

# Calcul de structure en fatigue

---

## Sommaire

---

<b>7.1 Introduction</b> . . . . .	<b>185</b>
<b>7.2 Implémentation du modèle de comportement</b> . . . . .	<b>186</b>
7.2.1 Intégration de la loi de comportement et des lois d'évolution . . . . .	186
7.2.2 Quelques éléments de programmation . . . . .	187
<b>7.3 Application au cas d'une éprouvette lisse en traction</b> . . . . .	<b>191</b>
<b>7.4 Application au cas d'une plaque trouée</b> . . . . .	<b>194</b>
7.4.0.1 Dispositif expérimental . . . . .	194
7.4.0.2 Corrélation essai/calcul . . . . .	196
<b>7.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>198</b>

---

## 7.1 Introduction

On propose dans ce chapitre une application de notre modèle de comportement dans le cas d'une structure. Nous avons choisis d'étudier une structure de type plaque trouée. Les avantages de ce type de structure sont multiples. D'abord, il s'agit d'une géométrie relativement récurrente dans les structures industrielles comme les panneaux de fuselage dans l'industrie aéronautique par exemple, mais également dans de nombreux assemblages. Or, le trou est un concentrateur de contraintes qui peut favoriser l'apparition de l'endommagement. Il apparaît donc important d'être capable de prédire son apparition et son évolution dans ce type de structure. De plus la présence du trou entraîne un état de contrainte multi-axial sous un chargement uni-axial qui nous permettra de tester notre modèle. Enfin, il s'agit d'une structure relativement simple à fabriquer et à tester.

Afin d'être utilisé pour un calcul de structure, nous verrons dans un premier temps que le modèle a été implanté dans le code de calcul par éléments finis Zé-BuLoN. Enfin, nous terminerons par une application de notre modèle sur un calcul de plaque trouée.

## Implémentation du modèle de comportement

### 7.2.1 Intégration de la loi de comportement et des lois d'évolution

Le modèle de comportement élastique endommageable développé dans le chapitre 4 a été implanté dans le code de calcul ZéBuLoN développé au Centre des Matériaux. Sa structure de programmation orientée *objet* offre un cadre pratique pour l'implémentation de nouveaux modèles de comportement. Ainsi, sa bibliothèque matériau Z-Mat peut-être complétée via le pré-processeur ZebFront qui permet de développer de nouvelles lois de comportement de façon relativement simple grâce à la pré-programmation de deux méthodes d'intégration : l'une est explicite : la méthode de Runge-Kutta et la seconde est implicite, la  $\theta$ -méthode.

L'état thermodynamique d'un matériau est défini par un ensemble de variables d'état ( $\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m$  et  $r$  dans notre cas) aux quelles sont associées une loi d'état et une loi d'évolution.

Les lois d'état sont des relations mathématiques qui permettent de calculer les variables associées aux variables d'état ( $\underline{\underline{\sigma}}, A, M, R$ ). Ces relations étant définies de façon explicite aucune intégration n'est requise.

Les lois d'évolution des variables d'état, en revanche, se présentent sous la forme d'équations différentielles. Si dans la majorité des cas l'obtention de la solution nécessite l'intégration de la loi d'évolution, il arrive que l'on dispose d'une solution analytique de l'équation. Ainsi, lors de l'implémentation, les variables d'état peuvent donc être traitées de deux manières différentes :

1. l'intégration de la loi d'évolution est nécessaire, la variable est alors traitée comme une variable à intégrer. L'ensemble des variables à intégrer est noté  $V_{int}$  ;  
Ici, l'ensemble  $V_{int}$  se réduit à un seul élément, la variable d'endommagement  $\alpha$ ,  $V_{int} = \{\alpha\}$ .
2. on dispose de la forme analytique de son évolution, la variable est alors traitée comme une variable dite auxiliaire. L'ensemble des variables auxiliaires est noté  $V_{aux}$ .

Ici, l'ensemble  $V_{aux}$  contient les variables  $m$  et  $r$ . Précisons toutefois que l'on intègre également à l'ensemble des variables auxiliaires, les variables, qui ne nécessitent pas d'intégration, et que l'on souhaite utiliser durant le calcul et dont on souhaite disposer lors d'un post-traitement. Dans le cas de notre modèle, il s'agit de la force thermodynamique de  $A$  associée à l'endommagement. Ainsi, l'ensemble des variables auxiliaires est :  $V_{aux} = \{m, r, A\}$

Comme nous l'avons vu, parmi les relations constitutives du comportement, les lois d'évolution des variables d'état (dans notre cas la loi d'évolution de la variable d'endommagement  $\alpha$ ) se présentent sous la forme d'une équation différentielle qu'il faut intégrer (EQ. 7.1).

