

Chapitre 3

CALCUL SEMI-ANALYTIQUE D'UN TUNNEL DE SECTION CIRCULAIRE (critère de tresca sans écoulement)

Le problème des tunnels axisymétriques en déformation plane dans un massif infini a été étudié par plusieurs auteurs, à l'aide de différents modèles rhéologiques de type viscoplastique. [Bérest&Nguyen, 1983], [Bérest&al, 1983], [Rousset, 1988], [Fritz, 1983] et plastique. [Salençon, 1966], [Egger, 1973], [Panet, 1976], [Bérest&Nguyen, 1979]. Ces auteurs ont généralement étudié soit l'influence des effets différés (modèle viscoplastique), soit l'influence des déformations irréversibles instantanées (modèle plastique).

L'introduction et l'exploitation d'un modèle viscoplastique avec rupture dans l'étude des ouvrages souterrains ont été initiées à notre connaissance par [Nguyen&Rousset, 1987]. Le but recherché par ces auteurs était avant tout la détermination de l'influence qualitative de la vitesse de sollicitation (pression en paroi) sur le comportement différé d'une galerie circulaire dans un massif de type viscoplastique ou viscoplastique avec rupture.

Dans l'analyse classique des tunnels, l'état d'équilibre (convergence et pression de soutènement finale) d'une structure souterraine ne dépend que de la convergence à la paroi au moment de la pose du soutènement. Une telle analyse est insuffisante pour les ouvrages souterrains réalisés dans des roches de type viscoplastique avec rupture. Les premières phases de la vie de l'ouvrage ont une grande importance sur sa stabilité ultérieure. Les techniques de soutènement provisoire, boulonnages, soutènement par cintres coulissants, etc., souvent utilisées en génie minier, témoignent de l'importance pratique des ces phénomènes.

Dans ce chapitre nous proposons une solution analytique dont l'originalité est caractérisée par l'évolution simultanée des déformations plastique et viscoplastique au cours du chargement. Nous procédons ensuite à une analyse des résultats de cette solution semi-analytique, et cette analyse nous montre la concordance entre cette solution analytique et des solutions analytiques (convergence en paroi) connues dans la littérature.

3.1 POSITION DU PROBLÈME ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES

3.1.1. Géométrie et chargement

Géométrie

Soit un tunnel profond de section circulaire de rayon intérieur R_i dans un massif infini, homogène et isotrope dont la loi de comportement est de type viscoplastique avec rupture. Le massif est initialement le siège de contraintes homogènes et isotropes. En supposant que la profondeur du tunnel est très grande devant son rayon, il est légitime de négliger le gradient de la pesanteur au niveau du tunnel. Le problème admet alors une symétrie cylindrique suivant l'axe du tunnel.

On fait de plus l'hypothèse des déformations planes, et on se place dans le cadre des petites perturbations. En coordonnées cylindriques, les contraintes principales sont : $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$. On fait l'hypothèse supplémentaire que dans la zone de rupture (plasticité)

autour du tunnel σ_z est une contrainte intermédiaire (régime de face). Cette hypothèse de travail sera vérifiée à la fin des calculs.

Grâce à la symétrie du problème et aux hypothèses ci-dessus, en chaque point du massif, toutes les grandeurs du problème en un point ne dépendent que de la distance r de ce point à l'axe du tunnel et du temps. C'est donc un problème unidimensionnel dans l'espace. La variation de la pression en paroi, conformément à la méthode convergence-confinement, simule le creusement du tunnel. Initialement, elle est égale à la pression géostatique P_∞ et décroît au cours du temps jusqu'à une valeur égale à la pression de soutènement du tunnel ; elle est nulle dans le cas du tunnel non soutenu.

La Figure 3.1 ci-dessous présente la géométrie et le chargement du problème.

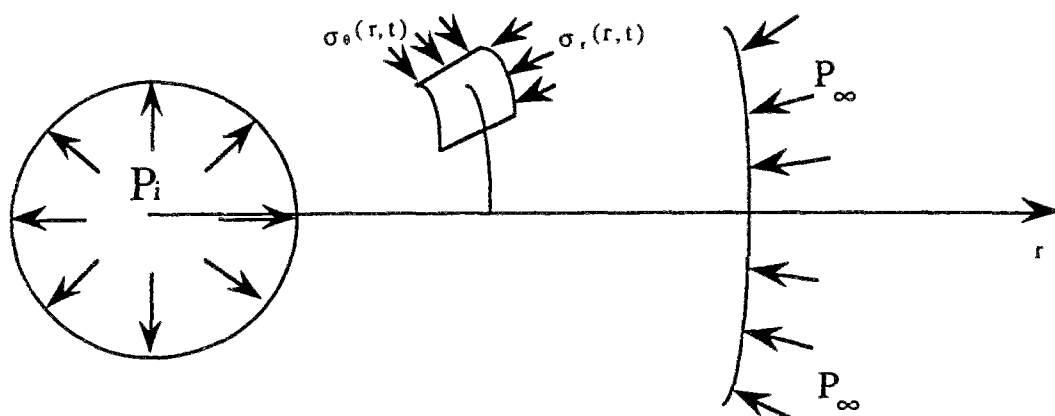


Figure 3.1: Géométrie et Chargement

Chargement

Nous choisissons un chargement simple dépendant de deux paramètres seulement, l'instant de pose du soutènement T_p et la valeur de la pression de soutènement P_0 . Dans le cas du tunnel non soutenu, T_p est l'instant où la pression s'annule. La Figure 3.2 ci-dessous illustre les deux paramètres de chargement que nous utiliserons tout au long de cette partie.

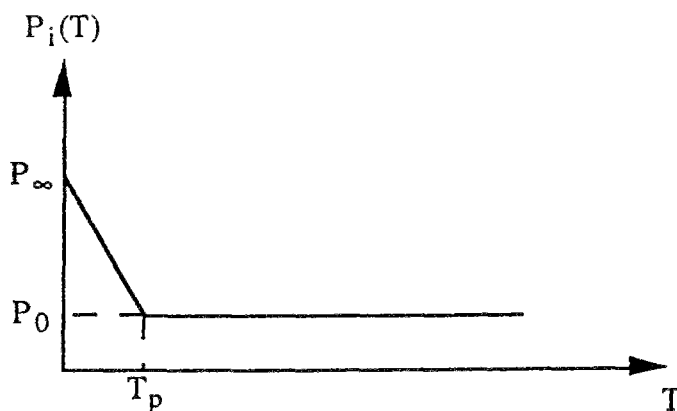


Figure 3.2: Paramètres de chargement

Conformément à la méthode convergence-confinement, la première partie de la courbe ($0 < T < T_p$) simule le creusement du tunnel. La deuxième partie ($T > T_p$) modélise simplement l'action du revêtement (pression constante, comme pour un soutènement par cintres coulissants par exemple).

