

Étude de la place de la logique dans les programmes de mathématiques pour la classe de Seconde depuis 1960

Sommaire

5.1	Analyse globale des programmes	182
5.1.1	1960-1969 : l'avant mathématiques modernes	182
5.1.2	1969-1981 : Les mathématiques modernes	189
5.1.3	1981-1999 : La contre-réforme	194
5.1.4	1999 puis 2009 : un retour d'abord timide, puis plus marqué . .	197
5.1.5	Résumé de l'évolution des programmes	201
5.2	Analyse par notion de logique des documents qui accom-	
	pagnent les programmes	202
5.2.1	Proposition et variable	202
5.2.2	Connecteurs ET et OU	203
5.2.3	Négation	205
5.2.4	Implication	206
5.2.5	Les quantificateurs	209
5.2.6	Les différents types de raisonnement dans les programmes et textes d'accompagnement	212
5.3	Synthèse de l'étude des programmes et documents d'accom-	
	pagnement	213

L'étude de l'évolution des programmes et textes d'accompagnement de ces programmes présente un double intérêt pour l'étude didactique :

- d'une part, par rapport aux notions mathématiques étudiées, regarder comment leur enseignement a évolué à travers différentes époques permet de voir différentes approches possibles de ces notions dans l'enseignement.
- D'autre part, par rapport aux pratiques des enseignants, le programme qui a cours est évidemment un document de référence, mais l'expérience des programmes antérieurs qu'ils ont eu à enseigner est également influente.

Le but de l'étude est de rechercher dans ces documents les traces de la réponse de l'institution aux questions « pourquoi et comment enseigner la logique en classe de mathématiques ? » C'est-à-dire d'étudier *l'écologie* de la logique dans la classe de mathématiques, écologie au sens de l'étude des relations entre un objet et son environnement. Les outils de l'approche écologique, au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique, permettent une analyse du *texte du savoir* qui éclaire les enjeux des choix pour le *savoir à enseigner*. Ces enjeux participent d'un « système de conditions et de contraintes » auquel est soumis l'enseignant. Pour analyser les programmes, je suivrai la démarche proposée par Michèle Artaud dans son cours à la IX^e École d'Été de didactiques des mathématiques :

un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour [de lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où on [le] trouve et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis regarder en chacun de leurs habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. Nous pourrons alors envisager la transposition de ces complexes d'objets dans l'enseignement secondaire. (Artaud, 1997, p. 111)

Avant les années 60, aucune notion de logique n'est vraiment présente dans l'enseignement des mathématiques au lycée, même si l'apprentissage du raisonnement est bien sûr depuis longtemps un objectif de cet enseignement. C'est dans cet esprit que les *Instructions complémentaires relatives à l'enseignement des mathématiques* de 1957 mentionnent la logique :

Sans doute, nul ne contestera qu'il [l'enseignement des mathématiques] apporte aussi, par sa nature même, une contribution essentielle à la formation et au développement de l'esprit dans l'ordre de la logique, de la rigueur et de la précision.

Puis, plus loin :

Les principales difficultés auxquelles se heurtent les débutants sont d'abord des difficultés techniques pour prendre pied dans le monde conventionnel des symboles, des représentations figurées et schématiques ; un peu plus tard, apparaissent les difficultés logiques pour prendre possession des idées d'ordre, d'enchaînement, de déduction.

Mais si des pistes sont suggérées pour le premier type de difficulté, ce qui concerne les difficultés logiques n'est pas évoqué à nouveau.

Gardons également à l'esprit les premières phrases de ces instructions qui signalent déjà une donnée du contexte social qui jouera un rôle important pour porter la réforme des mathématiques modernes, à savoir une demande de la société d'un nombre plus important de scientifiques :

Des voix autorisées ne cessent, depuis quelques années, de signaler le grave danger que fait courir à notre pays, sur le plan intellectuel comme sur le plan économique, le manque de plus en plus sensible d'ingénieurs, de chercheurs, de techniciens, et de souligner l'urgente nécessité d'orienter vers des carrières scientifiques, à des niveaux variés, un nombre croissant de jeunes. Le même souci se manifeste, à des niveaux variés, à peu près partout dans le monde.

Je commencerai l'analyse des programmes et textes d'accompagnement avec les textes de 1960. Les *Instructions du 19 juillet 1960. Programmes de mathématiques des classes de Seconde A', C, M, M* donnent des « indications d'ordre général pour attirer l'attention sur des points particulièrement importants » et le premier paragraphe concerne *L'initiation au raisonnement logique*. L'extrait suivant se situe à la fin de ce paragraphe :

C'est donc à l'enseignant du second cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait ; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles.

Avant d'entrer plus en avant dans l'analyse, comparons tout de suite cet extrait avec un extrait du *Programme de mathématiques. Classe de Seconde* de 2009 :

Le développement de l'argumentation et **l'entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la Seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à distinguer implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme.

Bien sûr, nous retrouvons dans ces extraits deux conceptions différentes de l'enseignement : le professeur de 1960 a la charge d'une « initiation », tel un maître spirituel, là où celui de 2009 a la charge d'organiser un « entraînement », tel un entraîneur sportif. Nous retrouvons une conception plus magistrale de l'enseignement en 1960, et une conception dans laquelle l'élève est voulu acteur de ses apprentissages en 2009.

Au delà de ces différences de ton, je voudrais souligner la proximité des contenus de ces deux extraits. La logique a sa place dans l'enseignement des mathématiques au lycée, pas enseignée pour elle même dans un exposé à part, mais intégrée à l'activité mathématique dans son ensemble. Dans la suite je présenterai une analyse plus fine des ces programmes : les similarités et les différences seront ainsi mieux caractérisées.

L'objet de ce chapitre est de comprendre ce qui s'est passé entre ces deux époques concernant l'enseignement de notions de logique au lycée. Je divise cet aperçu historique en 4 périodes :

- de 1960 à 1969 : en 1960, la logique fait une entrée dans les programmes. Et dans les années qui suivent, des expériences sont faites sur le terrain, certaines pratiques d'enseignement sont débattues, notamment en ce qui concerne l'emploi des symboles logiques.
- de 1969 à 1981 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1969 est celui des mathématiques modernes. C'est une période dans laquelle la logique est objet explicite d'enseignement. Mais cette réforme donne rapidement lieu à de vives critiques.
- de 1981 à 1999 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1981 est celui de la contre-réforme. La logique en est exclue, accusée de participer au formalisme excessif reproché aux mathématiques modernes. Cette exclusion se poursuit dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1990.
- depuis 1999 : la logique fait un timide retour dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1999, puis dans le programme pour la classe de Première de la section littéraire en 2004, puis finalement un retour plus explicite dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009, où figure un tableau d'objectifs concernant « notations et raisonnement mathématiques » (voir page 200).

Pour connaître le contexte dans lequel est écrit chacun de ces programmes, je m'appuie notamment sur différents textes publiés par l'A.P.M.E.P.¹ Je fais l'hypothèse qu'ils reflètent les interrogations de la communauté de l'enseignement des mathématiques. Des positions diverses s'y expriment, pas seulement celles prises officiellement par l'association. Je fais ainsi des aller-retour entre analyses des programmes à l'aide des outils de l'analyse écologique qui permettent de préciser la demande institutionnelle, et analyses des bulletins de l'APMEP, qui aident à en comprendre l'évolution, en montrant le point de vue des acteurs de la mise en œuvre de cette demande.

J'ai finalement utilisé la méthodologie d'analyse suivante :

- (1) j'ai reperé dans les textes de programmes et d'accompagnement de ces programmes où était présente la logique (son *habitat*), et quelle était sa fonction (sa ou ses *niche(s)*) (les textes étudiés sont listés page 439).

1. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

- (2) J'ai ensuite recherché dans les textes de l'A.P.M.E.P. des éléments du contexte de chaque période qui pouvaient caractériser le rôle attribué à la logique dans l'enseignement des mathématiques :
- j'ai relevé tous les textes consacrés à la logique dans les *Bulletins de l'APMEP* (les articles cités sont listés page 441),
 - j'ai étudié certains textes dans lesquels l'A.P.M.E.P. affiche ses positions pédagogique et didactique, notamment la Charte de Chambéry de 1968 et la Charte de Caen de 1972.
- (3) J'ai finalement étudié plus en détail ce qui était dit pour chaque notion de logique dans les documents qui accompagnent les programmes de 1969 et de 2009.

5.1 Analyse globale des programmes

5.1.1 1960-1969 : l'avant mathématiques modernes

Les textes officiels : importance affirmée de la maîtrise du raisonnement, entrée discrète de notions de logique associées au travail sur le langage

Le contexte mathématique Les mathématiques françaises sont en train de vivre des changements importants. Le groupe de mathématiciens N. Bourbaki publie en 1939 un premier fascicule de résultats sur la Théorie des Ensembles, édité chez Hermann, dans la collection *Actualités scientifiques et industrielles*, et en 1954 un fascicule comportant les deux premiers chapitres des *Éléments de mathématique* intitulés *Description de la mathématique formelle* et *Théorie des ensembles*. Les mathématiciens du groupe Bourbaki ne sont pas des spécialistes de logique mathématique, et leur but n'est pas d'exposer les résultats importants déjà obtenus dans cette nouvelle branche des mathématiques. Mais ils veulent construire leur exposé de la mathématique sur des bases logiques rigoureuses. Ils présentent alors quelques notions de logique mathématique, qui fondent le langage et les raisonnements utilisés dans leur présentation axiomatique de la mathématique. Les mathématiciens français de l'époque sont surtout influencés par la notion de structure, sur laquelle Bourbaki fonde son traité. Mais ils sont moins concernés par ce qui y est dit de la logique. Malgré tout, le symbolisme logique utilisé par Bourbaki va rapidement s'imposer dans la communauté mathématique et plus tard dans l'enseignement (symboles d'implication, d'équivalence, des quantificateurs universel et existentiel). En France, ce que l'on appelle *les mathématiques modernes* sont directement d'inspiration bourbakiste. Elles sont basées sur l'étude des structures, leur langage et leurs raisonnements sont fondés sur la logique mathématique et la théorie des ensembles, et elles sont exposées selon la démarche axiomatique. L'introduction de notions de logique mathématique dans l'enseignement va être fortement liée à ces mathématiques modernes.

Par ailleurs, en sciences humaines, le structuralisme continue de se développer. Il trouve son origine dans le *Cours de linguistique générale* de F. Saussure (1916), où celui-ci envisage d'étudier la langue comme un système dans lequel chacun des éléments n'est définissable que par les relations d'équivalence ou d'opposition qu'il entretient avec les autres. Il s'étend ensuite à d'autres sciences humaines (un des représentants les plus célèbres de ce courant est l'anthropologue Claude Lévi-Strauss), et le langage mathématique des structures est volontiers utilisé au sein de ce courant.

Dans l'enseignement, une modification profonde des contenus est en germe dès les années 50, et commence à l'université. Un moment important de ce renouveau est l'année 1954, quand G. Choquet remplace G. Valiron pour le cours de calcul différentiel et intégral à l'université de Paris. Dans un article pour la *Gazette* de la S.M.F.² (M. Rogalski, 2007), Marc Rogalski parle de « l'aspect révolutionnaire » de ce cours, qui ouvre la porte à une réforme de la licence de mathématique en 1958. Bien qu'émettant des réserves sur l'entreprise bourbakiste, G. Choquet est un fervent partisan de l'axiomatique, notamment au sein de l'A.P.M.E.P., comme le soulignent E. Barbazo et P. Pombourcq dans *100 ans d'APMEP* :

Le débat sur l'axiomatique, qui soulève la question pédagogique de l'introduction des mathématiques dès le plus jeune âge, prend forme dans certains contenus de manuels scolaires écrits pour les nouveaux programmes [de 1960]. [...] L'engouement pour l'axiomatique et ses vertus pédagogiques, dégagé par les travaux de la commission *Axiomatique et redécouverte*, est avéré au sein de l'A.P.M.E.P. et surtout de ses dirigeants. Vu le nombre de ses conférences publiées dans le Bulletin, Gustave Choquet est, sans conteste, celui qui va être l'un des plus influents au sein de l'association pour que cette conception d'apprentissage des mathématiques convainque la population enseignante. (Barbazo & Pombourcq, 2010, p. 71)

Le renouveau de l'enseignement des mathématiques va peu à peu gagner l'enseignement secondaire. Voyons maintenant la trace de cette évolution dans les textes officiels.

