dégénéré sensible en phase.*

ce théorème signifie que la source la plus générale d'états vides comprimés monomodes est réalisée par l'association de deux amplificateurs linéaires simples, telle que décrite à la figure 8.2 : un amplificateur indépendant de la phase de gain  $H$ , suivi d'un amplificateur sensible en quadratures de gains  $G > 1$  (amplification) et  $1/G$  (déamplification). Si on considère que notre état vide comprimé expérimental est généré par une boîte noire, cette boîte peut être complètement décrite par les paramètres  $H$  et  $G$  ou de manière équivalente par la donnée de  $\text{Tr}(\gamma)$  et  $\det(\gamma)$ .<sup>1</sup>

Les composantes conjuguées de quadratures en sortie de l'amplificateur paramétrique total s'expriment par :

$$X_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{G}} (\sqrt{H} X_{\text{vac}} + \sqrt{H-1} X_{\text{aux}}) \quad (8.12a)$$

$$P_{\text{out}} = \sqrt{G} (\sqrt{H} P_{\text{vac}} - \sqrt{H-1} P_{\text{aux}}) \quad (8.12b)$$

où nous posons  $X_{\text{out}}$  comme la quadrature comprimée.  $X_{\text{vac}}$  et  $X_{\text{aux}}$  sont respectivement les modes vide et auxiliaire incidents. Les variances des quadratures comprimées et amplifiées en sortie de l'amplificateur valent :

$$V_{\text{min}} = \frac{(2H-1)}{G} N_0 \quad (8.13)$$

$$V_{\text{max}} = (2H-1) G N_0 \quad (8.14)$$

Ceci permet d'obtenir la trace et le déterminant de la matrice de covariance par :

$$\text{Tr}(\gamma) = \frac{V_{\text{min}} + V_{\text{max}}}{N_0} = (2H-1) \left( G + \frac{1}{G} \right) \quad (8.15)$$

$$\det(\gamma) = \frac{V_{\text{min}} V_{\text{max}}}{N_0^2} = (2H-1)^2 \quad (8.16)$$

Inversement, la trace et le déterminant de  $\gamma$  fournissent les variances minimales et maximales :

$$V_{\text{max,min}} = \frac{N_0}{2} \left[ \text{Tr}(\gamma) \pm \sqrt{\text{Tr}^2(\gamma) - 4 \det(\gamma)} \right] \quad (8.17)$$

<sup>1</sup>Ce modèle d'association de deux amplificateurs est le modèle *monomode* le plus général pour décrire notre système physique [122, 117]. Cependant, ce modèle n'est pas unique : par exemple, on pourrait très bien inverser la position des amplificateurs  $G$  et  $H$ . Les équations seraient alors légèrement différentes, mais les résultats seraient similaires. Nous avons préféré la modélisation décrite sur la figure 8.2, qui est celle la plus communément utilisée dans la littérature. Un autre modèle très simple pour expliquer des gains paramétriques différents consisterait à décomposer le faisceau sonde en deux modes qui suivent chacun une amplification spécifique. Néanmoins, ce modèle *multimode* ne sera pas considéré plus avant et nous nous restreignons pour le moment à notre dispositif monomode général.

Finalement, la pureté  $\mathcal{P} = \text{Tr}[\hat{\rho}^2]$  d'un mélange statistique gaussien monomode est directement liée au nombre de photons moyen correspondant au bruit thermique  $\bar{n} = H - 1$  [122] :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\bar{n} + 1} = \frac{1}{2H - 1} \quad (8.18)$$

Avec ce modèle général de source monomode de vide comprimé, nous disposons de trois couples de paramètres équivalents pour caractériser l'état gaussien :  $(\text{Tr}(\gamma), \det(\gamma))$ ,  $(G, H)$  et  $(V_{\min}, V_{\max})$ . Si les formules ci-dessus nous permettent facilement de passer d'une représentation à une autre, chaque ensemble est néanmoins relié à une technique de mesure préférentielle :  $(\text{Tr}(\gamma), \det(\gamma))$  est donné par le comptage de photons,  $(G, H)$  par la mesure des gains paramétriques classiques et  $(V_{\min}, V_{\max})$  par une mesure homodyne.

### 8.2.2 Méthode “classique”

Une première mesure de base pour caractériser l'amplificateur dégénéré est d'observer les gains paramétriques classiques pour un faisceau sonde macroscopique. Une telle démarche est simplement mise en œuvre comme à la section 7.2.3 par une mesure directe sur une photodiode de la puissance moyenne de la sonde lorsque la phase relative pompe-sonde est balayée. L'ajustement de cette phase relative permet d'accorder le gain paramétrique classique du minimum de gain de déamplification (en intensité)  $\mathcal{G}_{\min}$  au gain maximum d'amplification  $\mathcal{G}_{\max}$ . La mesure des gains  $\mathcal{G}_{\min}$  et  $\mathcal{G}_{\max}$  fournit une estimation sur les paramètres  $G$  et  $H$  caractéristiques de notre modèle d'amplificateur paramétrique :

