

Bibliographie sur l'homogénéisation

Sommaire

3.1	Introduction	66
3.2	Le volume élémentaire représentatif	66
3.2.1	Présentation théorique, rôle des conditions aux limites	66
3.3	Les tenseurs de localisation	68
3.4	La démarche de microporomécanique	69
3.5	Résultats théoriques	73
3.5.1	Résultat d'Eshelby	73
3.5.2	Idée de la démonstration	73
3.5.3	Addition d'un chargement à l'infini	74
3.5.4	Exemples de tenseurs d'Eshelby	74
3.5.5	Inclusion équivalente	76
3.5.6	Théorème de Tanaka-Mori, généralisation de Nemat-Nasser	77
3.5.7	Démonstration	77
3.5.8	Une variante du théorème de Tanaka-Mori	78
3.6	Estimateurs de micromécanique	81
3.6.1	Modèle à trois phases	81
3.6.2	Schéma dilué	85
3.6.3	Schéma différentiel	86
3.6.4	Schéma à deux phases	86
3.6.5	Schéma de Mori-Tanaka	87
3.6.6	Schéma autocohérent	88
3.6.7	Schéma de Ponte-Castañeda-Willis	88
3.6.8	Schéma Interaction Direct Derivative (<i>IDD</i>) de Zheng et Du	91
3.6.9	Conclusion sur les estimateurs	95
3.7	Conclusion	95

3.1 Introduction

Dans ce premier chapitre décrivant des outils théoriques pour la modélisation de l'alcali-réaction, nous avons rassemblé des éléments de bibliographie sur l'homogénéisation. Il s'agit d'une branche de la mécanique des solides (qui peut bien sûr être appliquée à d'autres domaines comme la diffusion) qui vise à déterminer les propriétés moyennes de matériaux hétérogènes. On part de l'idée que tout matériau est hétérogène à une certaine échelle, mais que si on en manipule un morceau suffisamment gros par rapport à la taille des hétérogénéités, on peut lui trouver des propriétés mécaniques moyennes. La première étape de ce chapitre sera ainsi de définir le concept de volume élémentaire représentatif, qui correspond à la taille du morceau de matériau à considérer pour évaluer correctement ses propriétés moyennes. Pour déterminer les propriétés moyennes d'un matériau hétérogène par le calcul, on procède comme en laboratoire : on en prend un morceau, et on le charge par exemple en appliquant un effort donné dans une certaine direction, puis on mesure ses déformations, ce qui nous donne un module d'élasticité reliant les deux grandeurs. Nous allons donc imposer des conditions aux limites sur notre morceau de matériau. Notre objectif est de calculer la grandeur duale de la grandeur imposée, puisqu'on a la chance de connaître (plus ou moins précisément) la distribution géométrique des phases et leurs propriétés mécaniques, ce qui n'est pas le cas en laboratoire. On introduira donc la notion de tenseur de localisation dans la deuxième partie, notion qui permet de décrire la déformation en un point donné du matériau en fonction de ce qui est appliqué au niveau macroscopique. Le matériau hétérogène que l'on souhaite étudier est du béton, qui est un matériau qui contient des hétérogénéités de deux sortes : des hétérogénéités rigides, telles que les granulats, et des pores, remplis d'un fluide. Pour pouvoir prendre en compte la pression dans ce fluide, nous exposerons le formalisme de microporomécanique dans la partie suivante. On donnera ensuite quelques résultats théoriques importants en micromécanique pour le calcul concret des tenseurs de localisation, en mentionnant un résultat pour lequel nous avons donné une démonstration originale. On présente enfin un certain nombre de schémas de micromécanique qui permettent d'avoir des estimations de ces tenseurs de localisation, et donc des propriétés mécaniques du milieu hétérogène considéré.

3.2 Le volume élémentaire représentatif

Le volume élémentaire représentatif, ou VER, est une partie du matériau considéré défini par rapport à l'échelle des hétérogénéités, et celle de la taille de la structure.

3.2.1 Présentation théorique, rôle des conditions aux limites

L'estimation et l'encadrement des propriétés mécaniques de matériaux hétérogènes ont suscité une littérature abondante. Du point de vue pratique, l'approche phénoménologique pour déterminer les propriétés d'un matériau n'est pas toujours possible, en particulier lorsqu'il s'agit de matériaux qui ne sont pas facilement disponibles puisqu'on souhaite les créer, ou qu'ils sont issus de la dégradation de matériaux connus (c'est le cas dans l'étude de la réaction alcali-silice qui nous intéresse).

Si les caractéristiques géométriques du matériau sont connues très précisément, par exemple grâce à des moyens d'imagerie et la connaissance des propriétés des différentes phases, il peut être envisageable d'effectuer des calculs par éléments finis. Ces calculs étant très coûteux s'il est nécessaire de discrétiser finement le système, il est indispensable de réduire le domaine de calcul au maximum. Jusqu'où peut-on aller ? On répond à cette question par l'introduction du VER.

Le VER devra être suffisamment grand devant les tailles caractéristiques des hétérogénéités pour être statistiquement représentatif de l'ensemble du milieu. Il devra être suffisamment petit

devant l'ensemble de la structure pour être traité à l'échelle macroscopique comme un point, c'est-à-dire pour qu'on puisse assimiler un certain nombre de moyennes de quantités comme les contraintes ou les déformations sur le VER à des quantités locales du point de vue de la structure.

Prenons l'exemple du tenseur d'ordre quatre des modules d'élasticité, \mathbb{C} . Supposant ce tenseur connu en tout point du VER, on souhaite calculer le tenseur des modules d'élasticité macroscopiques. Pour ce faire, il est nécessaire d'appliquer des conditions aux limites sur le bord ∂V du VER, de calculer les contraintes moyennes ($\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_V$) et les déformations moyennes ($\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_V$) sur le VER, où pour tout champ f défini sur le VER, la moyenne spatiale est définie par l'intégrale volumique :

$$\langle f \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V f(x) dx \quad (3.1)$$

Le tenseur macroscopique des modules élastiques est alors défini (son existence est assurée par la linéarité du problème) par :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_V = \mathbb{C}^{hom} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_V \quad (3.2)$$

La question du choix des conditions aux limites (CL) est cruciale, puisque si le domaine V n'est pas assez grand pour être un VER au sens expliqué plus haut, le module homogénéisé, déterminé par cette méthode, varie selon le type de condition aux limites appliquées. D'un point de vue pratique, on est tenté par les conditions aux limites uniformes :

- contraintes uniformes : $\underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}$ sur ∂V où \underline{n} est la normale sortante de V et $\underline{\underline{\Sigma}}$ est un tenseur d'ordre deux symétrique constant représentant les contraintes macroscopiques ;
- déplacements linéaires : $\underline{u}(x) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x}$ sur ∂V , où \underline{u} représente le champ déplacement et $\underline{\underline{E}}$ est également un tenseur d'ordre deux symétrique constant, représentant la déformation macroscopique. On appelle parfois cette condition aux limites "déformation homogène imposée", ou "déformation moyenne imposée".

Ces deux choix simples sont appuyés par un argument théorique. Si l'on écrit la différence entre l'intégrale de l'énergie élastique à l'échelle microscopique et l'énergie élastique à l'échelle macroscopique et qu'on la transforme par intégration par parties, on obtient :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_V - \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_V : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{n} - \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_V \cdot \underline{n}) \cdot (\underline{u} - \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_V \cdot \underline{x}) dS \quad (3.3)$$

Le second membre étant nul pour les conditions aux limites de type contraintes uniformes ou déplacements linéaires. Ce résultat est souvent appelé lemme de Hill (on démontre ce résultat au § 6.2.6.2 qui est consacré à une écriture détaillée de l'énergie d'un milieu poreux). Cette propriété ainsi que la convexité de l'énergie potentielle en fonction des déformations (et celle de l'énergie complémentaire en fonction des contraintes) à l'échelle macroscopique, permet de démontrer que les modules homogénéisés utilisant ces conditions aux limites sont des bornes, au sens des tenseurs d'ordre 4, pour les modules obtenus avec n'importe quelles autres CL, comme montré par Nemat-Nasser ([28], p. 50) :

$$\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_{\Sigma}^{hom} : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_{general}^{hom} : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_E^{hom} : \underline{\underline{E}} \quad (3.4)$$

Où $\mathbb{C}_{\Sigma}^{hom}$ est déterminé grâce à un problème aux limites à contraintes uniformes imposées, \mathbb{C}_E^{hom} grâce à un problème à déplacements linéaires imposés et $\mathbb{C}_{general}^{hom}$ avec n'importe quelles autres CL.

D'après ce résultat si ces modules coïncident, ils sont égaux au véritable module homogénéisé pour le volume V (tel qu'il est représenté, c'est-à-dire indépendamment d'éventuelles erreurs dues à l'imagerie). Si ces modules ne coïncident pas, on en déduit qu'on n'a pas discrétisé un volume assez grand, ou qu'il n'existe pas de volume assez grand, pour ce matériau, pour déterminer

les propriétés homogénéisées. Cependant, on peut tout de même utiliser le module homogénéisé comme estimation du module macroscopique, en essayant de choisir des conditions aux limites qui rattrapent, en quelque sorte, le fait que le volume discrétisé est trop petit. Une façon de produire ces conditions aux limites sur ∂V est de plonger V dans un milieu infini et d'appliquer les conditions aux limites en contraintes ou déformation (c'est alors équivalent) à l'infini. Les propriétés élastiques du milieu infini influencent alors la condition aux limites appliquée sur ∂V , donc les propriétés élastiques homogénéisées obtenues pour V par la relation 3.2. On peut également utiliser les conditions aux limites périodiques, qui d'après le résultat de Nemat-Nasser ([28], p. 50) donnent des estimations comprises entre les estimations à contrainte moyenne imposée et les estimations à déformation moyenne imposée, comme toutes les conditions aux limites mixtes. Leur utilisation est facile car implémentée dans de nombreux codes de calcul, et des démonstrations numériques (Kanit [20]) montrent une convergence rapide vers le module macroscopique en fonction de la taille du domaine de calcul. Nous commenterons ce point dans le chapitre 4. Les conditions périodiques vérifient de plus, comme les deux conditions aux limites homogènes, l'égalité de l'énergie élastique microscopique et de l'énergie élastique macroscopique, c'est-à-dire la nullité de l'équation 3.3.

Si l'on considère que l'on ne dispose pas de moyens numériques suffisants pour faire des calculs par éléments finis sur un VER, on peut utiliser l'approche micromécanique, qui a pour but de fournir des estimations ou des bornes pour les propriétés moyennes d'un matériau hétérogène en s'appuyant sur une vision très simplifiée du matériau qui peut se résumer en quelques propriétés morphologiques et la connaissance des propriétés élastiques des phases.

Nous allons donc introduire les tenseurs de localisation qui permettent, en utilisant la linéarité de nos problèmes d'élasticité, de relier les grandeurs locales (par exemple la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$) aux grandeurs imposées (par exemple la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$).

3.3 Les tenseurs de localisation

Supposons que l'on ait déterminé le VER V adéquat pour notre matériau, que l'on considèrera du type matrice/inclusions. La matrice occupe un domaine connexe, c'est-à-dire qu'on peut toujours aller d'un point à l'autre de la matrice sans en sortir, contrairement aux inclusions. On dispose également d'informations statistiques sur les inclusions : leurs fractions volumiques et leurs tailles. On utilise ici une approche à déplacement imposé $\underline{\underline{u}}^d = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}}$ sur le bord du VER, ce qui est équivalent à tout autre type de condition aux limites si le VER est suffisamment grand comparé à la taille des hétérogénéités. La démarche consiste, comme on l'a expliqué précédemment, à déterminer la moyenne des contraintes sur le VER. Le tenseur des modules homogénéisés \mathbb{C}^{hom} sera alors défini par :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_V = \mathbb{C}^{hom} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_V = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \quad (3.5)$$

La moyenne des déformations peut alors se décomposer sur les différentes phases. Si les inclusions sont repérées par des indices $i \in 1..N$ et la matrice par un indice 0, cela s'écrit :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_V = (1 - f) \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_0 + \sum_{i=1}^N f^i \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_i \quad (3.6)$$

Où on a noté f^i la fraction volumique de la phase i et f la fraction volumique totale des inclusions $f = \sum_{i=1}^N f^i$.