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, m, r, \underline{\underline{C}}^0) \quad (7.1)$$

Un modèle élément fini classique est basé sur une formulation en déplacement. De ce fait, le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et sa dérivée par rapport au temps  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$  sont des grandeurs directement accessibles et constituent donc des données d'entrées de l'équation précédente. Dans le cadre d'une évaluation incrémentale de cette équation différentielle, on impose un incrément de temps  $\Delta t = t_1 - t_0$  qui se traduit mécaniquement par un incrément de déformation  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ . A l'instant  $t_0$  l'ensemble des grandeurs  $\underline{\underline{\sigma}}^{t_0}, \alpha^{t_0}, A^{t_0}, \dots$  sont connues. Les lois constitutives du comportement et l'intégration de la loi d'évolution via un schéma d'intégration adapté doit permettre de déterminer les valeurs des grandeurs  $\underline{\underline{\sigma}}^{t_1}, \alpha^{t_1}, A^{t_1}, \dots$  actualisées à l'instant  $t_1$  ainsi que la matrice tangente (Eq. 7.2) nécessaire au calcul de la matrice de rigidité élémentaire.

$$\underline{\underline{L}} = \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (7.2)$$

Comme nous l'avons expliqué, l'intérêt de l'utilisation de ZebFront réside dans la pré-programmation des deux schémas d'intégrations explicite et implicite. Nous avons choisi le schéma d'intégration explicite de Runge-Kutta qui est stable et fournit une bonne précision. En revanche le coût de calcul peut parfois être plus important.

### Quelques éléments de programmation

De part sa programmation orientée objet couplée à l'utilisation du pré-processeur ZebFront, l'intégration de nouvelles lois de comportement dans le code de calcul Zé-BuLoN est relativement simple. Ainsi, l'implémentation se résume à la définition de trois blocs qui constituent les trois étapes clés de l'implémentation :

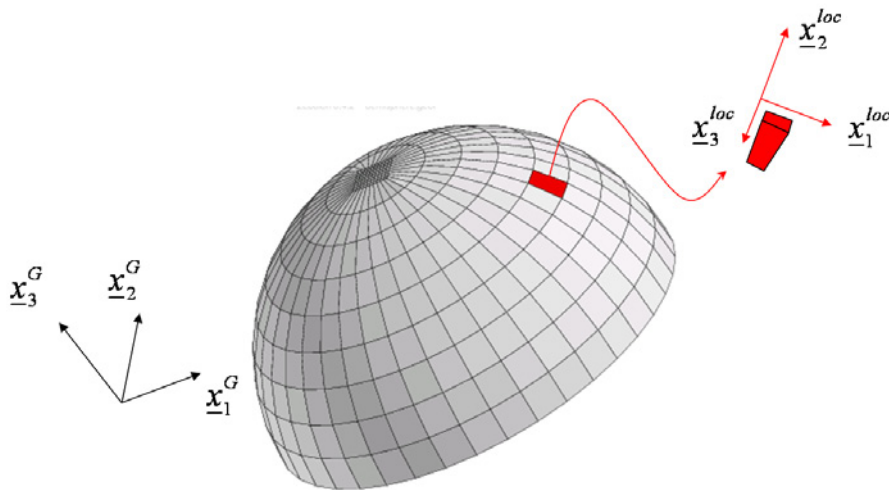
1. La déclaration d'un modèle de comportement passe par la définition d'une classe qui est introduite par l'instruction `@Class`. Un objet de cette classe contient alors :
  - un couple de variables primale (`@Grad`) et duale (`@Flux`). `@Grad` correspond à la variable `eto` et `@Flux` à la variable `sig` qui représentent respectivement le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ .
  - un ensemble de variables internes (`@VarInt`), on retrouve sous ce mot-clé l'ensemble  $V_{int}$  des variables à intégrer ;
  - un ensemble de variables auxiliaires (`@VarAux`), on retrouve sous ce mot-clé l'ensemble  $V_{aux}$  des variables auxiliaires. On rappelle qu'en plus des variables d'état  $m$  et  $r$  nous définissons deux autres variables auxiliaires qui sont :  $A$  et  $A^c$  ;
  - un ensemble de coefficients matériau (`@Coeff`).
2. L'évaluation des dérivées temporelles de chacune des variables à intégrer suivant un schéma explicite `@Derivative` ;

Ici, nous n'avons qu'une seule variable d'état à intégrer :  $\dot{\alpha}$ . L'utilisation de la commande @Derivative permet de faire appel à un schéma d'intégration explicite, les équations différentielles sont alors résolues de manière séquentielle. L'algorithme d'implémentation est présenté FIG. 7.3.

