



---

# Calcul de la pression hydrodynamique d'impact

La méthode présentée au chapitre 2 permet de déterminer l'évolution de la surface mouillée au cours de l'impact. Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode utilisée pour calculer la pression hydrodynamique agissant sur la surface mouillée. Nous utiliserons le modèle de Logvinovich modifié qui a été étendu afin de prendre en compte la vitesse horizontale lors du calcul de la pression (paragraphe 3.1). La détermination du potentiel des vitesses de Wagner nécessaire dans le cadre du modèle de Logvinovich modifié est ensuite détaillée au paragraphe 3.2. Des cas tests sont présentés pour validation.

Dans ce chapitre,  $R_1(x_1, y_1, z_1)$  désigne un repère fixe,  $R_0(x_0, y_0, z_0)$  désigne un repère lié au corps impactant et  $R(x, y, z)$  désigne le repère lié au point de référence  $\mathbf{C}$  de la description polaire de la ligne de contact. La vitesse horizontale  $V_x$  étant considérée constante durant l'impact (et  $V_y = 0$ ), le décalage entre  $\mathbf{O}_1$  et  $\mathbf{O}$  est égal à  $V_x t$  (voir figure 3.1).

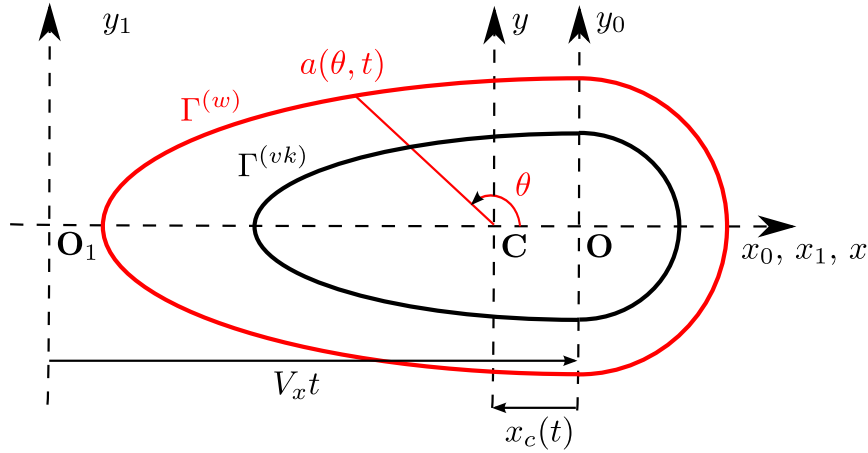


FIGURE 3.1 – Position des différents repères

## Modèle de Logvinovich modifié tridimensionnel (MLM 3D)

Le modèle de Logvinovich modifié a d'abord été proposé par [Korobkin \(2004\)](#) pour le cas 2D et a ensuite été étendu au cas 3D dans [Korobkin \(2005\)](#). Le MLM présente un certain nombre d'avantages. Tout d'abord, comme nous l'avons indiqué, une variante 3D de ce modèle existe déjà. En outre, le MLM est simple et aisé à programmer. De plus, ce modèle est plus précis que d'autres modèles basés sur la théorie de Wagner. Dans le cas de problèmes 2D et axisymétriques, il a été observé que le MLM permettait de déterminer les efforts d'impact hydrodynamique avec une remarquable précision, [Tassin \*et al.\* \(2010\)](#) (voir annexe A).

Dans le MLM, la surface de contact est calculée par le modèle de Wagner classique. Le calcul de la pression incorpore des termes supplémentaires provenant du problème potentiel non linéaire initial 2.1. Ainsi, la pression au sein du fluide est donnée par l'équation de Bernoulli complète rappelée ci-dessous :

$$p(x_1, y_1, z_1, t) = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \right). \quad (3.1)$$