L'approche micromécanique consiste en l'introduction de problèmes mécaniques auxiliaires (si possible faciles à résoudre) dans lesquels on calcule ces moyennes, pour les utiliser comme

approximation de leur valeur dans le problème de départ. Supposant que chaque phase est homogène, de module \mathbb{C}^0 pour la matrice et \mathbb{C}^i pour la phase i ,

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_V = (1 - f)\mathbb{C}^0 : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_0 + \sum_{i=1}^N f^i \mathbb{C}^i : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_i \quad (3.7)$$

On introduit ensuite le tenseur de localisation \mathbb{A} . C'est un tenseur d'ordre 4, comportant la symétrie mineure mais pas nécessairement la symétrie majeure, qui relie par linéarité du problème la déformation imposée à la déformation locale :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (3.8)$$

On a vu dans les équations 3.6 et 3.7 que l'on a besoin des moyennes des contraintes et des déformations sur les différentes phases. On introduit donc les tenseurs de localisation moyens par phase $\mathbb{A}^0, \dots, \mathbb{A}^i, \dots$ d'ordre 4, comportant la symétrie mineure mais pas nécessairement la symétrie majeure, tels que pour chaque phase :

$$\langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_i = \mathbb{A}^i \quad (3.9)$$

On aboutit ainsi à l'écriture suivante du tenseur des modules homogénéisés :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - f)\mathbb{C}^0 : \mathbb{A}^0 + \sum_{i=1}^N f^i \mathbb{C}^i : \mathbb{A}^i \quad (3.10)$$

Comme la moyenne sur l'ensemble des phases de la déformation est égale à celle que l'on impose à la frontière du VER, on a en prenant la moyenne de l'équation 3.8 sur tout le volume :

$$(1 - f)\mathbb{A}^0 = \mathbb{I} - \sum_{i=1}^N f^i \mathbb{A}^i \quad (3.11)$$

et donc :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=1}^N f^i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}^i \quad (3.12)$$

Reste à construire des problèmes auxiliaires permettant de trouver des valeurs approximatives à ces tenseurs, ce que nous aborderons dans les parties § 3.5, avec l'introduction des résultats d'Eshelby, et § 3.6 avec les estimateurs proprement dits. Avant de passer à cette phase d'approximation des tenseurs de localisation, nous allons compléter les outils d'homogénéisation dont nous avons besoin de façon à pouvoir décrire de manière adéquate le changement d'échelle dans les milieux poreux.

3.4 La démarche de microporomécanique

On décrit ici l'approche microporomécanique en nous inspirant très fortement de l'approche de Dormieux, Kondo et Ulm [11]. Cette approche vise à permettre le calcul des coefficients poroélastiques du matériau homogénéisé. Le résultat très pratique de cette partie, qui peut être montré en utilisant le théorème de Levin [23], permet d'utiliser le tenseur de localisation en déformation présenté dans le paragraphe précédent pour déterminer les coefficients poroélastiques homogénéisés qui donnent l'influence de la pression sur les déformations et contraintes macroscopiques et des phases poreuses.

On s'intéresse ici à un matériau hétérogène qui contient des vides et des hétérogénéités. Le tenseur des modules d'élasticité est donc variable dans le matériau. On veut pouvoir prendre en compte la pression d'un fluide contenu dans l'espace poreux, c'est-à-dire les vides. Les vides et les hétérogénéités sont répartis en un certain nombre de familles, définies par la forme et l'orientation pour ce qui concerne les vides, la forme, l'orientation et le tenseur des modules d'élasticité pour les hétérogénéités.

L'objectif de ce paragraphe est d'établir à partir des données sur la microstructure, les équations homogénéisées du matériau poroélastique. Ces équations sont au nombre de $N_v + 1$ où N_v est le nombre de familles de vides. Parmi ces équations, la première sert à calculer la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ et des pressions à l'intérieur des vides. La pression commune à tous les vides de la famille i est notée p^i . Les N_v équations suivantes caractérisent la variation de volume des différentes familles de vides en fonction de la déformation macroscopique et des pressions à l'intérieur des vides. On appelle ϕ_i la fraction volumique en configuration déformée de la phase poreuse i , et toujours f^i la fraction volumique en configuration relâchée de la phase i .

On appelle Ω_i le domaine occupé par les vides de la famille i , et Ω l'ensemble du domaine (solide et vides), qu'on appelle le VER. En tout point \underline{x} du VER Ω , la loi de comportement microscopique, s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}_p(\underline{x}) \quad (3.13)$$

Où le tenseur des modules élastiques est tel que :

$$\mathbb{C}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{x} \in \cup \Omega_i \\ \mathbb{C}^s(\underline{x}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.14)$$

Et le champ d'autocontrainte tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}}_p(\underline{x}) = \begin{cases} -p^i \underline{\underline{1}} & \text{si } \underline{x} \in \Omega_i \text{ pour } i \in \{1, N_v\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.15)$$

Le champ de déformation n'étant pas défini de manière unique dans les inclusions. Il importe seulement qu'il soit compatible avec les déplacements de la frontière des vides. Nous nous plaçons encore une fois dans un cadre où des déplacements linéaires de la forme $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{x}$ sont imposés sur la frontière $\partial\Omega$ du VER. On néglige l'effet éventuel de l'intersection d'un pore avec $\partial\Omega$. Le problème à résoudre que l'on appelle (P) est alors :

$$(P) : \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}_p(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} & \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.16)$$

Toujours suivant la démarche de Dormieux, on décompose ce problème en $N_v + 1$ problèmes dont on superposera les solutions. Tout d'abord on définit le problème (P') semblable au problème (P) mais dans lequel les pressions sont considérées comme nulles :

$$(P') : \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}') = 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u}' = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} & \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.17)$$

Puis on définit N_v problèmes dans lesquels les pressions sont considérées non nulles alternativement dans chacune des familles de pores, et la déformation à l'infini est nulle. Lorsque toutes les pressions sont nulles sauf dans la famille i , on obtient le problème :

$$(P^i) : \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^i) = 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^i(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^i(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}_p^i(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u}^i = 0 & \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.18)$$

où

$$\underline{\underline{\sigma}}_p^i(\underline{x}) = \begin{cases} -p^i \underline{\underline{1}} & \text{si } \underline{x} \in \Omega^i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.19)$$

On définit ensuite sur le problème auxiliaire (P') le tenseur de localisation \mathbb{A} qui existe par linéarité du problème :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (3.20)$$

Le tenseur des modules homogénéisés du milieu est défini par la relation entre contraintes et déformations macroscopiques dans le problème (P') :

$$\underline{\underline{\Sigma}}' = \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \quad (3.21)$$

Le tenseur des modules homogénéisés est alors lié au tenseur de localisation et au tenseur des modules microscopiques par la relation :

$$\mathbb{C}^{hom} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle_{\Omega} \quad (3.22)$$

Concernant les problèmes (P^i), il s'agit d'appliquer le lemme de Hill à un couple bien choisi de champs cinématiquement et statiquement admissibles. Cette démarche provient de la remarque que l'équation 3.3 est vérifiée pour un large choix de champs de tenseurs de déformations et de contraintes, dès lors qu'ils sont solution d'un problème de mécanique (pas forcément le même pour les deux champs) à contraintes ou déformations homogènes imposées. On choisit $\underline{\underline{\sigma}}^i$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^i$:

$$\underline{\underline{\Sigma}}^i : \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}^i \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}}^i : \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_{\Omega} \quad (3.23)$$

On décompose alors le terme correspondant au problème (P^i) pour pouvoir appliquer le lemme de Hill une seconde fois et faire apparaître le déformation moyenne dans ce problème, qui est nulle :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^i : \underline{\underline{E}} = \langle (\mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}^i + \underline{\underline{\sigma}}_p^i) : \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}^i : \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_{\Omega} + \langle \underline{\underline{\sigma}}_p^i : \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_p^i : \mathbb{A} \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{E}} \quad (3.24)$$

La déformation $\underline{\underline{E}}$ étant quelconque, on obtient un résultat lié au théorème de Levin [23] :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^i = \langle \underline{\underline{\sigma}}_p^i : \mathbb{A} \rangle_{\Omega} \quad (3.25)$$

Ce résultat est très intéressant. Il nous dit que la manière dont la pression dans une famille de pore influe sur la contrainte macroscopique est liée très simplement à la manière dont une déformation extérieure joue sur la déformation de cette même famille de pores.

Si l'on explicite la forme du champ d'autocontrainte dans la famille i et qu'on somme les $N_v + 1$ problèmes évoqués ci-dessus, on obtient l'équation macroscopique suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_{i=1}^{N_v} p^i \underline{\underline{B}}^i \quad (3.26)$$

Où les coefficients de Biot $\underline{\underline{B}}^i$ s'écrivent de la manière suivante en fonction de la moyenne du tenseur de localisation sur la famille considérée :

$$\underline{\underline{B}}^i = f^i \underline{\underline{1}} : \langle \mathbb{A} \rangle_i \quad (3.27)$$

On s'intéresse maintenant aux N_v autres équations du comportement poroélastique macroscopique, qui décrivent l'évolution du volume des familles de pores sous déformation imposée à l'infini et la pression dans les pores. Si l'on note ϕ^j la fraction volumique de la famille de pores j

en configuration déformée et comme jusqu'à présent, f^j cette même grandeur dans la configuration initiale, la variation de fraction volumique d'une famille donnée est liée à la déformation moyenne sur le domaine qu'elle occupe, dans les différents problèmes introduits, par la relation :

$$\phi^j - f^j = f^j \text{tr} \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_j = f^j \left(\text{tr} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_j + \sum_{i=1}^{N_v} \text{tr} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_j \right) \quad (3.28)$$

Où tr désigne la trace d'un tenseur d'ordre 2. La déformation dans le problème (P^j) sur la phase j s'écrit simplement :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_j = \langle \mathbb{A} \rangle_j : \underline{\underline{E}} \quad (3.29)$$

Pour le problème i , supposons que le solide est homogène de module \mathbb{C}^0 (et de souplesse qu'on note \mathbb{S}^0). On peut alors écrire la moyenne de la déformation sur le VER qui est nulle par définition des problèmes auxiliaires en fonction des moyennes sur les phases :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_\Omega = 0 &= (1-f) \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_s + \sum_{j=1}^{N_v} f^j \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_j \\ &= (1-f) \mathbb{S}^0 : \langle \underline{\underline{\sigma}}^i \rangle_s + \sum_{j=1}^{N_v} f^j \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_j \end{aligned} \quad (3.30)$$

On peut de même décomposer la contrainte sur le VER dans le problème i en tenant compte du fait que dans le problème i seul le champ d'autocontrainte relatif à la famille i est non nul :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}}^i = \langle \underline{\underline{\sigma}}^i \rangle_\Omega &= (1-f) \langle \underline{\underline{\sigma}}^i \rangle_s + \sum_{j=1}^{N_v} f^j \langle \underline{\underline{\sigma}}^i \rangle_j \\ &= (1-f) \langle \underline{\underline{\sigma}}^i \rangle_s + f^i \langle \underline{\underline{\sigma}}^i \rangle_i \\ &= (1-f) \langle \underline{\underline{\sigma}}^i \rangle_s - f^i p^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

On applique ensuite le résultat obtenu par le théorème de Levin :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^i = -p^i \underline{\underline{B}}^i \quad (3.32)$$

On a donc :

$$\sum_{j=1}^{N_v} f^j \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_j = p^i \mathbb{S}^0 : (\underline{\underline{B}}^i - f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}}) \quad (3.33)$$

Le problème est que l'on souhaite calculer la quantité $\sum_{j=1}^{N_v} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^j \rangle_i$, et non $\sum_{j=1}^{N_v} f^j \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_j$. On s'en sort avec l'hypothèse suivante : on suppose que dans le problème j , c'est-à-dire le problème sans chargement extérieur où seule la famille j est mise sous pression, la déformation moyenne de la famille j est très grande devant celle des autres familles. On peut alors écrire :

$$\sum_{j=1}^{N_v} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^j \rangle_i \simeq \frac{1}{f^i} \sum_{j=1}^{N_v} f^j \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^i \rangle_j \quad (3.34)$$

Et exprimer la variation de fraction volumique de la famille i :

$$\phi^i - f^i = f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \langle \mathbb{A} \rangle_i : \underline{\underline{E}} + p^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{S}^0 : (\underline{\underline{B}}^i - f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}}) \quad (3.35)$$

On peut donc écrire le comportement poromécanique homogénéisé de manière compacte :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_{i=1}^{N_v} p^i \underline{\underline{B}}^i \\ \phi^j - f^j = \underline{\underline{B}}^j : \underline{\underline{E}} + p^j M^j \quad \text{pour } j \in \{1, N_v\} \end{cases} \quad (3.36)$$

Avec :

$$\begin{cases} \underline{\underline{B}}^i = f^i \underline{\underline{1}} : \langle \mathbb{A} \rangle_i \\ M^i = \underline{\underline{1}} : \mathbb{S}^0 : (\underline{\underline{B}}^i - f^i \underline{\underline{1}}) \end{cases} \quad (3.37)$$

Les équations 3.37 permettent donc de calculer les propriétés poromécaniques homogénéisées qu'on appelle coefficient de Biot $\underline{\underline{B}}^i$ et module de Biot M^i . Nous avons pour ce dernier utilisé une définition différente de celle adoptée par Dormieux [11], par simplicité d'écriture. Ces équations complètent la relation 3.12, nous pouvons ainsi calculer toutes les propriétés homogénéisées de notre matériau à partir d'un seul champ de tenseur de localisation, d'ordre 4, ou plutôt de ses moyennes sur chaque phase.

Pour aller plus loin, il nous faut donner des expressions concrètes de ce tenseur de localisation. Un outil essentiel est le résultat d'Eshelby, que nous exposons dans la prochaine partie, ainsi qu'un résultat qui étend celui d'Eshelby et que nous avons démontré par une méthode originale.

3.5 Résultats théoriques

Cette partie présente quelques résultats classiques de la micromécanique, en commençant par le célèbre résultat d'Eshelby [15], qui est le fondement théorique de tous les estimateurs micromécaniques.

