

# Modélisation par la méthode des éléments finis et basée sur l'impédancemétrie

Nous avons présenté dans le chapitre précédent nos dispositifs de récupération d'énergie vibratoire. Ce sont des structures multicouches piézoélectriques de type poutre cantilever. Dans le but d'optimiser la conception de ces dispositifs, nous allons construire des modèles basés sur la méthode des éléments finis (EF). Ces modèles nous permettent de modéliser les comportements électromécaniques de ces dispositifs et de prédire les grandeurs de sortie notamment la puissance électrique récupérée par ces dispositifs lorsqu'ils sont en fonctionnement. Pour construire un modèle basé sur la méthode des EF, nous avons besoin de connaître les propriétés des matériaux composant le dispositif, notamment le matériau piézoélectrique. Le jeu des paramètres fourni par le fournisseur n'est malheureusement pas consistant puisque créé à partir de la caractérisation de plusieurs échantillons de géométries différentes du même matériau [118]. Or un jeu de paramètres fiables est important pour construire un modèle EF précis. Nous allons donc présenter dans ce chapitre une stratégie pour identifier finement des paramètres effectifs de la couche piézoélectrique qui seront ensuite utilisés dans des modèles EF.

Afin de mener la modélisation des dispositifs piézoélectriques pour la récupération d'énergie vibratoire, trois types d'échantillons ont été considérés, de complexité croissante : une couche de matériau actif en PZT ; un unimorphe, c'est à dire une structure bicouche composée d'une couche PZT collée sur un substrat amorphe et élastique et enfin un bimorphe, c'est à dire une structure tri-couches constituée de deux couches de céramique PZT collées de part et d'autre d'un même substrat amorphe et élastique.

Puisque l'unimorphe et le bimorphe sont des structures multicouches basées sur l'emploi d'une ou plusieurs couches de PZT, il apparaît nécessaire d'évaluer en premier lieu le comportement de cette couche piézoélectrique seule et d'en identifier les paramètres effectifs avant d'aller vers la modélisation d'une structure plus complexe. En effet, il est bien connu que les propriétés des matériaux piézoélectriques dépendent de leur épaisseur [119], [120]. Il est donc probable que, suite à notre procédé de fabrication, qui comprend une étape d'amincissement, les propriétés de la couche piézoélectrique évoluent.

Ainsi, dans un premier temps, l'identification des paramètres effectifs du matériau piézoélectrique, basée sur l'emploi d'un modèle d'admittance analytique unidimensionnel, (1D) sera abordée. Ces paramètres serviront dans un second temps de paramètres d'entrée pour l'élaboration de modèles pertinents, tridimensionnels (3D), basés sur la méthode des EF de dispositifs piézoélectriques pour la récupération d'énergie. Ces dispositifs devant être à terme fixés sur une structure externe, il convient dans un troisième temps d'étudier l'influence de cet encastrement sur les résultats de simulation de ces trois structures (PZT, unimorphe, bimorphe)

Les trois types d'échantillons sont ainsi étudiés dans deux configurations de conditions aux limites mécaniques : libre-libre (LL), encasturé-libre (EL). Le tableau 2.1 résume les différents cas d'étude abordés dans ce chapitre.

Tableau 2.1 : Introduction de tous les types de modélisation de notre étude.

Conditions aux limites Structure modélisée	Impédance ( $Z$ )	
	Libre-Libre (LL)	Encasturé-Libre (EL)
Couche PZT (PZT)	 PZT-LL <sup>Z</sup>	 PZT-EL <sup>Z</sup>
Unimorphe (UNI)	 UNI-LL <sup>Z</sup>	 UNI-EL <sup>Z</sup>
Bimorphe (BIM)	 BIM-LL <sup>Z</sup>	 BIM-EL <sup>Z</sup>

## 1. Modélisation par EF 3D en condition « libre-libre »

Du fait que les propriétés piézoélectriques, mécaniques et diélectriques du matériau PZT diffèrent de celles du matériau massif [119],[121], il est nécessaire de déterminer

expérimentalement les paramètres du modèle décrivant le mieux possible le comportement du système. Ainsi, le but est d'obtenir un jeu de paramètres effectifs afin de construire un modèle EF de récupérateur d'énergie piézoélectrique réaliste. Dans le cas présent, il s'agit de récupérateurs constitués d'au moins une couche active piézoélectrique. Ainsi, une première étape consiste à étudier particulièrement cette couche piézoélectrique (cf. figure 2.1).



Figure 2.1 : Première étape de l'étude : passage d'une structure multicouche à une couche.

## 1.1. Cas de la couche PZT

### 1.1.1. Modèle analytique 1D

Pour déterminer une partie des coefficients du modèle EF 3D, le modèle 1D analytique développé par Brissaud [122] est utilisé [123]. Ce modèle unidimensionnel décrit les modes de résonance d'une plaque mince (cf. figure 2.2) respectant les conditions suivantes :

- Conditions géométriques :  $L \gg w, h$  ( $L$  est la longueur,  $w$  est la largeur et  $h$  est l'épaisseur de l'échantillon) ; ainsi, le mode d'extension latérale est principalement étudié.
- Conditions mécaniques : le matériau est totalement libre ; les contraintes et déformations sont toutes nulles sauf  $T_1$  ( $T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$  et  $T_1 \neq 0$ ) et  $S_1$  ( $S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 0$ ) dans le matériau.
- Conditions électriques : le déplacement électrique et le champ électrique sont nuls dans le plan  $(x_1, x_2)$  ( $D_1 = D_2 = 0, E_1 = E_2 = 0$ ) car l'échantillon est métallisé sur ses deux faces planes inférieures et supérieures ; le sens de polarisation est perpendiculaire à ces deux surfaces.

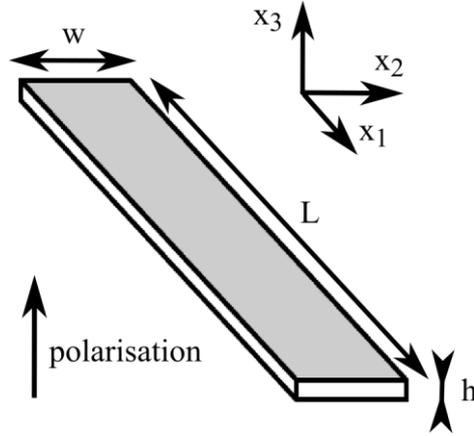


Figure 2.2 : Couche piézoélectrique étudiée.