3.1.2. Hypothèses et équations générales

Le champ de déplacement est purement radial et de la forme $u(r,t)\underline{e}_r$. Les tenseurs des déformations et des contraintes s'écrivent en coordonnées cylindriques sous la forme suivante:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Le tenseur des déformations totales est décomposé en trois parties d'après la loi de comportement viscoplastique avec rupture: une partie élastique, une partie plastique et une partie viscoplastique.

Dans la première partie du mémoire, nous avons montré qu'à court terme les critères de plasticité pour les argiles raides sont de type Tresca ou Mohr-Coulomb suivant la gamme de contrainte de confinement que l'on considère. Dans l'objectif de se rapprocher de la réalité des structures souterraines dans les argiles raides, nous avons montré qu'à court terme, pour des niveaux de contrainte moyenne élevées, le critère de rupture à considérer est celui de Tresca plutôt que celui de Mohr-Coulomb. A long terme, nous avons également montré dans la première partie que le critère de viscoplasticité est celui de Tresca.

Les critères de plasticité et de viscoplasticité dans le système de coordonnées cylindriques rapporté à l'axe principal du tunnel, avec l'hypothèse du régime de face, s'écrivent alors sous la forme suivante:

$$F^P(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = \sigma_r - \sigma_\theta - 2C(\alpha) ; \quad F^{VP}(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = \sigma_r - \sigma_\theta - 2C_1(\alpha)$$

Rappelons l'inégalité $C_1 < C$ (la "résistance" à long terme est plus faible que la "résistance" à court terme), α est la variable d'érouissage éventuelle.

La contrainte intermédiaire étant σ_z , les tenseurs de déformation plastique et viscoplastique ne dépendent plus alors respectivement que d'une seule variable scalaire ε_p et ε_{vp} respectivement. Les équations générales s'écrivent alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} \quad (3.1)$$

avec :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{vp} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{vp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, on choisit $v = \frac{1}{2}$ de sorte que les déformations se font à volume constant puisque $\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e) = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^p) = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) = 0$

Les hypothèses adoptées plus haut nous permettent de pousser les calculs analytiques assez loin.

L'équilibre s'écrit simplement :

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \quad (3.2)$$

La loi de Hooke s'écrit:

$$E \underline{\underline{\varepsilon}}^e = (1 + \frac{1}{2})(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_\infty) - \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_\infty) \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}}_\infty = -P_\infty \underline{\underline{1}} \quad (3.3)$$

Et les conditions aux limites sont les suivantes:

$$\sigma_r = -P_i(t) \quad \text{pour} \quad r = R_i$$

$$\sigma_r = -P_\infty \quad \text{pour} \quad r = \infty$$

Pour le cas du chargement faisant l'objet de cette partie, nous supposons que la convergence de la galerie est monotone (contraction uniquement). Dans ce cas, comme le critère de viscoplasticité est atteint avant le critère de rupture (seuil de plasticité supérieur au seuil de viscoplasticité), il est naturel de supposer qu'il existe dans le massif deux zones différentes : l'une élastique dans laquelle les déformations irréversibles sont nulles, et l'autre où les déformations irréversibles sont non nulles. Ces deux zones sont séparées par une frontière de rayon y (Figure 3.3). y est une fonction croissante du temps.

Les équations précédentes (troisième équation du système 3.3) nous donnent aussi :

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (3.4)$$

Appelons σ_y la contrainte radiale sur la frontière élastique. La solution (contrainte et déplacement) du problème dans la zone élastique est la solution classique du tube épais de rayon intérieur y , pression intérieure σ_y , le rayon extérieur est infini et la pression extérieure égale à la pression géostatique. Cette solution est la suivante :

$$\sigma_r + P_\infty = \frac{y^2}{r^2}(\sigma_y + P_\infty) \quad (3.5a)$$

$$\sigma_\theta + P_\infty = -\frac{y^2}{r^2}(\sigma_y + P_\infty) \quad (3.5b)$$

$$\sigma_z + P_\infty = 0 \quad (3.5c)$$

$$u(r) = -\frac{2y^2}{E'}(\sigma_y + P_\infty) \text{ avec } E' = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{4}{3}E \quad (3.6)$$

La loi de comportement viscoplastique s'écrit :

$$E' \frac{\partial \varepsilon_{vp}}{\partial T} = \langle \sigma_r - \sigma_\theta - 2C_1 \rangle \quad (3.7)$$

Dans cette formule et tout ce qui suit, on utilise un temps adimensionnel réduit T donné par :

$$T = t \frac{E'}{\eta} \text{ avec } E' = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{4}{3}E \text{ et } \eta \text{ la viscosité}$$

En $r=y$ le critère de viscoplasticité est atteint soit :

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)_{r=y} = 2C_1 = -r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} (r = y) \quad (3.8)$$

On obtient alors $\sigma_y + P_\infty = C_1$ (dériver 3.5a et le porter dans 3.8)

Finalement dans la zone élastique, la solution de notre tube épais est alors la suivante :

$$\sigma_r + P_\infty = C_1 \left(\frac{y^2}{r^2} \right) \quad (3.9a)$$

$$\sigma_\theta + P_\infty = -C_1 \left(\frac{y^2}{r^2} \right) \quad (3.9b)$$

$$\sigma_z + P_\infty = 0$$

$$E' \frac{u}{r} = -2C_1 \frac{y^2}{r^2} \quad (3.9c)$$

Le matériau étant incompressible, le déplacement radial est partout de la forme $u = \frac{\beta}{r}$, la continuité en $r=y$ nous donne alors **l'équation suivante vérifiée partout dans le massif**

$$E' \frac{u}{r} = -2C_1 \frac{y^2}{r^2} \quad (3.10)$$

En particulier la convergence à tout instant s'écrit :

$$U_i = \frac{2C_1}{E'} y^2 \quad (3.11)$$

La décomposition $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ et la loi de comportement élastique nous donne la composante radiale dans le système de coordonnées cylindriques soit :

$$(\underline{\varepsilon}^e)_r = -\frac{r}{E'} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r}{E'} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \varepsilon_p + \varepsilon_{vp} \quad (3.13)$$

L'expression du déplacement (3.10) nous donne alors l'équation suivante :

$$E' (\varepsilon_p + \varepsilon_{vp}) = r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2C_1 \frac{y^2}{r^2} \quad (3.14)$$

C'est une équation vérifiée partout dans le massif.

La Figure 3.3 ci-dessous nous montre les deux zones de déformations élastique et irréversible.

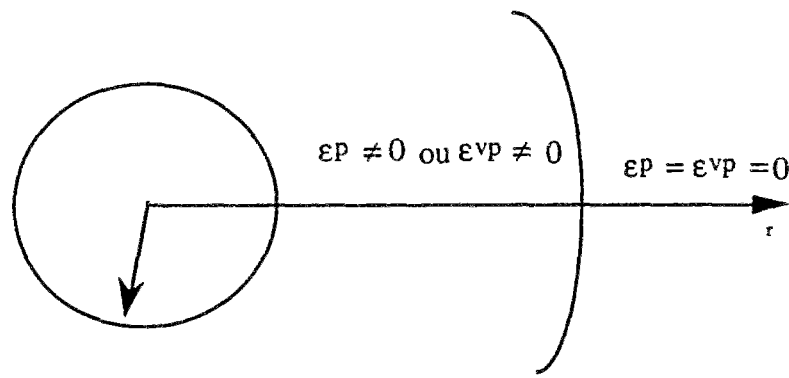


Figure 3.3: zones de déformations

Le problème d'évolution de la convergence ainsi que celle des différentes zones de déformation dans le massif étant posé via les équations générales du problème, nous allons maintenant étudier un cas simple de modèle viscoplastique avec rupture.