3.5.1 Résultat d'Eshelby

Le résultat d'Eshelby est le suivant : si l'on considère un milieu élastique homogène infini caractérisé par son tenseur des modules élastiques \mathbb{C}^0 , qu'on applique dans un volume V de forme ellipsoïdale de ce milieu un champ homogène de déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ et que le milieu est laissé libre à l'infini, le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans V est homogène, et sa valeur est caractérisée par un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur d'Eshelby noté \mathbb{S}_V^0 dépendant uniquement des rapports d'aspects de l'ellipsoïde et des modules élastiques du milieu infini :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbb{S}_V^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^* , \forall \underline{\underline{x}} \in V \quad (3.38)$$

Rappelons qu'un champ de déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ est une déformation qui rentre dans la loi de comportement, la rendant affine plutôt que linéaire, la modifiant de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbb{C}^0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^*) \quad (3.39)$$

L'appellation champ de déformation libre venant du fait que si, localement, la contrainte est nulle, la déformation est alors égale à la déformation libre.

3.5.2 Idée de la démonstration

Le champ de déformation dans l'inclusion s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \int_V \Gamma^\infty(\underline{\underline{y}} - \underline{\underline{x}}) d\underline{\underline{y}} : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \quad (3.40)$$

où Γ^∞ est le tenseur symétrisé des dérivées secondes de l'opérateur de Green pour l'élasticité en milieu infini \mathbb{G}^∞ :

$$\Gamma_{klmn}^\infty = \frac{1}{2} (\mathbb{G}_{km,ln}^\infty + \mathbb{G}_{kn,lm}^\infty) \quad (3.41)$$

La propriété d'Eshelby découle de la démonstration que l'intégrale $\int_V \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) dy$ est une constante lorsque $\underline{x} \in V$ et que V est de forme ellipsoïdale.

3.5.3 Addition d'un chargement à l'infini

Supposons qu'en plus des hypothèses précédentes le matériau soit soumis à l'infini à la déformation homogène \underline{E} . Par théorème de superposition, le champ de déformation dans l'inclusion s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{E} + \mathbb{S}_V^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*, \quad \forall \underline{x} \in V \quad (3.42)$$

3.5.4 Exemples de tenseurs d'Eshelby

Mura, dans son livre de 1984 [27], détaille les composantes des tenseurs d'Eshelby pour plusieurs situations classiques. En général on obtient une expression très simple lorsque l'ellipsoïde considéré a une symétrie de révolution et que le matériau qui l'entoure est isotrope. Considérons ici un matériau isotrope caractérisé par son coefficient de Poisson ν .

3.5.4.1 Ellipsoïde de révolution

Une écriture très pratique est donnée par Dormieux dans [11], p. 196. Elle concerne le cas d'un ellipsoïde de révolution aplati. Le petit axe c et le double grand axe a permettent de définir le rapport d'aspect $X = \frac{c}{a} < 1$. Définissant tout d'abord le facteur :

$$b(X, \nu) = (\nu - 1)(1 - X^2)^2 \sqrt{1 - X^2} \quad (3.43)$$

On obtient les diverses composantes indépendantes et non nulles du tenseur d'Eshelby par les formules :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{b(x, \nu^c)} \frac{x}{16} \left[(19 - 8\nu^c)x\sqrt{1 - x^2} + (8\nu^c - 13) \arccos(x) \right. \\ &\quad \left. + (4 - 8\nu^c) \arccos(x)x^2 + (8\nu^c - 10)x^3\sqrt{1 - x^2} \right] \\ \mathbb{S}_{1122} &= -\frac{1}{b(x, \nu^c)} \frac{x}{16} \left[-(1 + 8\nu^c)x\sqrt{1 - x^2} + (8\nu^c - 1) \arccos(x) \right. \\ &\quad \left. + (4 - 8\nu^c) \arccos(x)x^2 + (8\nu^c - 2)x^3\sqrt{1 - x^2} \right] \\ \mathbb{S}_{3333} &= -\frac{1}{b(x, \nu^c)} \frac{1}{2} \left[(2 - 2\nu^c)\sqrt{1 - x^2} + (2\nu^c - 1)x \arccos(x) \right. \\ &\quad \left. + (2\nu^c - 5)x^2\sqrt{1 - x^2} + (4 - 2\nu^c)x^3 \arccos(x) \right] \\ \mathbb{S}_{1133} &= -\frac{1}{b(x, \nu^c)} \frac{x}{4} \left[-2(1 + \nu^c) \arccos(x)x^2 + (2\nu^c - 1) \arccos(x) \right. \\ &\quad \left. + (3 - 2\nu^c)x\sqrt{1 - x^2} + 2\nu^c x^3\sqrt{1 - x^2} \right] \\ \mathbb{S}_{3311} &= \frac{1}{b(x, \nu^c)} \frac{1}{4} \left[2(1 - 2\nu^c) \arccos(x)x^3 + (1 + 4\nu^c)x \arccos(x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -(3 - 4\nu^c)x^2\sqrt{1-x^2} - 4\nu^c\sqrt{1-x^2} \\ \mathbb{S}_{3131} = & \frac{1}{b(x, \nu^c)} \frac{1}{4} \left[(2 - \nu^c)x \arccos(x) + (2\nu^c - 2)\sqrt{1-x^2} \right. \\ & \left. + (1 + \nu^c)x^3 \arccos(x) - 3\nu^c x^2 \sqrt{1-x^2} + (\nu^c - 1)x^4 \sqrt{1-x^2} \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Les directions 1 et 2 sont alors équivalentes, ce qui permet d'obtenir les autres composantes non nulles par les permutations appropriées sur les indices $\{1, 2\}$.

3.5.4.2 Sphère

Les composantes non nulles sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{1111} &= \frac{7 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \\ \mathbb{S}_{1122} &= \frac{5\nu - 1}{15(1 - \nu)} \\ \mathbb{S}_{1212} &= \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

et par permutation circulaire sur les indices $\{1, 2, 3\}$. Les composantes ne dépendent bien sûr pas de la taille de la sphère car la sphère étant plongée dans un milieu infini, il n'y a pas d'autre longueur à laquelle comparer le rayon de la sphère.

3.5.4.3 Cylindre elliptique

Considérant un cylindre infini dans la direction 3, à base elliptique caractérisée par un grand axe et un petit axe a_1 et a_2 , plongé dans un milieu homogène isotrope infini de coefficient de Poisson ν , voici les composantes données par Mura :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{2(1 - \nu)} \left\{ \frac{a_2^2 + 2a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} + (1 - 2\nu) \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right\} \\ \mathbb{S}_{2222} &= \frac{1}{2(1 - \nu)} \left\{ \frac{a_1^2 + 2a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} + (1 - 2\nu) \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right\} \\ \mathbb{S}_{3333} &= 0 \\ \mathbb{S}_{1122} &= \frac{1}{2(1 - \nu)} \left\{ \frac{a_2^2}{(a_1 + a_2)^2} - (1 - 2\nu) \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right\} \\ \mathbb{S}_{2233} &= \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{2\nu a_1}{a_1 + a_2} \\ \mathbb{S}_{3311} &= 0 \\ \mathbb{S}_{1133} &= \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{2\nu a_2}{a_1 + a_2} \\ \mathbb{S}_{2211} &= \frac{1}{2(1 - \nu)} \left\{ \frac{a_1^2}{(a_1 + a_2)^2} - (1 - 2\nu) \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right\} \\ \mathbb{S}_{3322} &= 0 \\ \mathbb{S}_{1212} &= \frac{1}{2(1 - \nu)} \left\{ \frac{a_1^2 + a_2^2}{2(a_1 + a_2)^2} - \frac{1 - 2\nu}{2} \right\} \\ \mathbb{S}_{2323} &= \frac{a_1}{2(a_1 + a_2)} \end{aligned}$$

$$\mathbb{S}_{3131} = \frac{a_2}{2(a_1 + a_2)} \quad (3.46)$$

Évidemment, chacune de ses composantes ne dépend que du rapport $\frac{a_1}{a_2}$ et non de leur valeur indépendamment.

3.5.4.4 Disque, en 2D

Utilisant la solution du cylindre infini, si $a_1 = a_2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{5}{4} - \nu \right\} \\ \mathbb{S}_{1122} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \nu - \frac{1}{4} \right\} \\ \mathbb{S}_{1212} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \nu - \frac{1}{4} \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Le résultat d'Eshelby nous permet donc, à partir de la connaissance d'un champ de déformation libre imposé dans un domaine ellipsoïdal d'un milieu homogène infini, de calculer la déformation, qui est homogène, à l'intérieur de cet ellipsoïde. Le paragraphe suivant aborde la question du milieu contenant une hétérogénéité, c'est-à-dire un matériau de modules différents du milieu infini, par la méthode de l'inclusion équivalente, également proposée par Eshelby.

3.5.5 Inclusion équivalente

Un autre problème est également résolu par Eshelby en utilisant le résultat précédent. Supposons cette fois que le volume V , toujours de forme ellipsoïdale, entouré d'un milieu élastique \mathbb{C}^0 soumis à la déformation homogène $\underline{\underline{E}}$ à l'infini, contient un matériau de module élastique \mathbb{C}^i . C'est alors une hétérogénéité. La loi de comportement dans V s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^i = \mathbb{C}^i : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.48)$$

On introduit un problème auxiliaire appelé problème de l'inclusion équivalente dans lequel le matériau à l'intérieur de V est remplacé par le matériau \mathbb{C}^0 , mais où l'intérieur de V est soumis au champ de déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$, pour l'instant inconnu, mais qu'il faut identifier pour résoudre. Formellement cela revient à faire les transformations suivantes sur la loi de comportement 3.48 :

- D'abord on la réécrit en faisant apparaître le module du matériau extérieur V :

$$\underline{\underline{\sigma}}^i = \mathbb{C}^0 : \left[\underline{\underline{\varepsilon}} + (\mathbb{C}^0)^{(-1)} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] \quad (3.49)$$

- Supposons le terme $(\mathbb{C}^0)^{(-1)} (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \underline{\underline{\varepsilon}}$ constant. On l'appelle $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ et on applique le résultat d'Eshelby avec chargement à l'infini évoqué dans la partie précédente 3.42, qui nous donne la déformation dans l'ellipsoïde V :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{E}} + \mathbb{S}_V^0 : (\mathbb{C}^0)^{(-1)} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \underline{\underline{\varepsilon}}, \forall x \in V \quad (3.50)$$

où apparaît le tenseur $\mathbb{P}_V^0 = \mathbb{S}_V^0 : (\mathbb{C}^0)^{(-1)}$, appelé tenseur de Hill, qui possède les symétries mineures comme le tenseur d'Eshelby \mathbb{S}_V^0 , mais possède en plus la symétrie majeure.

Nous voyons que cette équation est cohérente avec l'hypothèse d'un champ de déformation constant dans l'inclusion. Ayant supposé le champ de déformation dans l'inclusion constant, la seule expression possible est :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [\mathbb{I} - \mathbb{P}_V^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (3.51)$$

Nous trouvons ainsi le champ de déformation dans une hétérogénéité en fonction de la déformation imposée à l'infini, des tenseurs des modules des deux milieux, et du tenseur de Hill de l'ellipsoïde.

Nous présentons maintenant une généralisation du résultat d'Eshelby qui nous a été utile pour notre premier modèle pour l'alcali-réaction [9], mais que nous n'avons pas utilisé pour notre modèle final, y préférant le formalisme très pratique de microporomécanique. Nous mentionnons néanmoins ce résultat théorique car nous avons trouvé une nouvelle démonstration fondée sur le principe de réciprocité, qui nous semble plus élégante que la démonstration traditionnelle, et parce qu'il permet de mieux comprendre certains estimateurs de micromécanique que nous présentons ensuite. Commençons par exposer ce résultat dans sa version la plus ancienne, à notre connaissance.

3.5.6 Théorème de Tanaka-Mori, généralisation de Nemat-Nasser

3.5.6.1 Présentation du résultat

Dans l'article de Tanaka et Mori de 1972 [35], le résultat suivant est démontré : Soit Ω un domaine de forme arbitraire dans un milieu élastique infini, et \mathcal{E}^1 et \mathcal{E}^2 deux ellipsoïdes tels que $\Omega \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2$. Si $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ est un champ de déformation libre uniforme imposé dans Ω et que le milieu est libre de contraintes à l'infini, alors l'intégrale de la déformation entre les deux ellipsoïdes s'écrit :

$$\int_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \Omega [\mathbb{S}_{\mathcal{E}^2} - \mathbb{S}_{\mathcal{E}^1}] \underline{\underline{\varepsilon}}^* \quad (3.52)$$

où $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}$ est le tenseur d'Eshelby relatif au matériau extérieur et à l'ellipsoïde \mathcal{E} , et où on note Ω le volume du domaine du même nom.

3.5.6.2 Généralisation de Nemat-Nasser

Ce résultat peut-être généralisé [28] au cas où le champ de déformation libre n'est pas uniforme sur l'inclusion ($\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ est alors simplement remplacé par la moyenne du champ de déformation libre sur l'inclusion). Nous récapitulons la démonstration puis écrivons le résultat 3.56.