$$G = \sqrt{\mathcal{G}_{\max}/\mathcal{G}_{\min}} \quad (8.19)$$

$$H = \sqrt{\mathcal{G}_{\max}\mathcal{G}_{\min}} \quad (8.20)$$

Avec ces valeurs, il est ensuite possible de calculer la trace et le déterminant de  $\gamma$  d'après les formules (8.15) et (8.16) ou bien la pureté de l'état d'après (8.18). Nous appelons “méthode classique” cette technique de caractérisation par une mesure des gains paramétriques classiques. Une limite fondamentale à la qualité de cette estimation pour représenter le vide comprimé quantique est posée par l'adaptation de modes limitée entre le faisceau pompe et le faisceau sonde. Néanmoins, pour les puissances et les configurations utilisées, la bonne concordance entre les niveaux de compression obtenus d'après les mesures homodynes et les mesures classiques lors de la section 7.3 nous permettent d'être confiants dans cette technique. Par ailleurs, nous pourrions comparer les résultats de cette caractérisation “classique” à ceux fournis par des mesures homodynes.

### 8.2.3 Méthode “homodyne”

D'après les principes de la tomographie quantique [17], une caractérisation complète du vide comprimé peut être obtenue par des mesures homodynes des composantes de quadratures conjuguées. La détection homodyne résolue en temps que nous avons déjà utilisée lors de l'étude des chapitres précédents nous permet de distinguer entre la quadrature la plus comprimée et la quadrature amplifiée pour en mesurer ensuite les variances  $V_{\text{hom},\min}$  et  $V_{\text{hom},\max}$ . Suivant la démarche instaurée à la section 7.3, les pertes et les imperfections de la détection homodyne peuvent être modélisées par une lame de transmission  $\eta_{\text{hom}} = 0.76 \pm 0.01$  correspondant à l'efficacité globale de notre détection. Compte tenu de cette efficacité, on peut virtuellement

corriger l'influence des pertes pour estimer les variances des quadratures comprimées et amplifiées produites par la source paramétrique( en entrée de la détection homodyne) :

$$\begin{aligned} V_{\min} &= [V_{\text{hom},\min} - (1 - \eta_{\text{hom}})N_0]/\eta_{\text{hom}} \\ V_{\max} &= [V_{\text{hom},\max} - (1 - \eta_{\text{hom}})N_0]/\eta_{\text{hom}} \end{aligned} \quad (8.21)$$

D'après les relations de la section 8.2.1, ces mesures permettent la caractérisation complète de la matrice de covariance de l'état ( $\text{Tr}(\gamma)$ ,  $\det(\gamma)$ ) ou des paramètres de l'amplificateur paramétrique ( $G$ ,  $H$ ). Cette technique constitue la méthode de caractérisation dite "homodyne", et sera utilisée comme référence pour valider la nouvelle méthode par comptage.

## 8.3 Caractérisations expérimentales

### 8.3.1 Dispositif expérimental

Nous reprenons le dispositif de génération de vide comprimé impulsionnel introduit au chapitre précédent [111]. Le principe général du montage de validation de la caractérisation de l'état par comptage est présenté sur la figure 8.1. Une fois produit par amplification paramétrique dégénérée, le vide comprimé peut être dirigé vers deux modules de détection différents grâce à un miroir amovible.

- *Détection homodyne impulsionnelle* : chaque impulsion incidente interfère avec une impulsion intense correspondant à l'oscillateur local. L'électronique rapide de détection permet une mesure de quadrature résolue pour chaque impulsion incidente (chapitre 3).
- *Compteur de photons* : le vide comprimé est envoyé sur une lame de transmission  $T$  variable. Ce faisceau est ensuite filtré spatialement par deux trous dans des plans conjugués par Fourier, puis par un filtre spectral de largeur 3 nm centré à la longueur d'onde du fondamental 846 nm. La présentation détaillée de ce montage de filtrage sera discutée au chapitre 9. Enfin, le faisceau est détecté par une photodiode à avalanche silicium standard (EG&G SPCM-AQ-131). Le filtrage est rendu nécessaire par la très large plage d'émission de fluorescence paramétrique de notre montage (largeur spectrale  $\approx 150$  nm, acceptation angulaire  $\approx 10^\circ$ ) et par le fait que la photodiode à avalanche – contrairement à la détection homodyne – est sensible à des photons dans tous les modes spatio-temporels incidents. Le dispositif de filtrage est alors crucial pour s'assurer que seul le mode vide comprimé qui nous intéresse est détecté par la photodiode.

Un dernier module de détection différent utilise un faisceau sonde intense et une photodiode pour mesurer les gains paramétriques classiques.