En supposant que le corps impactant a un mouvement de translation à vitesse constante  $\mathbf{V} = {}^t(V_x, V_y, V_z)$ , la pression  $P$  et le potentiel des vitesses  $\phi$  sur le corps (en un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  dans le repère  $R_0$  lié au corps) sont définis par :

$$P(x_0, y_0, t) = p(x_0 + V_x t, y_0 + V_y t, f(x_0, y_0) - h(t), t) \quad (3.2)$$

$$\phi(x_0, y_0, t) = \varphi(x_0 + V_x t, y_0 + V_y t, f(x_0, y_0) - h(t), t). \quad (3.3)$$

En utilisant la condition cinématique imposée sur la surface mouillée :

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_{,x} \\ \varphi_{,y} \\ \varphi_{,z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f_{,x} \\ -f_{,y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f_{,x} \\ -f_{,y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

on peut exprimer la pression sur le corps en fonction du potentiel  $\phi$  sous la forme suivante :

$$P(x_0, y_0, t) = \rho \left[ -\phi_{,t} + V_x \phi_{,x} + V_y \phi_{,y} + H \frac{f_{,x} \phi_{,x} + f_{,y} \phi_{,y}}{1 + |\nabla f|^2} + \frac{f_{,x} f_{,y} \phi_{,x} \phi_{,y}}{1 + |\nabla f|^2} - \frac{1}{2} \frac{(1 + f_{,y}^2) \phi_{,x}^2 + (1 + f_{,x}^2) \phi_{,y}^2 - H^2}{1 + |\nabla f|^2} \right], \quad (3.5)$$

avec  $H = -f_{,x} V_x - f_{,y} V_y + V_z$ .

On peut remarquer que, par rapport au problème potentiel non linéaire 2.1, aucune hypothèse supplémentaire n'a été introduite pour établir l'équation 3.5. Cependant, le calcul du potentiel  $\varphi$  solution du système 2.1 est complexe et ne peut se faire qu'en utilisant un modèle éléments de frontière non linéaire. L'idée du modèle MLM consiste à approximer  $\varphi$  à l'aide du potentiel issu de la théorie de Wagner classique et d'un développement limité autour de la surface  $z = 0$ . Ainsi, en notant  $\varphi^{(w)}(x_0, y_0, t)$  le potentiel des vitesses de Wagner exprimé dans le repère  $R_0$  lié au corps, le potentiel est approximé par :

$$\begin{aligned} \phi(x_0, y_0, t) &\approx \varphi^{(w)}(x_0, y_0, f(x_0, y_0) + V_z t, t) \\ &\approx \varphi^{(w)}(x_0, y_0, 0, t) + [f(x_0, y_0) + V_z t] \times \varphi_{,z_0}^{(w)} \Big|_{z_0=0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Or, d'après les conditions aux limites imposées au potentiel des vitesses de Wagner sur la surface mouillée (voir système 3.8) :

$$\phi(x_0, y_0, t) \approx \varphi^{(w)}(x_0, y_0, 0, t) + V_z (f(x_0, y_0) + V_z t). \quad (3.7)$$

Cette approximation permet d'éviter la résolution lourde du système d'équations 2.1 mais requiert cependant le calcul de  $\varphi^{(w)}$  et de ses différentes dérivées partielles.

## Calcul du potentiel des vitesses de Wagner

$\varphi^{(w)}$

### 3.2.1 Equation intégrale pour le calcul de $\varphi^{(w)}$

Le potentiel des vitesses de Wagner est régi par le système d'équations que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{cases} \Delta \varphi^{(w)} = 0 & , z < 0 \\ \varphi^{(w)} = 0 & , (x_0, y_0, 0) \in SL^{(w)} \\ \varphi_{,z}^{(w)} = V_z & , (x_0, y_0, 0) \in SM^{(w)} \\ \varphi^{(w)} \rightarrow 0 & , x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.8)$$

La solution de ce système admet la représentation intégrale suivante pour un point  $\mathbf{p}$  tel que  $z_p < 0$  (voir annexe B.1) :

$$\varphi^{(w)}(x_p, y_p, z_p, t) = -\frac{z_p}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) dx_q dy_q}{\left((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2\right)^{3/2}}. \quad (3.9)$$