3.5.7 Démonstration

Nous nous plaçons dans le cas où le champ de déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ n'est pas uniforme sur l'inclusion Ω . Le champ de déformation dans l'inclusion s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \int_{\Omega} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) d\mathbf{y} \quad (3.53)$$

où Γ^{∞} est le tenseur symétrisé des dérivées secondes de l'opérateur de Green pour l'élasticité en milieu infini \mathbb{G}^{∞} :

$$\Gamma_{klmn}^{\infty} = \frac{1}{2} (\mathbb{G}_{km,ln}^{\infty} + \mathbb{G}_{kn,lm}^{\infty}) \quad (3.54)$$

Si l'on souhaite calculer la déformation moyenne entre les deux ellipsoïdes entourant l'inclusion, il est nécessaire de calculer l'intégrale :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} = \frac{1}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1} \int_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} \left\{ \int_{\Omega} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) d\underline{y} \right\} d\underline{x} \quad (3.55)$$

Comme expliqué dans Nemat-Nasser [28], l'ordre d'intégration peut être changé, la non-intersection des deux domaines sur lesquels l'intégration porte étant une condition suffisante (l'intégrand n'étant singulier que lorsque son argument approche de l'origine) :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} &= \frac{1}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) d\underline{x} \right\} d\underline{y} \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{x} \right\} : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) d\underline{y} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Nous reconnaissons entre les accolades la différence des tenseurs d'Eshelby des deux ellipsoïdes, qui sont indépendants des coordonnées spatiales lorsque \underline{y} est dans l'ellipsoïde, ce qui est le cas présent puisque $\Omega \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2$. Le résultat est :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} = \frac{\Omega}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1} [\mathbb{S}_{\mathcal{E}^2} - \mathbb{S}_{\mathcal{E}^1}] \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle_{\Omega} \quad (3.57)$$

On peut donc, pour tout champ de déformation libre imposé dans un domaine de forme quelconque, exprimer la moyenne de la déformation entre deux ellipsoïdes contenant ce domaine, simplement à partir des tenseurs d'Eshelby de ces deux ellipsoïdes.

3.5.8 Une variante du théorème de Tanaka-Mori

Ce résultat, légèrement plus général, permet d'écrire non plus la moyenne de la déformation entre deux ellipsoïdes, mais la moyenne de la déformation sur un ellipsoïde, tout simplement. Ce résultat est démontré par Rodin [31] et Bornert [8] par manipulation de l'ordre d'intégration, comme chez Nemat-Nasser, dans un cadre plus général. Nous donnons d'abord le résultat, puis expliquerons notre démonstration.

3.5.8.1 Résultat

Théorème Soit un domaine arbitraire Ω . Ce volume peut contenir n'importe quoi (matériau hétérogène, vides ...). Soit un ellipsoïde quelconque \mathcal{E} englobant Ω . Le matériau élastique contenu dans $\mathcal{E} \setminus \Omega$ est de module \mathbb{C}^m . Le reste de l'espace tridimensionnel est occupé par un milieu élastique infini de module \mathbb{C} . Un jeu de déplacements et vecteurs contraintes est imposé sur le bord de Ω . La déformation est imposée égale à $\underline{\underline{E}}^{\infty}$ à l'infini. Le tenseur des déformations moyennes sur \mathcal{E} est relié aux moyennes des contraintes et déformations sur Ω par la relation :

$$\boxed{[\mathbb{C}^m + \mathbb{C}_{\mathcal{E}}^*] : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\mathcal{E}} = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}^{-1} : \underline{\underline{E}}^{\infty} + \rho [\mathbb{C}^m : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} - \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega}]} \quad (3.58)$$

Avec $\rho = \frac{\Omega}{\mathcal{E}}$ la fraction volumique de Ω dans l'ellipsoïde \mathcal{E} . $\mathbb{P}_{\mathcal{E}}^{-1}$ est le tenseur de Hill relatif à l'ellipsoïde \mathcal{E} et au milieu extérieur \mathbb{C} . Le tenseur $\mathbb{C}_{\mathcal{E}}^* = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}^{-1} - \mathbb{C}$ est appelé tenseur d'influence. Nous détaillons ses propriétés pendant la démonstration.

Afin de se rendre compte de la portée de ce résultat, comparons-le aux versions antérieures les plus connues, avant de passer à la démonstration.

3.5.8.2 Comparaison de ce résultat avec celui de Tanaka and Mori généralisé par Nemat-Nasser

La différence principale est que pour une hétérogénéité quelconque, notre résultat informe sur la moyenne des déformations sur n'importe quelle ellipsoïde l'englobant, et non entre deux ellipsoïdes incluses l'une dans l'autre l'englobant. La démonstration utilise le théorème de réciprocity de Maxwell-Betti, que nous rappelons rapidement.

3.5.8.3 Théorème de Maxwell-Betti

Soit $\mathcal{W}^V(\underline{f}, \underline{u})$ le travail des efforts extérieurs notés \underline{f} dans le champ de déplacement \underline{u} . Le théorème de Maxwell-Betti affirme que si \underline{u}^α est la solution du problème associé aux efforts extérieurs \underline{f}^α , $\alpha \in \{1, 2\}$ sur le domaine V ,

$$\mathcal{W}^V(\underline{f}^1, \underline{u}^2) = \mathcal{W}^V(\underline{f}^2, \underline{u}^1) \quad (3.59)$$

Notre démonstration s'appuie sur l'utilisation de ce théorème dans un problème mécanique que l'on appelle problème extérieur puisqu'il est posé sur le milieu infini extérieur à l'ellipsoïde.

3.5.8.4 Problème extérieur $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E}$

Nous travaillons sur le complémentaire de l'ellipsoïde \mathcal{E} dans l'espace infini matérialisé par une boîte carrée (Fig. 3.1). Soit sur ce domaine les champs de contraintes et déplacements $(\underline{\sigma}^{ext}, \underline{u}^{ext})$

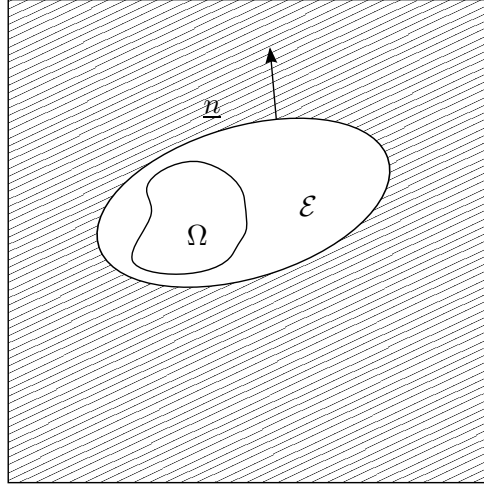


FIGURE 3.1 – Problème extérieur utilisé pour la démonstration de la généralisation du théorème de Tanaka-Mori

solution du problème :

$$\begin{cases} \underline{u}^{ext} = \underline{\tilde{E}} \cdot \underline{x} & , & \partial \mathcal{E} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{ext} \rightarrow 0 & , & |\underline{x}| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.60)$$

Nous ne savons pas écrire la solution de ce problème en général, c'est-à-dire pour un ellipsoïde \mathcal{E} et un tenseur des modules \mathbb{C} quelconques, mais voici deux propriétés importantes de la solution :

1. Le vecteur contrainte sur $\partial \mathcal{E}$ est connu et s'écrit :

$$\underline{f}^{ext} = \underline{\sigma}^{ext} \cdot (-\underline{n}) = \left[\mathbb{C}_{\mathcal{E}}^* : \underline{\tilde{E}} \right] \cdot \underline{n} \quad (3.61)$$

Deux conditions nécessaires (à notre connaissance) étant que $\underline{\tilde{E}}$ soit homogène et \mathcal{E} soit un ellipsoïde. Le tenseur du quatrième ordre $\mathbb{C}_{\mathcal{E}}^*$ est appelé tenseur d'influence associé à \mathcal{E}

dans le matériau \mathbb{C} . Il possède les symétries majeures et mineures, et est défini positif. Il dépend, comme le tenseur de Hill, des rapports de forme de l'ellipsoïde et des coefficients élastiques du matériau extérieur à l'ellipsoïde. Il est lié au tenseur de Hill par la relation : $\mathbb{C} + \mathbb{C}_\varepsilon^* = \mathbb{P}_\varepsilon^{-1}$.

2. Nous savons que la déformation tend vers zéro à l'infini mais il est utile de savoir comment. Les propriétés de l'opérateur de Green pour l'élasticité permettent de montrer que (voir par exemple [8]) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{ext} \sim \frac{1}{|x|^3}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (3.62)$$

Propriété qui n'est pas spécifique au cas de l'ellipsoïde.

Nous appliquons le théorème de Maxwell-Betti sur le domaine $\lambda\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}$, puis $\lambda > 1$ tend vers l'infini de façon à ce que $\lambda\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

On peut écrire (3.60) :

$$\mathcal{W}^{\lambda\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}}(\underline{f}, \underline{u}^{ext}) = \int_{\partial\mathcal{E}} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{n})] \cdot [\underline{\underline{\tilde{E}}} \cdot \underline{x}] dS + \int_{\partial(\lambda\mathcal{E})} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^{ext} dS \quad (3.63)$$

Puis la remarque (3.62) entraîne $\underline{u}^{ext} \sim \frac{1}{|x|^2}$ à l' ∞ , et ayant de plus $\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow 0$ à l' ∞ , on montre que le second terme tend vers zéro lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. En conséquence, après quelques manipulations sur le premier terme, on obtient :

$$\mathcal{W}^{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E}}(\underline{f}, \underline{u}^{ext}) = - \int_{\partial\mathcal{E}} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}] \otimes \underline{x} dS : \underline{\underline{\tilde{E}}} \quad (3.64)$$

Où \otimes est le produit tensoriel. Le deuxième travail que l'on doit calculer s'écrit :

$$\mathcal{W}^{\lambda\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}}(\underline{f}^{ext}, \underline{u}) = \int_{\partial\mathcal{E}} [(\mathbb{C}_\varepsilon^* : \underline{\underline{\tilde{E}}}) \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u} dS + \int_{\partial(\lambda\mathcal{E})} [\underline{\underline{\sigma}}^{ext} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u} dS \quad (3.65)$$

Comme $\underline{\underline{\sigma}}^{ext} \sim \frac{1}{|x|^3}$ à l' ∞ et $\frac{\underline{u}^{ext}}{|x|} \rightarrow 0$ à l' ∞ , le second terme tend ici encore vers zéro lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, et on obtient :

$$\mathcal{W}^{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E}}(\underline{f}^{ext}, \underline{u}) = \mathbb{C}_\varepsilon^* : \int_{\partial\mathcal{E}} \underline{u} \otimes \underline{n} dS : \underline{\underline{\tilde{E}}} \quad (3.66)$$

Enfin, comme ces deux travaux sont égaux et que la déformation $\underline{\underline{\tilde{E}}}$ est quelconque, on obtient la formule suivante :

$$\int_{\partial\mathcal{E}} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}] \otimes \underline{x} dS = -\mathbb{C}_\varepsilon^* : \int_{\partial\mathcal{E}} \underline{u} \otimes \underline{n} dS \quad (3.67)$$

qu'on réécrit de manière compacte :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_\varepsilon = -\mathbb{C}_\varepsilon^* : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_\varepsilon \quad (3.68)$$

Remarque : Cette équation généralise ce que l'on a pris comme définition du tenseur d'influence \mathbb{C}_ε^* au cas où les champs de contraintes et déformation sont hétérogènes dans l'inclusion. En général, le tenseur d'influence \mathbb{C}^* peut être défini pour n'importe quelle inclusion, comme expliqué dans Walpole [36]. Cependant si l'inclusion n'est pas ellipsoïdale, le tenseur dépend également des modules d'élasticité dans l'inclusion.

Remarque : On peut bien sûr étendre ce résultat au cas où une déformation est imposée à l'infini $\underline{\underline{E}}^\infty$. On obtient alors par superposition la formule :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\mathcal{E}} = \mathbb{P}^{-1} : \underline{\underline{E}}^\infty - \mathbb{C}_{\mathcal{E}}^* : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\mathcal{E}} \quad (3.69)$$

Nous cherchons maintenant une seconde relation, de façon à pouvoir exprimer les moyennes de la contrainte ou de la déformation sur l'ellipsoïde \mathcal{E} en fonction de ces quantités sur le domaine Ω .

3.5.8.5 Deuxième relation

Il s'agit d'une réécriture du comportement dans $\mathcal{E} \setminus \Omega$ où le module élastique est \mathbb{C}^m . On moyenne simplement la loi de comportement sur ce domaine pour obtenir :

$$\mathbb{C}^m : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\mathcal{E} \setminus \Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\mathcal{E} \setminus \Omega} \quad (3.70)$$

3.5.8.6 Conclusion de la démonstration

On combine les équations (3.70) et (3.69) pour écrire :

$$[\mathbb{C}^m + \mathbb{C}^*(\mathcal{E})] : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\mathcal{E}} = \mathbb{P}^{-1}(\mathcal{E}) : \underline{\underline{E}}^\infty + \rho [\mathbb{C}^m : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} - \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega}] \quad (3.71)$$

Ce résultat, que nous avons discuté lorsque nous l'avons présenté, est ici, à notre connaissance, écrit dans sa version la plus générale. La moyenne de la déformation sur tout ellipsoïde entourant une hétérogénéité, peut être écrite analytiquement en fonction des moyennes des contraintes et déformations sur l'hétérogénéité, ceci quels que soient le contenu de l'hétérogénéité, le matériau à l'extérieur de l'ellipsoïde, et le matériau entre les deux. Nous avons utilisé cette formule dans notre article [9], mais pas dans le modèle qui est présenté dans ce mémoire en partie 3.

La section suivante est dédiée aux estimateurs de micromécanique. Nous essayons d'expliquer leur établissement à la lumière de la démonstration de notre formule 3.71. Il nous semble que pour quelques schémas, comme celui de Mori-Tanaka, cela apporte une meilleure compréhension des hypothèses.