### 8.3.2 Mesures de référence

Les résultats des déductions obtenues à partir des mesures "classiques" et "homodynes" sont présentés sur les figures 8.3, 8.4 et 8.5 pour différentes puissances de pompe. Comme on peut le remarquer en particulier sur la figure 8.3(b), pour de fortes puissances de pompe, les résultats des mesures homodynes et classiques ne se recouvrent plus au sein de leur barres d'erreurs respectives. La raison principale de cet effet est que notre "boîte noire" amplificateur paramétrique est simplement un modèle monomode et souffre de limitations fondamentales. En effet, aux fortes puissances de pompe, la physique impliquée entre dans un régime multimode du fait notamment de la diffraction induite par le gain [102].

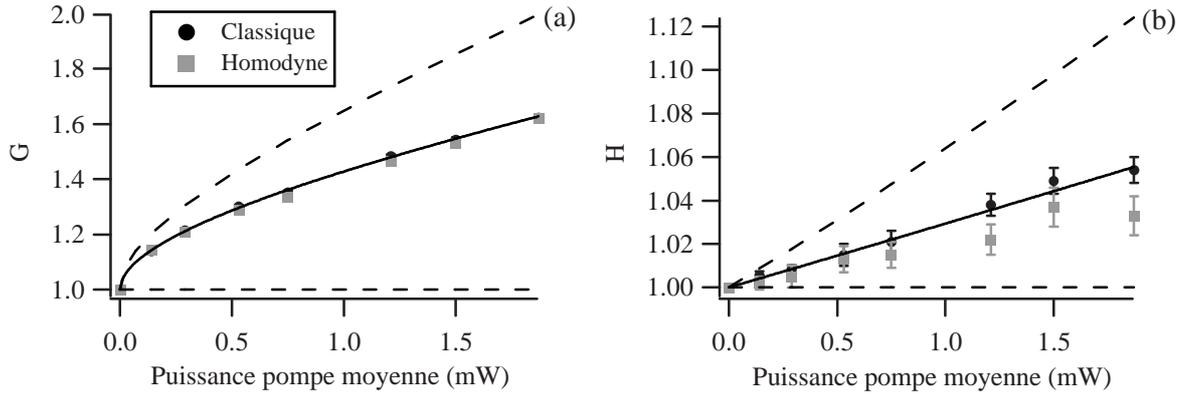


Figure 8.3: Gains paramétriques  $G$  et  $H$  en fonction de la puissance moyenne de pompe à 425 nm. Les mesures “classiques” (disques noirs) correspondent aux mesures de l’amplification d’une sonde classique. Les mesures “homodynes” (carrés gris) sont estimées d’après les mesures homodynes de variances  $V_{\min}$  et  $V_{\max}$ . La courbe en trait plein est une interpolation des mesures “classiques” d’après la théorie des ondes planes :  $G = \exp(2\alpha\sqrt{P_{pompe}})$ ,  $H = \cosh^2(\beta\sqrt{P_{pompe}})$ . Les bornes obtenues à partir de la méthode de comptage de photons sont indiquées par les courbes en pointillés (voir la discussion section 8.3.5).

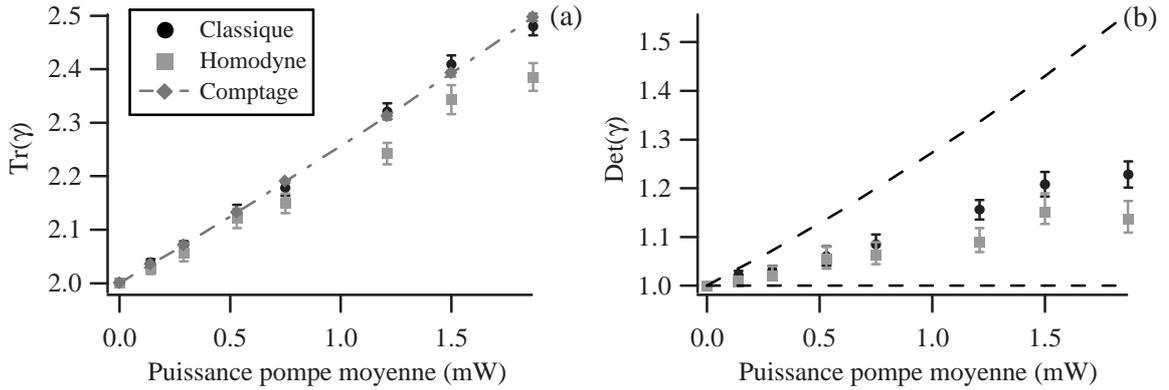


Figure 8.4: Trace  $\text{Tr}(\gamma)$  et déterminant  $\text{det}(\gamma)$  en fonction de la puissance moyenne de pompe avec les notations de la figure 8.3. Pour faciliter la lecture de la figure (a), les résultats expérimentaux sur l’estimation de la trace par la méthode de comptage (losanges) sont reliés par une ligne en trait-point.