Les programmes et instructions complémentaires En 1960, le programme de mathématiques qui est appliqué est celui de 1959. Aucune notion de logique n'y est évoquée. Mais des instructions publiées en juillet 1960 veulent « attirer l'attention sur des points particulièrement importants » dont certains sont reliés à la logique³.

Le premier paragraphe de ces instructions est intitulé *L'initiation au raisonnement logique*. Il y est rappelé l'importance de l'enseignement des mathématiques pour l'apprentissage du raisonnement, qu'il s'agisse de le comprendre ou de le produire. L'extrait déjà cité page

2. Société Mathématique de France

3. On trouvera en annexe l'intégralité des paragraphes en relation avec la logique, voir page 515.

180 assigne au professeur la tâche d'une « initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression ». Raisonement et langage sont ainsi également associés à la logique, à travers des notions qui « ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait ; [mais] doivent être dégagées et précisées peu à peu ». Il y a donc des notions de logique à transmettre, mais qui ne doivent pas être l'objet d'un enseignement spécifique. Par ailleurs, ces notions doivent « être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles ». Ainsi, les notions de logique ne sont pas particulièrement en relation avec certaines autres notions mathématiques, mais sont présentes partout.

Un autre paragraphe de ces instructions est relié à la logique, intitulé *Les notions « modernes »*. *Le vocabulaire et le symbolisme*. Il y est question des notions et notations ensemblistes (réunion, intersection, ensembles complémentaires, appartenance, inclusion). Il y a une certaine audace vis-à-vis du renouvellement du vocabulaire mathématique, les instructions proposent « ne serait-ce qu'à titre d'essai, et pour les mettre à l'épreuve, d'en employer certains dans les classes secondaires », mais elles invitent à la prudence dans cette démarche :

Il paraît prudent de ne proposer aux débutants (en dehors des signes élémentaires qu'ils connaissent déjà et qu'ils ont appris à manier) qu'un nombre raisonnable de symboles nouveaux, liés à la présentation de certaines notions susceptibles d'être correctement assimilées ; on peut citer, par exemple, et sans vouloir établir ainsi une liste limitative : quelques signes relatifs aux ensembles (réunion, intersection, inclusion, appartenance) ; ainsi que les « flèches » marquant une déduction ou une équivalence logique⁴.

Mais verbalisme et formalisme sont présentés comme un double danger, et les instructions mettent en garde contre les mots et les signes qui « ont pour le néophyte, l'attrait de la nouveauté ou du pittoresque », mais qui « risquent souvent de masquer la pensée. » Ici, les mots et les symboles sont vus comme étant un moyen d'expression de la pensée. Le fait que leur utilisation puisse, en retour, façonner la pensée, n'est pas évoqué.

Nous verrons plus loin avec les bulletins APMEP que cette ouverture concernant un nouveau vocabulaire et de nouveaux symboles suscite des débats. Une note du 29 janvier 1963 intitulée *Emploi de certains termes et de certains symboles dans l'exposé d'une question de mathématiques* a pour objet de « répondre à quelques préoccupations qui se sont manifestées récemment à propos de la présentation d'un texte de mathématiques, notamment en ce qui concerne l'emploi de certains termes ou de certains symboles ». Les définitions et les symboles relatifs aux notions élémentaires sur les ensembles, à l'implication et à l'équivalence logique, ainsi que les symboles des quantificateurs, sont explicitement mentionnés dans le programme de 1962 pour la classe Terminale de Mathématiques Élémentaires.

4. Nous pouvons voir ici la confusion décrite page 163 entre le connecteur IMPLIQUE marqué par une flèche et la déduction.

Cette note rappelle qu'il n'y a pas d'exigence en dehors de cette classe, ce qui a pour conséquence que lors d'examens ou de concours, aucune question ne peut les faire intervenir, mais elle précise également que puisque certains élèves ont pris l'habitude, parfois dès le premier cycle, de les utiliser, il faut que leur emploi correct soit accepté.

Un décret de juin 1965 vient modifier les filières de la classe de Seconde, qui sont maintenant réparties en une section littéraire A, une section scientifique C, une section technique industrielle T. Une circulaire d'août 1965 fixe les programmes de mathématiques pour ces sections. Il n'y est pas fait mention explicitement de notions de logique, mais le programme pour la section C contient une *Note préliminaire* qui indique que :

Le professeur s'attachera, tant en algèbre qu'en géométrie, à l'aide des nombreux exemples que fournissent les divers chapitres, à préciser quelques notions déjà rencontrées dans les classes précédentes : proposition réciproque, condition nécessaire, condition suffisante, propriété caractéristique. L'étude systématique de problèmes spéculatifs [...] permettra de dégager un certain nombre d'idées générales concernant la conduite logique d'un raisonnement : analyse, synthèse, emploi de conditions à la fois nécessaires et suffisantes, transformation d'un problème en un problème équivalent.

Ces indications sont dans la continuité des instructions de 1960, elles rappellent qu'en classe de Seconde, le raisonnement devient un objet d'étude et n'est plus seulement mis en œuvre.

Nous allons voir maintenant à travers l'étude de textes de l'A.P.M.E.P. que celle-ci se positionne plus explicitement en faveur d'un renouveau de l'enseignement des mathématiques, et que, sur le terrain, des expériences vont dans ce sens.

Les textes de l'A.P.M.E.P. : la préparation des mathématiques modernes sur le terrain

Dès 1946, des textes en faveur d'une réforme profonde de l'enseignement des mathématiques paraissent dans les Bulletins de l'APMEP. Il ne s'agit pas seulement de propositions pour déplacer telle notion d'une classe à une autre mais d'une modification globale des contenus.

Les débats sur la méthode axiomatique commencent dès cette époque, avec des opposants tels que M. Weber (textes dans les Bulletin n° 112 de 1946 et n° 165 de 1954) et des défenseurs tels que G. Thovert (texte dans le Bulletin n° 128 de 1949)

La charte de Chambéry (A.P.M.E.P., 1968) est une synthèse des textes de la *Commission Recherche et Réforme* créée par l'association en 1966. Elle s'intitule *Étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques*. L'A.P.M.E.P. prend clairement

position pour la nécessité d'une réforme de l'enseignement des mathématiques :

Que l'enseignement des mathématiques soit analysé dans son contenu, dans sa forme pédagogique, ou dans son rôle social ou économique, il est certainement très remarquable que les conclusions soient convergentes ; ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques, fruit de l'évolution des idées, s'adapte « comme un gant » nous permettrons-nous de dire, à la formation de la jeunesse de notre temps. Il est important que tous les citoyens et en premier lieu tous les éducateurs en comprennent bien les raisons et dans quelle voie favorable cela conduit l'enseignement. (A.P.M.E.P., 1968, p. 5)

Cette réforme des contenus doit s'accompagner d'une réforme pédagogique mettant en œuvre une pédagogie active, et dans cette même charte, les auteurs « tiennent à souligner que l'introduction d'un nouveau contenu dans l'enseignement des mathématiques serait inopérante, voire néfaste, si elle ne s'accompagne d'une pédagogie appropriée : active, ouverte, le moins dogmatique possible, faisant appel au travail par groupe et à l'imagination des enfants. » (A.P.M.E.P., 1968, p. 7)

À partir de 1956, l'A.P.M.E.P. organise avec la S.M.F. une série de conférence sur les mathématiques modernes. La logique mathématique n'y est pas particulièrement abordée. Par contre, un article de logique mathématique écrit par J. Balibar, intitulé *Un exemple d'abstraction, de formalisme et de métathéorie. La démonstration, par Kurt Gödel, de la compatibilité de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu avec les axiomes de la théorie des ensembles*, est publié dans les Bulletins n° 217 en 1961 et n° 222 en 1962. On trouve aussi des articles théoriques de logique mathématique de M. Glaymann, *Fonctions caractéristiques des connecteurs* dans le Bulletin n° 258 en 1967, et *Introduction à la logique* dans le Bulletin n° 260 en 1968. Ces deux articles sont écrits dans l'optique de la formation des professeurs à la réforme qui se prépare. L. Schwartz publie quant à lui *Le modèle d'une théorie des ensembles* dans le Bulletin n° 261 en 1968. La présence de ces articles théoriques montre la volonté de former les professeurs en matière de logique, la référence explicite pour l'enseignement de notions de logique étant la logique mathématique.

D'autres articles dans les Bulletins concernent le vocabulaire et les notations. L'utilisation des symboles ensemblistes et logiques se répand dans l'enseignement secondaire. Dans le Bulletin n° 198 en 1959, on trouve un paragraphe intitulé *Quelques termes et symboles de plus en plus employés* dans lequel figurent les symboles suivants, dans une rubrique *Logique* :

- \Rightarrow “ entraîne ” ; déduction logique
- \Leftrightarrow “ équivaut à ” ; équivalence logique

\forall “ quel que soit ” ou “ pour tout ” ; quantificateur universel

\exists “ il existe au moins un . . . tel que ” ; quantificateur existentiel

Mais l'utilisation de ces symboles divise la communauté des professeurs. Ainsi, dans le Bulletin n° 217 d'octobre-novembre 1961, trois commentaires sont publiés dans une rubrique *A propos des quantificateurs \forall et \exists* . Le premier, intitulé *L'opinion d'un professeur d'université*, signé J. Dixmier, se termine par :

Conclusion, il faudrait, à mon sens, interdire purement et simplement l'emploi des quantificateurs dans les copies, en expliquant que ce qui est permis au tableau ne l'est pas toujours dans une rédaction. En fait, cette nuance me paraît trop subtile pour les élèves, et, pour ma part, je n'emploie plus jamais ces signes, même au tableau.

Dans le deuxième, intitulé *L'opinion d'un professeur de lycée*, J.-L. Audirac, défend l'idée que « serait légitime tout symbole possédant une algèbre » et précise que ça ne peut pas être le cas pour les symboles de quantificateurs en classe de Seconde, mais que « naturellement, rien n'empêche d'utiliser des abréviations en spécifiant leur signification, à condition d'agir avec prudence ».

Le troisième commentaire, *L'opinion du troisième homme*, signé G. Walusinski, défend une autre position :

L'évolution de la langue mathématique vers une symbolique spéciale qui aurait, entre autres, l'avantage d'être universelle, n'est pas exclue. Dans l'état actuel des choses, l'usage alternatif des propositions exprimées en français puis en symboles, en symboles puis en français, renouvelle l'exercice classique du thème et de la version. En ce sens, les symboles \exists et \forall ont une valeur pédagogique, non pas « malgré » les fautes qu'ils font commettre, mais peut-être à cause de celles-ci. Ces fautes mettent en évidence la richesse de ces symboles, supérieure peut-être à celle que leur attribuaient les inventeurs (au fait : qui sont les inventeurs?).

Suit un exemple où une quantification universelle implicite masque une erreur dans la négation d'une proposition. G. Walusinski conclut alors :

Implicitement, là réside le noeud de la question. Les quantificateurs disent tout haut ce que tout le monde pense tout bas.

Vivent donc les quantificateurs.