3.6 Estimateurs de micromécanique

Nous allons dans cette partie présenter une série d'approximations qui servent à obtenir des valeurs approchées pour les tenseurs de localisation sur les inclusions. Nous commençons par un modèle qui n'est pas opérationnel, mais nous semble important pour la compréhension de la démarche, le modèle à trois phases. Nous passerons ensuite à des modèles plus simples et parfois d'une grande facilité d'utilisation, en essayant de souligner leurs défauts.

3.6.1 Modèle à trois phases

Ce modèle est présenté par Hori et Nemat-Nasser dans l'article [19].

3.6.1.1 Présentation du problème

Présentons le cas général qui résume l'idée de départ de la plupart des estimateurs. Pour simplifier au maximum le calcul du tenseur de localisation d'une inclusion, on la plonge dans un milieu infini. On place ensuite des conditions aux limites à l'infini en déformation homogène. Dans le cas le plus simple, le milieu entourant l'inclusion sera le milieu matrice. Cependant une

façon de tenir compte de la présence d'autres inclusions est de ne laisser de milieu matrice que ce qu'il faut pour respecter les fractions volumiques respectives de la matrice et des inclusions, puis de mettre un autre milieu entre l'ensemble matrice-inclusion et l'infini. On note \mathbb{C}^i , \mathbb{C}^0 et \mathbb{C}^{ext} les tenseurs des module d'élasticité de l'inclusion, de la matrice et du milieu extérieur. Le milieu extérieur, qui fait le lien entre la condition aux limites en déformation imposée et l'ellipsoïde qui contient le domaine de matrice et d'inclusion, influe sur l'estimation du tenseur de localisation sur l'inclusion. Le choix de ce matériau fait partie de l'établissement des modèles de micromécanique. On obtient alors le problème auxiliaire suivant schématisé sur la Fig. 3.2.

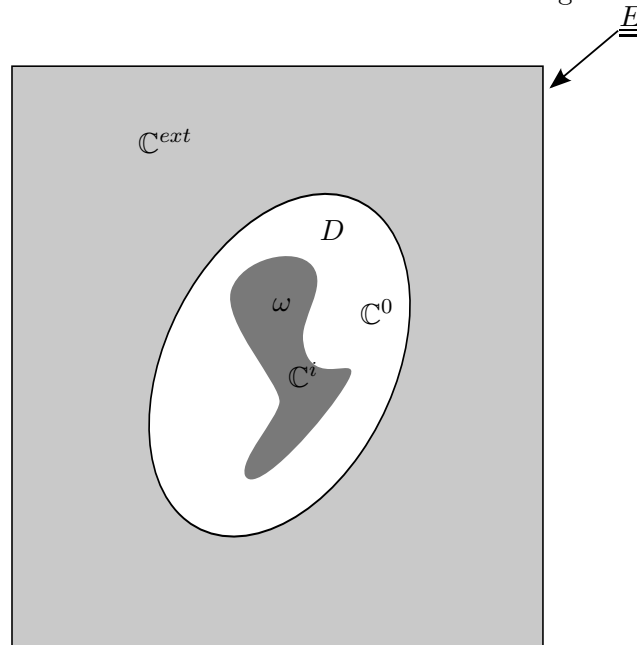


FIGURE 3.2 – Modèle à trois phases

Évidemment, on ne s'attend pas à ce qu'une telle description soit parfaite. L'objectif recherché est le suivant : on veut que la moyenne des déformations sur l'inclusion que l'on va calculer grâce au problème auxiliaire soit proche de la moyenne des déformations sur l'ensemble des inclusions de la classe considérée dans le matériau réel. On ne peut pas espérer mieux, puisqu'en réalité toutes les inclusions de la même classe ne peuvent être exactement dans le même état mécanique, certaines pouvant être plus proches ou plus éloignées des autres. Si l'on est également intéressé par des valeurs locales des champs, le risque est encore plus grand de se tromper en utilisant un tel modèle. La valeur locale des champs est influencée par la présence des inclusions voisines dans le problème réel.

Mettant ces remarques de côté, nous allons exposer le calcul de quelques tenseurs de localisation dans le cas simplifié où l'inclusion est de forme ellipsoïdale et la distribution spatiale des inclusions l'est également (Fig. 3.3). L'ellipsoïde ω est de la forme des inclusions qu'on a supposées ellipsoïdales. L'ellipsoïde extérieur D , a pour vocation de représenter la distribution spatiale des inclusions dans le milieu réelle. Si cette distribution est anisotrope, c'est-à-dire que la probabilité de rencontrer un centre de particule à une distance donnée d'un autre centre varie selon les directions d'investigation, et que les isovaleurs de cette probabilité est de forme ellipsoïdale, on choisit D comme étant homothétique à cet ellipsoïde. Sa taille est choisie de sorte que le rapport des volumes de l'inclusion et de l'atmosphère soit égal à la fraction volumique d'inclusions dans le composite réel. On appelle souvent D l'atmosphère. Cette hypothèse de forme et distribution ellipsoïdale des inclusions nous permettra d'utiliser le résultat d'Eshelby, sur lequel se fondent tous les schémas de ce type.

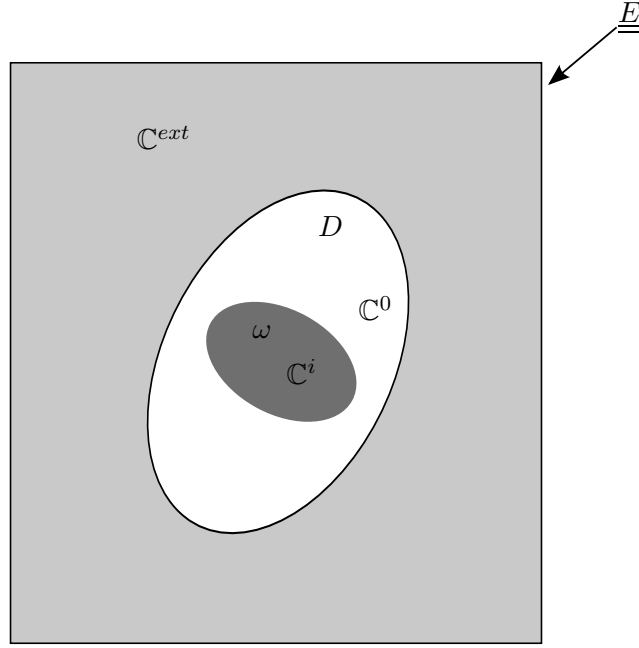


FIGURE 3.3 – Modèle à trois phases, inclusions et distribution des inclusions ellipsoïdales

Le cas le plus général du modèle à trois phases n'admet à notre connaissance pas de solution analytique exacte, c'est-à-dire qu'on n'est pas capable d'écrire la moyenne des déformations sur l'inclusion ω de manière analytique en fonction des tenseurs des modules des trois matériaux \mathbb{C}^i , \mathbb{C}^0 et \mathbb{C}^{ext} , des formes des ellipsoïdes caractérisées par leur tenseur d'Eshelby \mathbb{S}_ω^0 et \mathbb{S}_D^{ext} où l'indice désigne l'ellipsoïde considéré et l'exposant le milieu dans lequel il est plongé, la fraction volumique d'inclusions dans le problème réel f , lié à la fraction volumique d'inclusion dans le matériau matrice de façon à ce que $f = \frac{\omega}{D}$.

3.6.1.2 Double inclusion équivalente

Il est tentant d'appliquer la même idée que celle d'Eshelby. Cela revient à remplacer les matériaux contenus dans les deux ellipsoïdes par le matériau du milieu infini, et à introduire un champ de déformation libre. Le résultat d'Eshelby ne pouvant être appliqué à cette situation, on ne peut montrer que les champs de déformation dans le problème réel donc de déformation libre dans le problème à l'inclusion équivalente sont homogènes. Reprenons cependant la démarche pour voir où se situe le blocage. On travaille sur le problème équivalent schématisé sur la figure 3.4.

On est amené à calculer les moyennes de la déformation dans le problème équivalent en fonction du champ de déformation libre pour l'instant inconnu. On tombe alors sur l'intégrale :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_\omega &= \frac{1}{\omega} \int_\omega \int_D \{ \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) : \mathbb{C}^{ext} : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) dy \} dx \\ &= \frac{1}{\omega} \int_D \int_\omega \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^{ext} : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) dy \end{aligned} \quad (3.72)$$

Dans cette intégrale, $\underline{x} \in \omega$ et $\underline{y} \in D$. Cependant, pour identifier $\int_\omega \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^{ext}$ au tenseur d'Eshelby de l'ellipsoïde ω il faut que $\underline{y} \in \omega$. Or ici, $\omega \subset D$, et non le contraire. On ne peut donc pas expliciter la moyenne des déformations sur ω en fonction de la moyenne du champ de déformation libre sur ω et D . On ne peut pas non plus, par l'application des conditions de

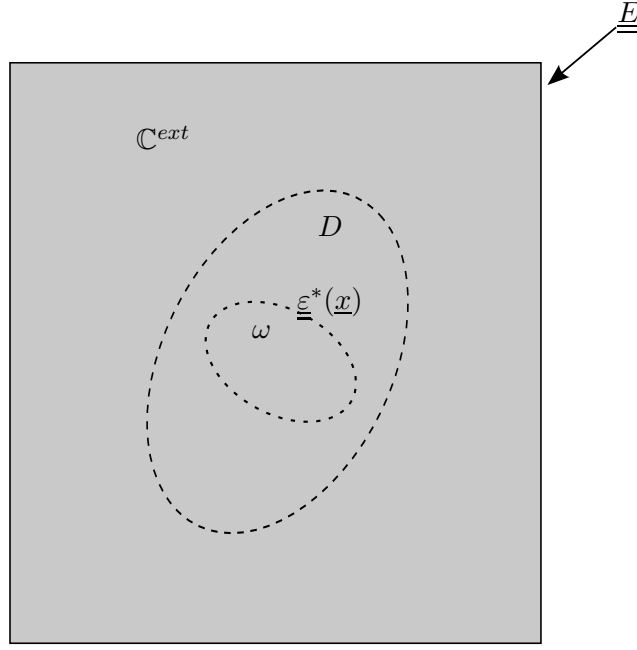


FIGURE 3.4 – Modèle à double inclusion équivalente

cohérence, trouver les moyennes de champ de déformation libre qui assurent l'équivalence entre les deux problèmes et par conséquent on n'arrive pas à exprimer analytiquement le tenseur de localisation sur l'inclusion dans ce problème.

On peut en revanche démontrer en quelques lignes notre théorème 3.5.8 ce qui revient à appliquer la démonstration de Nemat-Nasser en s'autorisant l'interversion d'ordre d'intégration sur deux domaines qui ont une intersection. Il est possible de démontrer la validité de cette interversion par des propriétés de l'opérateur de Green [8].

3.6.1.3 Approximation de Hori et Nemat-Nasser [19]

Hori et Nemat-Nasser ont introduit une approximation de l'intégrale mentionnée ci-dessus (équation 3.72) qui permet d'arriver à un tenseur de localisation. Voici les étapes de leur calcul. Ils commencent par isoler une partie de l'intégrale qui se calcule facilement par le résultat d'Eshelby :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\omega} = \mathbb{S}_{\omega}^{ext} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle_{\omega} + \frac{1}{\omega} \int_{D \setminus \omega} \int_{\omega} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) dy \quad (3.73)$$

En ce qui concerne le second terme, on fait apparaître la moyenne du champ de déformation libre sur l'espace compris entre les deux ellipsoïdes :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\omega} &= \mathbb{S}_{\omega}^{ext} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle_{\omega} \\ &+ \frac{1}{\omega} \int_{D \setminus \omega} \int_{\omega} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^0 : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle_{D \setminus \omega} dy \\ &+ \frac{1}{\omega} \int_{D \setminus \omega} \int_{\omega} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) - \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle_{D \setminus \omega}) dy \end{aligned} \quad (3.74)$$

Le terme central se calcule facilement puisqu'on peut ré-inverser l'ordre d'intégration, n'étant plus gêné par la dépendance du champ de déformation libre en les coordonnées d'espace :

$$\begin{aligned}
 \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\omega} &= \mathbb{S}_{\omega}^{ext} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle_{\omega} + [\mathbb{S}_D^{ext} - \mathbb{S}_{\omega}^{ext}] : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle_{D \setminus \omega} \\
 &+ \frac{1}{\omega} \int_{D \setminus \omega} \int_{\omega} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^0 : (\underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) - \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^* \rangle_{D \setminus \omega}) dy
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Leur approximation réside dans l'hypothèse que le dernier terme de l'équation 3.75 peut être considéré comme négligeable. Une fois cette approximation faite, l'application des conditions de cohérence permet de trouver le tenseur de localisation qui dépend de la fraction volumique d'hétérogénéités, des formes des ellipsoïdes et du matériau choisi pour le milieu infini par les tenseurs d'Eshelby des ellipsoïdes, et des trois matériaux de l'hétérogénéité, de la matrice et du milieu infini.

Les auteurs démontrent que leur modèle est équivalent au modèle de Mori-Tanaka (voir § 3.6.5) lorsqu'on choisit un ellipsoïde D de même forme et orientation que l'ellipsoïde ω , et que le matériau extérieur est la matrice. Ils démontrent également qu'on retrouve le schéma autocohérent (voir § 3.6.6) lorsqu'on choisit le matériau extérieur égal au matériau homogénéisé que l'on recherche, et encore une fois que les deux ellipsoïdes sont de même forme et orientation. En dehors de ces deux cas où des simplifications particulières apparaissent, l'équation obtenue est implicite et très compliquée, puisque le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé que l'on recherche apparaît des deux côtés.