### 8.3.3 Efficacité de détection par comptage

Un point essentiel pour la caractérisation d’un vide comprimé par les nouvelles méthodes de comptage est d’estimer aussi précisément que possible l’efficacité globale de détection  $\eta_{\text{apd}}$  de la voie photodiode à avalanche. Cette efficacité globale inclut plusieurs termes : les transmissions des optiques et des différents filtres (spatiaux et spectraux) ainsi que l’efficacité quantique de la photodiode à avalanche silicium. Une première estimation peut donc être effectuée en tenant compte des transmissions des filtres mesurées avec un faisceau sonde intense. Les filtres spatiaux et spectraux transmettent respectivement 16% et 17% du faisceau sonde, tandis que l’efficacité

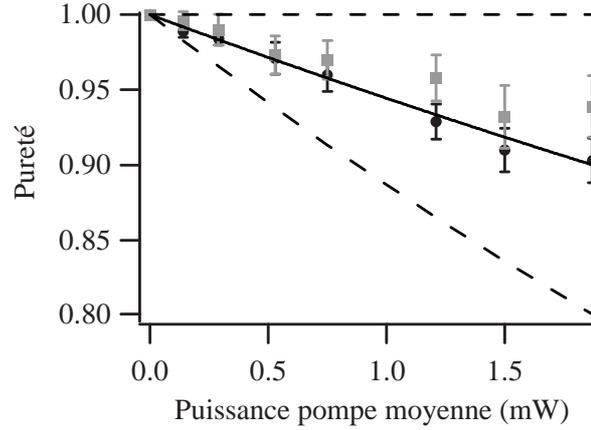


Figure 8.5: Pureté  $\mathcal{P}$  de l'état en fonction de la puissance moyenne de pompe. Les notations sont les mêmes que sur la figure 8.3.

quantique de la photodiode à avalanche est estimée autour de 50% (donnée constructeur), ce qui fournit une valeur d'efficacité globale  $\eta_{\text{apd}} \approx 1.4\%$ . Cependant, en l'absence de mesure précise de l'efficacité quantique de la photodiode à avalanche, nous ne pouvons pas donner une estimation précise de  $\eta_{\text{apd}}$ .

Pour obtenir une estimation plus fiable de  $\eta_{\text{apd}}$ , nous exploitons les mesures de taux de comptage de photons dans le cadre de la caractérisation du vide comprimé. Lorsque la transmission de la lame supplémentaire est fixée à  $T = 1$ , un modèle simple permet de montrer que le nombre d'événements de photodétection par seconde  $C_{\text{clics}}$  est directement relié à  $\eta_{\text{apd}}$  dans la limite des faibles taux de comptage. Pour cela, nous utilisons le modèle général de l'amplificateur paramétrique de la figure 8.2. D'après les formules des amplificateurs paramétriques présentées au chapitre 2, l'opérateur création de photon dans le mode de sortie s'écrit :

$$\hat{a}_{\text{out}} = \sqrt{H} (\hat{a}_{\text{vac}} \cosh r + \hat{a}_{\text{vac}}^\dagger \sinh r) + \sqrt{H-1} (\hat{a}_{\text{aux}}^\dagger \cosh r + \hat{a}_{\text{aux}} \sinh r) \quad (8.22)$$

où  $r$  désigne le facteur de compression donné par  $G = \exp(2r)$ . Les modes  $\hat{a}_{\text{vac}}$  et  $\hat{a}_{\text{aux}}$  sont respectivement les modes vide et auxiliaire entrant dans le dispositif de la figure 8.2, conformément aux équations (8.12). L'expression de l'opérateur  $\hat{a}_{\text{out}}$  permet de calculer ensuite le nombre d'événements de photodétection par seconde  $C_{\text{clics}}$ , lorsque la transmission de la lame supplémentaire est fixée à  $T = 1$ . Compte tenu de l'efficacité de détection  $\eta_{\text{apd}}$ , et dans la limite des faibles taux de comptage, on obtient :

$$\begin{aligned} C_{\text{clics}} &= \eta_{\text{apd}} N_{\text{rep}} [H \sinh^2(r) + (H-1) \cosh^2(r)] \\ &= \frac{1}{2} \eta_{\text{apd}} N_{\text{rep}} [(H-1/2)(G+1/G) - 1] \end{aligned} \quad (8.23)$$

où  $N_{\text{rep}} = 780.4$  kHz est la cadence de répétition des impulsions. Pour obtenir une estimation précise de  $\eta_{\text{apd}}$ , la mesure de  $C_{\text{clics}}$  est répétée pour différentes puissances de pompe et toujours avec  $T = 1$ . Les dépendances de  $G$  et  $H$  en fonction de la puissance de pompe sont prises en compte par le modèle des ondes planes  $G = \exp(2\alpha\sqrt{P_{\text{pompe}}})$  et  $H = \cosh^2(\beta\sqrt{P_{\text{pompe}}})$ , où les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont obtenus d'après les mesures par la méthode "classique", présentées sur la figure 8.3. L'équation (8.23) permet alors grâce à une interpolation des points expérimentaux de la figure 8.6 une estimation  $\eta_{\text{apd}} = 0.84 \times 10^{-2} \pm 0.02 \times 10^{-2}$ . Le décalage entre cette valeur et la