3.2 MODÈLE VISCOPLASTIQUE AVEC RUPTURE (critère de Tresca sans écrouissage)

3.2.1 Equations d'évolution

Ce paragraphe est essentiellement consacré au développement de la solution semi-analytique obtenue pour la loi de comportement viscoplastique avec rupture dans le cas simple du critère de Tresca sans écrouissage à court terme et à long terme.

Critères de rupture et de viscoplasticité

On suppose que le massif obéit à un critère de Tresca parfait à court terme ainsi qu'à long terme (hypothèse justifiée pour l'argile de l'Aisne dans une gamme de contrainte moyenne élevée comme nous l'avons montré dans la première partie). Les critères s'écrivent sous la forme suivante:

$$F^P(\underline{\sigma}) = \sigma_r - \sigma_\theta - 2C$$

$$F^{vp}(\underline{\sigma}) = \sigma_r - \sigma_\theta - 2C_1$$

Plus précisément, il s'agit d'un modèle plastique parfait pour le comportement à court terme et viscoplastique parfait pour le comportement à long terme. Les seuils de plasticité et de viscoplasticité sont représentés sur la Figure 3.4a ci-dessous, où l'on observe que la cohésion ne dépend pas de la variable d'écoulement.

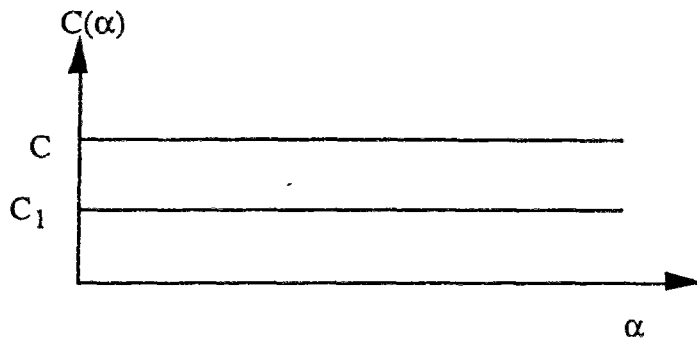


Figure 3.4a: Cohésions du modèle parfait de Tresca

Évolution des différentes zones et de la convergence du tunnel

La convergence en paroi du tunnel ainsi que les différents rayons délimitant les zones viscoplastique et de rupture évoluent en fonction du chargement $P_i(t)$. On peut donc décomposer le chargement en plusieurs phases, correspondant chacune à une configuration particulière de zones.

Nous exposons dans la suite de cette partie, les calculs relatifs à chaque phase de chargement.

Remarque : dans toute la suite nous considérons un tunnel de rayon intérieur égal à l'unité.

PHASE 1

Cette phase est caractérisée par le comportement partout élastique du massif. En effet, lorsque $P_i(T)$ reste suffisamment proche de la valeur initiale P_∞ l'ensemble du massif reste élastique. Quantitativement cela signifie que tant que $P_i(T) > P_\infty - C_1$ le comportement du massif est élastique. En particulier, la convergence U_i vaut :

$$U_i = \frac{2}{E} (P_\infty - P_i(T)) \quad (3.15)$$

Soit Δ le déviateur maximal normalisé des contraintes défini par :

$$\Delta = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2C_1}(r, T) = -\frac{r}{2C_1} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}(r, T) \quad (3.16)$$

D'après les expressions de la solution élastique (équations 3.9a et 3.9b) le déviateur dans cette phase vaut :

$$\Delta_e = 2 \frac{y^2}{r^2} (P_\infty - P_i) \quad (3.17)$$

La valeur maximale du déviateur est obtenue pour la plus petite valeur du rayon r . Donc le déviateur est maximal à la paroi et vaut $2(P_\infty - P_i)$. Tant que ce déviateur est inférieur à $2C_1$, l'ensemble du massif a un comportement élastique.

PHASE 2

Cette phase apparaît à l'instant T_e tel que $P_i(T_e) = P_\infty - C_1$. Il y a alors deux zones dans le massif:

- *une zone élastique
- *une zone viscoplastique

On appelle y le rayon de la zone viscoplastique ($r > y$ est donc une zone élastique) et on suppose que le chargement P_i est telle que y est une fonction croissante du temps. Ainsi, en $r=y$ le critère est juste atteint.

Dans la zone viscoplastique définie par $1 \leq r \leq y$ on a:

$\epsilon_{vp} \neq 0$ car le critère de viscoplasticité est atteint

$\epsilon_p = 0$ du moins tant que le déviateur dans la zone ne dépasse pas $2C$.

La loi de comportement viscoplastique et la deuxième équation fondamentale (3.13) s'écrivent respectivement :

$$E \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial T} = \left\langle -r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - 2C_1 \right\rangle \quad (3.18)$$

$$E \epsilon_{vp} = r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2C_1 \frac{y^2}{r^2} \quad (3.19)$$

En dérivant l'équation fondamentale (3.19) par rapport au temps et en égalant avec la loi de comportement viscoplastique (3.18), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right) + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -2C_1 \left(1 + \frac{y^2}{r^2} \right) \text{ qui s'écrit aussi sous la forme suivante :}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial T} + \sigma_r \right) = -\frac{2C_1}{r} \left(1 + \frac{y^2}{r^2} \right) \quad (3.20)$$

L'intégration de l'équation (3.20) entre le rayon unité et le rayon y de la zone viscoplastique nous donne l'équation d'évolution du rayon y soit :

$$y^2 + \log(y^2) = \frac{P_\infty - P_i(T) - \dot{P}_i}{C_1} - 1 \quad (3.21)$$

La condition initiale étant $y(T_e) = 1$.