Comme on est dans l'impossibilité de résoudre cette version idéale de problème auxiliaire, reprenons les modèles simplifiés qui donnent effectivement naissance à des estimations des modules élastiques.

3.6.2 Schéma dilué

Le schéma dilué est le schéma le plus simple, valide lorsque la concentration en inclusions tend vers zéro et correspondant physiquement à une situation où les hétérogénéités sont tellement espacées les unes des autres dans la matrice que chaque inclusion ne voit pas du tout l'influence mécanique des autres. Cela correspond exactement à la solution du problème de l'inclusion équivalente d'Eshelby. La déformation dans chaque hétérogénéité est alors donnée par l'équation 3.51 :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [\mathbb{I} - \mathbb{P}_V^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)]^{-1} : \underline{\underline{E}} \tag{3.76}$$

Considérant donc un ensemble de N familles d'hétérogénéités ellipsoïdales plongées dans une matrice de module \mathbb{C}^0 , caractérisées par leur module \mathbb{C}^i , leur tenseur de Hill \mathbb{P}_i^0 et leur fraction volumique dans la matrice f^i , le tenseur de localisation moyen sur l'inclusion i qu'on appelle \mathbb{A}_i^{dil} s'écrit :

$$\mathbb{A}_i^{dil} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)]^{-1} \tag{3.77}$$

Ce tenseur de localisation est, comme traduction élémentaire du résultat d'Eshelby, utilisé à un moment où à un autre dans l'établissement de tous les schémas d'homogénéisation. On utilise ensuite la formule 3.12 pour écrire le module élastique homogénéisé estimé par le schéma dilué :

$$\mathbb{C}^{dil} = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=1}^N f^i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_i^{dil} \tag{3.78}$$

3.6.3 Schéma différentiel

Le schéma différentiel est une extension du schéma dilué exposé dans le paragraphe précédent 3.6.2. L'idée de ce schéma est de construire le matériau que l'on veut homogénéiser par petits incréments, en démarrant du matériau matrice et en ajoutant des quantités infinitésimales de phase inclusionnaire à chaque étape, jusqu'à parvenir à la fraction volumique totale.

À chaque étape élémentaire, on calcule un tenseur des modules d'élasticité intermédiaire en utilisant le schéma dilué, et on affecte au matériau matrice de l'étape suivante les propriétés élastiques calculées. Un passage à la limite analytique est possible dans les situations les plus simples.

3.6.4 Schéma à deux phases

En général, le schéma qui vient immédiatement après le schéma dilué est le schéma de Mori-Tanaka. Cependant il me semble qu'on comprend mieux les idées qui sont derrière ce schéma en présentant d'abord un schéma qu'on appellera schéma à deux phases, et qui est clairement expliqué par exemple dans Shige [32] (et aussi par Benveniste [6] et Nemat-Nasser [28]). L'idée de départ est qu'ayant plongé une hétérogénéité ω de module \mathbb{C}^i dans une matrice infinie de module \mathbb{C}^0 et appliqué un chargement de déformation homogène à l'infini \underline{E} , on estime la déformation de l'hétérogénéité non pas directement, mais en prenant en compte la déformation de la matrice qui se trouve autour de l'hétérogénéité. On considère en fait que dans le VER réel, l'état mécanique de la matrice est comparable à l'état mécanique de la matrice qui se trouve immédiatement autour de l'hétérogénéité dans le problème auxiliaire.

On entoure donc l'hétérogénéité par un ellipsoïde fictif D qui ne nous sert que de surface de mesure des déformations moyennes. La forme et la taille de cet ellipsoïde répondent à certaines conditions. Son volume D est déterminé de façon à ce que la fraction volumique de l'hétérogénéité ω dans D soit égale à la fraction volumique des hétérogénéités f dans le problème réel : $f = \frac{\omega}{D}$. Sa forme rend compte de la distribution spatiale des hétérogénéités dans le problème réel.

On va donc calculer le tenseur de localisation sur ω en prenant comme déformation de référence non pas la déformation imposée à l'infini, mais la moyenne des déformations sur D . Il est donc dans un premier temps nécessaire de calculer en fonction de la déformation à l'infini \underline{E} les déformations moyennes sur ω et D . Pour l'hétérogénéité, le tenseur de localisation dilué nous fournit le résultat immédiatement :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\omega} = \mathbb{A}_{\omega}^{dil} : \underline{E} \quad (3.79)$$

Pour ce qui est de l'ellipsoïde de mesure D , nous pouvons obtenir la moyenne des déformations en utilisant le résultat de Tanaka-Mori (c'est ainsi que procède Shige), ou directement notre formule donnée à l'équation 3.71 (ce qui revient exactement au même). Partant de notre formule brute à laquelle on a incorporé le comportement du matériau de ω , le fait que le matériau à l'extérieur de D est également le matériau matrice, et la moyenne de la déformation sur l'hétérogénéité, on obtient :

$$[\mathbb{C}^0 + \mathbb{C}_D^{0*}] : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_D = (\mathbb{P}_D^0)^{-1} : \underline{E} + f (\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^i) : \mathbb{A}_{\omega}^{dil} : \underline{E} \quad (3.80)$$

On peut donc à partir de cette équation exprimer la déformation imposée à l'infini en fonction de la moyenne des déformations sur D :

$$\underline{E} = \left[\mathbb{I} - f \mathbb{P}_D^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_{\omega}^{dil} \right]^{-1} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_D \quad (3.81)$$

On insère ceci dans l'équation 3.79 pour obtenir :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\omega} = \mathbb{A}_{\omega}^{dil} : \left[\mathbb{I} - f \mathbb{P}_D^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_{\omega}^{dil} \right]^{-1} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_D \quad (3.82)$$

Ce qui nous définit un nouveau tenseur de localisation propre à ce schéma à deux phases :

$$\mathbb{A}_\omega^{2ph} = \mathbb{A}_\omega^{dil} : \left[\mathbb{I} - f\mathbb{P}_D^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_\omega^{dil} \right]^{-1} \quad (3.83)$$

Et un nouveau module homogénéisé (à partir de 3.12) :

$$\mathbb{C}^{2ph} = \mathbb{C}^0 + f(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_\omega^{dil} : \left[\mathbb{I} - f\mathbb{P}_D^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_\omega^{dil} \right]^{-1} \quad (3.84)$$

Remarque : Cette façon de calculer le tenseur de localisation sur l'inclusion en prenant comme déformation de référence non pas celle qu'on a imposée à l'infini mais la déformation moyenne sur l'ellipsoïde D revient exactement à calculer la moyenne des déformations et des contraintes sur D et à définir le module homogénéisé comme le tenseur d'ordre 4 les reliant.

3.6.5 Schéma de Mori-Tanaka

3.6.5.1 Construction du schéma comme un cas particulier du schéma à deux phases

On construit ensuite le schéma hyper classique de Mori-Tanaka [25] à partir du schéma à deux phases présenté précédemment. Il nous semble que c'est la manière la plus claire de le faire. La seule modification à faire est d'ajouter l'hypothèse que l'ellipsoïde sur lequel on mesure les déformations est de même forme que celui qui délimite l'hétérogénéité et qui intervient dans l'expression du tenseur de localisation de l'inclusion. Les deux ellipsoïdes ont donc le même tenseur de Hill. Le tenseur des modules homogénéisé s'écrit ainsi :

$$\mathbb{C}^{MT} = \left[(1-f)\mathbb{C}^0 + f\mathbb{C}^i : (\mathbb{I} + \mathbb{P}_\omega^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0))^{-1} \right] : \left[(1-f)\mathbb{I} + f(\mathbb{I} + \mathbb{P}_\omega^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0))^{-1} \right]^{-1} \quad (3.85)$$

3.6.5.2 Explications de Benveniste

Benveniste [6] est celui qui a le premier traduit l'idée de Mori-Tanaka d'une manière très claire et qui explicite les hypothèses qui aboutissent à l'écriture du schéma de Mori-Tanaka. Son hypothèse est la suivante : on considère une inclusion ω qui lorsqu'elle est plongée dans une matrice sur laquelle la moyenne des déformations est $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_m$, a la moyenne des déformations suivante :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_\omega = \mathbb{T} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_m \quad (3.86)$$

Où \mathbb{T} est le tenseur de localisation du problème dilué associé, c'est-à-dire de la configuration où on plonge cette même inclusion dans un milieu élastique de matériau matrice chargé à l'infini en déformations homogènes. La déformation de l'hétérogénéité est donc calculée par une sorte de problème dilué par rapport à la déformation moyenne de la matrice au lieu de la déformation à l'infini à laquelle on ne s'intéresse pas explicitement même si elle est à l'origine de la moyenne des déformations dans la matrice qu'on prend comme référence.

Si l'on calcule pour terminer les moyennes des déformations et des contraintes sur notre VER, en prenant encore la moyenne des déformations sur la matrice comme référence, on obtient :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{VER} = [(1-f)\mathbb{I} + f\mathbb{T}] : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_m \quad (3.87)$$

Et pour les contraintes :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{VER} = [(1-f)\mathbb{C}^0 + f\mathbb{C}^i : \mathbb{T}] : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_m \quad (3.88)$$

Ce qui permet, en éliminant la moyenne des déformations sur la matrice entre ces deux équations et définissant le tenseur homogénéisé du schéma de Mori-Tanaka comme le tenseur reliant la contrainte moyenne à la déformation moyenne, d'écrire :

$$\mathbb{C}^{MT} = [(1-f)\mathbb{C}^0 + f\mathbb{C}^i : \mathbb{T}] : [(1-f)\mathbb{I} + f\mathbb{T}]^{-1} \quad (3.89)$$

Tenseur qui est bien égal au tenseur écrit précédemment (équation 3.85) lorsqu'on a une inclusion ellipsoïdale et que le tenseur \mathbb{T} n'est autre que le tenseur de localisation dilué $(\mathbb{I} + \mathbb{P}_\omega^0 : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0))^{-1}$.

3.6.5.3 Critiques théoriques

Weng [37] souligne que lorsqu'on compare les résultats du schéma de Mori-Tanaka dans le cas d'inclusions non sphériques aux bornes rigoureuses de Hashin-Strickman-Walpole, il est possible que les modules homogénéisés MT se situent hors des bornes, ce qui montre un gros défaut. Ponte Castañeda et Willis [29] font le même genre de remarques sur le fait que lorsqu'on considère plusieurs formes différentes d'inclusions on perd la symétrie majeure du module homogénéisé.

3.6.6 Schéma autocohérent

L'idée de départ du schéma autocohérent est qu'il est important pour déterminer la façon dont la déformation se localise dans une inclusion, de prendre en compte le fait que cette inclusion est entourée d'un matériau qui n'est pas la matrice seule, mais un matériau dont le comportement dépend de celui de toutes les inclusions. On construit donc ce schéma de la même manière que le schéma dilué, en supposant qu'en dehors de l'hétérogénéité le matériau est celui que l'on cherche, et non celui de la matrice :

$$\mathbb{C}^{AC} = \mathbb{C}^0 + f(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_i^{AC} \quad (3.90)$$

avec :

$$\mathbb{A}_i^{AC} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{AC} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{AC})]^{-1} \quad (3.91)$$

Ceci fournit une écriture implicite du module autocohérent homogénéisé. Dans les cas les plus simples, par exemple lorsque les matériaux sont isotropes et la distribution des phases telle que le matériau homogénéisé le soit aussi, on peut résoudre cette équation. Dans les cas plus compliqués, il faut procéder de manière itérative. Il est en effet démontré que le schéma autocohérent est la limite d'une suite de schémas dilués où le matériau à l'extérieur de l'hétérogénéité à chaque itération est pris comme étant le matériau homogénéisé trouvé à l'étape précédente.

Une autre complication peut être celle de l'écriture concrète du tenseur de Hill pour un ellipsoïde plongé dans un matériau qui n'est pas isotrope.

3.6.7 Schéma de Ponte-Castañeda-Willis

Ce schéma [29] est construit dans le but explicite de pouvoir prendre en compte la distribution spatiale des inclusions en plus de leur forme. En effet les auteurs soulignent que le schéma de Mori-Tanaka ne peut pas intégrer les informations relatives à la distribution des hétérogénéités dans l'espace. Ils rappellent également que dans le cas de Mori-Tanaka, le module homogénéisé n'est pas celui d'une structure réelle, puisque dans le cas où plusieurs inclusions de formes différentes coexistent dans le matériau, le module homogénéisé prédit n'a plus la symétrie majeure. De plus dans certains cas, comme lorsqu'un matériau contient des fissures, il est difficile de dire à quelle statistique de distribution de fissures le schéma de Mori-Tanaka fait appel. Nous présentons ce schéma car il est construit de manière rigoureuse, et se prêterait également à l'établissement de bornes. Nous pensons que c'est également intéressant de pouvoir comparer l'estimateur qui en découle à celui que nous choisirons, l'estimateur *IDD*, notamment du point de vue de la facilité

d'utilisation. Enfin, il nous semble que c'est dans l'établissement de ce schéma que la notion de distribution des inclusions est manipulée de la manière la plus rigoureuse. Leur démonstration fait appel à la formulation variationnelle de Hashin-Shtrikman (HS).