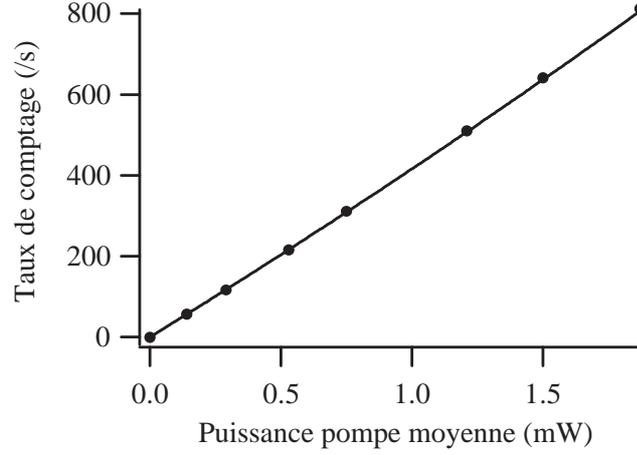


Figure 8.6: Nombre d'événements de photodétection par seconde en fonction de la puissance de pompe moyenne pour la transmission maximale de la lame  $T = 1$ . La ligne en trait plein est le résultat du modèle de l'équation (8.23), d'où on extrait l'estimation de l'efficacité globale de détection de la voie photodiode à avalanche  $\eta_{\text{apd}} = 0.84 \times 10^{-2} \pm 0.02 \times 10^{-2}$ .

précédente estimation grossière de  $\eta_{\text{apd}}$  peut s'expliquer par de faibles différences entre le mode vide comprimé et le mode de la sonde réglée pour le maximum de déamplification classique.

### 8.3.4 Estimation par double comptage

Dans notre expérience, nous avons utilisé entre 4 et 6 valeurs différentes pour la transmission de la lame  $T_j$ . Pour chaque transmission, 100 mesures du nombre de d'événements de photodétection par seconde  $C_j$  sont effectuées afin d'obtenir une bonne précision statistique sur la moyenne. Grâce à un filtrage et un fenêtrage temporel adéquat de la détection, le nombre de coups d'obscurité par seconde a été maintenu à un niveau raisonnablement faible (environ 20 coups/s) et a été soustrait des données expérimentales.

Comme nous l'avons vu à la section 8.1.2, deux mesures de la probabilité de non-clic pour deux valeurs différentes  $T_1$  et  $T_2$  de la transmission de la lame sont suffisantes en théorie pour obtenir les valeurs de  $\text{Tr}(\gamma)$  et  $\det(\gamma)$  d'après les équations (8.7) et (8.8). Avec nos données expérimentales, la formule (8.7) fournit une valeur satisfaisante de  $\text{Tr}(\gamma)$ , qui est proche des valeurs obtenues par les mesures classiques et homodynes. Cependant, la formule (8.8) n'offre aucune estimation correcte du déterminant  $\det(\gamma)$  avec des valeurs typiquement de  $1.2 \pm 0.6$ .

L'incertitude étendue sur la valeur du déterminant est une conséquence de la faible efficacité de détection  $\eta_{\text{apd}}$  employée. Dans notre configuration expérimentale, les incertitudes de mesures possèdent une forte influence sur la précision de l'estimation du déterminant, alors que la trace est moins sensible. A titre d'exemple, si on étudie les effets d'une incertitude sur  $P_1$ , on trouve :

$$\frac{d \text{Tr}(\gamma)}{dP_1} = \frac{4}{\eta_{\text{apd}} P_1^3} \quad \frac{d \det(\gamma)}{dP_1} = \frac{-16}{\eta_{\text{apd}}^2 P_1^3} \quad (8.24)$$

Ceci montre que pour notre dispositif expérimental le déterminant est environ 400 fois plus sensible à de faibles incertitudes sur  $P_1$  que la trace. Des conclusions identiques peuvent être tirées concernant les incertitudes sur  $P_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  ou  $\eta_{\text{apd}}$  (l'écart-type de l'incertitude relative sur  $C_j$  vaut typiquement 1%, celui sur  $T_j$  0.5% et celui sur  $\eta_{\text{apd}}$  1%).