Ainsi, les équations constitutives de la piézoélectricité sont réduites à :

$$\begin{cases} S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3 \\ S_2 = s_{12}^E T_1 + d_{31} E_3 \\ S_3 = s_{13}^E T_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3 \end{cases} \quad (13)$$

L'impédance est l'inverse de l'admittance, notée :

$$Z = \frac{1}{Y} \quad (14)$$

L'admittance électrique Y selon le mode latéral considéré est égale à [122] :

$$Y = jC_0\omega \left[ 1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\tan \frac{\alpha_1 L}{2}}{\frac{\alpha_1 L}{2}} \right] \quad (15)$$

avec  $\alpha_1$  est le nombre d'onde et  $C_0$  est la capacité bloquée définie par l'équation :

$$C_0 = \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{wL}{h} \quad (16)$$

où  $\epsilon_{33}^T$  est la permittivité diélectrique à contrainte constante et  $k_{31}$  est le coefficient de couplage électromécanique du mode latéral :

$$k_{31} = \sqrt{\frac{\frac{-\pi f_a}{2f_r} \cot\left(\frac{\pi f_a}{2f_r}\right)}{1 - \frac{\pi f_a}{2f_r} \cot\left(\frac{\pi f_a}{2f_r}\right)}} \quad (17)$$

Dans l'équation (17),  $f_r$  est la fréquence à laquelle la valeur de  $Z$  (respectivement  $Y$ ) est minimale (maximale), appelée la fréquence de résonance ( $Z_r$ ) ;  $f_a$  est la fréquence à laquelle la valeur de  $Z$  (respectivement  $Y$ ) est maximale (minimale), appelée la fréquence d'anti-résonance ( $Z_a$ ). En mesurant la fréquence de résonance  $f_r$  et la fréquence d'anti-résonance  $f_a$  du mode d'extension latérale, le coefficient de souplesse  $s_{11}^E$  est déterminé avec la formule suivante :

$$s_{11}^E = \frac{1}{4\rho(Lf_r)^2} \quad (18)$$

et le coefficient piézoélectrique  $d_{31}$  est déterminé en utilisant l'équation suivante :

$$d_{31}^2 = k_{31}^2 s_{11}^E \varepsilon_{33}^T \quad (19)$$

où  $\varepsilon_{33}^T$  est déterminée en mesurant la capacité bloquée  $C_0$  à  $2f_r$  et  $k_{31}$  est déduit de l'équation (17). Le processus de détermination des paramètres effectifs du matériau piézoélectrique est résumé dans la figure 2.3.

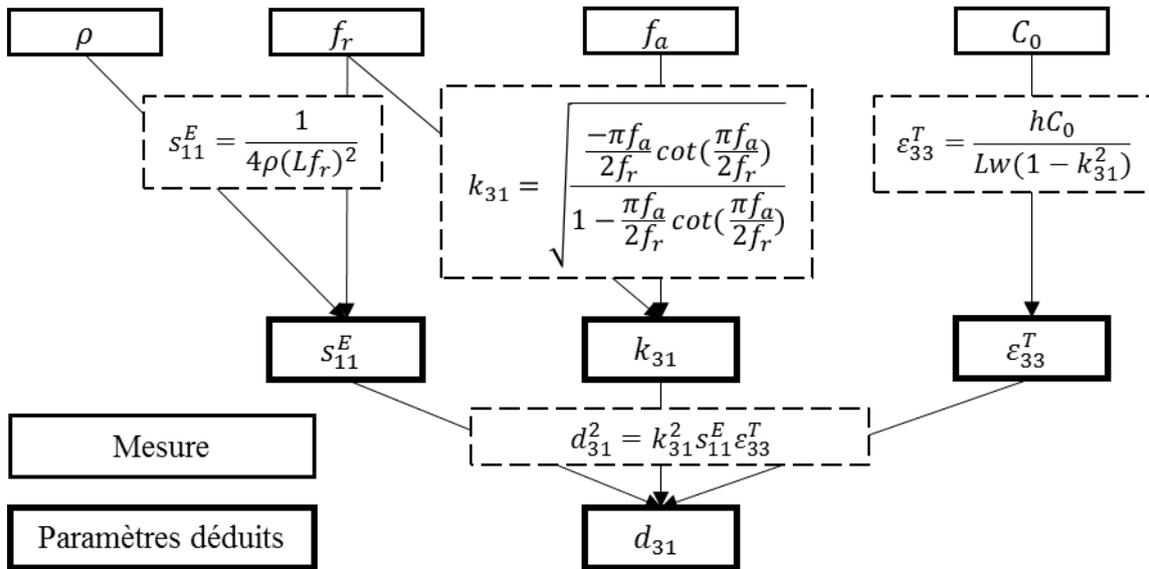


Figure 2.3 : Schéma de la méthode de détermination des coefficients de matériau piézoélectrique.

Le modèle EF nécessite pour sa mise en œuvre les tenseurs mécaniques, diélectriques et piézoélectriques complets du matériau. De ce fait, la question se pose de la détermination de la totalité des coefficients des 3 tenseurs. Pour y répondre, l'influence de tous les coefficients de ces 3 tenseurs sur le module de l'impédance électrique a été étudiée, et plus précisément sur les valeurs des fréquences de résonance et d'anti-résonance, ainsi que sur l'amplitude du module de l'impédance à ces fréquences. Une étude de sensibilité a donc été menée en faisant varier tous les coefficients qui n'ont pas été déterminés préalablement par le modèle analytique 1D décrit ci-dessus. Cette étude fait l'objet de l'article [124] inséré en annexe 1. La conclusion de cette étude est que tous les coefficients autres que  $(s_{11}^E, d_{31}, \varepsilon_{33}^T)$  n'ont aucun effet ou ont un effet négligeable sur le calcul de l'impédance par le modèle EF 3D.

### 1.1.2. Etude expérimentale

Dans cette partie, nous présentons l'aspect expérimental de notre étude sur la mesure d'impédance électrique d'une couche PZT en configuration libre-libre. La mesure d'impédance électrique nous permet de déterminer les paramètres effectifs de la couche PZT qui vont ensuite être introduits dans un modèle EF 3D.