3.6.7.1 Formulation variationnelle de Hashin-Shtrikman, présentation de Willis

Le milieu élastique considéré est hétérogène. Chaque phase i a un module élastique \mathbb{C}_i , et une fonction caractéristique $\chi_i(\underline{x})$ si bien que le module s'écrit $\mathbb{C}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \chi_i(\underline{x})\mathbb{C}_i$. La densité d'énergie élastique de déformation s'écrit :

$$W(\underline{x}, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.92)$$

D'après le principe de minimum de l'énergie potentielle, la densité d'énergie élastique en déformation macroscopique sur le VER Ω s'écrit :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \min_{\underline{\underline{\varepsilon}} \in K} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} W(\underline{x}, \underline{\underline{\varepsilon}}) dx \quad (3.93)$$

K étant l'ensemble des déplacements cinématiquement admissible avec la déformation macroscopique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ considérée comme imposée sur le VER. Cette nouvelle énergie permet de définir le tenseur des modules macroscopiques :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \tilde{\mathbb{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.94)$$

Comme on ne sait pas résoudre le problème 3.93 facilement (cela voudrait dire qu'on est capable de calculer exactement le champ de déformation sur le VER chargé en déformations homogènes), on cherche à encadrer l'énergie macroscopique. Les auteurs introduisent un milieu de référence, homogène, d'élasticité \mathbb{C}^0 et l'énergie élastique en déformation associée W^0 . Par transformée de Legendre de l'énergie élastique du milieu réel par rapport à celle du milieu de référence, ils définissent l'énergie :

$$(W - W^0)^*(\underline{x}, \underline{\underline{\tau}}) = \max_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \{ \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - (W - W^0)(\underline{x}, \underline{\underline{\varepsilon}}) \} \quad (3.95)$$

On a donc une minoration de la densité d'énergie élastique microscopique qui dépend de $\underline{\underline{\tau}}$, et qu'on transforme en une minoration pour l'énergie élastique macroscopique en appliquant le résultat 3.93. On obtient :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \geq \min_{\underline{\underline{\varepsilon}} \in K} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} [W^0(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}] dx - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (W - W^0)^*(\underline{x}, \underline{\underline{\tau}}) dx \quad (3.96)$$

Si l'on s'intéresse au premier terme du minorant, on remarque qu'il définit la solution au problème sur le VER Ω où les déplacements sont imposés sur la frontière égaux à $\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{x}$, le matériau est homogène de raideur \mathbb{C}^0 , et un champ de polarisation $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x})$ est imposé en chaque point. Cette solution peut s'écrire à l'aide de l'opérateur de Green modifié pour le volume Ω et le matériau \mathbb{C}^0 , que l'on note Γ^0 :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}} - \int_{\Omega} \Gamma^0(\underline{x}, \underline{y}) [\underline{\underline{\tau}}(\underline{y}) - \underline{\underline{\tau}}] dy \quad (3.97)$$

L'idée de Hashin-Shtrikman est alors de considérer le champ de polarisation constant sur chaque phase (comme les modules élastiques) : $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \chi_i(\underline{x}) \underline{\underline{\tau}}_i$. L'hypothèse suivante consiste

à remplacer l'opérateur de green modifié par celui du milieu infini de même module élastique (qu'on marque par un exposant ∞). On obtient alors :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}) \geq W^0(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}) + \underline{\underline{\underline{\tau}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\underline{\underline{\underline{\tau}}}_i - \underline{\underline{\underline{\tau}}}_j) : \mathbb{A}^{i,j} : (\underline{\underline{\underline{\tau}}}_j - \underline{\underline{\underline{\tau}}}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f^i_{\underline{\underline{\underline{\tau}}}_i} : [\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0]^{-1} : \underline{\underline{\underline{\tau}}}_i \quad (3.98)$$

Où on a souligné dans le troisième terme qu'à cet endroit, $(\underline{\underline{\underline{\tau}}}_j - \underline{\underline{\underline{\tau}}}_i)$ n'intervient qu'à une constante près. C'est aussi dans ce terme qu'on trouve la seule quantité difficile à calculer, et où les hypothèses sur la microstructure seront utiles :

$$\mathbb{A}^{i,j} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \chi_i(\underline{x}) [\chi_j(\underline{y}) - f_j] \Gamma^{0,\infty}(\underline{x} - \underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} \quad (3.99)$$

Enfin, le membre de droite est maximisé sur les valeurs par phase du tenseur de localisation $\underline{\underline{\underline{\tau}}}_i$. C'est élémentaire puisque ce membre n'est composé que de termes constants, linéaires et quadratiques en les $\underline{\underline{\underline{\tau}}}_i$, ce qui mène à un système d'équations que ces tenseurs constants doivent vérifier pour optimiser la minoration de l'énergie macroscopique.

3.6.7.2 Application aux milieux à particules

On considère que le milieu est constitué de $N - 1$ types de particules plongées dans la matrice. Chaque phase i a n_i représentants. La fonction caractéristique de chaque phase est la somme de fonctions caractéristiques correspondant à une particule, translatées pour chaque particule.

Il s'agit tout d'abord de réécrire la fonction caractéristique de chaque phase. Soit χ'_i la fonction caractéristique du "modèle" des particules de la phase i , centré en 0. On note \underline{x}_i^k le centre du représentant k de la phase i . Les auteurs introduisent une fonction ϕ_i qui est un champ de variables aléatoires de probabilité, défini à partir des variables aléatoires \underline{x}_i^k que sont les coordonnées des centres des représentants des phases :

$$\phi_i(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_i} \delta(\underline{z} - \underline{x}_i^k) \quad (3.100)$$

Et la fonction caractéristique peut alors être écrite (on rappelle aussi son écriture naturelle) :

$$\chi_i(\underline{x}) = \int_{\Omega} [\chi'_i(\underline{x} - \underline{z}) \phi_i(\underline{z})] dz = \sum_{k=1}^{n_i} \chi'_i(\underline{x} - \underline{x}_i^k) \quad (3.101)$$

On introduit ensuite cette expression des fonctions caractéristique dans les termes $\mathbb{A}^{i,j}$, puis on calcule leur espérance notée $\langle \mathbb{A}^{i,j} \rangle$. On voit alors apparaître les moyennes suivantes :

$$\langle \phi_i(\underline{z}) \rangle = p^i(\underline{z}) \quad (3.102)$$

et

$$\langle \phi_i(\underline{z}) \phi_j(\underline{z}') \rangle = \delta_{ij} p^i(\underline{z}) \delta(\underline{z} - \underline{z}') + p_{ij}(\underline{z}, \underline{z}') \quad (3.103)$$

où apparaissent les probabilités $p^i(\underline{z})$ qu'une inclusion de la classe i ait son centre en \underline{z} et $p_{ij}(\underline{z}, \underline{z}')$ qu'on trouve simultanément une inclusion de la classe i en \underline{z} et une inclusion de la classe j en \underline{z}' . On suppose ensuite que le milieu est statistiquement homogène : $p^i(\underline{z}) = \frac{n_i}{\Omega}$ et $p_{ij}(\underline{z}, \underline{z}') = p_{ij}(\underline{z} - \underline{z}')$.

Une série de transformations est appliquée à $\langle \mathbb{A}^{i,j} \rangle$, puis l'hypothèse de symétrie ellipsoïdale de la distribution des inclusions est ajoutée aux précédentes. La probabilité conditionnelle

de trouver une inclusion de la classe j en \underline{z} sachant qu'une inclusion de la classe j se trouve en \underline{z}' ne dépend que de la norme du produit d'un tenseur symétrique d'ordre deux par $\underline{z} - \underline{z}'$. Il est également supposé que deux inclusions ne peuvent s'interpénétrer.

Une simplification supplémentaire amène à une expression où l'on reconnaît le tenseur de Hill correspondant à la distribution ellipsoïdale des inclusions par couples et au matériau de référence $\mathbb{P}_{\bullet\bullet}$, constant, par application du résultat d'Eshelby. Supposant enfin que les inclusions elles-mêmes sont ellipsoïdales, on voit apparaître leur tenseur d'Eshelby \mathbb{P}_{\bullet} . On aboutit au résultat :

$$\langle \mathbb{A}^{i,j} \rangle = f^i (\delta_{ij} \mathbb{P}_i - f_j \mathbb{P}_{ij}) \quad (3.104)$$

Finalement si l'on choisit le matériau matrice comme matériau de référence, et que de plus on suppose que tous les tenseurs de Hill rendant compte de la distribution des phases par couples sont identiques (égaux à \mathbb{P}_d), il est possible de résoudre les équations d'optimalité de la borne inférieure donc de trouver les champs de polarisation optimaux. Si la matrice est le matériau le plus souple le résultat est une borne inférieure, sinon une estimation du comportement du composite homogénéisé, qu'on appelle *PCW* :

$$\mathbb{C}^{PCW} = \mathbb{C}^0 + \left[\mathbb{I} - \sum_i f^i \mathbb{T}_i : \mathbb{P}_d \right]^{-1} : \left[\sum_i f^i \mathbb{T}_i \right] \quad (3.105)$$

où

$$\mathbb{T}_i = \left[(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)^{-1} + \mathbb{P}_i \right]^{-1} \quad (3.106)$$

Lorsqu'il n'y a qu'un type d'inclusions et que leur distribution spatiale est caractérisée par le même ellipsoïde que celui qui définit leur forme, cet estimateur est identique à celui de Mori-Tanaka. La comparaison de la généralisation de Weng [37] du schéma de Mori-Tanaka à la situation où il y a plusieurs types d'inclusions de formes différentes permet de comprendre pourquoi les schémas de type Mori-Tanaka peuvent amener à un tenseur des modules homogénéisés n'ayant pas la symétrie majeure. Dans l'approche *PCW*, la probabilité p_{ij} doit être symétrique, au sens que : $p_{ij}(\underline{z}, \underline{z}') = p_{ji}(\underline{z}', \underline{z})$. Si les tenseurs d'Eshelby sont différents selon les types d'inclusions et qu'on suppose que la distribution des autres inclusions autour d'une inclusion donnée est caractérisée par le même ellipsoïde que celui qui caractérise sa forme, on ne peut plus vérifier cette symétrie. D'où l'apparition du résultat non physique d'un tenseur des modules élastiques non symétrique.

3.6.8 Schéma Interaction Direct Derivative (*IDD*) de Zheng et Du

Nous allons maintenant présenter le schéma de Zheng et Du [39, 12], qui bien que n'étant pas très connu, probablement en partie parce qu'il est assez récent, nous a semblé bien adapté à notre problème. L'idée d'utiliser ce schéma nous vient de l'article de Bary [2].

Les auteurs qui ont établi ce schéma commencent par exposer les défauts des schémas classiques : pour ce qui est des schémas dilué, autocohérent, différentiel et Mori-Tanaka, ils ne prennent en compte ni la distribution des inclusions ni l'interaction des particules avec la matrice proche. Les deux schémas qui s'attaquent à ce problème sont le modèle à trois phases (ou à double inclusion) de Hori et Nemat-Nasser, et l'estimateur variationnel de Ponte Castañeda-Willis.

Les auteurs identifient les objectifs suivants pour un schéma d'homogénéisation. Il doit :

- Avoir une structure simple. Chaque terme doit avoir une explication physique claire.
- Être valide pour des milieux avec des inclusions et des symétries matérielles variées.
- Prendre en compte l'influence des différentes inclusions, l'interaction entre les inclusions et l'interaction entre chaque inclusion et la matrice environnante

Ils considèrent que pour le moment sur l'estimateur PCW et le leur (IDD) satisfont ces critères. L'estimateur PCW a cependant une expression compliquée lorsque les fonctions de corrélation des couples d'inclusions différentes ne sont pas toutes identiques.

La construction de leur schéma se fonde sur le schéma à trois phases de Nemat-Nasser. La première étape est l'écriture d'un schéma qu'ils appellent le schéma autocohérent effectif.

3.6.8.1 Schéma autocohérent effectif $ESCS$

Le volume ω_i représente la forme de l'inclusion de la phase i . Son atmosphère est délimitée par la frontière du volume D_i . Le volume ω_i est occupé par le matériau inclusion \mathbb{C}^i , et le volume $D_i \setminus \omega_i$ par le matériau matrice \mathbb{C}^0 . Le milieu infini entourant l'hétérogénéité est occupé par le milieu homogénéisé que l'on recherche \mathbb{C} . Le rôle de l'atmosphère est de rendre compte de la distribution des inclusions de la phase i en mettant autour de l'inclusion, dans le problème auxiliaire à trois phases, une couche de matrice d'une forme qui y est reliée. Le rapport de volume de l'inclusion dans son atmosphère est égal ou du même ordre de grandeur que la fraction volumique totale en inclusions : $\frac{\omega_i}{D_i} = f$.

Récapitulons les étapes de la construction du schéma $ESCS$. On suppose que les atmosphères D_i sont de forme ellipsoïdales.