Nous pouvons voir que le débat est réel, les positions idéologiquement tranchées, non seulement à propos des symboles de quantificateurs, mais aussi sans doute sur ce que sont les mathématiques. Le débat sur les symboles se poursuit dans d'autres bulletins, avec notamment de longues lettres de D. Lacombe (Bulletins n° 239, n° 240 et n° 241 en 1964), dans une rubrique intitulée *Les mots et les symboles*. Nous comprenons mieux alors, en lisant ces positions divergentes sur le terrain, la mise au point ministérielle faite à travers la note de janvier 1963 évoquée page 184.

Les évolutions du vocabulaire conduisent à la création, en 1960, d'une *Commission du Dictionnaire*. Elle produira de très nombreuses notices publiées jusqu'en 1980 dans une rubrique du Bulletin intitulée *Matériaux pour un dictionnaire*. Les articles *Déduire* publié dans le Bulletin n° 217 en 1961 par J. Balibar et *Implication* publié dans le Bulletin n° 231 en 1963 par G. Walusinski s'appuient sur la logique mathématique.

La période entre 1960 et 1969 prépare la réforme des mathématiques modernes, notamment sur le terrain. L'A.P.M.E.P. est favorable à une réforme et publie des récits d'expériences d'enseignement des notions modernes. Ainsi, dans le n° 217 en 1961, C. Pair, enseignant de Mathématiques Spéciales, relate l'expérience faite au Lycée Henri Poincaré de Nancy d'un « Cercle de mathématiques modernes ». Il passe chaque semaine une heure avec 19 élèves de Seconde et 3 de Première qu'il essaie d'initier aux notions modernes, selon le schéma de travail suivant :

(1) examen d'un ou plusieurs exemples ; (2) de ces exemples, on déduit la définition d'une notion générale (application d'un ensemble E dans un ensemble F , associativité d'une opération ...); (3) puis, sur de nouveaux et nombreux exemples, on regarde si cette définition s'applique ou non (l'opération milieu de deux points est-elle associative?).

Ce schéma d'organisation du travail est représentatif du fait que les partisans d'un enseignement des notions modernes ne sont pas seulement pour un renouvellement des contenus mais aussi pour un renouvellement des méthodes d'apprentissage, même si selon C. Pair le schéma présenté ici a encore un inconvénient :

Les élèves sont certes actifs, plus sans doute que dans l'enseignement classique, mais dans une étroite ligne tracée par le professeur : ils ne sont réellement découvreurs que d'exemples. Cela risque de donner une idée fautive de la mathématique, qui fait plus que codifier des notions.

C. Pair affiche son parti pris d'un renouvellement du langage à travers une formalisation bénéfique, et voit dans la logique un langage clair pour les raisonnements : « l'utilisation du symbolisme logique élimine au contraire impitoyablement toutes les insuffisances du raisonnement ».

Les avantages d'une telle formalisation sont également soulignés dans le texte de A. Z. Krygowska⁵, *Éléments de logique dans l'enseignement secondaire des mathématiques*, paru dans le Bulletin n° 251 en 1966. L'auteur se démarque ainsi de la prudence affichée dans les instructions de 1960. Elle relate un enseignement explicite de notions de logique, et

5. Anna Zofia Krygowska (1904-1988) est une logicienne polonaise qui s'est beaucoup investie dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Elle a travaillé sur l'enseignement de la logique, mais au-delà, elle a considéré tous les aspects de l'enseignement des mathématiques où une « analyse » logique peut être éclairante, et notamment tout ce qui concerne le langage et la communication dans la classe de mathématiques.

explique quels sont les buts qui lui sont assignés :

Une des conditions pédagogiques les plus importantes d'une modernisation rationnelle de l'enseignement des mathématiques nous semble donc consister : 1° dans la révélation expresse des idées logiques les plus simples sous-jacentes au contenu mathématique ; 2° dans la création d'un langage approprié - ces deux postulats étant dans des relations réciproques très serrées, *car si le langage reflète la pensée, il la structure aussi à son tour.*

Nous retrouvons dans ces postulats les deux piliers de la logique que sont le raisonnement et le langage. Comme nous l'avons vu dans l'étude épistémologique, la logique s'occupe de la validité des raisonnements, mais elle a besoin pour le faire d'un travail préalable sur le langage. Et finalement, on ne peut pas vraiment dissocier ce qui tient au langage de ce qui tient au raisonnement, puisque le raisonnement s'exprime dans un langage qui à son tour structure le raisonnement. La logique joue un rôle essentiel puisqu'elle fournit un langage de référence permettant une expression claire des idées, langage de référence signifiant non pas qu'il doive être forcément utilisé, mais qu'il est un outil d'analyse et de présentation de notre discours. La logique est effectivement présente dans ce but durant la période des mathématiques modernes.

5.1.2 1969-1981 : Les mathématiques modernes

Les textes officiels : la réforme des mathématiques modernes effectivement mise en place de l'école élémentaire à l'université

La commission Lichnérowicz En octobre 1966 est créée la *Commission ministérielle sur l'Enseignement des Mathématiques* présidée par A. Lichnérowicz, mathématicien et physicien théoricien, professeur au Collège de France. Cette création s'inscrit dans une triple logique de la part du ministère : promouvoir un enseignement des mathématiques modernes adapté à l'efficacité nouvelle des mathématiques à travers la notion de structure, assurer la démocratisation de l'enseignement moyen, mettre en place une rénovation pédagogique, ces deux derniers points ayant pour but de faire réussir *tous* les élèves. À sa création, la Commission compte dix-huit membres, essentiellement des mathématiciens : professeurs du supérieur, du secondaire, inspecteurs généraux. L'A.P.M.E.P. y est bien représentée.

La Commission rédige un rapport préliminaire publié dans le Bulletin n° 258 en 1967. Il y est réaffirmé la nécessité d'une réforme de l'enseignement des mathématiques :

Il nous faut désormais préparer nos enfants et nos étudiants à comprendre et à *utiliser* ce que sont devenues les mathématiques de notre temps. Cela n'est pas nécessaire, seulement, pour les futurs mathématiciens, ce l'est aussi pour les futurs citoyens quels qu'ils soient, si nous voulons qu'ils se meuvent

avec naturel et sans méfiance dans le monde d'aujourd'hui, qu'ils se servent des instruments nouveaux et puissants mis à leur disposition, qu'ils recourent aux schèmes de pensée qui peuvent conduire utilement leurs démarches.

C'est cette commission qui rédige les programmes pour la classe de Seconde de 1969 que je vais maintenant analyser.

Programme et instructions complémentaires de 1969 Dans le programme pour les classes de Seconde (il y a encore à l'époque trois sections A, C, T) apparaît un nouveau chapitre intitulé *Langage des ensembles* en chapitre I. Sa première partie est :

1. Emploi du vocabulaire de la logique : négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence ; réciproques de certaines assertions. Quantificateurs « quel que soit » et « il existe » ; négation d'assertions comportant éventuellement des quantificateurs.

Puis vient une partie sur les ensembles :

2. Ensembles : appartenance, inclusion, sous-ensemble, ensemble vide ; intersection, réunion, sous-ensembles complémentaires. Lien avec la logique. Produit cartésien de deux ensembles.

Dans ce programme, des notions de logique mathématique sont explicitement objets d'enseignement. On y utilise des termes « techniques » de la logique mathématique. Les notions listées sont les éléments du langage mathématique : connecteurs et quantificateurs. Ceci confirme ce qui est annoncé dans le titre du chapitre : le but est un apprentissage du langage mathématique.

Ce nouveau programme est accompagné en février 1970 d'un *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde*⁶. Ce nouveau chapitre est notamment l'objet d'un long commentaire dont « les lignes, rédigées en termes techniques, dépassent largement le développement qu'il est possible d'en faire dans les classes. » L'objet de ce commentaire est donc notamment la formation des professeurs, ces notions étant, pour certains d'entre eux, complètement nouvelles. Par ailleurs, il est précisé que « le chapitre I tout entier fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique, à tout moment, dans la suite du cours. » Ainsi, même s'il est préconisé que les notions de logique soient étudiées dans un chapitre particulier, leur présence et leur utilité dans tout le cours de mathématiques sont réaffirmés, comme cela était déjà le cas en 1960. Toujours dans la continuité du discours de 1960, la classe de Seconde reste celle où les élèves adoptent une position réflexive par rapport à leurs raisonnements, ce qui est rappelé dans l'extrait suivant :

Les élèves qui arrivent en Seconde ont déjà fait bien des raisonnements et appliqué ainsi des règles de logique, d'une manière peut-être plus spontanée

6. On trouvera en annexe page 517 l'intégralité de ce commentaire concernant les notions de logique.

que réfléchi; il convient de leur apprendre désormais, sur des exemples, à exprimer les raisonnements et les résultats dans une présentation plus méthodique.

La différence avec le programme de 1960 est surtout que la logique est plus fortement associée au langage. Le commentaire souligne l'existence d'un langage mathématique particulier et l'intérêt pour les élèves de le connaître :

La logique introduit, pour représenter les êtres sur lesquels elle raisonne, des symboles qu'elle soumet à un calcul formel ; l'emploi de ces symboles n'est pas indispensable en mathématiques et de très bons auteurs contemporains n'en font pas usage ; néanmoins, il a paru opportun d'initier à leur emploi, de façon juste et modérée, les élèves du second cycle : ils pourront ainsi s'exprimer de façon plus précise et éviter de commettre des incorrections, voire des contresens ; bien entendu, ils devront s'abstenir de parsemer de symboles, comme de sténogrammes, une rédaction à faire « en bon français ».

En 1973, un nouveau programme pour la classe de Seconde est publié. Cela avait été de toutes façons prévu par la Commission Lichnérowicz : il fallait tenir compte de l'arrivée en Seconde d'élèves ayant suivi le programme de mathématiques modernes dès la Sixième⁷. Malgré les contestations qui se sont déjà élevées, ce programme reste axé sur les mathématiques modernes, mais le chapitre *Langage des ensembles* a disparu, il n'y a plus qu'un court paragraphe d'introduction qui précise :

À l'occasion des divers énoncés rencontrés, les élèves auront leur attention attirée sur le rôle joué en mathématiques par les principaux « connecteurs » (*et, ou, non, si... alors* et ses synonymes, *équivalent* et ses synonymes) et « quantificateurs » (*quel que soit, il existe*). Ils noteront leurs règles d'emploi, tant pour formuler les énoncés que pour conduire les raisonnements.

Cette disparition peut être interprétée de deux façons : la première est que ce chapitre a été jugé trop abstrait et formel. La deuxième est que les élèves arrivant en Seconde en 1973 sont déjà familiers des notions ensemblistes et logiques qu'ils sont censés avoir rencontrées au collège. Deux arguments plaident pour la deuxième interprétation : le premier est que d'autres notions abstraites et formelles restent au programme, comme les espaces vectoriels ; le deuxième est que les manuels continuent de proposer un chapitre 0 sur les notions ensemblistes et logiques.

Durant la décennie des mathématiques modernes, des notions de logique mathématique sont ainsi explicitement au programme, elles sont définies, il en est donné des propriétés. Il est cependant bien précisé qu'il ne s'agit pas d'enseigner ces notions pour elles-mêmes. Elles servent à l'apprentissage du langage mathématique et du raisonnement, et leur étude doit être réinvestie dans d'autres chapitres. Mais si le commentaire du programme de 1970

7. Il y a eu également des nouveaux programmes de mathématiques modernes pour le collège à partir de 1969.

donne des connaissances théoriques sur ces notions de logique, afin que les professeurs qui n'en sont pas familiers se les approprient, il ne donne guère d'indications sur les retours possibles sur ces notions dans d'autres chapitres. Il y a cependant un réinvestissement naturel à travers la compréhension d'énoncés de définitions, de théorèmes, qui utilisent pour la plupart un langage formalisé.