3. Détermination de la variable duale et les variables auxiliaires ainsi que la matrice tangente @StrainPart ;

Notons que la matrice tangente du comportement est approximée par la matrice de rigidité :  $\underline{L} \simeq \underline{C}$ .

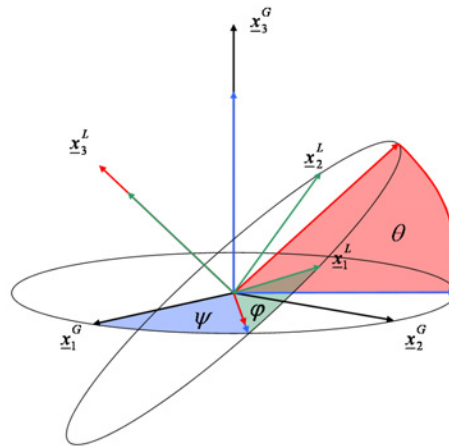
Le modèle de comportement développé modélise le comportement endommageable du matériau unidirectionnel. En présence ou non d'endommagement, ce comportement est anisotrope. Au cours d'un calcul par éléments finis, les relations constitutives du comportement sont prises en compte localement au sein de chaque élément. La description du comportement doit être indépendante du modèle éléments finis, aussi il est important de tenir compte de l'orientation locale que l'on souhaite employer. Ainsi, il devient nécessaire de définir un repère associé à chaque élément (FIG. 7.1).



**FIGURE 7.1** - Repère local d'un élément permettant de définir son orientation par rapport au repère global de la structure

Les transformations entre ces repères locaux et le repère global de la structure sont exprimées par l'intermédiaire des angles d'Euler. Les angles d'Euler permettent définir totalement l'orientation d'une base orthonormée locale  $b^L(x_1^L, x_2^L, x_3^L)$  par rapport à une base orthonormée globale  $b^G(x_1^G, x_2^G, x_3^G)$ . Ils sont au nombre de trois et sont généralement notés  $\psi$  (précession),  $\theta$  (nutation) et  $\varphi$  (rotation propre). Ils correspondent aux rotations définies FIG. 7.2.

La matrice de changement de base de  $b^L$  à  $b^G$ , que l'on notera  $[P]$  peut être déterminée par l'expression 7.3 :



**FIGURE 7.2 -** Les trois angles d'Euler

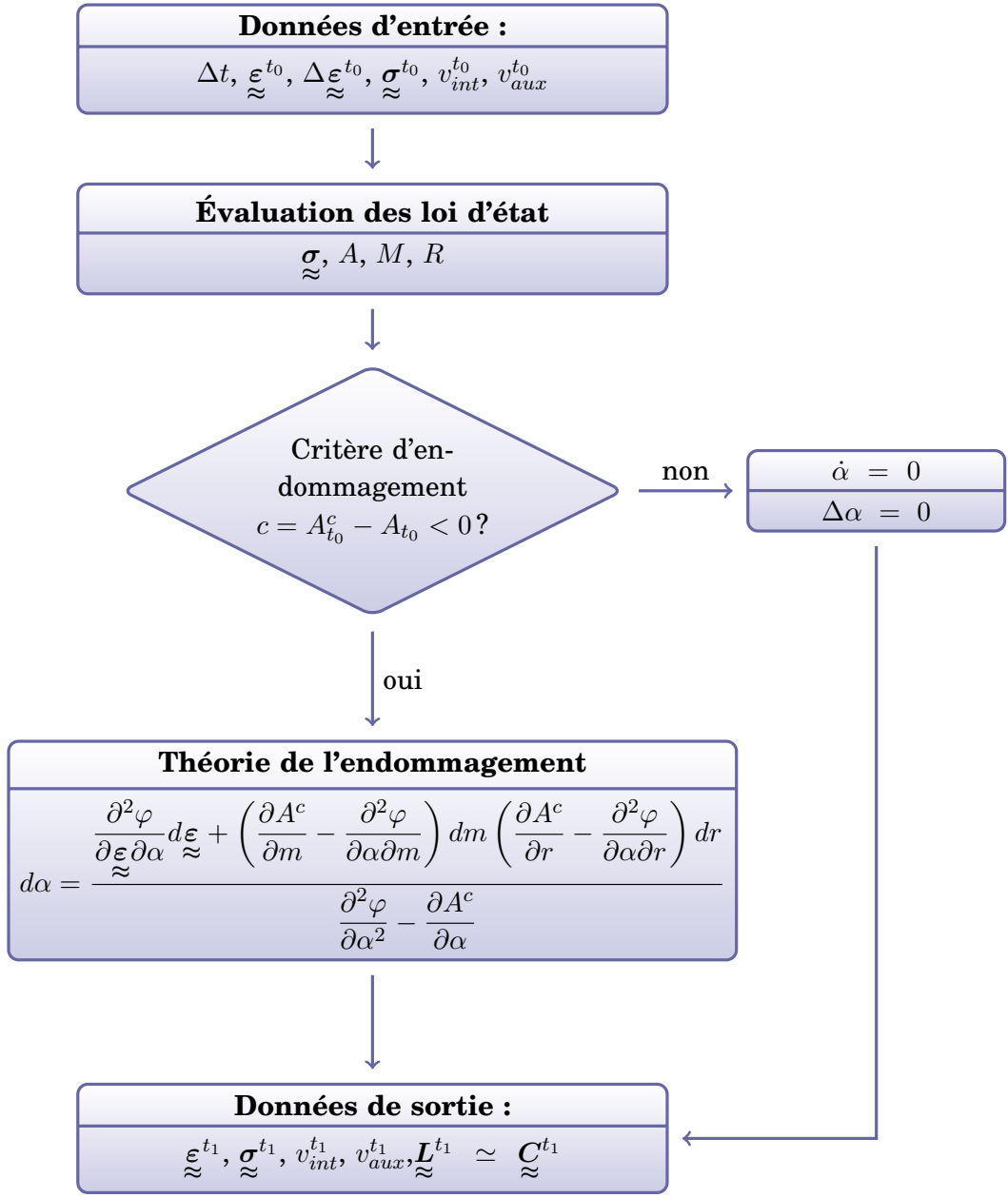
$$[P] = [P_\varphi][P_\theta][P_\psi] \quad (7.3)$$