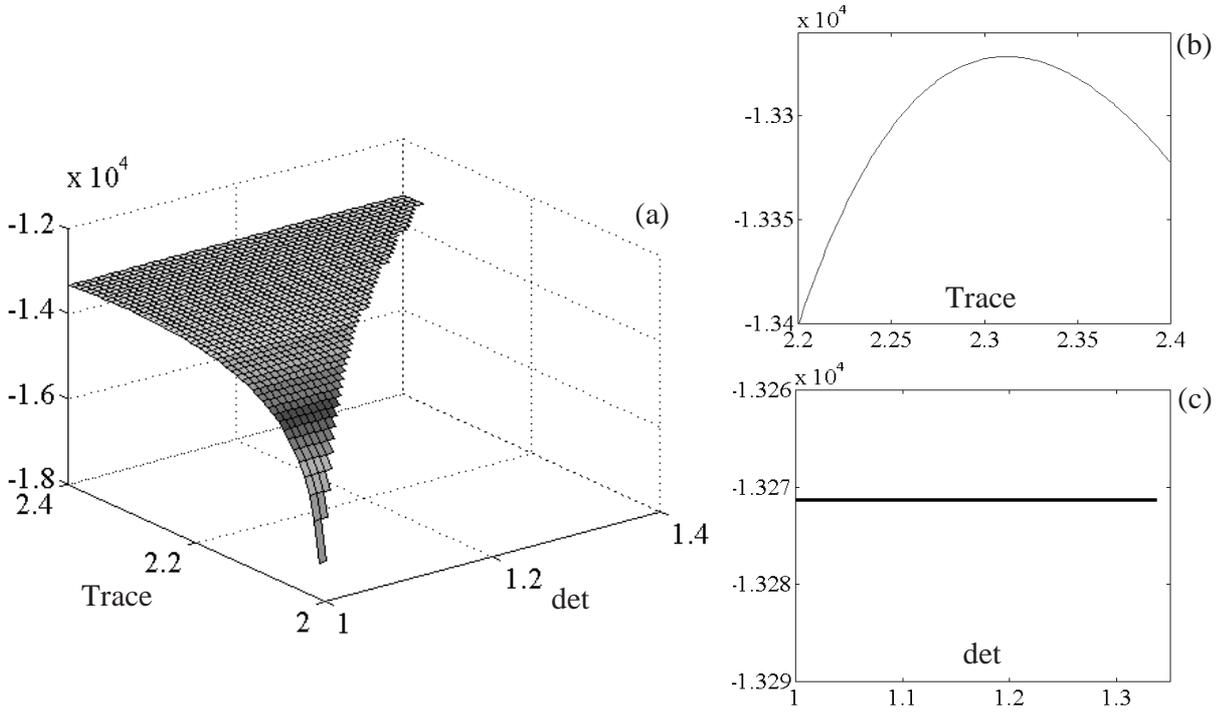


Figure 8.7: (a) Fonction de vraisemblance des données obtenues pour une puissance de pompe moyenne de 1.21 mW, en fonction des paramètres libres trace et déterminant. (b) Coupe en fonction de la trace pour  $\det = 1.1$ . (c) Coupe en fonction du déterminant pour la trace optimale  $\text{Tr} = 2.316$  qui maximise  $\mathcal{L}$ . Pour ce réglage expérimental, la méthode “classique” fournit les résultats  $\text{Tr}(\gamma) = 2.321$  et  $\det(\gamma) = 1.156$ .

### 8.3.5 Estimation par le maximum de vraisemblance

Pour gagner en précision sur l’estimation du déterminant en exploitant l’ensemble de nos mesures, nous avons mis en œuvre une méthode par maximum de vraisemblance telle que présentée dans la section 8.1.3. Le logarithme de la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}$  donnée par l’équation (8.10) est calculé à partir des données expérimentales  $C_j$ , de l’estimation de l’efficacité  $\eta_{\text{apd}}$  et des transmissions  $T_j$  mesurées par le facteur de transmission d’un faisceau sonde intense. Le maximum global de  $\log(\mathcal{L})$  est ensuite recherché par un tri numérique entre les valeurs.

Les résultats expérimentaux sur l’estimation de  $\text{Tr}(\gamma)$  pour différentes puissances de pompes sont représentées sur la figure 8.4(a) et correspondent largement avec les valeurs obtenues par la méthode “classique”. Il est à noter que des trois techniques de mesure mises en œuvre, la méthode de comptage associée à une estimation par le maximum de vraisemblance fournit la plus faible incertitude sur la valeur estimée de  $\text{Tr}(\gamma)$ , ce qui n’a rien d’étonnant vu le nombre de mesures effectuées et la précision statistique obtenue ainsi.

Malheureusement, compte tenu de la faible efficacité globale de détection  $\eta_{\text{apd}}$ , la fonction de vraisemblance est quasiment une fonction constante du déterminant  $\det(\gamma)$  dans la région autorisée par les contraintes (8.11) (voir la figure 8.7). En conséquence, aucune estimation précise du déterminant de la matrice de covariance n’a pu être obtenue à partir de nos données expérimentales, la maximisation de la fonction de vraisemblance retournant essentiellement une

valeur variable entre les bornes 1 et  $(\text{Tr}(\gamma)/2)^2$ . La technique de comptage appliquée à notre dispositif ne permet de ne donner que des bornes sur les gains paramétriques  $H$  et  $G$  à partir de la seule connaissance de la trace  $\text{Tr}(\gamma)$  :

$$1 \leq G \leq \left[ \frac{\text{Tr}(\gamma) + \sqrt{\text{Tr}(\gamma)^2 - 4}}{\text{Tr}(\gamma) - \sqrt{\text{Tr}(\gamma)^2 - 4}} \right]^{1/2} \quad (8.25)$$

$$1 \leq H \leq \frac{\text{Tr}(\gamma) + 2}{4} \quad (8.26)$$

Les courbes en tirets sur les figures 8.3, 8.4(b) et 8.5 expriment le fait qu'aucune estimation du déterminant meilleure que celle autorisée par (8.11) sachant la valeur de  $\text{Tr}(\gamma)$  n'a pu être obtenue.