La réforme des mathématiques modernes : ambitieuse et rapidement contestée

La réforme se met en place en 1969, en Sixième et en Seconde. Elle s'appuie sur des expérimentations préalables et ne soulève pas de contestation de la part de l'A.P.M.E.P., pas plus d'ailleurs que le nouveau programme mis en place en Cinquième l'année suivante. Mais des désaccords apparaissent à propos du nouveau programme de Quatrième. Des équipes expérimentales, travaillant notamment dans les IREM⁸ naissants, réunies à Orléans, publient le 03 juin 1970 une lettre dans laquelle ils expriment des réticences vis-à-vis du projet pour les programmes de Quatrième qui « possèdent de nombreuses lacunes, ils sont notamment trop longs dans les contenus et trop ambitieux dans l'utilisation de raisonnements déductifs exigés par la géométrie proposée » (Barbazo & Pombourcq, 2010, p. 87). Un nouveau texte affirmant la ligne de l'A.P.M.E.P., la Charte de Caen, est rédigée durant l'année scolaire 1971-1972. Contrairement à la Charte de Chambéry, celle de Caen ne revendique pas de modification des contenus, puisque celle-ci est en cours, mais l'A.P.M.E.P. y exprime des réticences sur la réforme des mathématiques modernes :

Parmi les réformes, certaines étaient des succès, d'autres exigeaient des critiques, toutes pouvaient et devaient être améliorées. Des polémiques de presse, des remarques d'éminentes personnalités, tout aussi bien que le goût accru de la jeunesse pour une action et une réflexion plus vite autonome, mettaient en évidence des insuffisances ou des lacunes. Et il y avait des incompréhensions qu'il fallait s'attacher à réduire, des orientations à préciser. (A.P.M.E.P., 1972, p. 2)

L'accent est mis sur la finalité des mathématiques, qui doivent participer à la formation d'un individu épanoui et autonome, sur une organisation scolaire permettant expérimentations et recherche, et sur la formation des maîtres. L'A.P.M.E.P. revendique également dans cette charte que l'apprentissage des mathématiques et les réformes qui le concernent soient un objet d'expérimentation et de recherche « scientifique », l'organisation scolaire, la recherche, l'expérimentation « doivent s'inspirer du désir de promouvoir un nouveau style éducatif allant dans le sens d'une plus grande responsabilité des maîtres et des élèves et de leur épanouissement. Il s'appuiera sur une pédagogie plus scientifiquement élaborée et contrôlée, et incitera à une créativité et à une auto-formation accrues. » (A.P.M.E.P., 1972, pp. 11-12)

8. Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Dans cette période, on trouve dans le Bulletin des articles sur l'apprentissage de notions de logique avant le lycée. Par exemple, dans un article intitulé *Insertion de la logique dans l'enseignement élémentaire* paru dans le Bulletin n° 292 en 1974, M. Carmagnole propose « d'insérer une pensée logique avant onze ans, non seulement en heure de mathématique, mais surtout en toute heure de la journée ». Il s'agit essentiellement de discuter avec les élèves de la compréhension de phrases ayant des structures logiques particulières : que peut-on dire sur l'activité des filles et des garçons quand le maître dit « cet après-midi les filles dessineront » ? Quelle différence entre les phrases « tous les jours il y a un enfant qui se fait punir » et « Il y a un enfant qui se fait punir tous les jours. » Josette Adda participe activement à la réflexion sur l'enseignement de la logique. Elle est, avec W. Faivre, auteur de la brochure APMEP n° 5 *Éléments de logique pour servir à l'enseignement des mathématiques*, et elle publie dans le Bulletin n° 301 en 1975, dans la Rubrique Échanges, un article intitulé *Une manière d'intégrer des éléments de logique dans l'enseignement des mathématiques en classe de Sixième*. Elle y défend la pertinence de l'étude d'énoncés quantifiés dès le collège :

C'est une aberration de prétendre limiter l'introduction de la logique au calcul des propositions : en effet, personne ne peut faire de mathématiques, à quelque niveau que ce soit, même en Sixième, sans quantifications (je dis bien « quantifications » ; l'introduction du symbolisme des quantificateurs, qui, par ailleurs ne me semblerait pas aussi scandaleuse qu'on le dit, n'est pas l'essentiel, loin de là, et on peut très bien, en Sixième, tant que les énoncés ne sont pas très longs, expliciter les quantifications en toutes lettres).

Le groupe de recherche pédagogique en Sixième-Cinquième de l'IREM de Bordeaux publie quant à lui un article intitulé *Des simulateurs logiques en classe de Sixième* dans le Bulletin n° 300 en 1975.

Un important Dossier Second Cycle est publié dans le Bulletin n° 323 en avril 1980, qui présente des documents majeurs élaborés pour guider l'action de l'A.P.M.E.P. Une partie concerne les *finalités du second cycle, objectifs mathématiques et didactiques*. Dans une rubrique *Quelques types fondamentaux d'activités mathématiques*, « l'exploration de diverses modalités du raisonnement mathématique » est indiquée comme activité transversale. On trouve dans le même paragraphe le passage suivant sur la logique :

Il convient ici d'éviter tout exposé de logique mathématique (partie des mathématiques qui a pour objet une réflexion théorique sur l'activité mathématique) ; un tel exposé serait vide de sens pour les élèves, précisément par manque de pratique mathématique antérieure ; en outre la description d'un raisonnement mathématique, même très simple, est souvent d'un niveau de complexité assez grand, et on fausserait le jugement des élèves en se bornant à des aspects très partiels (tables de vérité, etc.) Il sera par contre judicieux de souligner les différentes formes du raisonnement mathématique, au fur et à mesure de leur emploi dans les situations étudiées.

On le voit ici clairement : l'enseignement des notions de logique dans le style des mathématiques modernes n'a pas convaincu.

Dans cette période des mathématiques modernes, la logique mathématique était clairement la référence pour l'enseignement de notions de logique. Mais cette logique mathématique était souvent méconnue des professeurs, malgré les efforts de formation dans les IREM. La plupart des professeurs n'avaient sans doute pas suffisamment de recul pour réinvestir ces notions dans d'autres parties du programme, limitant ainsi les notions de logique à un enseignement formel et fermé sur lui-même. Rappelons que telle n'était pas la volonté des rédacteurs du programme. Quoiqu'il en soit, les programmes de 1981 marqueront une rupture claire avec les mathématiques modernes, et la logique en est rejetée en même temps que bon nombre de concepts jugés trop abstraits.

5.1.3 1981-1999 : La contre-réforme

Programmes et instructions complémentaires de 1981, de 1990

Le programme de 1981 affiche ainsi la rupture :

Le présent programme est celui d'une *classe de Seconde pour tous*⁹ ; il convient de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures, et par conséquent de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée. Il va de soi que le professeur doit avoir une vue approfondie de la matière qu'il enseigne, et qu'il doit s'exprimer clairement ; mais son idéal ne saurait être de tenir aux élèves un discours si parfait soit-il ; sa tâche essentielle est d'entraîner ses élèves, devant des situations saisies dans leur complexité naturelle, à la réflexion et à l'initiative personnelle.

Il n'y a plus de notions de logique explicitement au programme et le programme met même en garde contre l'exposé de ces notions qui se faisait dans la décennie précédente, en reprenant l'extrait du Dossier Second Cycle du Bulletin n° 323 cité page 193. Il y est toujours question de cette attitude réflexive par rapport au raisonnement, mais ici le terme « logique » n'est utilisé que pour exclure la logique mathématique. Par ailleurs, l'utilisation d'un langage mathématique spécifique et l'étude de ce langage, qui était un axe important des mathématiques modernes, est ici clairement rejeté. On ne peut donc plus vraiment parler pendant cette période d'enseignement de notions de logique.

Le programme de 1990 est dans la même ligne. Le paragraphe *Formation scientifique* précise :

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants. Cependant, la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une perspective

9. Il n'y a plus qu'une classe de Seconde, les sections ont été reportées à la classe de Première.

de **progression ; on se gardera donc de toute exigence prématurée de formulation**, aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le **vocabulaire** et les **notations** ne sont pas imposés *a priori* ; ils s'introduisent en cours d'étude selon un critère d'utilité.

Puis suit un paragraphe *Vocabulaire et notations* dans lequel la logique est mentionnée, toujours pour subir le même sort qu'en 1981, l'exclusion :

Certaines questions (traitement des équations, emploi de propriétés caractéristiques en géométrie...) amènent à utiliser des **équivalences logiques** ; on observera qu'au collège seule la formulation en deux énoncés séparés est au programme. L'emploi des symboles \Rightarrow et \Leftrightarrow n'est pas un objectif du programme. **Tout exposé de logique mathématique est exclu.**

Dans cette période, l'apprentissage du raisonnement est toujours un objectif affiché, mais le terme « logique » n'y est plus rattaché. Celui-ci n'est utilisé que pour évoquer la « logique mathématique », qui constitue encore une référence bien identifiée par le programme, mais qui ne doit plus être enseignée. Le « langage mathématique » est mentionné dans le programme de 1990. Cependant, nous avons vu qu'à l'époque des mathématiques modernes, l'apprentissage du langage mathématique dans son expression formelle, voire symbolique, était un but de l'enseignement en Seconde, avec l'idée que ce langage spécifique participait à la conceptualisation et la compréhension des mathématiques. En 1990, l'expression dans un langage mathématique plus formalisé est vue comme un obstacle à la compréhension, il ne doit donc pas venir trop tôt, et il n'est plus question d'étudier le fonctionnement de ce langage. Les notions de logique mathématique qui sont des éléments du langage (variable, proposition, connecteur, quantificateur) sont par conséquent moins présents dans le discours mathématique scolaire.

L'élève acteur de ses apprentissages, la logique trop formelle

La période 1981-1999 est marquée par deux grands principes : l'élève doit être acteur de ses apprentissages, et les mathématiques participent à une formation scientifique pluridisciplinaire.

Les textes institutionnels préconisent alors que la résolution de problèmes devienne une activité centrale dans la classe de mathématiques. Dans les ressources qu'ils publient, différents groupes (dans les IREM, les IUFM¹⁰, l'A.P.M.E.P...) s'attachent à construire des situations donnant du sens aux concepts qui y interviennent comme outils de résolution d'abord, avant de devenir objets d'enseignement (on peut voir l'influence de la didactique des mathématiques naissante, à travers la notion de situation de G. Brousseau, ou la dialectique outil/objet de R. Douady). Pour la logique, construire de telles situations n'est pas si simple, parce que les outils qu'elle propose, qui peuvent intervenir dans la

10. Instituts Universitaires de Formation des Maîtres, créés en 1990, en charge de la formation des enseignants.

résolution de problèmes au niveau de l'expression et du raisonnement, doivent être dégagés d'une situation particulière pour que leur validité soit établie. Ce n'est pas pour montrer la vérité de telle ou telle proposition que la théorie du syllogisme a été élaborée, mais pour montrer qu'il est possible d'établir la vérité d'une proposition en fonction de sa forme en s'appuyant sur d'autres propositions connues pour vraies et sur un schéma de raisonnement reconnu valide. Dans les programmes de 1981 et de 1990, l'accent est mis sur l'acquisition de méthodes, avec une préoccupation pratique : les connaissances doivent pouvoir être utilisées dans la résolution de problèmes. La justification de ces méthodes a un aspect plus théorique et occupe moins de place. Dans le corpus des savoirs à institutionnaliser, la logique présente un aspect trop général et abstrait qui n'a pas sa place.