$$[P_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$[P_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$[P_\psi] = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

On présente en annexe A les correspondances entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées cylindriques et sphériques.



**FIGURE 7.3** - Algorithme d'implémentation de la loi de comportement pour un schéma d'intégration explicite

### 7.3 Application au cas d'une éprouvette lisse en traction

Nous avons, depuis le début de ce chapitre, présenté l'implémentation de notre modèle de comportement dans le code de calcul ZéBuLoN ainsi que la stratégie de calcul utilisée pour le cas de la fatigue. L'identification présentée dans le chapitre précédent a été réalisée dans le cas d'un élément de volume. Notre objectif est maintenant de valider notre modèle dans le cas d'un calcul de structure. Ainsi nous présentons, dans ce qui suit, les essais qui ont été réalisés dans un but de validation.

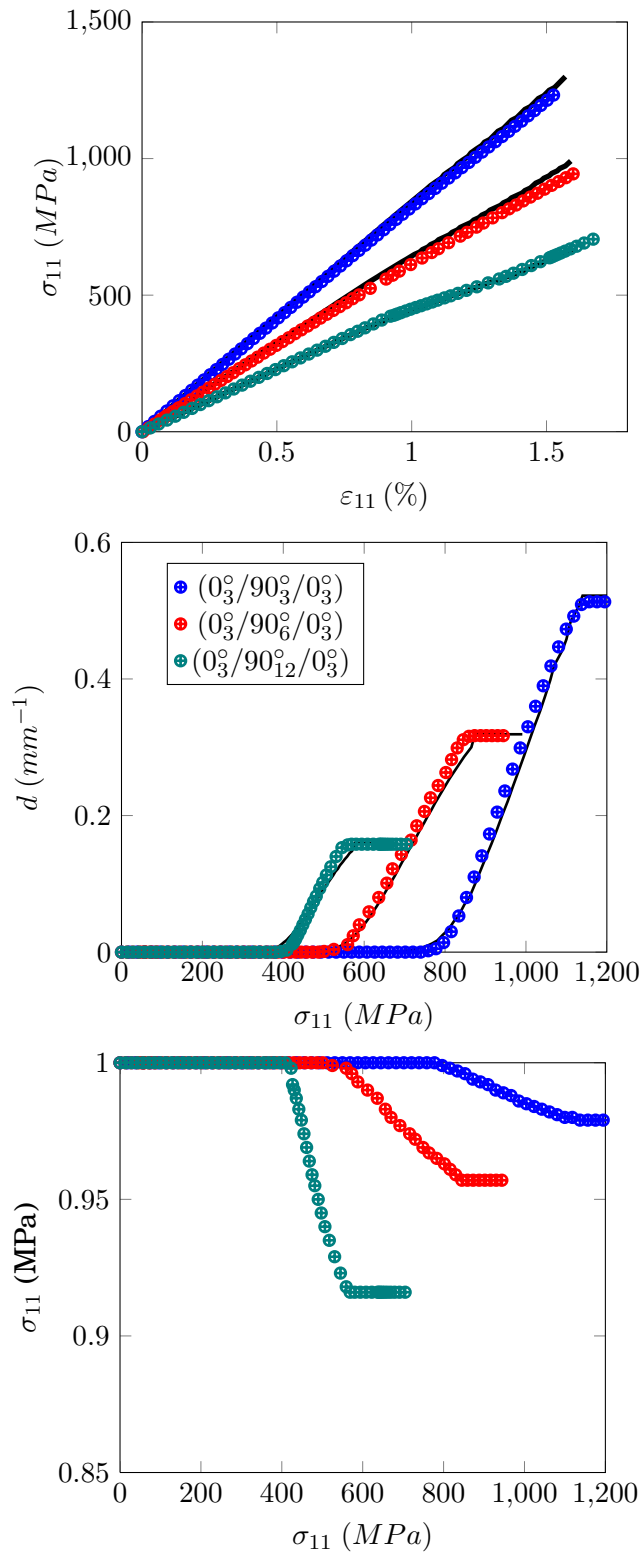
Nous avons procédé à l'identification de notre modèle via une simulation sur un élément de volume. La première étape de la validation consiste donc à comparer cette approche sur l'élément de volume au calcul par éléments finis sur une éprouvette lisse. Puis, dans un deuxième temps, nous l'appliquerons à une structure plus complexe.