#### 1.1.2.1. Configuration expérimentale

La méthode décrite ci-dessus a été appliquée à la détermination des paramètres effectifs de notre échantillon constitué d'une plaque mince de céramique PZT de dimensions 4 mm x 39 mm x 150  $\mu\text{m}$ . Cet échantillon est fabriqué à partir d'une plaque en PZT de 40 mm x 40 mm x 420  $\mu\text{m}$ . La plaque est amincie à l'épaisseur nominale de 150  $\mu\text{m}$ , ensuite l'échantillon est métallisé et enfin détourné à sa forme finale. L'impédance électrique de l'échantillon est mesurée dans le domaine fréquentiel grâce à un analyseur d'impédance. La mesure est faite en posant la couche PZT sur une électrode en cuivre qui permet la reprise de contact avec l'électrode inférieure de l'échantillon (cf. figure 2.4). L'échantillon peut ainsi être relié à un analyseur d'impédance.

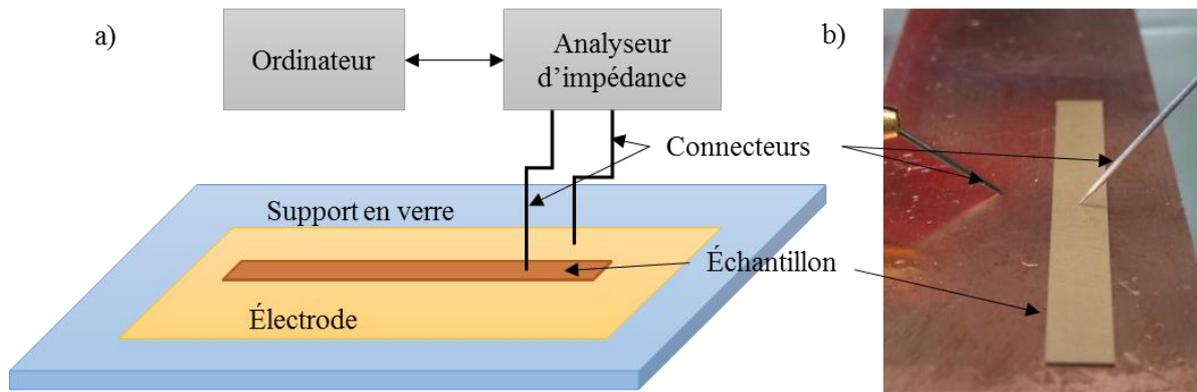


Figure 2.4 : Schéma de la configuration expérimentale a) et vue réelle b).

Les données sont acquises par un ordinateur via le logiciel Matlab à l'aide du module d'instrumentation (Instrument Control Toolbox). Le schéma du banc et le principe de mesure sont présentés dans la figure 2.5.

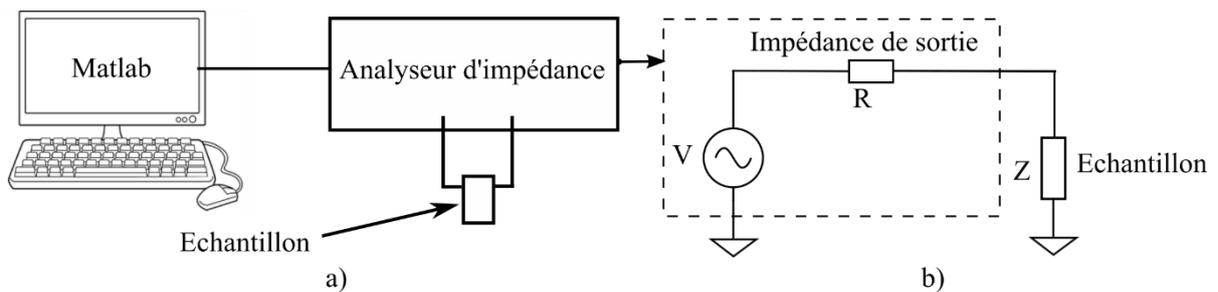


Figure 2.5 : Schéma du banc de mesure d'impédance a) et principe de mesure b).

La tension d'excitation ( $V$ ) est fixée à une valeur de 0,1 V. L'impédance  $Z$  de l'échantillon forme avec l'impédance  $R$  de sortie de l'analyseur un pont diviseur de tension ce qui en permet la mesure (cf. figure 2.5.b).

L'impédance électrique de l'échantillon est mesurée en faisant varier la fréquence d'excitation. Du fait que l'on souhaite à terme récupérer l'énergie vibratoire de sources réelles à basse fréquence, il convient d'étudier le comportement électromécanique au voisinage du premier mode de résonance du dispositif.

### 1.1.2.2. Dispersion liée à l'incertitude sur la mesure d'impédance

La mesure de l'impédance est faite à l'aide d'un analyseur d'impédance Agilent 4294A. Une dispersion de la mesure d'impédance de nos 10 échantillons supposés identiques a été observée, notamment au niveau de son module  $Z_r$  (cf. figure 2.6).

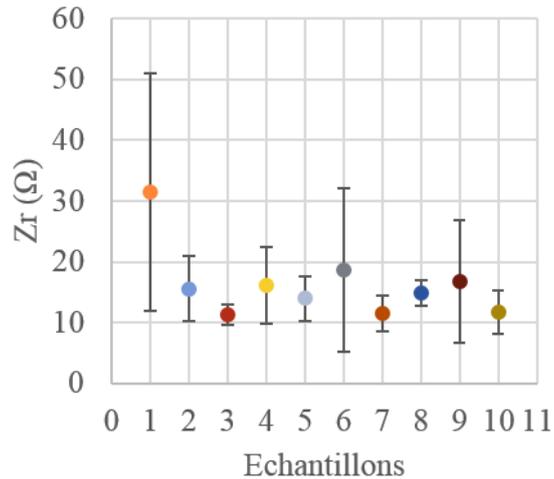


Figure 2.6 : Dispersion des mesures de l'impédance  $Z_r$  effectuées sur 10 échantillons supposés identiques.

La dispersion observée dans la figure 2.6 peut provenir :

- Des erreurs de mesure, peuvent être dues à l'appareil de mesure, les contacts électriques, ...
- Des imperfections géométriques de chacun des 10 échantillons.

Afin d'étudier cette dispersion observée sur la mesure d'impédance, deux appareils différents sont utilisés : un analyseur Agilent 4294A (ci-après dénommé Agilent) et un analyseur HIOKI IM3570 (ci-après dénommé HIOKI). L'étude est réalisée sur 10 échantillons de dimensions 3 mm x 39 mm x 150  $\mu$ m. Pour chaque échantillon, dix mesures d'impédance sont effectuées. Entre chaque mesure, les connecteurs sont relevés puis rabaissés.