D'après la définition du déviateur des contraintes réduit Δ , l'équation (3.20) s'écrit :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial T} + \Delta = 1 + \frac{y^2}{r^2} \quad (3.22)$$

Toutes les équations (3.20 et 3.21) sont valables dans la zone viscoplastique. Pour résoudre ces équations, on introduit la fonction $T_1(r^2)$ [Bérest&Nguyen, 1983], [Rousset, 1987], dépendant du rayon qui est une fonction de l'histoire du chargement. $T_1(r^2)$ est le temps antérieur ($T_1(r^2) < T$) correspondant au moment où la zone viscoplastique arrivait au rayon r soit :

$$y^2(T_1(r^2)) = r^2$$

La figure 3.4b ci-dessous nous donne la définition graphique de la fonction $T_1(r^2)$

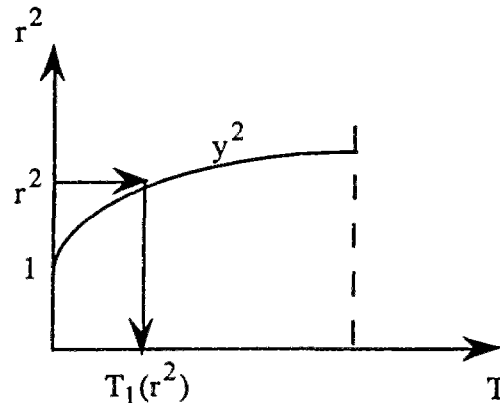


Figure 3.4b: Définition de la fonction $T_1(r^2)$

En intégrant l'équation 3.22 entre $T_1(r^2)$ et T on obtient l'expression suivante du déviateur dans la zone viscoplastique :

$$\Delta(r, T) = 1 + \int_{T_1(r^2)}^T \exp(\tau - T) \frac{y^2}{r^2}(\tau) d\tau \quad (3.23)$$

La valeur maximale pour un temps donné est obtenue pour $r=1$ et vaut alors :

$$\Delta_1 = \Delta(1, T) = 1 + \int_{T_1}^T \exp(\tau - T) y^2(\tau) d\tau \quad (3.24)$$

Cette phase se poursuit suivant une évolution régulière de y jusqu'à l'instant T_v où $\Delta_1 = \frac{C}{C_1}$. A partir de cet instant, il y a apparition de la phase 3 puisque le critère de rupture est à ce moment atteint à la paroi du tunnel.

Remarque.

L'indice (.) désigne la dérivée par rapport au temps adimensionnel défini précédemment.

PHASE 3

Dans cette phase, il y a trois zones : une zone élastique, une zone viscoplastique et une zone viscoplastique avec rupture. Cette dernière zone caractérise typiquement le comportement viscoplastique avec rupture du massif puisque dans cette zone, ϵ_p et ϵ_{vp} évoluent simultanément. L'évolution des différents rayons suit des équations différentielles qui sont obtenues suivant la caractérisation de chaque zone. La Figure 3.5 nous montre les trois zones pendant cette phase.

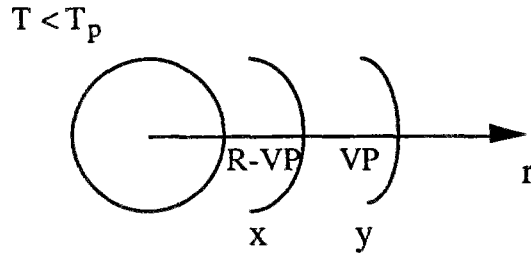


Figure 3.5. Différentes zones pendant la phase 3

a) Dans la zone viscoplastique VP, il n'y a pas de déformation plastique : on a donc $\epsilon_p = 0$.

Les deux équations fondamentales ainsi que la loi de comportement viscoplastique s'écrivent comme dans le cas de la PHASE 2 sous la forme suivante :

$$E \frac{\partial \epsilon_{vp}}{\partial T} = -2C_1(1 - \Delta) \quad \Delta \text{ étant le déviateur réduit des contraintes} \quad (3.25)$$

$$E \epsilon_{vp} = 2C_1 \left(\frac{y^2}{r^2} - \Delta \right) \quad (3.26)$$

Le traitement de ces deux équations (dérivation par rapport à T de 3.26, élimination de ϵ_{vp} et intégration dans le temps) est donc le même qu'en phase 2.

Dans l'expression du déviateur des contraintes obtenue dans la phase 2, la condition

$\Delta(x, T) = \frac{C}{C_1}$ (le déviateur vaut exactement $2C_1$ à la frontière des 2 zones irréversibles)

nous permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\frac{C}{C_1} = 1 + \frac{1}{x^2} \int_{T_1(x^2)}^T \exp(\tau - T) y^2(\tau) d\tau \quad (3.27)$$

La dérivation de cette équation par rapport au temps conduit à l'équation différentielle suivante :

$$y^2 = x^2 \left(\frac{C}{C_1} - 1 + e^{T_1(x^2) - T} \right) + x^2 \left(\frac{C}{C_1} - 1 \right) \quad (3.28)$$

L'intégration de (3.20) entre les rayons de la zone viscoplastique avec rupture x, et le rayon de la zone viscoplastique y conduit alors à l'équation d'évolution de la contrainte radiale en x soit:

$$\dot{\sigma}_x + \sigma_x = C_1 - P_\infty + C_1 \frac{y^2}{x^2} - C \frac{x^2}{x^2} + C_1 \text{Log}\left(\frac{y^2}{x^2}\right) \quad (3.29)$$

b) Dans la zone viscoplastique avec rupture VP-R, le critère de plasticité est atteint, on a donc :

$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -2C$ (nullité du critère) qui nous donne l'expression de la contrainte radiale dans cette zone après intégration entre 1 et le rayon r compte tenu de la condition aux limites en r=1:

$$\sigma_r = -C \log(r^2) - P_i(T) \quad (3.30)$$

En écrivant cette expression en r=x et en la remplaçant dans l'équation (3.29) valable dans la zone viscoplastique, on obtient l'équation suivante :

$$C_1 \frac{y^2}{x^2} = P_\infty - C_1 - C_1 \log\left(\frac{y^2}{x^2}\right) - C \log x^2 - P_i - \dot{P}_i \quad (3.31)$$

En résumé, dans la phase 3, le problème se ramène donc à la résolution du système différentiel (deux équations) suivant portant sur x et y :

$$y^2 = x^2 \left(\frac{C}{C_1} - 1 + e^{T_1(x^2) - T} \right) + x^2 \left(\frac{C}{C_1} - 1 \right) \quad (3.32)$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{P_\infty - P_i - \dot{P}_i}{C_1} - \log\left(\frac{y^2}{x^2}\right) - \frac{C}{C_1} \log x^2 - 1 \quad (3.33)$$

Cette phase se poursuit jusqu'à ce que la valeur de la pression ne varie plus au cours du temps : elle devient constante. A cet instant T_p , apparaît alors la dernière phase.

PHASE 4

Au cours de cette phase, P_i reste constante égal à P_0 . Seul le rayon de la zone viscoplastique continue à évoluer (Figure 3.6).

Cette phase, est caractérisée par l'existence d'une zone de rupture à comportement incrementalement élastique de rayon x_0 égale à la valeur du rayon viscoplastique avec rupture acquise juste à la fin de l'évolution de la phase 3. Dans cette zone, la déformation de rupture n'évolue plus.