Comme nous le disions au début de ce chapitre, nous avons choisis d'étudier une structure de type *plaque trouée*. Les avantages de ce type de structure sont multiples. D'abord, il s'agit d'une géométrie relativement récurrente dans les structures industrielles (aéronautique, ferroviaire,...). Des assemblages sont alors nécessaires entre les différentes parties de la structure. C'est liaisons sont généralement réalisées par collage et rivetage ou boulonnage. C'est alors dans ces zones, où les trous agissent comme des concentrateurs de contraintes, que naissent les premiers endommagements. Il devient alors primordial d'être capable de prédire leur apparition et leur évolution afin de pouvoir prédire la durée de vie de la structure. De plus la présence du trou entraîne un état de contrainte multi-axial sous un chargement uni-axial qui nous permettra de tester notre modèle. Enfin, il s'agit d'une structure relativement simple à fabriquer et à tester. Le dispositif expérimental que nous avons mis en place pour ces essais est décrit dans la suite (§7.4.0.1).

#### – Cas quasi-statique :

Afin de valider l'identification de notre modèle, nous proposons ici une comparaison d'une approche analytique sur un élément de volume avec un calcul par éléments finis. L'implémentation de notre modèle dans le code de calcul a été présentée précédemment.

La figure suivante présente les résultats des simulations obtenues pour les séquences  $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$ . Il apparaît clairement que l'on a une très bonne corrélation entre la simulation sur un élément de volume et le calcul par éléments finis.



**FIGURE 7.4** - Simulation par éléments finis d'un essai de traction quasi-statique sur les séquences  $(0^\circ_3/90^\circ_{n=3,6,12}/0^\circ_3)$



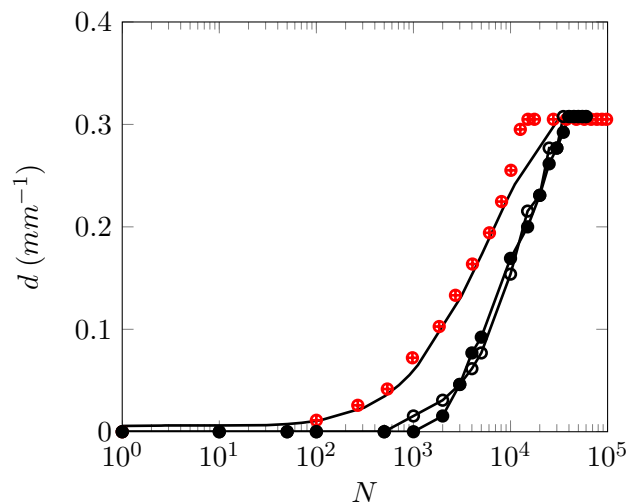
## – Cas de la fatigue :

Le cas de la fatigue, nous l'avons vu, est plus complexe dans la mesure où le calcul par élément finis doit être couplé au post-processeur qui permet d'appliquer la méthode de saut de cycles précédemment décrite.

On présente ici le cas de la séquence ( $0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ}$ ) sollicitée en traction cyclique à un niveau de contrainte maximum égal à  $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$ .

On rappelle qu'il est nécessaire de fixer la valeur du paramètre d'extrapolation ainsi que la longueur des intervalles utilisés pour le calcul de la distribution des fréquences relatives des saut de cycles locaux. Ainsi, nous avons fixé la valeur du paramètre d'extrapolation à 10% de la densité de fissure à saturation et la longueur des intervalles est prise égale à 1000 cycles.