La variation de la mesure de  $Z_r$  est présentée à la figure 2.7. Une variation maximale de 40,1 % est constatée sur les mesures réalisées avec le HIOKI, contre 71,8 % avec l'Agilent.

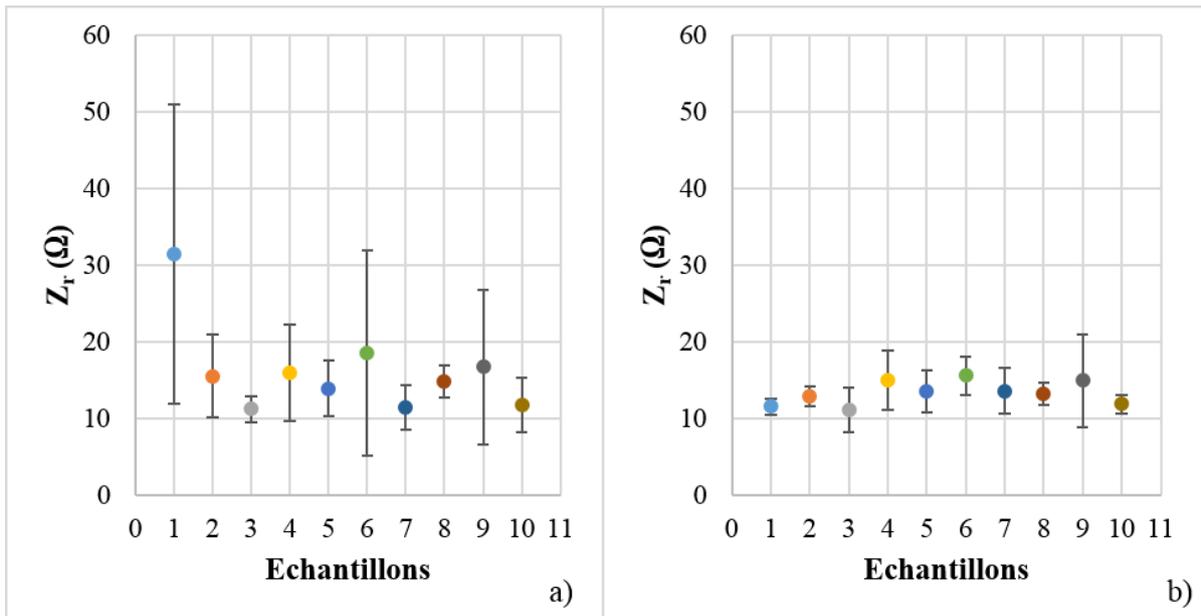


Figure 2.7 : Dispersion des mesures de  $Z_r$  de 10 échantillons (10 mesures pour chaque échantillon) avec l'Agilent a) et le HIOKI b).

En ce qui concerne la variation de la fréquence de résonance  $f_r$ , la dispersion est faible quel que soit l'appareil de mesure ( $< 0,05\%$  des écarts à la moyenne) (cf. figure 2.8) : cette mesure est stable pour les deux appareils.

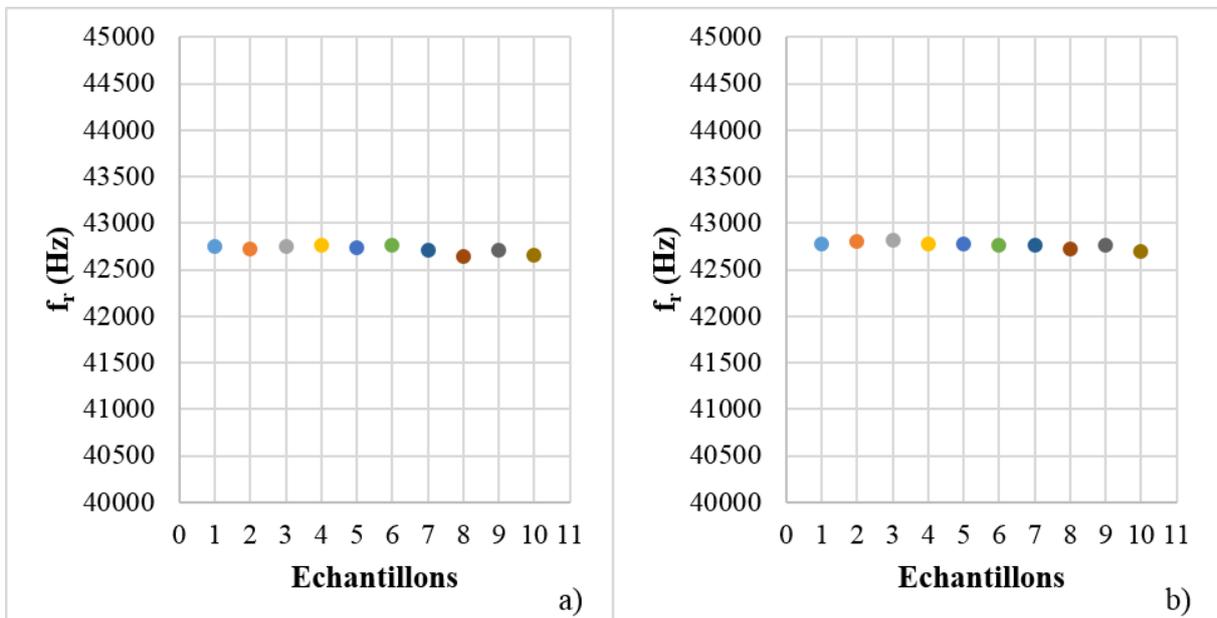


Figure 2.8 : Dispersion des mesures de  $f_r$  de 10 échantillons (10 mesures pour chaque échantillon) avec les analyseurs Agilent a) et HIOKI b).

Cette étude montre une variation importante des impédances  $Z_r$  mesurées avec l'Agilent sur une couche PZT libre-libre tandis que le HIOKI donne une variation assez faible. La moyenne des écarts relatifs dans les deux cas est de 37,9 % et 19,1 % respectivement (cf. tableau 2.2). Ainsi, ces différents essais ont conduit au choix du HIOKI pour effectuer toutes les mesures d'impédance.