La dérivation de cette équation par rapport à  $z_p$  conduit à :

$$\begin{aligned} \varphi_{,z}^{(w)}(x_p, y_p, z_p, t) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) dx_q dy_q}{\left((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2\right)^{3/2}} \\ &+ \frac{3z_p^2}{2\pi} \iint_{SM^{(w)}} \frac{\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) dx_q dy_q}{\left((x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + z_p^2\right)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le passage à la limite de l'équation 3.10 en  $z_p = 0^-$  détaillé à l'annexe B.2 conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} 2\pi|V_z| &= \iint_{SM^{(w)}} \frac{\left[\varphi^{(w)}(x_q, y_q, 0, t) - \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t)\right] dx_q dy_q}{\left[(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2\right]^{3/2}}, \\ &- \varphi^{(w)}(x_p, y_p, 0, t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a(\theta, t)} d\theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec  $a(\theta, t)$  la distance entre un point de la ligne de contact et le point  $\mathbf{p}$ . L'équation intégrale 3.11 régit le potentiel des vitesses de Wagner sur la surface mouillée et permet de déterminer une approximation de  $\varphi^{(w)}$  par une forme particulière présentée au paragraphe 3.2.2.

### 3.2.2 Solution analytique approchée pour $\varphi^{(w)}$

Dans le cas d'une ligne de contact elliptique de demi-axes  $d_1(t)$  et  $d_2(t)$ , le potentiel des vitesses de Wagner  $\varphi^{(w)}$  sur la surface mouillée admet la solution analytique suivante :

$$\varphi^{(w)}(x, y, 0, t) = -\frac{|V_z|d_1(t)}{E(e)} \sqrt{1 - x^2/d_1(t)^2 - y^2/d_2(t)^2}, \quad (3.12)$$

avec  $V_z$  la composante verticale de la vitesse d'impact et  $E(e)$  défini par l'équation 2.46.

On peut remarquer que l'expression 3.12 est de la forme  $A\sqrt{1 - r^2/a(\theta, t)^2}$ , avec  $(r, \theta)$  le système de coordonnées polaires du repère  $R$  et  $a(\theta, t)$  la fonction décrivant le rayon de la ligne de contact. Il semble par conséquent intéressant d'utiliser cette forme particulière pour des surfaces mouillées de formes plus générales mais régulières. On propose donc d'approximer le potentiel des vitesses de Wagner  $\varphi^{(w)}$  par une forme approchée  $\hat{\varphi}^{(w)}$  définie dans le repère  $R$  centré en  $\mathbf{C}$  :

$$\varphi^{(w)}(x_0, y_0, 0, t) \approx \hat{\varphi}^{(w)}(x_0 - x_c, y_0, 0, t) = A(t) \sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{a}(\theta, t)^2}}. \quad (3.13)$$

$r$  et  $\theta$  désignent les coordonnées polaires dans le repère  $R$ , on a donc :

$$\begin{cases} x_0 - x_c(t) = r \cos \theta \\ y_0 = r \sin \theta \end{cases}, \quad (3.14)$$

$x_c(t)$  étant l'abscisse du point de référence dans le repère  $R_0$ . Cette approximation implique un point d'arrêt en  $x_0 = x_c(t)$ . Si ce choix est évident pour une surface mouillée comportant deux axes de symétrie ( $x_c(t) = 0$ ), il est par contre plus discutable pour des formes plus générales. Néanmoins, une étude basée sur des calculs par éléments finis du potentiel des vitesses de Wagner, pour des plaques planes de formes assez générales, nous a permis de constater que le point d'arrêt se situait près de l'isobarycentre de la surface. Il apparaît que le point de référence  $\mathbf{C}$  est lui aussi proche de l'isobarycentre de la surface mouillée. Les quelques exemples présentés en fin de paragraphe illustreront ce point.