La figure ci-dessous (FIG. 7.5) présente le résultat de la simulation. On constate que l'on a une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux. Seulement 13 cycles sont calculés pour atteindre la saturation de l'endommagement au lieu des 17640 ce qui fait gagner un temps considérable tout en gardant une précision acceptable au regard de la comparaison avec les résultats expérimentaux. Le tableau ci-dessous (TAB. 7.1) présente le déroulement du calcul.



**FIGURE 7.5** - Simulation de l'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycle sous sollicitation cyclique avec  $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$  pour la séquence ( $0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ}$ )

Cycle simulé	$\Delta N$
1	100
101	166
267	272
539	438
977	867
2711	867
4056	1345
6070	2014
8084	2014
10098	2014
12612	2514
15126	2514
17640	2514

TABLE 7.1 - *Déroulement du calcul*

## 7.4 Application au cas d'une plaque trouée

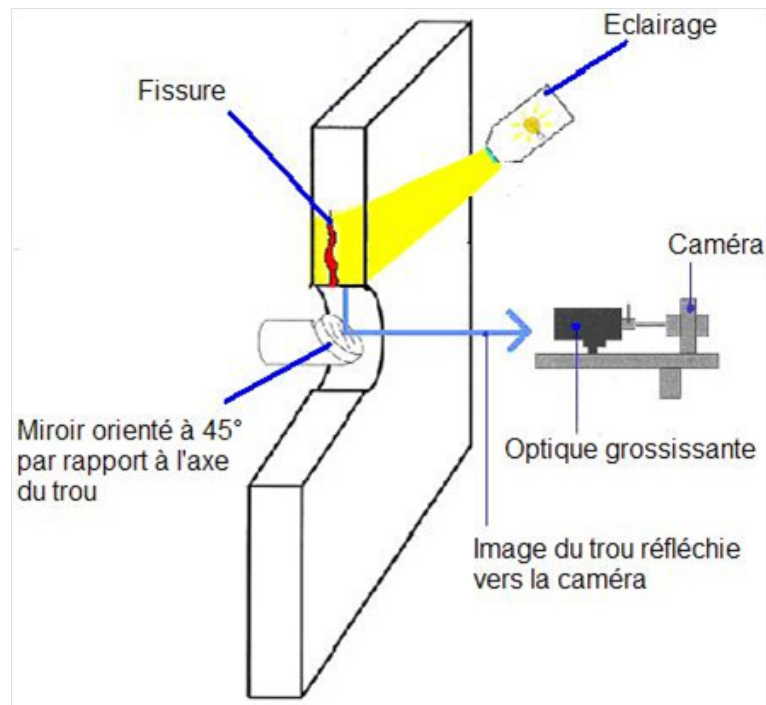
Maintenant que nous avons validé notre modèle et son identification dans le cas d'une éprouvette lisse, on propose une application au cas d'une plaque trouée. Dans un premier temps, nous présentons la procédure expérimentale utilisée.

### 7.4.0.1 Dispositif expérimental

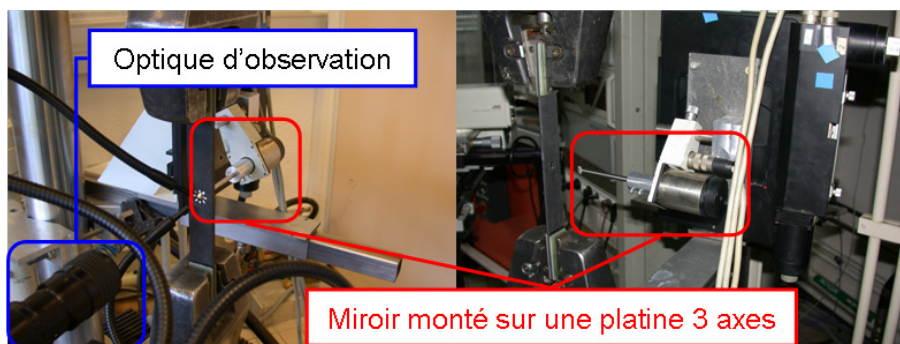
Notre objectif est ici de suivre l'évolution de l'endommagement en cours d'essai sur le bord libre à l'intérieur du trou d'une éprouvette trouée. Pour cela, un dispositif expérimental spécifique a été développé. A l'instar de ce qui a été fait précédemment sur des éprouvettes planes, on utilise là encore une méthode optique en suivant l'évolution de la fissuration in-situ à l'aide d'une caméra.

Le montage se compose d'un miroir orienté à 45° par rapport à l'axe du trou qui permet de réfléchir l'image du bord libre du trou vers la caméra (FIG. 7.6). Ce dernier est monté sur une platine permettant une translation dans chacune des directions et une rotation autour de l'axe défini par son support. Ainsi, il est possible d'observer tout le périmètre du trou sur toute l'épaisseur de l'éprouvette.