Partout entre la paroi du tunnel et un rayon r on a les deux équations fondamentales qui sont toujours vérifiées, soit :

$$E \cdot \frac{\partial \varepsilon_{vp}}{\partial T} = -2C_1(1 - \Delta) \quad (3.34)$$

$$E'(\varepsilon_{vp} + \varepsilon_p^0) = 2C_1\left(\frac{y^2}{r^2} - \Delta\right) \quad (3.35)$$

ε_p^0 est la valeur de la déformation plastique acquise à la fin de la phase 3 et ne dépend pas du temps. La dérivation de la dernière équation par rapport au temps et la comparaison avec la première nous donne l'équation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial T} + \sigma_r\right) = -2C_1\left(\frac{1}{r} + \frac{y^2}{r^3}\right) \quad (3.36)$$

C'est la même équation que dans la phase 3, mais on peut cette fois l'intégrer dans toute la zone viscoplastique, c'est à dire entre la paroi de rayon 1 et le rayon y , on obtient alors l'équation d'évolution du rayon viscoplastique pendant cette phase soit :

$$\dot{y}^2 + \log(y^2) = \frac{P_\infty - P_0}{C_1} - 1 \quad (3.37)$$

On retrouve ainsi l'équation d'évolution de y dans la phase 2.

La Figure 3.6 ci-dessous représente les différentes zones au cours de cette phase 4.

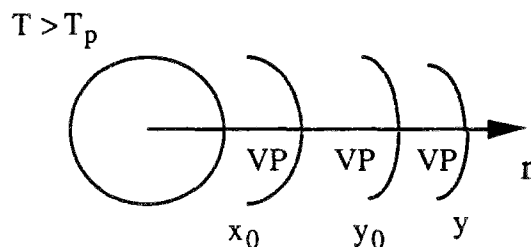


Figure 3.6. Zones dans la phase 4

3.2.2 Résolution numérique des équations du problème du tunnel

Méthode de résolution des équations différentielles obtenues

Une grande variété de méthodes ont été mises au point pour trouver des solutions approchées à des équations différentielles du type de celles établies au paragraphe précédent [Dhatt&Touzot, 1984]. Nous pouvons citer par exemple :

1) La méthode d'Euler, fondée sur le calcul d'un ensemble discret de valeur y_k pour des argument x_k en utilisant l'équation aux différences finies

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \text{ avec } h = x_{k+1} - x_k$$

C'est une approximation simple mais pas très précise de l'équation $\dot{y} = f(x, y)$ et bien qu'elle soit trop lente à converger pour permettre effectivement des solutions précises, elle fournit une démonstration très satisfaisante du théorème fondamental d'existence.

On démontre qu'une suite infinie de solutions approchées obtenues par la méthode d'Euler est convergente et sa limite est la solution exacte du problème différentiel.

2) Les méthodes de Runge-Kutta ont été développées pour éviter le calcul des dérivées d'ordre supérieur, souvent nécessaire dans le développement en série de Taylor. Des valeurs supplémentaires de la fonction $f(x,y)$ donnée sont utilisées à la place de ces dérivées d'une manière qui copie très exactement la précision donnée par un polynôme de Taylor. L'expression la plus courante de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est :

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ avec}$$

$$k_1 = hf(x, y)$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x+h, y+k_3)$$

Il existe cependant de nombreuses autres expressions pour cette méthode de Runge-Kutta.

Dans le cadre de la résolution des équations différentielles décrivant l'évolution des rayons des différentes zones et la convergence du tunnel, nous avons utilisé une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 dont les expressions analytiques sont données ci-dessus. La convergence est assurée étant entendu que la fonction $y(x)$ possède suffisamment de dérivées continues. Sur la base de cette méthode, nous étudions l'évolution de des équations différentielles établies au paragraphe précédent.

ANALYSE DES RESULTATS NUMERIQUES

Comparaison avec la solution viscoplastique

Pour un comportement simplement viscoplastique du massif, les hypothèses précédentes permettent d'obtenir l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de la convergence en paroi du tunnel [Yamatomi&al, 1993]. Cette équation est la suivante :

$$\frac{E'}{2C_1} \dot{U}_i = -\frac{E'}{\eta} \text{Log}\left(\frac{E'}{2C_1} U_i\right) - \frac{\dot{P}_i}{C_1} + \frac{E'}{\eta} \frac{P_\infty - P_i - C_1}{C_1} \quad (3.38a)$$

Il est alors intéressant de comparer l'évolution de la convergence obtenue par le modèle viscoplastique avec rupture avec celle de l'équation (3.38a).

Pour se faire, nous considérons par exemple le jeu de paramètres suivants : $E=1500$ MPa $C=1,5$ MPa $C_1=1,2$ MPa $\eta=5000$ MPa.jours et $P_\infty=6$ MPa. Ces valeurs qui ne correspondent pas à celles de la première partie ne sont pas d'un intérêt pratique. En effet, il s'agit d'une première appréciation du modèle dont l'objectif est de tirer des enseignements en vue des calculs par éléments finis.

Les figures 3.7a à 3.7d nous montrent la comparaison entre les deux solutions (solution viscoplastique avec rupture VPR et solution viscoplastique simple VP), pour

une valeur de $P_0=0,5$ MPa. Ces courbes sont obtenues pour différentes valeurs du paramètre T_p . Logiquement, les deux courbes convergent vers la même valeur (solution plastique avec seuil égal à C_1). On observe que pour de faibles valeurs de T_p , l'écart entre les deux solutions pendant la phase transitoire est très important (3.7a et 3.7b), pour des valeurs assez élevées, cet écart est moins important (3.7c).

Ce résultat traduit le fait que pour des chargements lents, les contraintes dans le massif ont le temps de se relaxer (phénomènes visqueux) Le développement de la rupture n'est plus significatif comme on peut le voir sur la figure (3.7d) pour une valeur de T_p beaucoup plus grande, et où les deux courbes sont presque confondues.

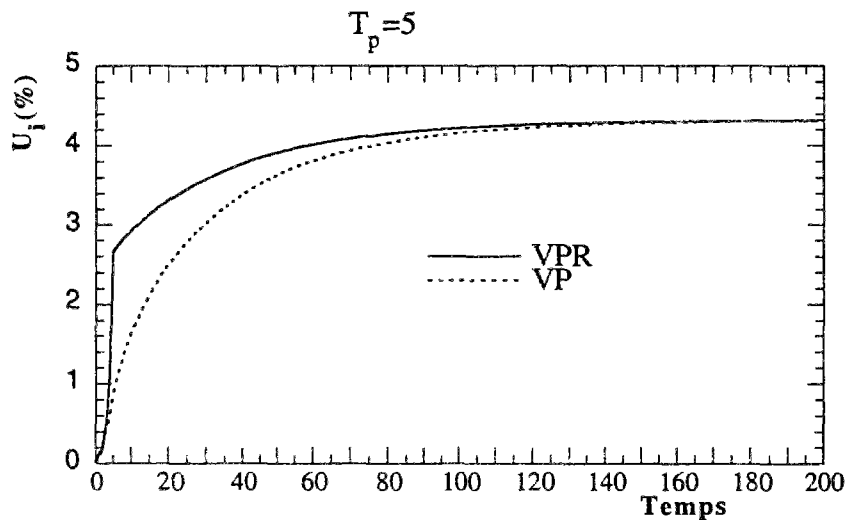


Figure 3.7a. Convergence en fonction du temps ($T_p=5$)