Tableau 2.2 : Ecart relatifs du paramètre  $Z_r$  des deux appareils

Grandeurs physiques	Ecart relatifs à la moyenne (%)	
	Agilent	HIOKI
$Z_r$	37,9	19,1

### 1.1.3. Modèle EF 3D

Le comportement électromécanique de la couche PZT est modélisé en utilisant le logiciel COMSOL Multiphysics®. Nous avons utilisé les modules suivants : mécanique du solide, électrostatique, circuit électrique et le couplage multi-physique « effet piézoélectrique » pour calculer l'impédance électrique de la couche PZT. Les paramètres de la modélisation sont listés ci-dessous :

- Dimensions géométriques : 4 mm x 39 mm x 150  $\mu\text{m}$ .
- Maillage : l'échantillon est maillé avec 500 éléments hexaédriques de 0,8 mm x 0,78 mm x 75  $\mu\text{m}$ .
- Matériau : la relation charge-déformation est choisie pour modéliser la couche PZT, cela demande la connaissance des matrices des coefficients de souplesse  $s_{ij}^E$ , des constantes piézoélectriques  $d_{ij}$  et des coefficients de permittivité relative  $\varepsilon_{ij}^T$ .
- Conditions aux limites : l'échantillon est libre partout, aucune contrainte mécanique n'est appliquée ; l'échantillon est sollicité par une tension alternative de 0,1 V.
- Domaine fréquentiel : 40 kHz – 48 kHz avec une précision de 10 Hz.

### 1.1.4. Ajustement par introduction des pertes

La figure 2.9 montre le module de l'impédance mesurée comparé à celui obtenu avec les modèles analytique 1D (AN 1D) et EF 3D utilisant la base de données du matériau fournie par le constructeur. Une différence notable est observée entre la mesure et les modèles.

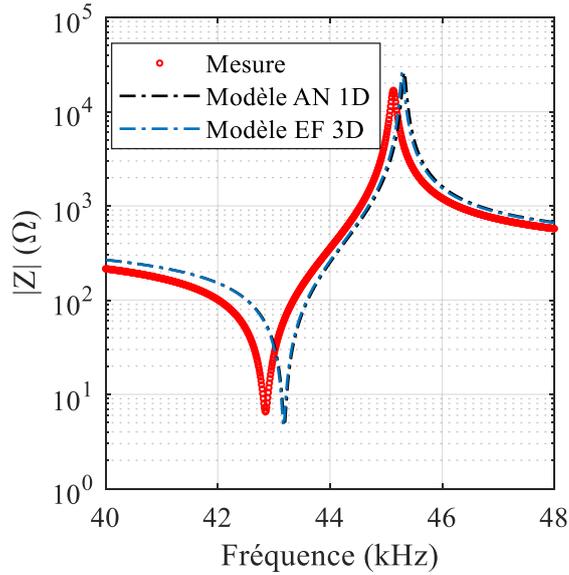


Figure 2.9 : Comparaison du module de l'impédance entre l'expérience et les modèles AN 1D et EF 3D.

Tableau 2.3 : Comparaison entre l'expérience et les modèles AN 1D et EF 3D : coefficient de détermination

	<b>R<sup>2</sup> (%)</b>
Modèle analytique 1D	23,68
Modèle EF 3D	31,49

Le tableau 2.3 présente les valeurs du coefficient de détermination ( $R^2$  – ce coefficient est une mesure de la qualité de la prédiction d'une régression, il est égal au carré du coefficient de corrélation) obtenues à partir des courbes de la figure 2.9. La valeur de  $R^2$  est à peine supérieure à 30 % dans le cas du modèle EF 3D.

Pour améliorer l'accord entre les modèles et la mesure, nous introduisons des pertes élastiques et des pertes diélectriques en utilisant les coefficients complexes ci-dessous :

$$s_{11}^E = s_{11r}^E (1 - j\theta s_{11}^E) \quad (20)$$

$$\varepsilon_{33}^T = \varepsilon_{33r}^T (1 - j\theta \varepsilon_{33}^T) \quad (21)$$

où  $\theta s_{11}^E$  et  $\theta \varepsilon_{33}^T$  sont les facteurs de pertes mécaniques et de pertes diélectriques respectivement.

Les deux types de pertes ont été évalués en ajustant le modèle analytique 1D avec la mesure. Dans un premier temps, pour estimer le facteur de pertes diélectriques, une hypothèse de simplification basse fréquence est appliquée à l'équation (14) ce qui permet d'exprimer l'admittance de la façon suivante :

$$Y \approx jC_0\omega, \omega \rightarrow 0 \quad (22)$$

De ce fait, le facteur de pertes diélectriques peut être exprimé de la manière suivante :

$$\theta\epsilon_{33}^T = \tan \left| \frac{\text{real}(Z)}{\text{imag}(Z)} \right| \quad (23)$$

où  $\text{real}(Z)$  est la partie réelle de l'impédance ; et  $\text{imag}(Z)$ , la partie imaginaire.

Ainsi, en mesurant la partie réelle et la partie imaginaire de l'impédance à basse fréquence (typiquement à 1 kHz), le facteur de pertes diélectriques peut être identifié.

Dans un second temps, une fonction d'ajustement basée sur le module d'optimisation (*Optimization Toolbox*) de Matlab est développée. L'algorithme utilisé, reposant sur la méthode des points intérieurs [125], permet de résoudre des problèmes multi-variables non linéaires en prenant en compte les contraintes sur les variables elles-mêmes. Dans notre cas, les paramètres d'entrée sont  $Y$ ,  $f_r$ ,  $f_a$ ,  $C_0$  et  $\theta\epsilon_{33}^T$  et le paramètre de sortie est  $\theta s_{11}^E$  (cf. figure 2.10).

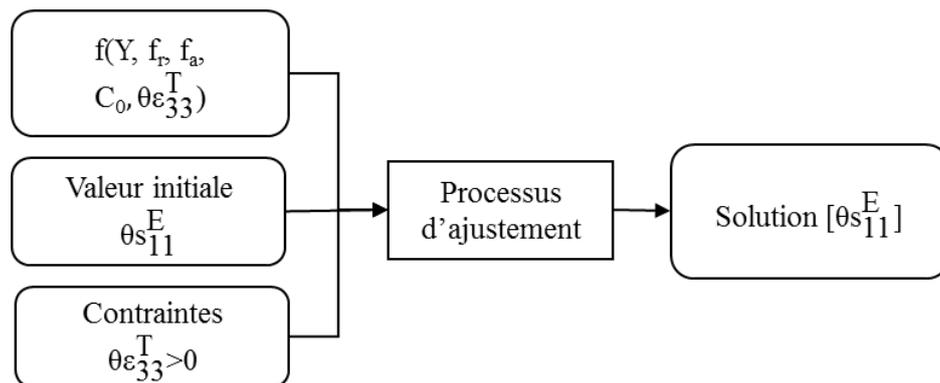


Figure 2.10 : Processus d'ajustement des pertes élastiques.