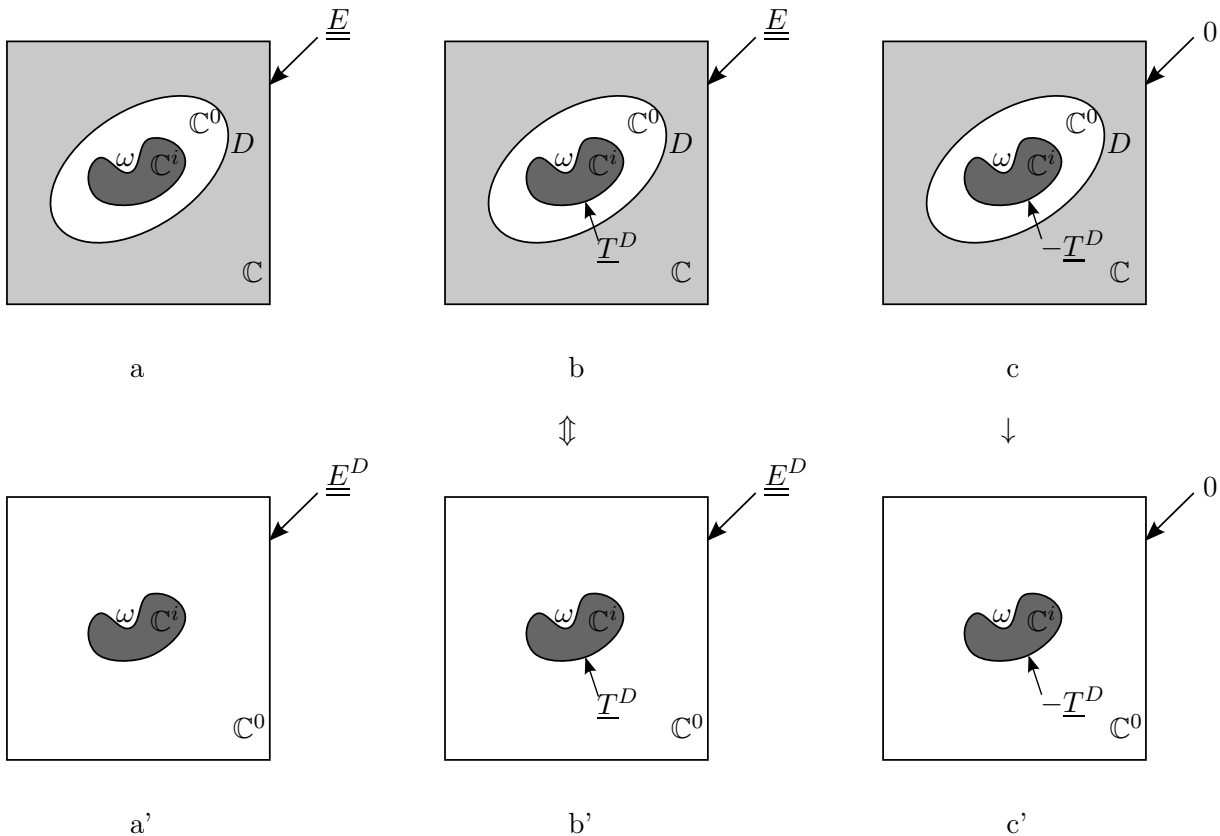


FIGURE 3.5 – Étapes de construction du schéma $ESCS$

- Considérons pour l'instant une seule hétérogénéité et son atmosphère plongées dans le milieu que l'on recherche (Fig. 3.5, a). Supposons qu'on retire l'hétérogénéité pour ne laisser que l'atmosphère. Il est alors facile d'écrire la déformation homogène induite dans l'atmosphère par une déformation \underline{E} à l'infini, que l'on note \underline{E}^D pour souligner qu'elle est homogène, et parce qu'on va l'utiliser comme condition aux limites à l'infini un peu plus

loin dans la construction :

$$\underline{\underline{E}}^D = \mathbb{A}_{D, \mathbb{C}^0, \mathbb{C}}^{dil} : \underline{\underline{E}} \quad (3.107)$$

Où le tenseur de localisation que l'on considère est celui de l'atmosphère D de matériau \mathbb{C}^0 plongée dans le matériau \mathbb{C} que l'on cherche, ce que l'on note en indice du tenseur.

- Si l'on retire le morceau d'atmosphère qui se trouve dans ω au point précédent où l'on a effacé l'hétérogénéité, et qu'on essaie d'y faire rentrer l'hétérogénéité, celle-ci doit être à son tour contrainte de façon à avoir la même déformation homogène $\underline{\underline{E}}^D = \mathbb{A}_{D, \mathbb{C}^0, \mathbb{C}}^{dil} : \underline{\underline{E}}$. On applique donc sur $\partial\omega$ un vecteur contrainte pour obtenir cette déformation (Fig. 3.5, b). L'hétérogénéité est module \mathbb{C}^i , et la matrice est de module \mathbb{C}^0 . Ces deux matériaux étant soumis à la même déformation $\underline{\underline{E}}^D$, l'effort à appliquer pour assurer la continuité du vecteur contrainte $\underline{\underline{T}}^D$ est :

$$\underline{\underline{T}}^D = (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \underline{\underline{\varepsilon}}^D \quad (3.108)$$

- Bien sûr, puisqu'on a rajouté un chargement au problème à trois phases de départ, il est nécessaire de superposer la solution du point précédent (b) à la solution d'un deuxième problème sur la géométrie du problème à trois phases, sans déformation à l'infini, et appliquant le vecteur contrainte opposé $\underline{\underline{T}}^D$ sur $\partial\omega$ (Fig. 3.5, c).
- L'étape suivante consiste à remplacer le problème (c) par le problème (c'). L'idée physique est que dans l'objectif de calculer les champs de contrainte et déformation dans l'inclusion, il est peu différent de garder le matériau que l'on cherche en dehors de D , ou de le remplacer par le matériau matrice. L'influence de ce changement est moindre que si on faisait la même chose au niveau du problème (a) puisque dans le problème (c) le chargement mécanique se situe immédiatement sur la frontière $\partial\omega$ de l'hétérogénéité et non à l'infini. Cette approximation est justifiée par les auteurs par une démonstration mathématique dont le résultat est que le champ de contrainte moyen sur l'inclusion est modifié d'une quantité de l'ordre de la fraction volumique d'hétérogénéité au carré.
- Concernant l'équivalence entre le problème (b) et le problème (b') du point de vue des valeurs des champs dans l'hétérogénéité, elle vient du fait que ces deux situations induisent le même champ de déformation constant dans $D \setminus \omega$. Du point de vue de l'hétérogénéité, c'est donc identique. On s'affranchit donc de la présence du matériau que l'on cherche en remplaçant la déformation imposée à l'infini $\underline{\underline{E}}$ de départ par une autre déformation $\underline{\underline{E}}^D$ qui dépend cependant du matériau que l'on cherche.
- Enfin, on superpose (b') et (c') pour faire disparaître le chargement introduit sur $\partial\omega$ et arriver au problème (a') qui est simple en dehors du fait que la déformation imposée à l'infini dépend du tenseur des modules que l'on cherche. La solution du problème (a'), dans le cas où ω est de forme ellipsoïdale, ce qui n'était pas nécessaire jusque là, est obtenue en utilisant le tenseur de localisation dilué :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{ESCS} &= \mathbb{A}_{\omega, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^0}^{dil} : \underline{\underline{E}}^D \\ &= \mathbb{A}_{\omega, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^0}^{dil} : \mathbb{A}_{D, \mathbb{C}^0, \mathbb{C}}^{dil} : \underline{\underline{E}} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Cela définit un tenseur de localisation propre au schéma *ESCS* :

$$\mathbb{A}^{ESCS} = \mathbb{A}_{\omega, \mathbb{C}^i, \mathbb{C}^0}^{dil} : \mathbb{A}_{D, \mathbb{C}^0, \mathbb{C}}^{dil} \quad (3.110)$$

Il s'agit donc de deux schémas dilués successifs, mais l'avantage de leur méthode est qu'elle leur permet de connaître l'approximation qui est faite.

On construit ensuite le tenseur des modules homogénéisés par la formule découlant du calcul

de la moyenne des déformations sur le VER habituelle 3.12 :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ESCS} - \mathbb{C}^0 &= \sum_i f^i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}^{ESCS} \\ &= \sum_i f^i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^0 (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}^0)]^{-1} : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{Di}^{ESCS} (\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^{ESCS})]^{-1} \end{aligned} \quad (3.111)$$

L'expression est implicite, ce qui amène les auteurs à quelques autres approximations, qui vont donner naissance à leur schéma *IDD*.

3.6.8.2 Schéma Interaction Direct Derivative (*IDD*)

Pour passer au schéma *IDD*, on simplifie le schéma *ESCS* de la façon suivante. Tout d'abord on fait un développement limité du terme le plus à droite de l'équation 3.110, puis on remplace le tenseur de Hill relatif au matériau homogénéisé et la géométrie de l'atmosphère i par le même tenseur mais cette fois relatif au matériau matrice :

$$[\mathbb{I} + \mathbb{P}_{Di}^{ESCS} (\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^{ESCS})]^{-1} \simeq [\mathbb{I} - \mathbb{P}_{Di}^{ESCS} (\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^{ESCS})] \simeq [\mathbb{I} - \mathbb{P}_{Di}^0 (\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^{ESCS})] \quad (3.112)$$

Ces hypothèses sont commentées et ne diminuent pas l'ordre de l'approximation en la fraction volumique f des inclusions. On a alors le résultat suivant :

$$\mathbb{L}^{IDD} = \left[\mathbb{I} - \sum_i \mathbb{L}_i^d \mathbb{P}_{Di}^0 \right]^{-1} \mathbb{L}^d \quad (3.113)$$

avec :

$$\mathbb{L}^{IDD} = \mathbb{C}^{IDD} - \mathbb{C}^0 \quad (3.114)$$

$$\mathbb{L}^i = \mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0 \quad (3.115)$$

$$\mathbb{L}_i^d = f^i (\mathbb{L}_i^{-1} + \mathbb{P}_i^0)^{-1} \quad (3.116)$$

$$\mathbb{L}^d = \sum_k \mathbb{L}_k^d \quad (3.117)$$

$$\mathbb{P}_i^0 = \mathbb{S}_i^0 \mathbb{C}_0^{-1} \quad (3.118)$$

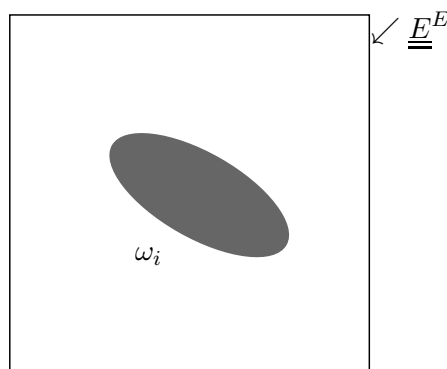
La dernière étape est de repartir du résultat du tenseur des modules homogénéisés pour écrire un nouveau tenseur de localisation. On remarque que le tenseur de localisation :

$$\mathbb{A}_i^{IDD} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^0 \mathbb{L}_i]^{-1} : \left[\mathbb{I} - \sum_k \mathbb{P}_{Dk}^0 \mathbb{L}_k^d \right]^{-1} \quad (3.119)$$

Permet d'obtenir le même tenseur homogénéisé (équation 3.113) sans dépendre du tenseur des modules recherché. Or, le premier terme est le tenseur de localisation dilué. Posant la déformation :

$$\underline{\underline{E}}^E = \left[\mathbb{I} - \mathbb{P}_{Di}^0 \mathbb{L}_i^d \right]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 \quad (3.120)$$

On traite en fait un problème de type dilué, en remplaçant la déformation à l'infini de départ par une autre, mais qui cette fois-ci ne dépend d'aucune quantité qu'on recherche (Fig. 3.6).

FIGURE 3.6 – Problème dilué final dans le schéma *IDD*

3.6.8.3 Liens avec les estimateurs présentés plus tôt

L'estimateur variationnel de Ponte-Castañeda et Willis (*PCW*), dans le cas où les fonctions caractérisant la distribution relative des différentes phases sont toutes identiques, est rigoureusement égal à l'estimateur *IDD* dans la situation analogue où toutes les atmosphères sont prises de même forme. Quant à l'estimateur de Mori-Tanaka, il coïncide d'un point de vue énergétique avec l'estimateur *IDD* lorsque chaque atmosphère a la même forme que l'hétérogénéité à laquelle elle est attachée. Il n'y a pas de lien direct avec les estimateurs autocohérent et différentiel en revanche.

3.6.9 Conclusion sur les estimateurs

Nous avons donc présenté une série d'estimateurs de micromécanique, qui permettent d'avoir une approximation des tenseurs de localisation, et ainsi, comme on l'a montré dans les deux premières parties de ce chapitre, des propriétés poroélastiques de notre milieu homogénéisé. Nous avons d'abord présenté le schéma à trois phases de Nemat-Nasser qui nous semble important conceptuellement, puis avons détaillé les schémas dilué, à deux phases, Mori-Tanaka, Ponte Castañeda-Willis et *IDD*, et mentionné les schémas différentiel et autocohérent. Notre choix pour la suite s'est porté sur l'estimateur *IDD*, qui nous semble le plus facile d'utilisation, tout en permettant d'estimer les propriétés d'un milieu hétérogène avec plusieurs types d'inclusions.

3.7 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter un certain nombre d'outils mécaniques dont nous avons besoin pour la modélisation de l'alcali-réaction. Nous nous sommes focalisés sur les résultats permettant de modéliser la nature hétérogène du béton attaqué, et plus particulièrement les méthodes analytiques. Les estimateurs de propriétés mécaniques que nous avons détaillés sont tous liés à la solution d'Eshelby. Grâce à divers problèmes auxiliaires on construit des estimateurs plus ou moins évolués. Nous avons choisi l'estimateur *IDD*, de Zheng et Du, qui nous a semblé le plus adapté. Ce choix est cependant fondé sur des critères de facilité d'utilisation, et non sur la comparaison des résultats donnés par les différents estimateurs à des simulations. Nous allons donc consacrer la partie suivante à ce type de calculs, de façon à conforter notre choix par comparaison avec des solutions numériques.