L'introduction de la fonction 3.13 dans l'équation 3.11 en choisissant un point  $\mathbf{p}$  en  $(x_p, y_p, z_p) = (x_c(t), 0, 0)$  conduit à :

$$2\pi|V_z| = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{a}(\theta, t)} \frac{[A(t)\sqrt{1 - r^2/\hat{a}(\theta, t)^2} - A(t)] r dr d\theta}{r^3} - A(t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\hat{a}(\theta, t)} d\theta. \quad (3.15)$$

Pour établir l'équation 3.15, le changement de variables  $(x_q, y_q) = (r \cos \theta + x_c(t), r \sin \theta)$  a été utilisé. En notant  $\xi = r/\hat{a}(\theta, t)$ , l'équation 3.15 peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 2\pi|V_z| &= -A(t) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{d\xi d\theta}{\hat{a}(\theta, t) [\sqrt{1 - \xi^2} + 1]} + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\hat{a}(\theta, t)} \right\} \\ &= -\frac{\pi}{2} A(t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\hat{a}(\theta, t)} d\theta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'évaluation de l'intégrale régulière ci-dessus ne pose pas de problème particulier.

### 3.2.3 Exemples de calculs de $\varphi^{(w)}$ pour des surfaces asymétriques

Trois exemples de calculs du potentiel des vitesses de Wagner pour des surfaces non symétriques sont présentés ci-dessous. Afin de valider l'approche, nous comparons les résultats de calculs par éléments finis à la solution approchée  $\hat{\varphi}^{(w)}$  obtenue par la méthode que nous venons de décrire. Les deux premiers exemples ne représentent pas des surfaces mouillées réelles mais des formes particulières qui nous ont semblé intéressantes. Pour ces deux cas, le point de référence a été placé au centre de la surface considérée. Le troisième exemple est par contre issu d'un calcul de surface mouillée ; le point de référence correspond au centre de la surface de von Kármán.

### Cas 1 : Surface asymétrique

La première surface mouillée est définie par  $\hat{a}(\theta) = 1 + 0.2 \cos \theta + 0.2 \cos 3\theta$ . La figure 3.2 ci-dessous présente la distribution du potentiel approché ainsi qu'une solution numérique issue d'un calcul par éléments finis. On remarque que la distribution du potentiel est globalement bien décrite par la forme approchée.

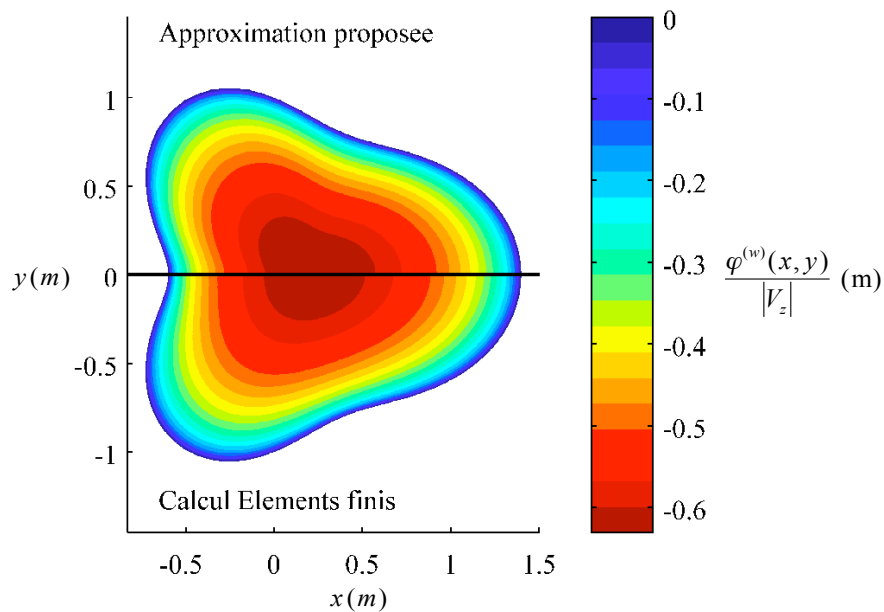


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la distribution du potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis sur la surface mouillée (cas 1)

La figure 3.3 compare la distribution du potentiel des vitesses le long de l'axe  $x$ . Les niveaux du potentiel sont globalement bien respectés sur une telle forme de surface mouillée. La position du centre de la surface est proche de la position du point d'arrêt prédite par le calcul par éléments finis.