Après avoir déterminé et ajusté les paramètres effectifs du matériau piézoélectrique, ces paramètres dits « identifiés » et ceux donnés par le constructeur sont reportés et comparés dans le tableau 2.4.

Tableau 2.4 : Paramètres effectifs identifiées et ceux du constructeur.

Paramètres	Valeurs du constructeur	Valeurs identifiées	Ecart
$s_{11}^E$ [m <sup>2</sup> /N]	1,12E-11	1,14E-11	2%
$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	1054	1238	17%
$d_{31}$ [pC/N]	-109	-123,19	13%
$\theta\epsilon_{33}^T$	0,002	0,0046	130%
$\theta s_{11}^E$	0,0011	0,0019	73%

Ces valeurs sont globalement du même ordre de grandeur et, mis à part les termes de pertes, on constate que les écarts entre les valeurs identifiées et celles du constructeur sont inférieurs à 20 % ce qui est conforme à la tolérance précisée par le constructeur.

La figure 2.11 montre les valeurs du module de l'impédance mesurées comparées à celles obtenues avec les modèles AN 1D et EF 3D avant ajustement (a) et après ajustement (b).

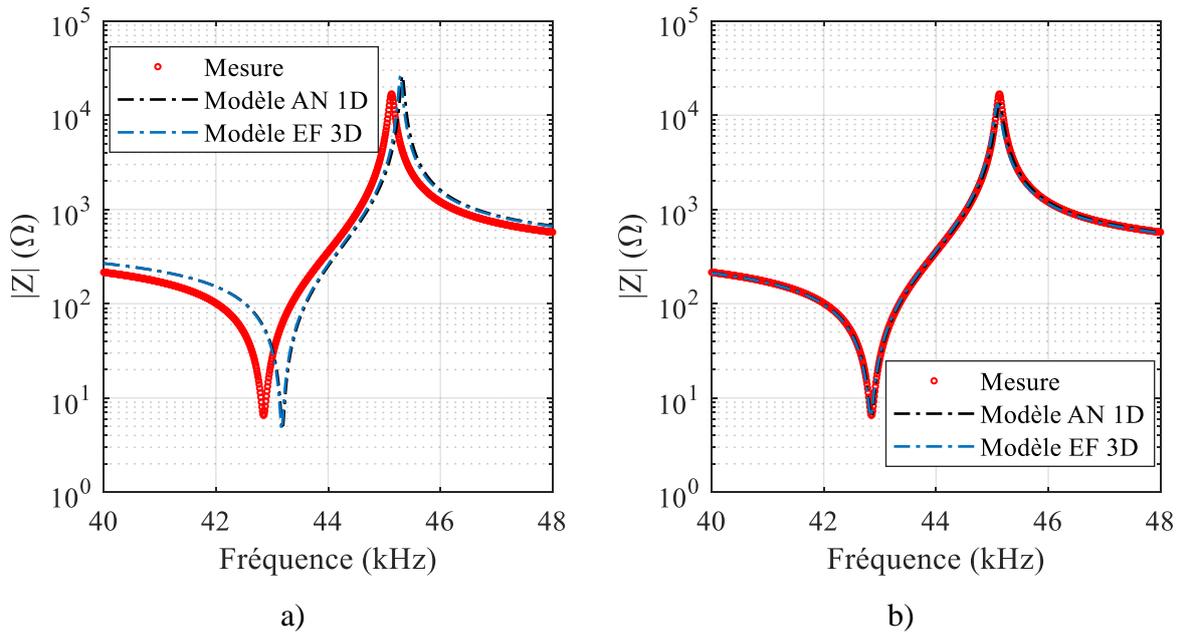


Figure 2.11 : Comparaison du module de l'impédance entre l'expérience et les modèles théoriques avant a) et après ajustement b).

Le tableau 2.5 présente les valeurs du coefficient de détermination ( $R^2$ ) obtenu à partir des courbes de la figure 2.11. Après ajustement, la valeur du coefficient de détermination passe de 31,49 % à 92,95 % entre l'impédance mesurée et celle obtenue par le modèle EF 3D.

Tableau 2.5 : Comparaison des modèles et de la mesure d'impédance électrique avant et après ajustement

	<b>R<sup>2</sup> avant ajustement (%)</b>	<b>R<sup>2</sup> après ajustement (%)</b>
Modèle analytique 1D	23,68	96,41
Modèle EF 3D	31,49	92,95

De plus, les écarts entre les valeurs expérimentales et celles issues du modèle numérique de  $f_r$ ,  $Z_r$ ,  $f_a$ ,  $Z_a$  sont résumés dans le tableau 2.6. Les écarts des fréquences de résonance  $f_r$ , et d'anti-résonance  $f_a$  sont très faibles ( $\Delta < 0,1 \%$ ). Il en va de même en ce qui concerne l'impédance à la résonance  $Z_r$  ( $\Delta < 2 \%$ ). Cela montre l'efficacité de notre modèle EF 3D après ajustement des paramètres du matériau PZT. Toutefois, en ce qui concerne l'impédance à l'anti-résonance  $Z_a$ , cet écart reste important ( $\Delta > 20 \%$ ).

Tableau 2.6 : Ecart relatif entre le modèle EF 3D et l'expérience

	<b>EF 3D</b>	<b>Mesure</b>	<b>Ecart relatif <math>\Delta</math> (%)</b>
$f_r$ (Hz)	42830	42850	0,05
$f_a$ (Hz)	45090	45130	0,09
$Z_r$ ( $\Omega$ )	6,448	6,527	1,21
$Z_a$ ( $\Omega$ )	13040	16820	22,47

#### 1.1.5. Influence des dimensions géométriques de l'échantillon

Pour évaluer les dimensions géométriques de nos échantillons, nous avons utilisé deux microscopes différents. La longueur et la largeur de tous les échantillons sont mesurées avec un microscope VIDEO RAMA (résolution minimale :  $1 \mu\text{m}$ ). Les épaisseurs sont quant à elles mesurées grâce à un microscope optique Leica (résolution minimale :  $0,1 \mu\text{m}$ , figure 2.12.a). Un comparateur digital de marque Mitutoyo (résolution minimale :  $0,5 \mu\text{m}$ , figure 2.12.b) est également utilisé pour vérifier l'épaisseur mesurée par le microscope Leica. Les deux appareils donnent des résultats sensiblement identiques.