En 1990, la première intention majeure du nouveau programme est d'« entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. » À l'époque des mathématiques modernes, le lien entre les mathématiques et les autres disciplines était également important. La mathématique était un élément essentiel de la formation scientifique, notamment en proposant un modèle « unificateur » pour les sciences, et un langage spécifique pour l'expression de leurs résultats. La théorie du syllogisme se voulait également un instrument au service des sciences. Mais de la même manière que tous les raisonnements ne peuvent pas se ramener à une forme syllogistique, tout n'est pas structure dans le monde qui nous entoure. Dans la formation scientifique évoquée dans les textes institutionnels entre 1981 et 1999 (et encore aujourd'hui), c'est surtout l'aspect « utilitaire » des mathématiques vis-à-vis des autres sciences qui ressort. Les mathématiques restent un lieu privilégié d'apprentissage de la rigueur, notamment de la rigueur du raisonnement, nécessaire dans la démarche scientifique. Mais ce qui concerne plus spécifiquement la logique (par exemple ce qui touche au langage mathématique, ou qui dans le raisonnement est relatif à l'usage des variables et de la quantification) est quasiment absent, au profit d'une démarche scientifique plus générale.

Un enseignement de notions de logique n'est pourtant pas contradictoire avec les deux principes évoqués qui marquent cette période. J'ai essayé de donner ici des explications possibles de sa disparition des programmes, sachant que ce qui y a sans doute le plus contribué est la volonté de marquer une rupture avec les mathématiques modernes. Mais il est assez naturel qu'une fois la rupture consommée, la logique puisse réapparaître dans les programmes, d'abord timidement, puis de manière plus explicite bien qu'assez floue, comme nous allons maintenant le voir.

5.1.4 1999 puis 2009 : un retour d'abord timide, puis plus marqué

Programmes et instructions complémentaires de 1999 et 2009

Dans le programme de 1999 nous pouvons lire une certaine réhabilitation de la logique :

Chaque chapitre est l'occasion de constater l'économie de pensée qu'apportent des notations adaptées et d'éprouver la nécessité d'avoir à ce propos des conventions claires. Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la Seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité.

La « logique formelle » (j'interprète cette expression comme synonyme ici de « logique mathématique ») retrouve ainsi droit à être citée autrement que pour signaler son exclusion du programme. Ce texte se contente d'évoquer les principes de cette logique, et n'y associe pas des notions particulières qui sont à étudier. Certaines notions sont cependant mentionnées dans le document *Accompagnement des programmes* d'octobre 2000 dans un paragraphe *Rédaction, logique, notations* :

En classe de Seconde, les problèmes de logique mathématique concernent essentiellement l'implication et l'équivalence, la manipulation du contre-exemple, le *ou* et le *et*. Il ne s'agit pas bien sûr de faire des cours de logique formelle, mais on n'hésitera pas à aborder les problèmes de logique lorsqu'ils se présentent, notamment lors du travail écrit. On n'oubliera pas qu'au collège seule l'implication est utilisée : toute équivalence logique y est formulée en deux énoncés séparés en termes de *si... alors...* ; en Seconde, on abordera le *si et seulement si*. On pourra utiliser les symboles \Leftrightarrow et \Rightarrow mais avec prudence et modération.

Les symboles \in , \subset , \cup , \cap , \emptyset et $\{\dots\}$ seront employés à bon escient et sans excès. Les quantificateurs \exists et \forall ne sont pas au programme de la Seconde ; on soulignera cependant l'universalité de la plupart des énoncés mathématiques ; à propos d'une propriété portant sur un ensemble E , on insistera sur le fait que la seule exhibition d'un contre-exemple suffit à démontrer qu'elle est fautive et que si E est un ensemble infini, aucune liste finie de cas où elle est vraie n'en constitue une démonstration.

Dans ce texte, la logique mathématique est de nouveau explicitement citée, et des éléments du langage mathématique sont évoqués, réaffirmant ainsi le rôle de la logique dans l'apprentissage de celui-ci. Notons cependant que les termes employés marquent tout-d même une distance par rapport à la logique mathématique : les connecteurs logiques ET

et OU par exemple ne sont pas appelés « connecteurs », la négation ne figure pas. Quand aux quantificateurs, ils sont assimilés à leurs symboles. Ces notions ne sont pas abordées comme des notions mathématiques. Ainsi, la position par rapport au langage est différente de celle de l'époque des mathématiques modernes. Il n'y a pas ici description d'un langage mathématique spécifique et définition de ses éléments mais plutôt précision d'une utilisation spécifique du langage ordinaire en mathématiques (même s'il est question des symboles d'implication et d'équivalence, ces connecteurs sont ici reliés au raisonnement, et ne sont donc pas forcément vus comme des éléments du langage mathématique).

Mon étude ne concerne que les programmes de la classe de Seconde. Il me paraît pourtant important de signaler le programme pour l'enseignement obligatoire au choix de la classe de Première de la série littéraire de 2004¹¹, dans une perspective plus globale d'étude de l'évolution de la place de la logique dans les programmes pour le lycée. La logique y est évoquée comme un domaine à part entière, qui doit être traité de manière transversale, tout comme l'algorithmique :

Deux domaines transversaux viennent irriguer l'ensemble du programme : il s'agit de la logique et de l'algorithmique, qui trouvent toutes deux des terrains d'application pertinents dans plusieurs des contenus abordés. Ils ne feront pas l'objet d'un exposé théorique isolé.

Pour ce qui concerne la logique

L'arithmétique semble un domaine privilégié pour travailler le raisonnement, car les notions de base qu'on y rencontre sont depuis longtemps familières aux élèves et ne nécessitent que peu de connaissances techniques.

[...] Ce travail [en arithmétique] devrait permettre de faire dégager *en situation* le domaine de validité de certaines phrases *a priori* « ouvertes » pour eux, de faire distinguer les notions de condition nécessaire et de condition suffisante et de poser comme question centrale celle de la vérité ou non de propositions générales, comportant si nécessaire de façon explicite des quantifications existentielles et universelles et des connecteurs (« et », « ou », négation).

[...]

Des compétences élémentaires de logique sont visées par ce travail transversal *sur les deux années* de cette formation. Les élèves devront être capables de les utiliser *dans un champ de connaissances qui leur est familier*. Ce travail d'appropriation de quelques règles de logique ne peut se faire que progressivement, par petites touches, et de façon non dogmatique.

La tonalité de ce texte préfigure ce que nous verrons dans le programme de 2009. Mais certains éléments particuliers que l'on ne retrouvera pas sont à dégager :

- il y est question de « phrases « ouvertes » », de propositions à propos desquelles on se pose la question centrale de leur vérité, des quantificateurs et des connecteurs comme

11. L'intégralité de ce qui concerne la logique dans ce programme se trouve en annexe page 519.

éléments de ces propositions. Nous retrouvons l'idée de description d'un langage mathématique spécifique, même si cela n'est pas explicitement présenté comme un objectif. Cependant, la compréhension et l'utilisation d'un langage formalisé ne sont pas visés, puisque l'explicitation des quantificateurs et des connecteurs n'est pas jugée toujours nécessaire. La question de la définition de ces notions n'est pas évoquée, mais nous pouvons penser que les « quelques règles de logique » mentionnées dans le dernier paragraphe concernent leur utilisation.

- il est préconisé de travailler la logique dans un domaine où les connaissances mathématiques sont assurées, de manière à pouvoir la déceler plus facilement.

La réhabilitation de la logique se poursuit avec le programme de 2009. Y figure le paragraphe *Raisonnement et langage mathématiques* suivant :

Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la Seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant et, par exemple, à distinguer implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne doivent pas être fixés d'emblée ni faire l'objet de séquences spécifiques mais doivent être introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité. Comme les éléments de logique mathématique, les notations et le vocabulaire mathématiques sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ. Pour autant, ils font pleinement partie du programme : les objectifs figurent, avec ceux de la logique, à la fin du programme.

Une partie de ce paragraphe reprend le texte de 1999. Nous retrouvons notamment cette idée que l'élève doit acquérir « une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ». Mais à la différence du programme de 1999, celui de 2009 contient un tableau des objectifs, donné ci-après, qui précise les notions à étudier.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

<p>Notations mathématiques</p> <p>Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : \in, \subset, \cup, \cap ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.</p> <p>Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités \bar{A}.</p>
<p>Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :</p> <ul style="list-style-type: none"> • à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ; • à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles \forall, \exists ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ; • à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ; • à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ; • à formuler la négation d'une proposition ; • à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ; • à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

FIGURE 5.1 – Tableau des objectifs

Les connaissances en jeu sont quelque peu précisées, elles concernent des notions qui sont des objets d'étude de la logique mathématique. Mais elles sont présentées ici avec un ancrage très fort dans la dimension outil : les élèves sont « entraînés, sur des exemples » à les utiliser. La formulation de ces connaissances, qui est une question délicate, semble presque exclue. Le programme précise bien qu'il est exclu de faire un cours de logique, et que ces connaissances doivent être construites à travers l'étude d'autres notions mathématiques.

Même s'il est question de ce qui concerne le « raisonnement logique », les connaissances visées sont très liées au langage. Mais comme nous l'avons déjà vu à propos du programme de 1999, l'idée semble être d'apprendre à bien manier le langage ordinaire en mathématiques plutôt que d'apprendre un langage spécifique.

On peut signaler une nuance apparue dans les programmes de Première et de Terminale. Ils indiquent qu'« il convient de prévoir des temps de synthèse. » La formulation des connaissances concernant la logique est ainsi explicitement demandée, mais sans indication de la manière de le faire. Les programmes de Première et de Terminale de la filière scientifique mentionnent de plus qu'« il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation. » Cette institutionnalisation qui n'est demandée que dans la filière scientifique est peut-être une ouverture vers le traitement plus formel de ces notions que fait la logique mathématique.

5.1.5 Résumé de l'évolution des programmes

Le programme de 1960 marque l'apparition de la logique mathématique dans l'enseignement secondaire. Elle n'est pas explicitement mentionnée, mais est présente notamment à travers l'introduction des flèches d'implication et d'équivalence, et des symboles des quantificateurs.

Pour les partisans des mathématiques modernes, il faut enseigner aux élèves un langage mathématique spécifique permettant de proposer une vision unifiée de la mathématique qui joue ainsi « un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social » (rapport préliminaire de la commission Lichnérowicz publié dans le bulletin APMEP n° 258, 1967). La logique, associée à la théorie des ensembles, est un élément essentiel de l'apprentissage de ce langage et le programme de 1969 comporte un chapitre intitulé « Langage des ensembles » dont la première partie étudie le vocabulaire de la logique, et demande de faire le lien entre le langage des ensembles et le langage de la logique. Des instructions parues en 1970 proposent un rapide cours concernant ces notions qui sont nouvelles pour beaucoup de professeurs ayant eu une formation universitaire « classique. »

En 1981, le programme de la contre-réforme prend une position radicalement opposée : la logique en est exclue, rejetée avec tout ce qui paraissait trop formel et trop abstrait dans les mathématiques modernes. L'activité de l'élève est mise au cœur de l'enseignement ; celui-ci doit être acteur de ses apprentissages. C'en est alors fini de « l'illusion langagière » (Bkouche, 1992) associée aux mathématiques modernes. Ce bannissement continue dans le programme de 1990.

C'est en 1999 que l'on voit une timide réapparition de la logique, confirmée dans le programme de 2009 qui affiche des objectifs en matière de notations et raisonnement.

Finalement, il n'y a un savoir à enseigner concernant des notions de logique que dans les programmes de 1969 et de 2009. Les notions visées par ce savoir sont les mêmes dans les deux programmes, mais les objectifs y sont donnés de manière très concise. Cependant, chacun de ces programmes est accompagné d'un document destiné aux enseignants dans lequel les objectifs sont précisés : celui de 1969 par un *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* publié en 1970 (dénommé ci-après *Commentaire de 1970*), celui de 2009 par un document *Notations et raisonnement mathématiques* faisant partie d'une série de documents *Ressources pour la classe de Seconde* (dénommé ci-après *Document ressource de 2009*). Je vais maintenant analyser plus en détail ce qui y est mentionné pour chaque notion. Cette analyse plus locale permet de regarder plus finement dans quelle mesure la logique mathématique est une référence, et ce qui est pris en compte de la complexité des notions de logique identifiée dans la référence proposée dans la deuxième partie de la thèse.