### 8.3.6 Discussion

Nous avons également essayé d'autres méthodes d'estimations numériques pour obtenir une valeur du déterminant – comme une inversion de moindres carrés ou des méthodes par récurrence – mais aucune de ces techniques n'a pu offrir une estimation correcte. Une meilleure compréhension de la difficulté intrinsèque d'estimer précisément  $\det(\gamma)$  peut être obtenue en réécrivant la formule (8.6) suivant les termes de transmission :

$$\frac{4}{P_j^2} = [\det(\gamma) - \text{Tr}(\gamma) + 1] (\eta_{\text{apd}} T_j)^2 + 2 [\text{Tr}(\gamma) - 2] \eta_{\text{apd}} T_j + 4 \quad (8.27)$$

Cette formule fait apparaître que le déterminant est directement relié à la dépendance quadratique de  $P_j^{-2}$  par rapport à la transmission globale, alors que la trace peut être obtenue par le coefficient de dépendance linéaire de  $P_j^{-2}$ . La difficulté fondamentale de l'estimation de  $\det(\gamma)$  résulte du fait que l'information pertinente pour le déterminant est présente dans des termes en  $(\eta_{\text{apd}} T)^2$ , qui sont très faibles pour nos données expérimentales compte tenu de l'efficacité de détection  $\eta_{\text{apd}}$ .

On pourrait alors essayer d'augmenter l'efficacité de détection, en diminuant les restrictions des filtrages spatiaux et spectraux. Cependant, cette démarche ne nous semble pas réaliste d'un point de vue expérimental pour plusieurs raisons. Premièrement, si les filtres sont moins efficaces, la physique associée aux mesures sera dans un régime clairement multimode, ce qui dépasse le cadre de notre modèle <sup>2</sup>. Deuxièmement, nous perdrons ainsi toute possibilité de vérifier la concordance des résultats fournis par la technique de comptage avec les autres méthodes classiques et homodynes. Enfin, même dans le cas d'une absence de filtre spatial et d'un filtre spectral de 10 nm de large, l'efficacité de détection expérimentale demeurera faible (de l'ordre de 15% en raison de l'efficacité quantique de la photodiode à avalanche et de la réflectivité du réseau de diffraction utilisé comme filtre spectral). D'après nos simulations numériques, cette valeur améliorée d'efficacité ne nous permet pas d'affiner beaucoup notre estimation sur  $\det(\gamma)$ , comme nous allons le voir à la section suivante.

<sup>2</sup>En principe, la méthode de comptage permet de vérifier si une description monomode est appropriée ou non. Si un seul mode est détecté,  $P^{-2}$  est un polynôme d'ordre deux en  $(\eta_{\text{apd}} T)$  d'après l'équation (8.27). Plus généralement, on peut montrer que si le détecteur mesure  $N$  modes, alors  $P^{-2}$  devient un polynôme d'ordre  $2N$  en  $(\eta_{\text{apd}} T)$  [123]. Cependant, pour déterminer expérimentalement le degré du polynôme  $P^{-2}$  en fonction de la transmission, il faut obtenir une très haute précision dans la mesure de  $P$  et de fortes valeurs de  $\eta_{\text{apd}}$ , ce qui n'est pas le cas de notre montage.

## 8.4 Simulations numériques

Si nos valeurs expérimentales d'efficacité de détection ne permettent pas une caractérisation complète du vide comprimé par la méthode de comptage, il est alors très important d'estimer quelle est l'efficacité minimale à atteindre. Nous avons simulé les résultats expérimentaux pour différentes valeurs de  $\eta_{\text{apd}}$ , les autres paramètres étant choisis en concordance avec notre dispositif. La trace et le déterminant de la matrice de covariance sont ensuite estimés par l'application de la méthode de maximum de vraisemblance à partir de nos données expérimentales simulées. Les mesures sont supposées être effectuées pour quatre valeurs de transmission  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 0.75$ ,  $T_3 = 0.5$  et  $T_4 = 0.25$ , avec pour chaque valeur 100 mesures du nombre d'événements de photodétection par seconde. Nous utilisons enfin les valeurs  $\det(\gamma)_{\text{exp}} = 1.156$  et  $\text{Tr}(\gamma)_{\text{exp}} = 2.321$  comme un exemple typique (correspondant à une puissance de pompe moyenne de 1.21 mW). Cette simulation numérique a été mise en œuvre par Jaromir Fiurášek avec qui nous avons collaboré lors de cette étude.

Pour caractériser l'erreur de notre estimation comparée à la valeur expérimentale réelle, nous introduisons les quantités :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{det}}^2 &= \langle |\det(\gamma)_{\text{est}} - \det(\gamma)_{\text{exp}}|^2 \rangle \\ \sigma_{\text{Tr}}^2 &= \langle |\text{Tr}(\gamma)_{\text{est}} - \text{Tr}(\gamma)_{\text{exp}}|^2 \rangle\end{aligned}\quad (8.28)$$

Ces estimateurs d'erreur sont obtenus par des moyennes statistiques sur 1000 expériences simulées.