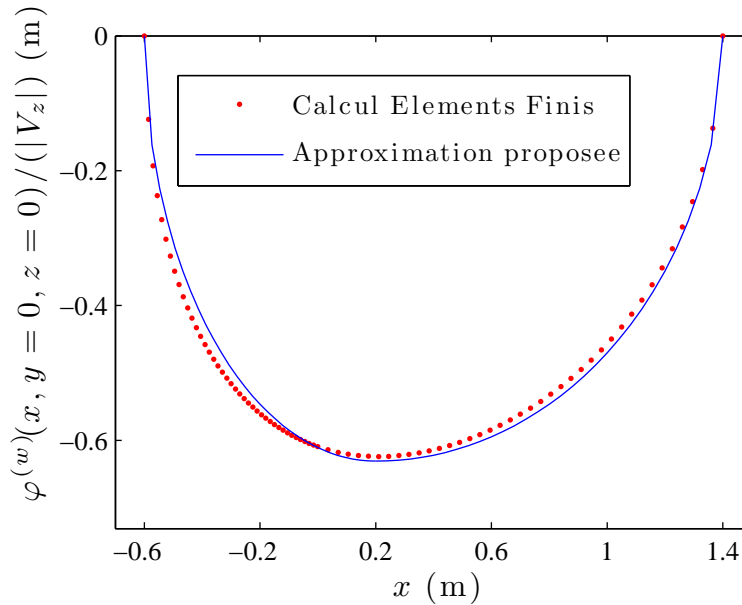


FIGURE 3.3 – Comparaison entre le potentiel des vitesses calculé à l’aide du modèle analytique et d’un calcul par éléments finis le long de l’axe  $x$  (cas 1)

### Cas 2 : Surface elliptique asymétrique

La seconde forme de surface mouillée considérée est composée de deux secteurs d’ellipse définis ci-dessous :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 & , x \geq 1 \\ (x-1)^2/3^2 + y^2 = 1 & , x \leq 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

La figure 3.4 montre de légères différences entre la solution approchée et la solution numérique de référence en ce qui concerne la répartition. Ceci semble lié à un léger décalage entre la position réelle du point d’arrêt (prévue par le calcul éléments finis) et le centre de la surface. En effet, l’écart  $\Delta x$  entre le point d’arrêt et le centre de la surface est d’environ 0.2 m, soit environ 5% de l’étendue de la surface mouillée dans la direction  $x$ .