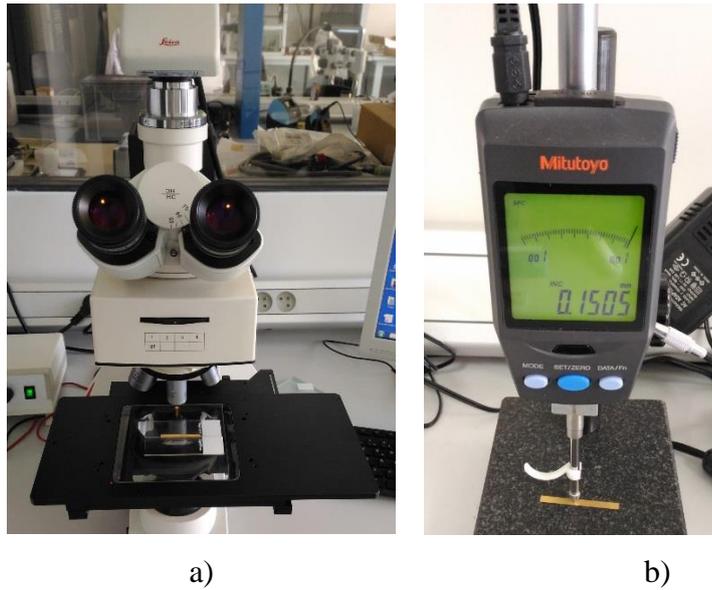


Figure 2.12 : Mesure de l'épaisseur avec un microscope optique a) et un comparateur digital b).

Ainsi, l'épaisseur d'une couche PZT est mesurée 5 fois en différents points répartis le long de l'échantillon. La moyenne est de 152,5  $\mu\text{m}$  et l'écart-type de 0,6  $\mu\text{m}$  (cf. tableau 2.7). L'épaisseur de l'échantillon est donc assez homogène tout au long de la poutre.

Tableau 2.7 : Evaluation de l'incertitude de mesure de l'épaisseur d'une couche PZT.

Mesure	1 <sup>er</sup>	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup>	4 <sup>ème</sup>	5 <sup>ème</sup>	Moyenne	Ecart-type
Epaisseur mesurée par Leica ( $\mu\text{m}$ )	152,7	151,5	152,5	152,7	153,0	152,5	0,6
Epaisseur mesurée par Mitutoyo ( $\mu\text{m}$ )	152,5	152,0	152,5	152,5	153,0	152,5	0,4

Pour évaluer l'influence de cette dispersion sur les résultats de simulation, le module de l'impédance est tracé pour 3 valeurs d'épaisseur : l'épaisseur moyenne et l'épaisseur moyenne à  $\pm 0,6 \mu\text{m}$  (respectivement 151,9  $\mu\text{m}$  et 153,1  $\mu\text{m}$ ). Ces courbes sont comparées sur la figure 2.13 aux valeurs mesurées entre 40 kHz et 48 kHz par pas de 10 Hz. Il apparaît que les courbes d'impédance issues du modèle EF 3D sont fortement similaires à celle obtenues expérimentalement sur cette gamme de fréquences. De plus, comme le montre le tableau 2.8, une variation d'épaisseur de 0,4 % conduit à une variation maximale de 0,4 % sur le calcul des impédances  $Z_r$  et  $Z_a$ , et à une variation quasi-nulle sur le calcul des fréquences  $f_r$ ,  $f_a$ . On peut

donc conclure que l'incertitude de l'épaisseur a un effet négligeable sur les résultats de notre simulation.

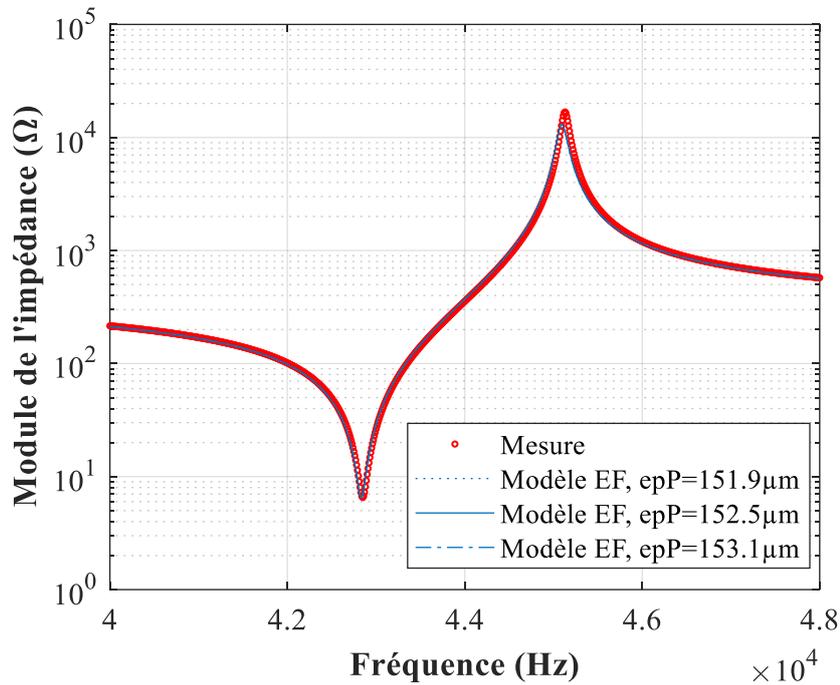


Figure 2.13 : Effet de l'incertitude de l'épaisseur sur l'impédance d'une couche PZT-LLZ.

Par la suite, on considèrera comme situation de référence une épaisseur moyenne de couche PZT de 152,5  $\mu\text{m}$ . En conclusion, les écarts entre les valeurs expérimentales et celles issues du modèle numérique de  $f_r$ ,  $Z_r$ ,  $f_a$ ,  $Z_a$  sont résumés dans le tableau 2.8. Les écarts des fréquences de résonance  $f_r$ , et d'anti-résonance  $f_a$  sont très faibles ( $\Delta < 0,1 \%$ ). Il en va de même de l'impédance à la résonance  $Z_r$  ( $\Delta < 1,5 \%$ ). Toutefois, en ce qui concerne l'impédance à l'anti-résonance  $Z_a$ , cet écart reste toujours important ( $\Delta > 20 \%$ ). Cet écart n'est pas un problème en soi dans notre étude, car nous cherchons à modéliser le plus fidèlement possible le cantilever en fonctionnement générateur, et non son impédance.