Pour isoler l'influence intrinsèque des faibles valeurs d'efficacité  $\eta_{\text{apd}}$  des incertitudes statistiques de mesure sur  $T_j$  et  $\eta_{\text{apd}}$ , nous avons d'abord considéré que ces paramètres sont connus précisément et que les fluctuations statistiques de  $C_j$  (de l'ordre de 1%) sont les seules sources d'erreurs. L'estimateur d'erreur  $\sigma_{\text{det}}$  correspondant à cette hypothèse est représenté par des disques sur la figure 8.8. Cette quantité décroît rapidement lorsque  $\eta_{\text{apd}}$  augmente, pour atteindre une estimation fiable de  $\det(\gamma)$  avec  $\sigma_{\text{det}} < 10^{-2}$  lorsque  $\eta_{\text{apd}} > 15\%$ . Dans le cadre d'une expérience réelle, les incertitudes supplémentaires sur  $T_j$  et  $\eta_{\text{apd}}$  vont induire une plus grande erreur sur l'estimation de  $\det(\gamma)$ . En prenant une incertitude relative de 0.5% pour  $T_j$  et de 1% pour  $\eta_{\text{apd}}$ , nos calculs prédisent un estimateur d'erreur  $\sigma_{\text{det}}$  nettement plus important (carrés gris sur la figure 8.8). Pour atteindre une estimation fiable de  $\det(\gamma)$  avec  $\sigma_{\text{det}} \approx 2 \times 10^{-2}$ , il faut dans ce cas  $\eta_{\text{apd}} > 50\%$ .

Enfin, ces simulations numériques confirment la bonne précision de l'estimation de la trace  $\text{Tr}(\gamma)$  : nous avons pu obtenir  $\sigma_{\text{Tr}} < 10^{-2}$  pour  $\eta_{\text{apd}}$  aussi faible que 1% et avec les incertitudes expérimentales réelles prises en compte.

## 8.5 Conclusion

Nous avons mis en œuvre une technique originale de caractérisation complète d'un état vide comprimé par la matrice de covariance associée. Cette technique est basée sur des méthodes de comptage de photons et ne nécessite pas de stabilité interférométrique ou de référence de phase. Notre dispositif expérimental a pu déterminer avec précision la trace de la matrice de covariance associée à l'état, mais malheureusement une efficacité de détection trop faible nous a empêché d'estimer précisément le déterminant. Si la trace peut être déterminée correctement avec une efficacité de détection de l'ordre du pourcent, il faut une efficacité nettement plus importante pour estimer le déterminant, typiquement de l'ordre de 50%.

En principe, différentes voies d'amélioration sont possibles. La première serait de reprendre la conception de la source paramétrique pour générer un état comprimé monomode, ce qui

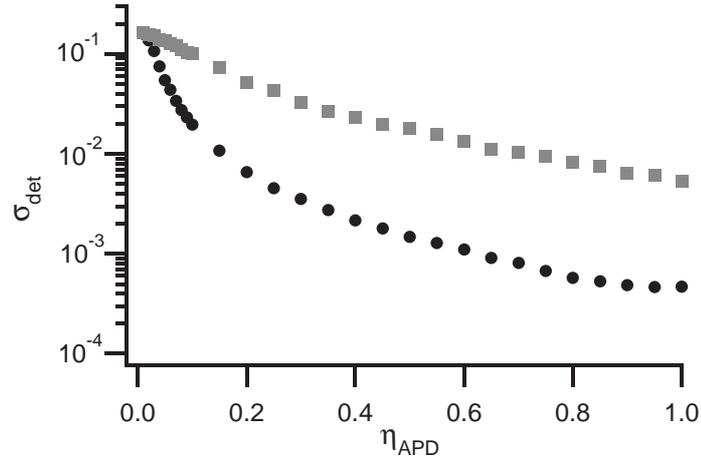


Figure 8.8: Erreur sur l'estimation  $\sigma_{\text{det}}$  du déterminant  $\det(\gamma)$  en fonction de l'efficacité de détection  $\eta_{\text{apd}}$  dans le cas où les paramètres  $T_j$  et  $\eta_{\text{apd}}$  sont parfaitement connus (disques) ou entachés d'une incertitude de 0.5% sur  $T_j$  et 1% sur  $\eta_{\text{apd}}$  (carrés).

peut être avoisiné sous certaines conditions d'accord de phase et de focalisation dans un cristal non-linéaire. Une deuxième direction serait d'améliorer la transmission des filtres spatiaux et spectraux, par exemple en utilisant des filtres multidiélectriques de meilleure transmission qu'un réseau de diffraction classique. L'ensemble de ces techniques expérimentales améliorées pourra dans l'avenir offrir des perspectives d'exploitation nouvelles pour des applications en communication ou en calcul quantique avec des variables continues.