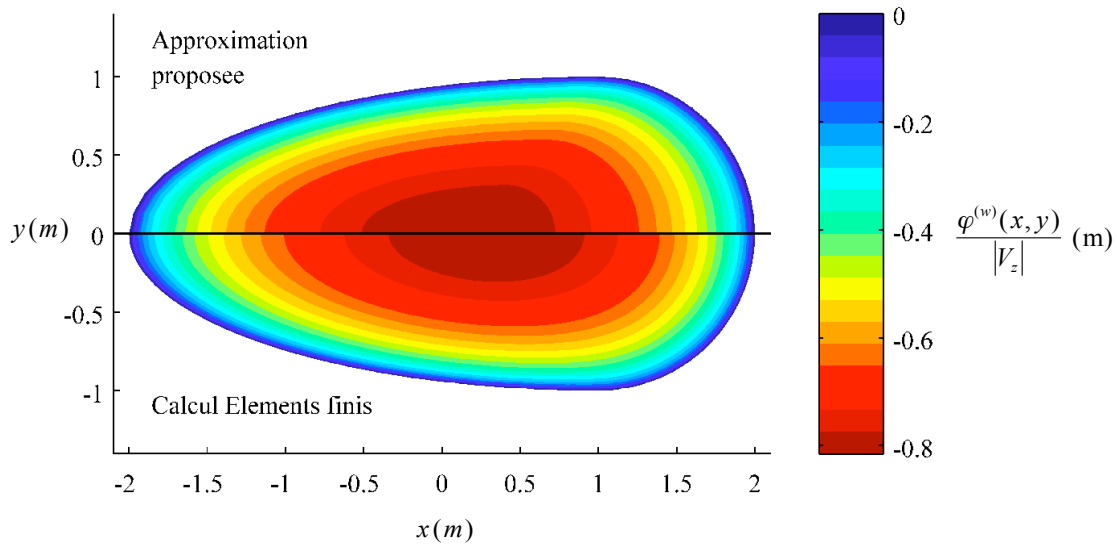


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la distribution du potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis sur la surface mouillée (cas 2)

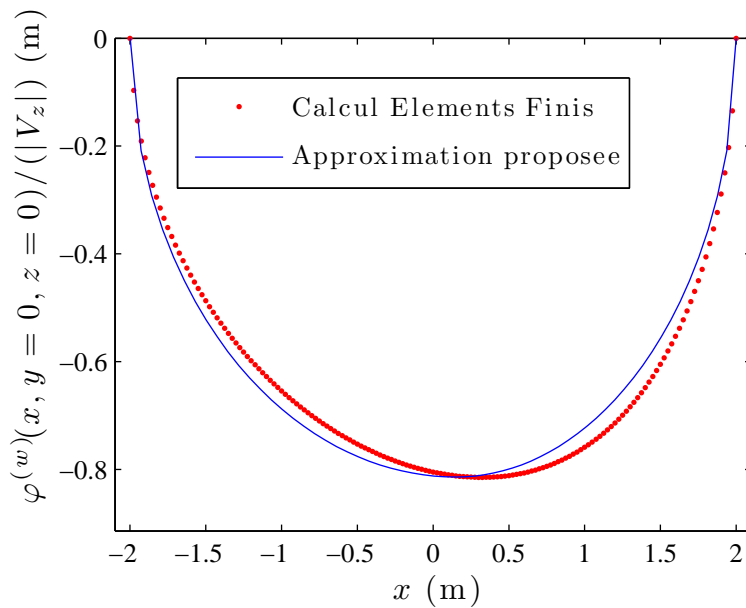


FIGURE 3.5 – Comparaison entre le potentiel des vitesses calculé à l'aide du modèle analytique et d'un calcul par éléments finis le long de l'axe  $x$  (cas 2)

### Cas 3 : Surface mouillée d'un cône asymétrique

Nous étudions à présent le cas d'une surface mouillée obtenue par la méthode présentée au chapitre 2 pour un cône non symétrique dont la géométrie est donnée



dans le chapitre 5 (paragraphe 5.2.2). Dans le cas du cône asymétrique, la forme de la surface mouillée n'évolue pas au cours de l'impact et la taille de la surface mouillée est proportionnelle à la profondeur de pénétration. Les résultats de calculs par éléments finis et de l'approximation proposée précédemment sont présentés à la figure 3.6. Le système de coordonnées est centré sur le point de référence  $\mathbf{C}$ . On peut observer sur la figure 3.7 que la position du point d'arrêt est très proche de 0. On vérifie ainsi que l'approximation de la position du point d'arrêt par la position du point de référence est réaliste. De plus, un calcul de la position du centre de la surface mouillée montre que l'écart entre le centre de la surface mouillée et le point de référence est inférieur à 1% de l'étendue de la surface mouillée dans la direction  $x$ .