Le protocole reste identique à celui utilisé pour les éprouvettes droites. Plusieurs photographies sont prises aux différents paliers d'observation de façon à pouvoir reconstruire une image du bord libre du trou et analyser les endommagements en présence. Là encore, un polissage du bord libre doit être effectué préalablement de manière à simplifier l'observation.



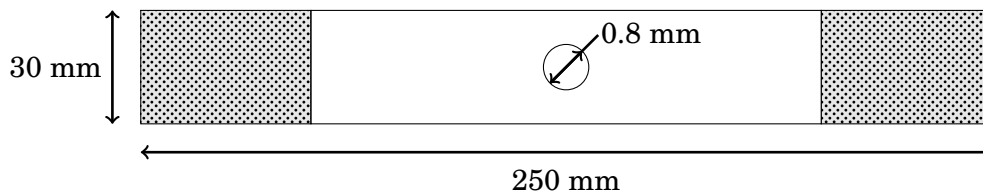
**FIGURE 7.6** - Schéma du dispositif expérimental pour l'observation de l'endommagement au sein d'un trou



**FIGURE 7.7** - Montage expérimental pour l'observation et le suivi de l'endommagement au sein d'un trou

Les éprouvettes ont été découpées à la meule diamant dans des plaques stratifiées. Le trou est ensuite usiné par perçage refroidi à l'eau de manière à limiter l'échauffement dans la zone de contact entre le matériau et l'outil. Le perçage crée des endommagements, en général superficiels, qui sont en grande partie supprimés par le polissage.

Les éprouvettes ont été dimensionnées de manière à s'assurer que le champ de contrainte sur le bord du trou ne soit perturbé ni par la présence des autres bords libres qui induisent leurs propres effets de bords, ni par les zones sur lesquelles les mors appliquent leur effort. La géométrie et les dimensions des éprouvettes sont présentées dans la figure qui suit (FIG. 7.8).

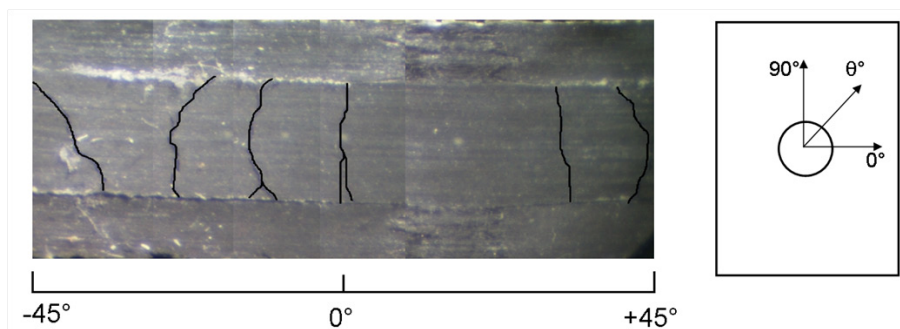


**FIGURE 7.8** - Montage expérimental pour l'observation et le suivi de l'endommagement au sein d'un trou

#### 7.4.0.2 Corrélation essai/calcul

La figure FIG. 7.9 représente le bord libre à l'intérieur du trou d'une éprouvette de séquence ( $0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ}$ ). Afin de clairement identifier la direction selon laquelle sont faites les observations et de repérer la position des fissures sur le trou, on définit un angle  $\theta$  qui représente l'angle entre la direction de l'observation et la direction de l'effort (7.4)