5.2 Analyse par notion de logique des documents qui accompagnent les programmes

Je commencerai par trois remarques sur des considérations générales de ces deux documents avant d'examiner la manière dont ils traitent chaque notion :

- les deux documents rappellent que l'étude des notions de logique doit se faire tout au long des autres chapitres. Cependant, en 1970, ce commentaire accompagne un programme dans lequel figure un chapitre spécifique consacré à la logique. Mais il précise que « le chapitre I tout entier fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique, à *tout moment*, dans la suite du cours ». En 2009 au contraire, le programme stipule qu'il n'est pas question d'un cours de logique, ce que reprend le document ressource : « cette acquisition doit être répartie tout au long de l'année, lorsque les situations étudiées en fournissent l'occasion et il n'est pas question de traiter la logique dans un chapitre spécifique ».
- Par ailleurs, le commentaire de 1970 affiche clairement dès son introduction la référence à la logique mathématique pour ce chapitre du programme et défend l'aspect fécond de la formalisation du langage (voir citation page 191), ce qui n'est pas du tout présent dans le document ressource de 2009, même si le langage symbolique y est mentionné : « la langue naturelle et le langage symbolique doivent coexister tout au long de l'année, l'apprentissage du langage symbolique devant être étalé sur le cycle terminal ».
- Enfin, le commentaire de 1970 a clairement une visée de formation des enseignants en logique mathématique, et il précise que ce qu'il expose est « rédigé en termes techniques », et « dépasse largement le développement qu'il est possible d'en faire en classe ». Le document ressource de 2009 propose surtout des exemples d'activités, et aucune considération théorique sur les notions de logique. Ces activités sont présentées dans deux grandes parties : la première s'intitule *Programme et éléments de logique ou de raisonnement* et propose des activités dans les trois grands domaines du programme : fonctions, géométrie, statistiques et probabilité ; la seconde partie s'intitule *Langage courant et langage mathématique*.

5.2.1 Proposition et variable

Dans le programme de 1969 il est question d'« assertions ». Dans le commentaire de 1970, on trouve la définition suivante de la notion de proposition :

On appelle ici *proposition* une phrase, ou une partie de phrase ayant un sens en soi, à laquelle on peut attacher, dans la théorie où l'on se place, une valeur de vérité, soit V soit F (vrai, faux, la logique est celle du tiers-exclu) ; le programme a appelé *assertion* l'association proposition-valeur, le mot n'est pas reçu partout en ce sens, il est loisible de l'éviter.

La distinction signalée page 112 entre proposition et assertion est ici évoquée. Cependant, c'est une distinction subtile sur laquelle les auteurs du commentaire ne s'attardent pas, ils suggèrent surtout de préférer le mot « proposition », qui est celui que eux utilisent. Cette notion de proposition est définie en préalable à toute la suite, posant ainsi son caractère d'élément fondamental du langage mathématique.

Cette définition est suivie d'un passage sur les connecteurs, puis la notion de variable est introduite :

Si la proposition est un élément de base du raisonnement, celui-ci fait intervenir, même sous ses formes les plus simples, ce qu'on pourrait appeler d'abord des « propositions dépendant d'une variable x parcourant un ensemble E , de deux variables (x, y) , etc. », soit $p(x)$, $p(x, y)$, etc. Un langage plus précis qualifiera $p(\cdot)$ $p(\cdot, \cdot)$, de prédicat (fonction propositionnelle) à une ou plusieurs places ; à chaque x , ou (x, y) donné, est associé une proposition $p(x)$, $p(x, y)$, puis une valeur de vérité.

Le terme de « variable libre » n'est pas utilisé, mais c'est bien cette notion qui est sous-jacente à l'idée de « propositions dépendant d'une variable x ». Les quantificateurs sont introduits tout de suite après, et la notion de variable muette est alors explicitement signalée.

Le terme « proposition » est utilisé dans le programme et dans le document ressource de 2009, mais aucune définition n'en est donnée. Le mot « variable » n'a qu'une seule occurrence dans ce document, quand il est question du domaine de définition de la variable à propos de l'énoncé « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ ».

5.2.2 Connecteurs ET et OU

Le commentaire de 1970 donne une définition générale de ce qu'est un connecteur :

Quand on fait opérer un *connecteur* sur deux propositions, ou sur une seule dans le cas de la négation, on obtient une nouvelle proposition dont la valeur de vérité dépend uniquement de celles des propositions composantes ; on caractérisera chacun des connecteurs par sa table de vérité. On peut recommander les notations suivantes, où A et B désignent deux propositions : $\neg A$ ou \bar{A} (négation), $A \wedge B$ (conjonction), $A \vee B$ (disjonction), $A \Rightarrow B$ (implication), $A \Leftrightarrow B$ (équivalence). Mais on peut se borner à utiliser les mots *non*, *et*, *ou*, *implique*, *équivalent*, si on le juge prudent.

Dans ces commentaires, les deux aspects syntaxique (les connecteurs sont des opérateurs sur les propositions) et sémantique (le comportement des connecteurs par rapport aux valeurs de vérité) des connecteurs sont présents, même si il n'y a pas une séparation explicite entre ces deux aspects. Pour ce qui est des notations, le commentaire précise qu'« on peut recommander les notations \vee et \wedge ». Il est également demandé de « dégager,

au moyen des tables de vérité, certaines propriétés utiles des connecteurs, la commutativité et l'associativité pour \wedge et \vee ».

Les connecteurs ET et OU sont associés à l'intersection et à la réunion d'ensembles à travers la correspondance entre une proposition $p(x)$ contenant une variable libre x astreinte à une ensemble E et l'ensemble des éléments de E vérifiant p , noté $\varphi(p)$. Les propriétés suivantes sont données : $\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \cap \varphi(q)$ et $\varphi(p \vee q) = \varphi(p) \cup \varphi(q)$.

Dans le document ressource de 2009, les connecteurs ET et OU sont mentionnés à deux endroits. Tout d'abord dans la première partie, *Programme et éléments de logique ou de raisonnement*, ils sont reliés à la réunion et l'intersection. Puis, dans la deuxième partie, *Langage courant et langage mathématique*, une rubrique s'intitule « ou, et, un », et son objet est de préciser les similitudes et différences d'utilisation de ces mots dans ces deux domaines. La distinction inclusif/exclusif à propos du « ou » est bien sûr évoquée avec l'exemple classique « fromage ou yaourt ». La distinction entre *et-connecteur* et *et-couple*, que j'ai introduite page 118, n'est pas évoquée. Elle aurait pourtant été bien utile dans l'exemple suivant :

Le lien entre les connecteurs « et » et « ou » nécessite aussi d'être explicité.

Exemple 14

⌘ Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle de fin d'année.

⌘ 1. Sophie suit les deux options, participera-t-elle au spectacle ?

⌘ 2. Les deux phrases suivantes : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse » et « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre et tous ceux qui suivent l'option danse » désignent-elles les mêmes élèves ?

La première question met en évidence que l'intersection de deux ensembles est incluse dans leur réunion.

La seconde question montre une utilisation du mot « et » en langue naturelle qui correspond à une réunion.

Une analogie peut être faite avec l'emploi des mots « et » et « ou » dans la phrase suivante : « $A(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ **ou** $x = 2$

donc les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont **1 et 2**. ».

FIGURE 5.2 – Exercice proposé par le document ressource de 2009 sur les connecteurs ET et OU

Nous avons déjà vu (page 119) que le « et » de la proposition « les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont 1 et 2 » n'est pas un connecteur logique ET. Le premier exemple ne relève pas de la même confusion. Tout d'abord, le « et » et le « ou » de la question 2 ne sont pas directement identifiables comme des connecteurs logiques car ils n'interviennent pas dans des propositions (ce qui est entre guillemets ne sont même pas des phrases). Complétons alors pour avoir les deux propositions (1) : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle » et (2) : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre et tous ceux qui suivent l'option danse participeront au spectacle ». Nous allons exhiber la structure logique de ces propositions, pour cela considérons :

- une variable E qui pourra prendre ses valeurs dans l'ensemble des élèves

- un symbole de prédicat $T(E)$ qui signifie « E suit l'option théâtre »
- un symbole de prédicat $D(E)$ qui signifie « E suit l'option danse »
- un symbole de prédicat $S(E)$ qui signifie « E participera au spectacle »

Une modélisation de la structure logique de la proposition 1 est alors :

Pour tout E , [si $(T(E) \text{ OU } D(E))$ alors $S(E)$].

Nous retrouvons dans la modélisation de la structure logique de la proposition 1 le « ou » comme connecteur logique entre deux propositions.

Une modélisation de la structure logique de la proposition 2 est la suivante :

Pour tout E , [(si $T(E)$ alors $S(E)$) ET (si $D(E)$ alors $S(E)$)].

Là encore la modélisation de la structure logique de la proposition 2 permet de voir un connecteur logique, ici un « et », entre deux propositions.

Ce passage d'un « ou » à un « et » n'est donc pas dû, comme dans l'exemple concernant les solutions d'une équation, au passage d'un connecteur logique à une conjonction de coordination suite à une reformulation, mais à l'équivalence entre les deux propositions $((A \text{ OU } B) \Rightarrow C)$ et $((A \Rightarrow C) \text{ ET } (B \Rightarrow C))$. La modélisation de la structure logique des propositions a permis ici d'éclairer ces phénomènes de la langue. Mais cet éclairage n'est pas proposé dans le document ressource de 2009.

5.2.3 Négation

Le commentaire de 1970 suggère d'utiliser pour la négation d'une proposition les notations $\neg A$ et \bar{A} , sans donner préférence à l'une ou l'autre (la deuxième notation n'est pas pratique quand il s'agit d'écrire la négation d'une longue proposition, avec la première, le parenthésage suffit). La négation est associée au complémentaire d'un ensemble, et la propriété suivante est donnée : $\varphi(\neg p) = \mathbf{C}_E \varphi(p)$ (en reprenant les notations de la page 204).

Le document ressource de 2009 mentionne très brièvement la négation dans la première partie, associée au complémentaire. Dans la deuxième partie, il précise qu'« expliciter des événements contraires peut être l'occasion de nier des propositions » et que « ce type d'exercice, nouveau et délicat, pourra faire l'objet d'un entraînement tout au long de l'année ». Deux exemples sont donnés, avec des phrases de la vie courante. Le document ressource ne suggère aucune notation ou formulation pour la négation d'une proposition.

5.2.4 Implication

Dans le commentaire de 1970, plusieurs passages sont consacrés à l'implication :

- dans les propriétés des connecteurs sont données 4 propositions équivalentes : $A \Rightarrow B$, $(\neg A) \vee B$, $\neg[A \wedge (\neg B)]$, $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$. La transitivité de l'implication est également donnée, avec la mise en garde contre l'écriture $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ qui « évoquerait une associativité fallacieuse. »

- elle est associée à deux usages dans les raisonnements :

- (a) si $A \Rightarrow B$ est vrai et si A est vrai, alors B est vrai ;
- (b) si $A \Rightarrow B$ est vrai et si B est faux, alors A est faux ;

- Le cas de la prémisse fausse est par ailleurs envisagé :

Lorsque A est faux, l'implication $[A \Rightarrow B]$ ne donne pas de renseignement sur B , mais elle reste vraie ; ainsi, l'énoncé :

« tout entier divisible par 6 est divisible par 2 »

se traduit par l'implication, vraie que 6 divise n ou non :

$$[\forall n \in \mathbb{Z} : 6 \text{ divise } n \Rightarrow 2 \text{ divise } n].$$

On remarquera ici l'ambiguïté due au fait de n'avoir qu'un seul terme pour l'implication entre deux propositions et l'implication universellement quantifiée : la vérité de « $\forall n \in \mathbb{Z} : 6 \text{ divise } n \Rightarrow 2 \text{ divise } n$ » ne dépend pas du fait que « 6 divise n ou non », puisque la variable n y est muette.