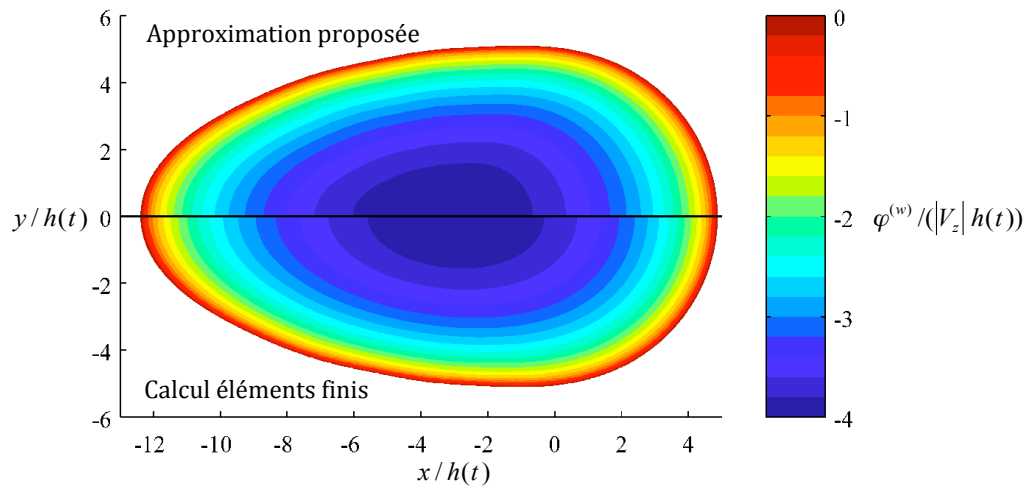
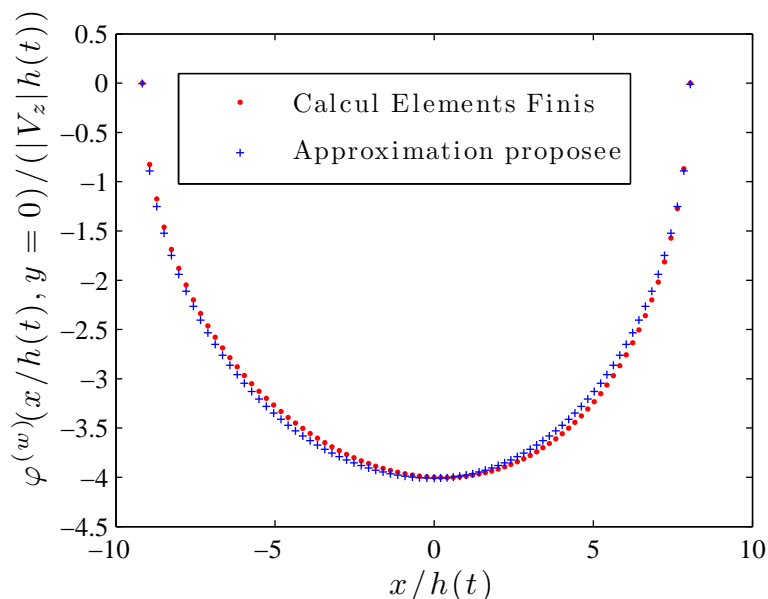


FIGURE 3.6 – Comparaison de la distribution du potentiel des vitesses sur la surface mouillée d'un cône asymétrique


 FIGURE 3.7 – Comparaison du potentiel des vitesses sur l'axe  $x$  (cône asymétrique)

### 3.3 Dérivation de $\phi$

L'introduction de l'approximation du potentiel des vitesses de Wagner dans l'équation 3.7 conduit à :

$$\phi(x_0, y_0, t) \approx \hat{\phi}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) + V_z(f(x_0, y_0) + V_z t). \quad (3.18)$$

Ainsi, les dérivées partielles de  $\phi$  deviennent :

$$\begin{cases} \phi_{,t}(x_0, y_0, t) \approx \hat{\phi}_{,t}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) - \frac{dx_c(t)}{dt} \hat{\phi}_{,x}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) + V_z^2 \\ \phi_{,x}(x_0, y_0, t) \approx \hat{\phi}_{,x}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) + f_{,x} V_z \\ \phi_{,y}(x_0, y_0, t) \approx \hat{\phi}_{,y}^{(w)}(x_0 - x_c(t), y_0, 0, t) + f_{,y} V_z \end{cases} \quad (3.19)$$