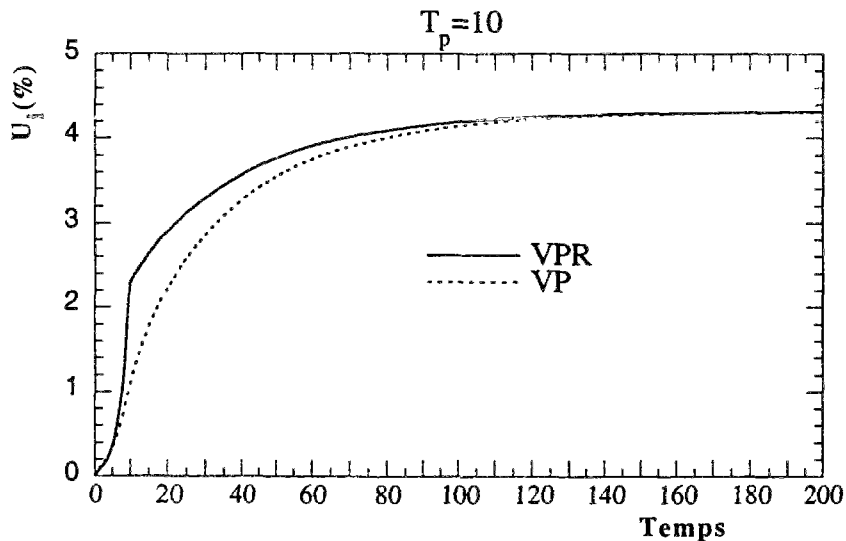


Figure 3.7b. Convergence en fonction du temps ($T_p=10$)

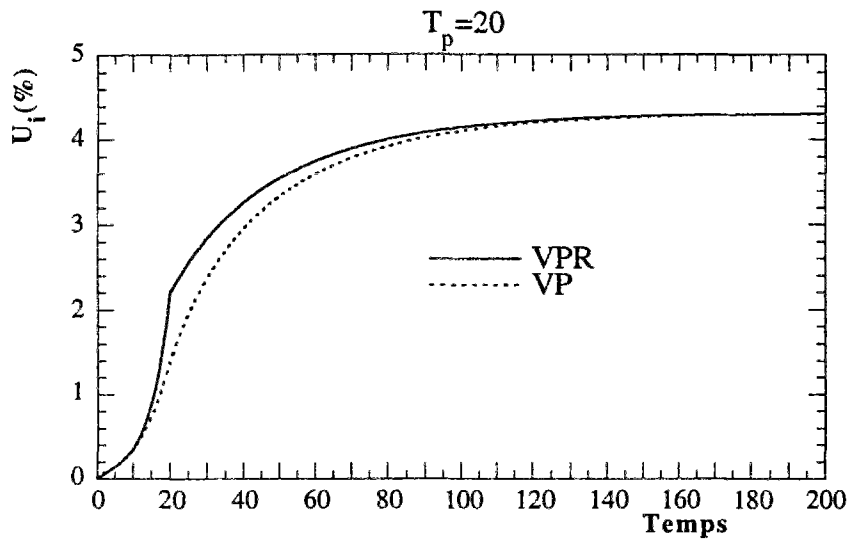


Figure 3.7c. Convergence en fonction du temps ($T_p=20$)

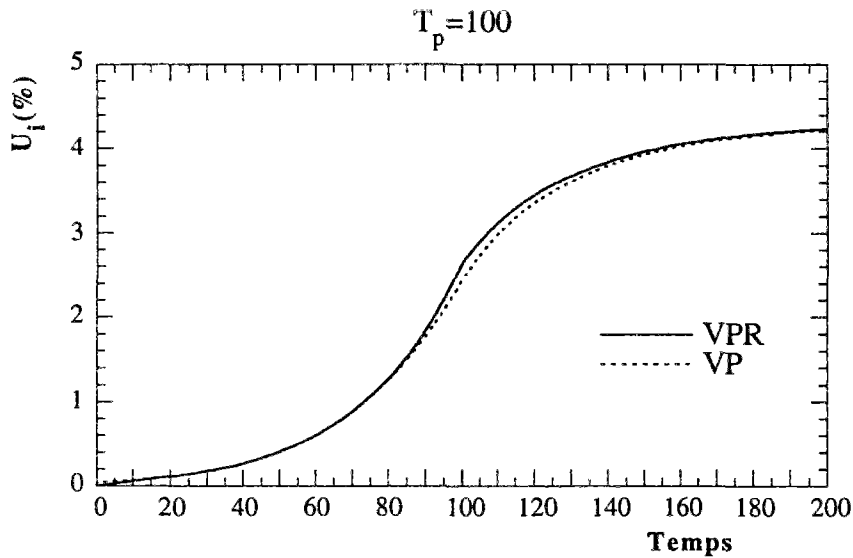


Figure 3.7d. Convergence en fonction du temps ($T_p=100$)

Autres analyses

Pour cette analyse nous avons pris $C=2$ MPa, les autres paramètres sont les mêmes que précédemment. Nous allons considérer les paramètres de chargement suivants: 0,5 MPa, 1 MPa et 2 MPa pour P_0 , et $T_p=5, 10, 20$ et 100. Les valeurs dimensionnelles correspondantes du temps sont respectivement de 12,5; 25; 50; et 250 jours. Pratiquement ces valeurs caractérisent le temps de construction du tunnel.

Paramètres de chargement

a) $P_0 = 0,5$ MPa, cette valeur correspond à une pression de soutènement assez faible, par conséquent les valeurs des déformations finales sont relativement élevées.

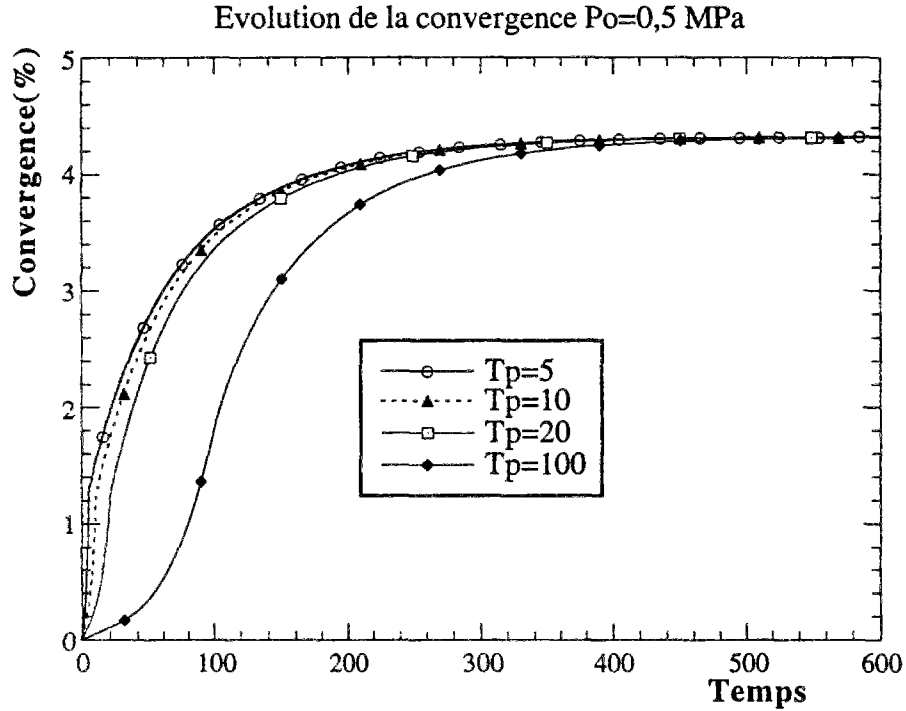


Figure 3.8a: Évolution de la convergence

La Figure 3.8a ci-dessus nous montre l'évolution en fonction du temps de la convergence en paroi pour les quatre valeurs du paramètre T_p . Nous remarquons premièrement que les courbes convergent toutes vers la même valeur égale à :

$$U = \frac{2}{E} C_1 e^{\left(\frac{P_\infty - P_0}{C_1} - 1 \right)} \quad (3.38)$$