- Il est signalé l'importance de signifier la présence d'une quantification universelle quand c'est le cas :

On n'omettra pas les quantificateurs dans des énoncés qui contiennent des implications portant sur des prédicats ; x parcourant E , les implications

$$(1) : [p(x) \Rightarrow q(x)] \text{ et } (2) : [\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)],$$

ont des sens très différents, car la valeur de vérité de (1) dépend de x , celle de (2) n'en dépend pas.

- L'implication entre deux propositions closes quelconques est mentionnée, et il est précisé qu'elle n'est pas intéressante pour l'activité mathématique :

La logique fait de l'implication un usage plus étendu que les mathématiques ; on n'insistera pas sur le fait qu'une implication vraie, comme :

« $2 \text{ est pair} \Rightarrow \text{trois points non alignés déterminent un cercle}$ »,
n'est pas utilisée en mathématiques.

- Elle est liée à l'inclusion : « la relation dans $\mathcal{P}(E)$ $\varphi(p) \subset \varphi(q)$ est équivalente à la vérité de la proposition $[\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)]$. »

L'implication est ainsi présentée sous les multiples aspects qui participent à sa compréhension : connecteur IMPLIQUE entre deux propositions closes, entre deux propositions

ouvertes, propriétés de ce connecteurs, implication universellement quantifiée, inférences possibles à partir d'une implication vraie, lien avec l'inclusion.

Le document ressource de 2009 propose plusieurs exercices sur l'implication. Celui qui suit est proposé dans la première partie pour « faire émerger les conceptions des élèves sur l'implication, terme utilisé fréquemment dans la langue naturelle » :

1.3. Implication et équivalence

Exemple 6¹

A. Voici deux propositions où a et b désignent des nombres réels :

1 $(a + b)^2 = 0$

2 $a = 0$ et $b = 0$

Si a et b sont des nombres réels tels que la proposition 2 est vraie, alors la proposition 1 est vraie. On note : pour a et b réels, $2 \Rightarrow 1$ et on dit que, pour a et b réels la proposition 2 implique la proposition 1.

Est-il vrai que pour a et b réels, la proposition 1 implique la proposition 2 ?

B. Voici quelques propositions où a et b désignent des nombres réels :

1 $a^2 = b^2$

2 $a = b$

3 $a = -b$

4 $(a + b)(a - b) = 0$

5 $a = b$ ou $a = -b$

6 $a = 0$ ou $b = 0$

a. Quelles sont les implications du type 1 \Rightarrow ..., vraies pour a et b réels ?

b. Quelles sont les implications du type ... \Rightarrow 1, vraies pour a et b réels ?

c. Quelles sont les propositions équivalentes pour a et b réels ?

d. Application : résoudre l'équation $(2x - 3)^2 = (2x + 9)^2$.

Cet exemple peut être traité en utilisant la représentation de la fonction carré et des fonctions polynômes de degré 2. Un débat oral, par groupes ou collectivement, permet de faire prendre conscience de la signification des termes « et » et « ou ».

Le plus important est de faire émerger les conceptions des élèves sur l'implication, terme utilisé fréquemment dans la langue naturelle (s'impliquer dans une démarche, impliquer les autres membres d'un groupe dans un travail, par exemple). Une fois assimilé, cet exemple peut devenir un exemple de référence pour les résolutions d'équations.

FIGURE 5.3 – Exercice proposé par le document ressource de 2009 sur l'implication

Un des éléments essentiels des implications en jeu ici est qu'elles sont universellement quantifiées. Or, cette quantification est exprimée à travers l'expression « pour a et b réels », dans laquelle l'idée que l'on s'intéresse à tous les réels n'est pas présente, sinon à travers le caractère quelconque de ces réels. Nous avons déjà vu que de telle ambiguïtés pouvait amener les élèves à répondre différemment de ce qui est attendu, par exemple ici ils pourraient considérer que la réciproque est vraie pour certains réels a et b et fausse pour d'autres. Par ailleurs, il est dommage de prendre à la question A une implication dont la prémisse n'est vérifiée que dans un cas, cela diminue la pertinence d'exprimer cette information à l'aide d'une implication universellement quantifiée : on dira plutôt « quand $a = 0$ et $b = 0$ on a $(a + b)^2 = 0$ », voire seulement $(0 + 0)^2 = 0$, plutôt que « pour tout nombres réels a , b , si $a = 0$ et $b = 0$ alors $(a + b)^2 = 0$ ».

Dans les exemples donnés dans le document ressource, aucune implication n'est explicitement universellement quantifiée. Dans la première partie, il est question de l'énoncé « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ », par rapport auquel il faut « faire prendre conscience de la nécessité de préciser le contexte de la proposition conditionnelle, c'est-à-dire l'ensemble

auquel appartient x pour pouvoir donner la valeur vraie ou fausse à cet énoncé. » Dans l'explication de cette nécessité sont allègrement mélangées variables et valeurs que l'on peut leur substituer, implication entre propositions ouvertes et implication universellement quantifiée : « En effet, si x est un nombre positif, l'énoncé est vrai, si x est un réel, l'énoncé est faux et un contre-exemple est facilement trouvé. » Les enseignants n'auront bien sûr aucun mal à comprendre cette explication, mais ce vocabulaire confus masque toute la complexité des notions sous-jacentes.

Dans la deuxième partie du document ressource de 2009, un exercice classique, issu¹² de l'article *Les cosmonautes*, de M. Legrand (Legrand, 1983), est proposé :

Exemple 11³

- Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.
1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
Est-il cosmonaute américain?
 2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
Est-il cosmonaute américain?
 3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
Porte-t-il une chemise rouge ?
 4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
Porte-t-il une chemise rouge ?

FIGURE 5.4 – Exercice des cosmonautes

Il en est également proposée une version dans un contexte géométrique. Mais là encore les questions de quantification, importantes dans ces exercices, ne sont pas soulignées.

Le document ressource signale également, à travers un exemple mathématique et un exemple de la vie courante, la possible différence entre la façon dont les élèves entendent « si A , B » (comme une implication), et la façon dont il entendent « B si A » (comme une équivalence).

12. La référence est précisée.

5.2.5 Les quantificateurs

Dans les commentaires de 1970, les quantificateurs sont introduits comme éléments dans la construction des propositions :

Les *quantificateurs*, qui permettent d'introduire de nouvelles propositions à partir de $p(x)$, $p(x, y)$... seront présentés sur des exemples : si le référentiel est \mathbb{N} ,

« il existe x tel que $x < 5$ », « quel que soit x , $x < 5$ »
sont deux propositions, la première vraie, la seconde fausse, notées respectivement :

$$[\exists x \in \mathbb{N} : x < 5] \qquad [\forall x \in \mathbb{N} : x < 5]$$

les symboles \exists et \forall sont dit quantificateurs *existential* et *universel* ; les propositions qu'ils introduisent ont une valeur de vérité *indépendante de la variable x quantifiée* (variable muette).

On prendra soin, en employant les quantificateurs, de préciser d'abord le référentiel et d'écrire leurs symboles en tête de formules.

L'aspect sémantique des quantificateurs (valeur de vérité d'une proposition quantifiée) n'est pas donné dans un cadre général, mais sur un exemple particulier.

Le lien avec les ensembles est fait (en reprenant les notations présentées page 204) :

Quant aux relations suivantes dans $\mathcal{P}(E)$,

$$\varphi(p) = E, \quad \varphi(p) \neq \emptyset, \quad \varphi(p) \subset \varphi(q), \quad \varphi(p) = \varphi(q)$$

elles sont équivalentes à la vérité de propositions comportant l'emploi de quantificateurs, savoir :

$$\begin{array}{ll} [\forall x \in E : p(x)], & [\exists x \in E : p(x)], \\ [\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)], & [\forall x \in E : p(x) \Leftrightarrow q(x)] \end{array}$$

Nous avons vu également dans la partie sur l'implication qu'il était considéré comme important de signaler la quantification universelle généralement associée à une implication.

Dans le programme de 2009, « les élèves sont entraînés, sur des exemples, à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles \forall , \exists ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ».

Dans la première partie du document ressource de 2009, un paragraphe s'intitule *Explicitation des quantifications* :

1.2. Explicitation des quantifications

Les élèves ont fréquemment rencontré au collège des énoncés comportant des quantifications implicites. C'est le cas, par exemple :

- ◆ dans l'énoncé de règles de calcul dans le programme de 5^e
- ◆ dans la présentation des identités remarquables

En classe de seconde, l'explicitation des quantifications doit être faite dans l'optique d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés. Elle ne doit pas être systématique mais doit être faite dès qu'il peut y avoir ambiguïté de la situation proposée. Il est inutile de compliquer les notations lorsque ce n'est pas utile à la compréhension.

Les quantificateurs seront introduits en situation progressivement tout au long de l'année, la langue naturelle et le langage symbolique devant coexister pendant toute l'année.

Les étapes « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications » et « être capable de rédiger avec des quantificateurs » sont des étapes différentes ; la dernière étant un objectif de fin de lycée et non de la classe de seconde.

Il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande.

FIGURE 5.5 – Extrait du document ressource de 2009 sur les quantificateurs

Alors que le programme demande d'entraîner les élèves à repérer les quantifications implicites particulièrement dans les propositions conditionnelles, cette forme de proposition n'est pas évoquée ici. Pourtant les propositions en « si...alors... » non explicitement quantifiées sont fréquentes au collège (c'est le cas de presque toutes les propriétés de géométrie) !

La compréhension de la notion de quantificateurs est vue comme nécessitant une progression dans laquelle trois étapes sont distinguées : « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications », « être capable de rédiger avec les quantificateurs ». Il est précisé que la dernière étape est un objectif de fin du lycée. C'est le seul endroit où une progression est mentionnée. Trois exemples d'exercices sont ensuite donnés, le premier illustre la deuxième étape :

Exemple 3

- ⌘ Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.
- ⌘ Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 2x + 5$.
- ⌘ (Pour tout nombre réel x , l'image de x par la fonction f est égale à $2x + 5$)
- ⌘ L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?
- ⌘ (Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ et $2x + 5$ sont égaux ?)
- ⌘ Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.
- ⌘ (Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ et $2x + 5$ sont égaux)

Dans les deux énoncés, la trace écrite (au tableau ou sur le cahier) est souvent la même :

$$f(x) = 2x + 5.$$

Cependant les deux énoncés n'ont bien sûr pas le même statut : le premier énoncé définit une fonction, le second conduit à résoudre (graphiquement ou par calcul) une équation. Il est important de clarifier par oral ces différents statuts dès que l'occasion se rencontre, et dans certains cas, de faire noter les quantifications par écrit, sans formalisme excessif.

FIGURE 5.6 – Exercice du document ressource de 2009 sur les quantificateurs (1)

Les quantificateurs sont des éléments du langage mathématique, intervenant dans la formulation des expressions mathématiques que sont les noms et les propositions. Ici, aucun des trois énoncés proposés n'est une proposition. Nous avons déjà vu que rien n'était dit sur la notion de proposition, ni dans le programme, ni dans le document ressource de 2009. Cet exemple renforce l'idée que cela n'est pas un objectif que les élèves aient une idée claire de cette notion. Il amène à douter que cela soit une notion claire pour les auteurs, qui en tout cas ne semblent pas soucieux de la distinction entre les phrases qui sont des propositions et celles qui n'en sont pas.