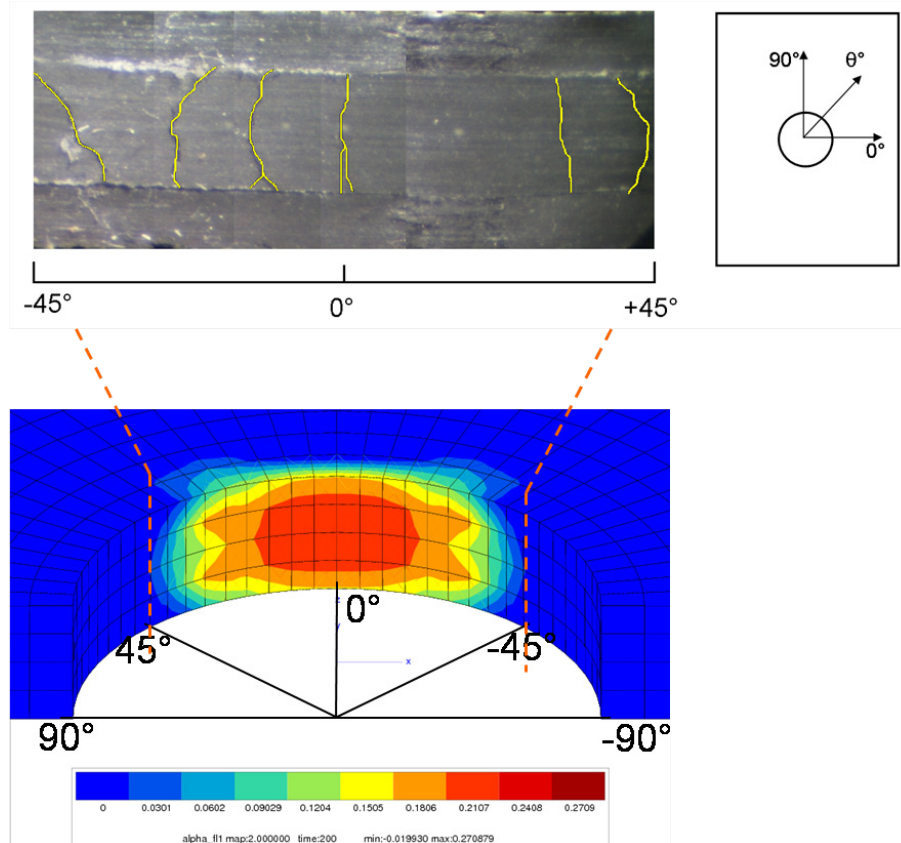
On constate que le trou a joué son rôle de concentrateur de contraintes favorisant l'apparition de fissures dans la zone comprise en  $+45^{\circ}$  et  $-45^{\circ}$ . La fissuration est le premier type d'endommagement à apparaître mais on constate également l'apparition de délaminage.



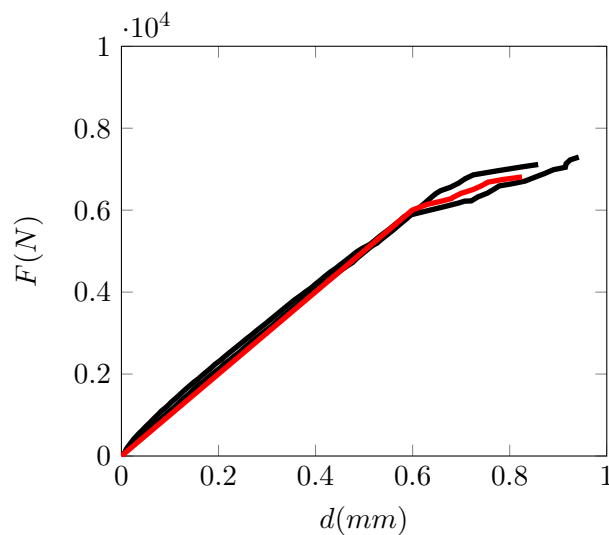
**FIGURE 7.9** - Réseau de fissures à l'intérieur du trou d'une éprouvette trouée de séquence ( $0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ}$ ) soumise à un chargement quasi-statique

La figure FIG. 7.10 représente la cartographie de la densité de fissures sur le bord libre à l'intérieur du trou. Cette cartographie correspond à l'état de fissuration juste avant la rupture, qui correspond à l'état de saturation. On constate une bonne corrélation entre la zone fissurée prédite par la simulation et la fissuration observée expérimentalement. Précisons toutefois que des fissures ont également été observées sur les bords libres extérieurs de l'éprouvette.

La figure FIG. 7.11 représente la comparaison entre les courbes expérimentale et simulées de l'effort appliqué en fonction du déplacement. Il apparaît là encore que l'on a une bonne corrélation entre la simulation et l'expérience. En effet, on constate que l'on est capable de prédire avec une bonne précision la chute de rigidité consécutive à l'apparition de la fissuration.



**FIGURE 7.10** - Comparaison *Essai/calcul* du réseau de fissures à l'intérieur du trou d'une éprouvette trouée de séquence  $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$  soumise à un chargement quasi-statique



**FIGURE 7.11** - Courbes *Effort/Déplacement* expérimentales et simulée de l'essai de traction quasi-statique sur éprouvette trouée.

## 7.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous venons de présenter l'implémentation du modèle d'endommagement par fissuration intra-laminaire dans le code de calcul ZéBuLoN. Si le calcul quasi-statique peut se faire simplement de manière incrémentale, dans le cas de la fatigue cela s'avère plus complexe si l'on souhaite limiter les temps de calcul. Aussi, nous avons fait le choix d'adopter une approche de type saut de cycles. Dans le but de valider notre modèle et son identification, nous avons proposé une comparaison des résultats obtenus par la simulation d'un élément de volume avec les résultats d'un calcul par éléments finis sur une éprouvette lisse. Enfin, nous terminons par une application sur une structure plus complexe : une plaque trouée.