En effet, l'équilibre final de l'ouvrage est celui qui correspond à la solution classique du tunnel en milieu plastique parfait avec critère de Tresca de cohésion C_1 . Cet équilibre final ne dépend donc pas du fait qu'il y ait eu rupture ou pas pendant la phase transitoire. On verra dans la partie 3 qu'il n'en est pas de même pour des trajets de chargement plus complexes.

En revanche, les évolutions de la convergence pendant la phase transitoire sont très différentes suivant les valeurs du paramètre de chargement T_p . Plus ce paramètre est faible, ce qui correspond à des grandes vitesses de chargement (faible durée de construction dans la pratique), plus l'évolution de la convergence vers la solution viscoplastique parfaite est rapide.

En comparant par exemple les cas $T_p=10$ et $T_p=100$, on observe que la solution après l'instant 200 (adimensionnel) dans le premier cas est supérieure de l'ordre de 20% à celle du deuxième cas.

Dès que la pression en paroi cesse de varier ($T > T_p$), l'évolution de la convergence diminue sensiblement comme nous le montrent les différents instants sur la figure 3.8b. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que pendant cette phase, seules les déformations viscoplastiques évoluent et elles sont les seules à influencer l'évolution de la convergence.

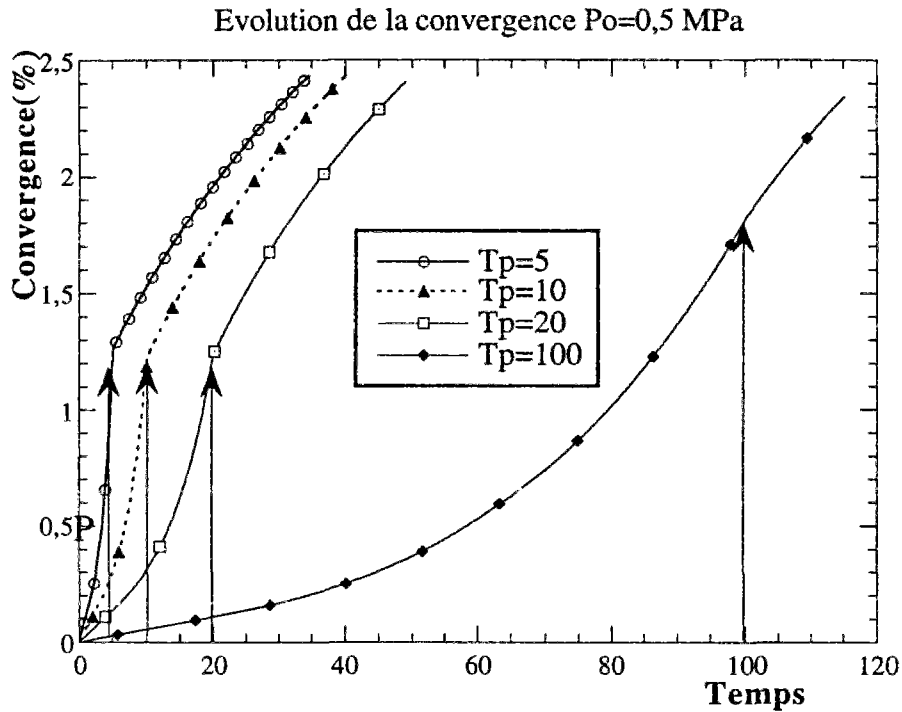


Figure 3.8b. Différents instants pendant l'évolution de la convergence

L'évolution de la convergence est de forme exponentielle jusqu'à l'instant T_p , ensuite devient logarithmique. Cette différence s'explique par la contribution des déformations plastique pendant la phase transitoire. De plus, la valeur de la convergence pour des valeurs de T_p égales à 5, 10 et 20 est sensiblement identique (1,2%), et s'explique par le fait que la phase transitoire pour ces valeurs est assez courte. En revanche, la phase transitoire correspondant à $T_p=100$ est beaucoup plus longue, et explique pourquoi la valeur de la convergence est plus élevée pour cette valeur.

b) Extension maximale de la zone de rupture et de la zone viscoplastique.

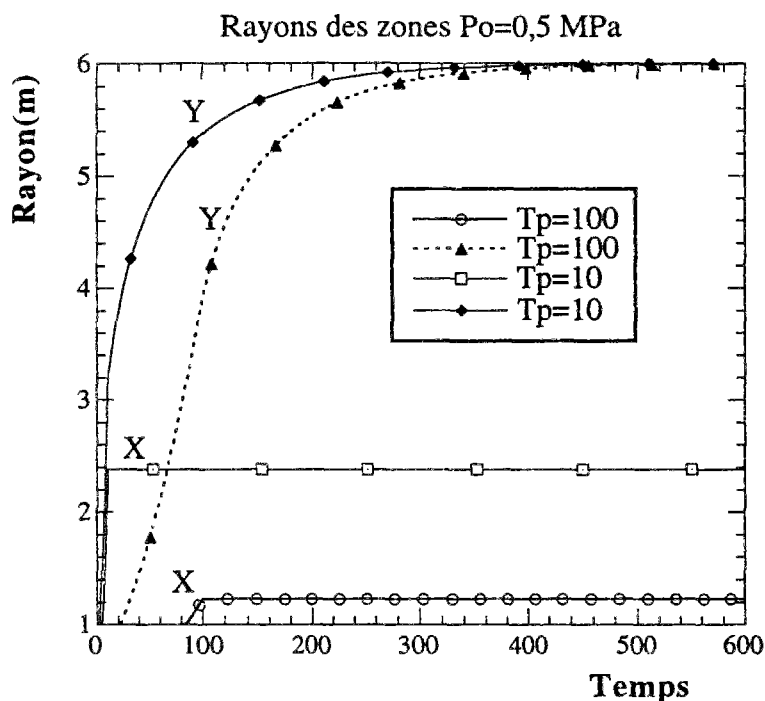


Figure 3.9a : Évolution des rayons

La Figure 3.9a ci-dessus, nous montre l'évolution du rayon de la zone de rupture et celle de la zone viscoplastique pour deux valeurs extrêmes du paramètre de chargement ($T_p=10$ et $T_p=100$). Dans les deux cas, le rayon de la zone viscoplastique converge vers la même valeur, proportionnelle à la racine carré de la convergence finale du tunnel.