#### 3.3.1 Calcul de $\hat{\phi}_{,t}^{(w)}$

Repartons de l'approximation du potentiel des vitesses de Wagner :

$$\hat{\phi}^{(w)}(r, \theta, 0, t) = A(t) \sqrt{1 - r^2 / \hat{a}(\theta, t)^2}. \quad (3.20)$$

En dérivant  $\hat{\phi}^{(w)}$  par rapport au temps, on obtient :

$$\hat{\phi}_{,t}^{(w)}(r, \theta, 0, t) = \frac{dA(t)}{dt} \sqrt{1 - r^2 / \hat{a}(\theta, t)^2} + A(t) \frac{\partial \hat{a}(\theta, t)}{\partial t} \frac{r^2}{\hat{a}^3(\theta, t)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\hat{a}(\theta, t)} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.21)$$

### 3.3.2 Calcul de $\nabla \hat{\varphi}^{(w)}$

Par définition,

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_{,x}^{(w)} = \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial \theta} \sin \theta \\ \hat{\varphi}_{,y}^{(w)} = \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial \theta} \cos \theta \end{cases}. \quad (3.22)$$

Il faut donc évaluer les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial r} = -\frac{A(t)r}{\hat{a}^2(\theta, t)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\hat{a}(\theta, t)} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}^{(w)}}{\partial \theta} = A(t) \frac{\partial \hat{a}(\theta, t)}{\partial \theta} \frac{r^2}{\hat{a}^3(\theta, t)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\hat{a}(\theta, t)} \right)^2 \right]^{-1/2}. \end{cases} \quad (3.23)$$

On a  $\partial \hat{a}(\theta, t)/\partial \theta = \sum_{i=1}^{N_a-1} -ia_i(t) \sin(i\theta)$  et  $\partial \hat{a}(\theta, t)/\partial t = \sum_{i=1}^{N_a-1} (da_i(t)/dt) \cos(i\theta)$ . Les variables nécessaires pour calculer la pression sont :  $dx_c(t)/dt$ ,  $dA(t)/dt$  et  $da_i(t)/dt$ . Deux méthodes ont été testées pour estimer ces dernières. Dans la première, elles sont calculées par différence finie à partir des valeurs de  $x_c$ ,  $A$  et  $a_i$  obtenues avec la méthode présentée au chapitre 2. Par exemple,

$$\frac{dx_c(t)}{dt} \approx \frac{x_c(t + \delta t) - x_c(t)}{\delta t}. \quad (3.24)$$

Dans la seconde méthode, les valeurs  $x_c$ ,  $A$  et  $a_i$  sont calculées pour un certain nombre d'instants  $t_i$ . A partir de là, une représentation continue de  $x_c(t)$ ,  $A(t)$  et  $a_i(t)$  est construite en utilisant des splines cubiques. Il est ensuite possible de calculer les dérivés à n'importe quel instant (compris entre les valeurs mini et maxi prises par  $t_i$ ). Cette façon de faire est intéressante lorsque l'on souhaite calculer le champ de pression pour un grand nombre d'instants (par exemple si l'on souhaite le transférer vers un code de calcul de structure pour réaliser une simulation en dynamique).

## 3.4 Résumé

Nous avons présenté la méthodologie utilisée pour calculer le champ de pression agissant sur le corps impactant. Elle repose sur :

- le modèle de Logvinovich modifié,
- un calcul analytique approché du potentiel des vitesses.

Cette méthode est simple dans sa mise en oeuvre et rapide au point de vue des temps de calcul. De plus, comme nous le verrons dans les chapitres suivants, elle semble

suffisamment précise pour de nombreuses applications. Cependant, nous constatons également que le calcul analytique du potentiel des vitesses montre ses limites dans certains cas, en particulier en présence de vitesse d'avance. Dans ce cas, une alternative pourrait être l'utilisation d'un modèle éléments de frontière dans l'esprit de celui utilisé dans le chapitre précédent pour le calcul de l'élévation de la surface mouillée.