Cherchons alors à formuler des propositions faisant intervenir l'expression « $f(x) = 2x + 5$ », qui est effectivement quantifiée différemment selon le contexte. Pour le premier exemple, il suffit de se contenter de la proposition « la fonction f est définie par $f(x) = 2x + 5$ », dans laquelle le prédicat « être définie par », appliqué à une fonction, masque effectivement une quantification universelle. Pour le deuxième, il suffit de ne pas le proposer sous forme interrogative, et de se contenter de la proposition « l'équation $f(x) = 2x + 5$ a au moins une solution », dans laquelle le prédicat « avoir au moins une solution », appliqué à une équation, masque une quantification existentielle. Quant au dernier énoncé, si on cherchait à y associer une expression mathématique, cela pourrait être le nom « l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 2x + 5$ », qui peut s'écrire « $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + 5\}$ », où n'intervient aucune quantification !

Le deuxième exemple est donné pour « faire prendre conscience de la nécessité de préciser le contexte de la proposition conditionnelle » :

Exemple 4

⋄ L'énoncé : « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ » est-il vrai ?

FIGURE 5.7 – Exercice du document ressource de 2009 sur les quantificateurs (2)

Le troisième exercice est du type Vrai ou Faux :

Exemple 5

Le tableau de variation ci-contre est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

En exploitant les informations données, justifier pour chacune des propriétés suivantes, si elle est vraie ou fausse.

- Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-3 ; 3]$ qui a une image par f strictement inférieure à 0.
- Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3 ; 3]$ ont une image par f négative.
- Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3 ; 3]$ ont une image par f strictement inférieure à 3.

x	-3	-1	3
$f(x)$	-5	2	-2

FIGURE 5.8 – Exercice du document ressource de 2009 sur les quantificateurs (3)

Cet exercice permet de travailler sur des propositions quantifiées et sur la lecture d'un tableau de variation. Dans la question c, le choix du nombre 3 est une variable didactique intéressante : ici c'est un majorant, et pas le maximum qui est facilement identifiable grâce au tableau de variations. Cela permet de travailler la différence entre ces deux notions (même si la notion de majorant n'est pas au programme de Seconde). Certains élèves pourraient répondre que cette proposition est fausse, parce qu'ils peuvent dire quelque chose de « plus fort » que la proposition c (à savoir que tous les réels de l'intervalle $[-3; 3]$ ont une image par f inférieure ou égale à 2), suivant ainsi le principe du maximum d'information (voir page 120). Ce principe, pourtant mentionné ailleurs dans le document ressource¹³, ne l'est pas ici.

Dans ce document, le seul endroit où l'on voit un quantificateur appliqué à une variable est le premier exercice (figure 5.6). Il y a une méfiance affichée vis-à-vis de l'explicitation des quantificateurs, qui n'est pas jugée toujours nécessaire mais seulement « quand la compréhension le demande » et « sans formalisme excessif » (voir extrait 5.5 page 210). Les symboles \forall et \exists ne sont pas du tout mentionnés.

5.2.6 Les différents types de raisonnement dans les programmes et textes d'accompagnement

Les différents types de raisonnement ne sont pas mentionnés dans le commentaire de 1970, ce qui confirme l'ancrage fort de la logique à l'étude du langage.

Le document ressource de 2009 renvoie au document *Raisonnement et démonstration* pour le collège en ce qui concerne les raisonnements. Dans ce document, on trouve plusieurs exemples des différents types de raisonnement mentionnés dans le tableau des objectifs pour le lycée : raisonnement par disjonction des cas, démonstration par contre-exemple, raisonnement par l'absurde, mais aucune justification de la validité de ces raisonnements. Il n'y a par contre pas d'exemple de raisonnement par contraposée, car le document préconise que « le raisonnement par l'absurde [soit] pratiqué par le professeur comme forme plus simple d'un raisonnement par contraposée, par exemple pour démontrer la réciproque du théorème de Pythagore ». La distinction entre ces deux types de raisonnement est cependant complexe (voir page 168), et puisqu'au lycée ces deux types de raisonnement sont à connaître, le seul commentaire du document pour le collège semble insuffisant.

13. À propos du fait que dans la vie courante, certaines phrases en *si... alors* sont entendues comme des équivalences.

5.3 Synthèse de l'étude des programmes et documents d'accompagnement

La perspective historique sur la place de la logique dans les programmes de mathématiques pour le lycée a montré que la position actuelle vient à la suite de deux situations extrêmes : la logique est présente comme une base nécessaire à l'apprentissage des mathématiques de 1969 à 1981, mais est ensuite totalement exclue de 1981 à 1999. Nous pouvons ainsi parler d'un *retour* de la logique dans les programmes, et en retenir deux conséquences importantes en ce qui concerne les enseignants :

- rien n'a été inscrit dans le temps à un niveau collectif (il n'y a pas les annales ni les habitudes prises que mentionne G. Arzac dans la citation page 175), et le professeur d'aujourd'hui se retrouve donc, sans doute plus que pour d'autres domaines, à devoir faire des choix didactiques qui seront très influencés par une composante personnelle.
- les enseignants actuels n'ont pas tous reçu le même type de formation sur les notions de logique, et n'ont pas les mêmes connaissances, ce qui accroît l'importance de cette composante personnelle.

Nous pouvons alors faire l'hypothèse de pratiques actuelles variées quant à l'enseignement de notions de logique.

Les textes publiés par l'A.P.M.E.P. que nous avons étudiés témoignent des débats qui ont accompagné la période des mathématiques modernes, et notamment la présentation axiomatique dans l'enseignement des mathématiques. S'agissant plus particulièrement des notions de logique, le débat sur l'utilisation ou non des symboles de quantificateur a été particulièrement vif. Notons qu'aujourd'hui, personne ne prend publiquement position en leur faveur avec la même force que G. Walusinski en 1961. Les expériences d'enseignement de notions de logique qui sont relatées mettent en avant le travail sur le langage que permet la logique. La formalisation est défendue par plusieurs enseignants comme un élément fécond pour la conceptualisation des notions mathématiques.

Dans tous les textes institutionnels étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques. Mais la logique mathématique n'est une référence pour cet apprentissage que durant la période des mathématiques modernes (1969-1981), et, à un degré moindre, depuis 1999. Nous pouvons donc parler, dans ces deux périodes, de deux niches pour la logique, qui correspondent aux deux piliers déterminés dans l'étude épistémologique : une *niche raisonnement* et une *niche langage*. Ces deux niches sont bien sûr imbriquées : le raisonnement se communique à travers le langage, le langage structure le raisonnement, dans l'organisation d'un texte de démonstration, mais aussi dans l'organisation de la pensée. Dans la période des mathématiques modernes, l'ancrage dans la niche langage est plus fortement affirmé : la formalisation du langage mathématique est vue comme bénéfique, structurante pour l'activité mathé-

matique, et la logique donne les bases d'utilisation d'un langage formalisé beaucoup plus largement utilisé au lycée qu'aujourd'hui.

Dans ces deux périodes nous pouvons également parler d'un *habitat flou* pour la logique : elle doit être présente partout, son étude accompagne celle des notions vues dans les autres chapitres. Il y a cependant une différence notable sur ce point entre les deux périodes : pendant la période des mathématiques modernes, un chapitre spécifique était consacré à la logique, dans le but de poser des bases qui seraient ensuite réinvesties à de multiples occasions, mais où les notions de logique étaient tout de même abordées dans leur dimension objet. Dans le programme pour la classe de Seconde de 2009, il est précisé qu'il ne faut pas faire de cours. L'idée de rencontrer d'abord les notions en situation vaut pour toutes les notions dans les programmes actuels, dans lesquels l'accent est mis sur l'entrée par la résolution de problèmes. Mais pour les notions de logique, celles-ci ayant été absentes des programmes entre 1981 et 2009, il y a peu de ressources proposant de telles situations d'introduction. D'où peut-être la crainte des auteurs des programmes, qui pourrait expliquer qu'ils insistent sur ce point concernant la logique, que les professeurs se réfèrent à ce qui se faisait à l'époque des mathématiques modernes. Le travail suggéré par le programme sur les notions de logique ne les aborde alors que dans leur dimension outil.

L'étude de documents accompagnant les programmes de 1969 et de 2009 montre que, si les deux programmes mentionnent à peu près les mêmes notions de logique à étudier, les approches sont très différentes, notamment dans la façon dont la logique mathématique est prise comme référence. Dans la période des mathématiques modernes, le *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* de 1970 propose un très synthétique cours de logique mathématique, en précisant que ce qui est exposé est surtout à visée de formation des professeurs plutôt que directement destiné aux élèves. La proposition est la première notion présentée, et l'aspect syntaxique des connecteurs et des quantificateurs est présent, le but étant vraiment de décrire les principes de la construction du langage mathématique. L'aspect syntaxique est articulé avec l'aspect sémantique qui relève plus de l'utilisation de ce langage dans l'activité mathématique. La complexité épistémologique de l'implication est prise en compte, mais essentiellement d'un point de vue logique, et non en lien avec des pratiques langagières (implication entre deux propositions et implication universellement quantifiée sont ainsi distinguées, mais rien n'est dit sur la pratique de quantification universelle implicite). D'une façon générale, l'exposé n'est pas relié à l'activité mathématique, le commentaire de 1970 ne donne pas d'exemples d'activités faisant intervenir des notions de logique.

À l'inverse, le document ressource *Notations et raisonnement mathématiques* de 2009 propose une série d'exercices sur les notions de logique au programme, mais aucune considération théorique sur ces notions. Il n'est ainsi pas question de les présenter, ni pour les élèves, ni même pour les professeurs, à partir de l'approche de la logique mathématique.

Plusieurs signes de la complexité de l'expression de ces notions de logique dans le discours mathématiques sont relevés (quantifications implicites, sens des mots « et », « ou », « un », principe du maximum d'information), sous l'angle des différences à souligner entre le langage courant et le langage mathématique, semblant ainsi opposer ces deux langages qui sont pourtant présents dans l'activité mathématique. Nous avons vu dans la deuxième partie de la thèse comment la logique mathématique pouvait être une référence pour expliquer ces points complexes. Dans le document ressource, ils sont simplement soulignés, aucune explication n'est donnée.

Pour cette étude des programmes, nous avons regardé le savoir à enseigner comme produit auquel aboutit la transposition didactique externe, en soulignant les choix fait par les auteurs et en les situant par rapport à la référence proposée dans la deuxième partie. Revenons maintenant à la caractérisation du savoir à enseigner proposée par G. Arsac (voir citation page 175) : « ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner ». Dans cette optique, le savoir à enseigner est vu plutôt comme le point de départ de la transposition didactique interne, qui aboutit au savoir enseigné. Bien sûr, les enseignants se réfèrent aux programmes pour préparer leurs cours, mais ils consultent également d'autres ressources. Parmi celles-ci, les manuels ont une place importante, peut-être particulièrement dans ce contexte de nouveauté pour les notions de logique. J'en propose l'analyse dans le chapitre suivant. Je les regarde notamment du point de vue de l'interprétation des programmes. Pour les manuels de 1969, nous avons vu qu'il y avait dans le programme une référence claire à la logique mathématique, et nous pouvons faire l'hypothèse d'une certaine uniformité dans ce qui est proposé. L'étude de quelques manuels de cette époque est surtout intéressante en comparaison avec les manuels actuels, et parce qu'elle nous renseigne sur ce qui a pu être enseigné alors. Avec l'étude des manuels actuels, je cherche à mesurer les effets de l'absence de référence claire à la logique mathématique dans le programme de 2009.