Par contre, les valeurs correspondantes du rayon de l'extension maximale de la zone de rupture sont différentes suivant les valeurs du paramètre de chargement T_p . Dans le cas d'un chargement très lent, $T_p=100$ par exemple, cette valeur est très proche de celle du rayon du tunnel, ce qui signifie que la rupture s'est très peu développée pendant le chargement. Alors que dans le cas d'un chargement rapide, $T_p=10$ par exemple, cette valeur est nettement plus grande que celle du rayon intérieur du tunnel. La rupture s'est considérablement développée au cours du chargement.

c) Instant d'apparition des différentes zones

L'examen détaillé de la Figure 3.9a nous montre (Figure 3.9b) les instants d'apparition des différentes zones de rupture et de viscoplasticité.

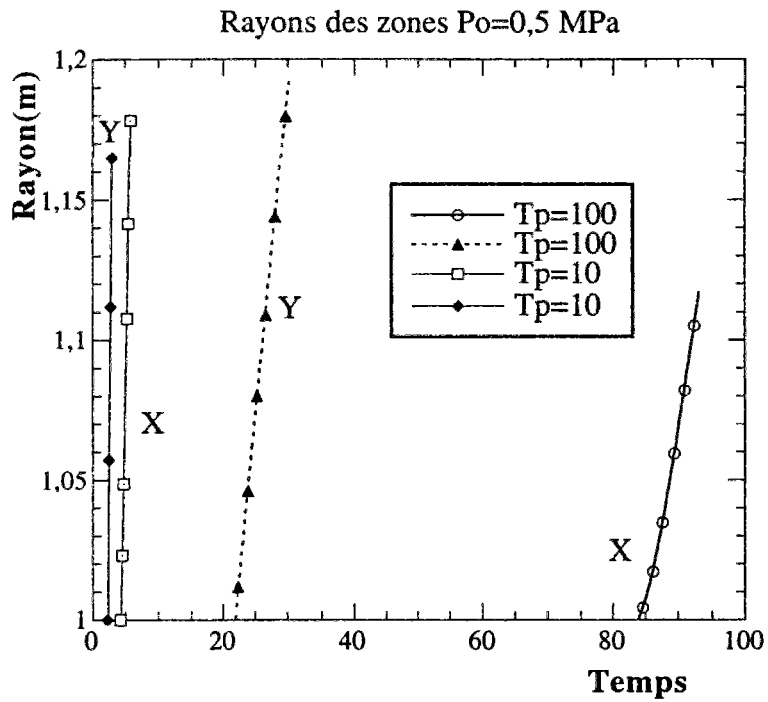


Figure 3.9b : Instants d'apparition des zones

Pour le cas de chargement où $T_p=10$, le rapport entre le temps d'apparition de la zone de rupture et celui de la zone viscoplastique est inférieur à 2, alors que dans le cas $T_p=100$ ce rapport est de l'ordre de 4. Ceci traduit le fait que plus le chargement est rapide, plus la valeur du rayon de l'extension maximale des différentes zones est grande.

d) Autres analyses

Les Figures 3.10 et 3.11 ci-dessous nous montrent l'évolution de la convergence pour différentes valeurs de pression en paroi.

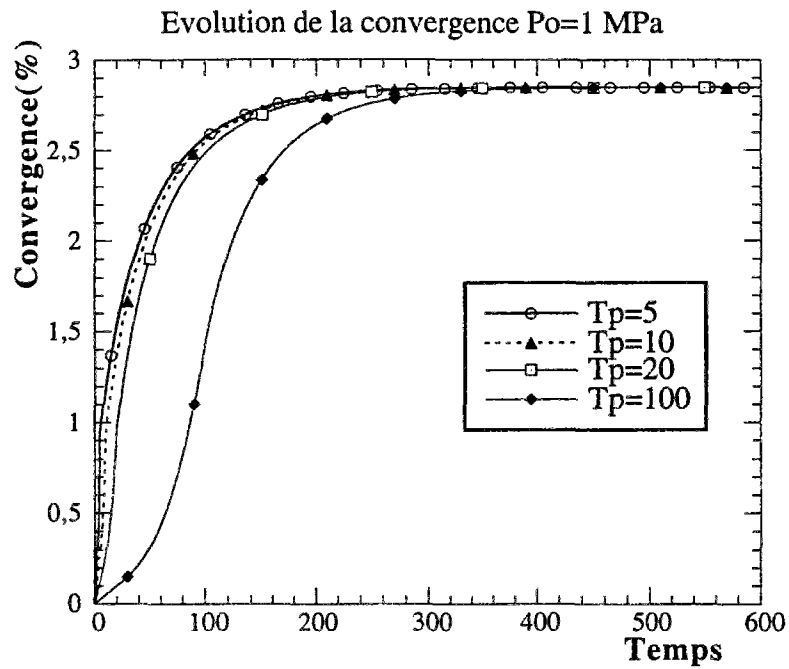


Figure 3.10a : Convergence en fonction du temps

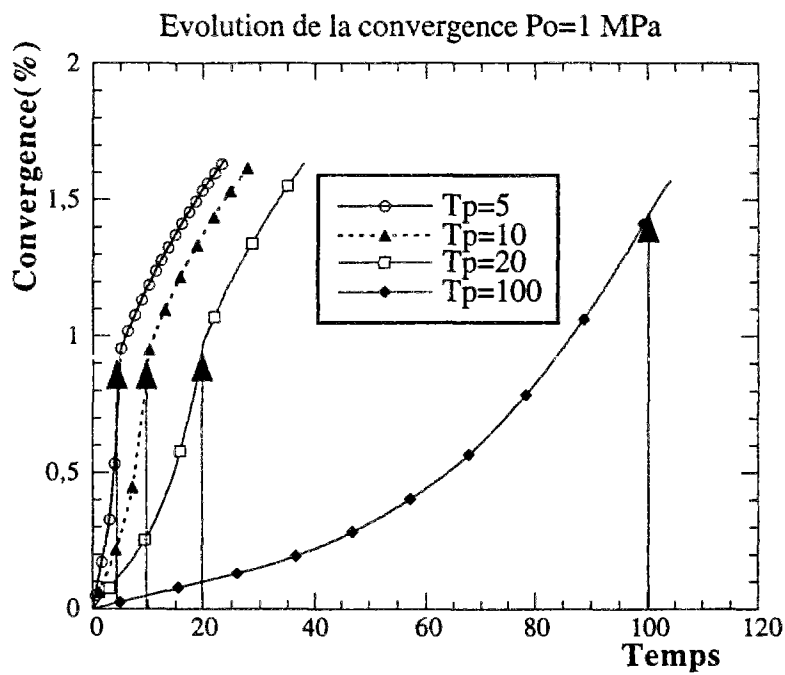


Figure 3.10b. Différents instants T_p