Tableau 2.8 : Effet de l'incertitude de l'épaisseur sur les paramètres  $f_r$ ,  $f_a$ ,  $Z_r$ ,  $Z_a$ .

	Modèle EF 3D				Mesure	Ecart relatif entre le modèle EF 3D <sub>ref</sub> et la mesure $\Delta$ (%)
	151,9 $\mu\text{m}$	152,5 $\mu\text{m}$ (ref)	153,1 $\mu\text{m}$	Ecart maximal $\Delta$ (%)		
$f_r$ (Hz)	42830	42830	42830	<0,01	42850	0,05
$f_a$ (Hz)	45090	45090	45090	<0,01	45130	0,09
$Z_r$ ( $\Omega$ )	6,423	6,448	6,474	0,40	6,527	1,21
$Z_a$ ( $\Omega$ )	12990	13040	13090	0,38	16820	22,47

## 1.2. Cas de l'unimorphe en condition « libre-libre »

### 1.2.1. Description du dispositif

L'unimorphe est une structure composée d'une couche PZT et d'une couche de matériau élastique, appelée shim (cf. figure 2.14). Le processus de fabrication de notre échantillon unimorphe est décrit dans [126].

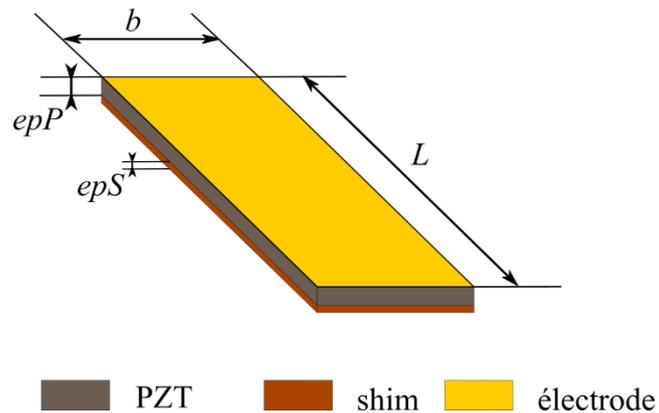


Figure 2.14 : Structure d'un unimorphe.

Nous avons utilisé un shim en laiton. Les propriétés de ce matériau sont communiquées par le fournisseur [127] et regroupées dans le tableau 2.9.

A l'instar de la couche PZT, les paramètres géométriques de l'unimorphe sont mesurés et sont reportés, après avoir été moyennés, dans le tableau 2.10. La valeur moyenne de l'épaisseur du PZT est égale à  $150,8 \mu\text{m}$  avec un écart-type de  $\pm 0,3 \mu\text{m}$  lié au procédé de fabrication, notamment après l'étape de rectification. Les valeurs des paramètres de la longueur et de la largeur sont 39 mm et 4 mm respectivement, avec une précision de l'ordre du micromètre.

Tableau 2.9 : Propriétés du laiton

Propriété	Valeur
Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	8450
Module de Young (Gpa)	110
Coefficient de Poisson	0,35

Tableau 2.10 : Paramètres géométriques de l'unimorphe

	Laiton	PZT
Largeur $b$ (mm)	4	4
Longueur $L$ (mm)	39	39
Épaisseurs $epS$ et $epP$	14	150,8

En réalité, la couche de shim est collée sur la couche PZT. La figure 2.15 montre que l'épaisseur de la couche de colle est très faible (de l'ordre de quelques nanomètres) et son homogénéité est difficilement évaluable. La couche d'électrode est également très faible ( $\sim 20$  nm). De ce fait, le comportement mécanique de la couche de colle et de la couche d'électrode ne seront pas prises en compte dans le modèle EF.

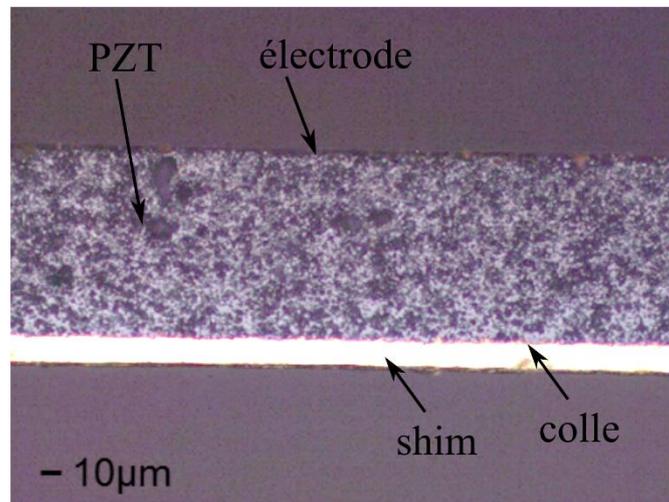


Figure 2.15 : Photo au microscope (x20) d'un unimorphe.

### 1.2.2. Modèle EF 3D

A l'instar de la modélisation de la couche PZT, les paramètres de la modélisation sont :

- Les dimensions géométriques : les paramètres géométriques sont résumés dans le tableau 2.10.
- Le maillage : 500 éléments hexaédriques de  $0,8$  mm x  $0,78$  mm x  $75,4$   $\mu$ m pour la couche PZT et 500 éléments hexaédriques de  $0,8$  mm x  $0,78$  mm x  $7$   $\mu$ m pour la couche de shim.

- Les matériaux : les paramètres de la couche PZT sont identifiés dans la §1.1 et résumés dans le tableau 2.4 ; les paramètres du laiton sont donnés dans le tableau 2.9.
- Les conditions aux limites : l'échantillon est libre partout, aucune contrainte mécanique n'est appliquée ; l'échantillon est sollicité par une tension alternative de 0,1 V.
- Étendue du domaine fréquentiel : 40 kHz – 48 kHz avec une précision de 10 Hz.

### 1.2.3. Comparaison courbe expérimentale et simulation

La figure 2.16 montre la comparaison entre le résultat du modèle EF et la mesure du module d'impédance de l'unimorphe dans des conditions aux limites mécaniques libre-libre. Un bon accord est observé entre modèle et expérience. Cette évaluation qualitative est renforcée par un coefficient de détermination de 71 %. Plus précisément, le modèle EF a bien prédit le module de l'impédance électrique avec une variation maximale d'environ 23 % en termes de valeur d'impédance au pic de résonance. De la même manière, on observe moins de 1 % d'écart en termes de fréquences de résonance et d'anti-résonance (cf. tableau 2.11).

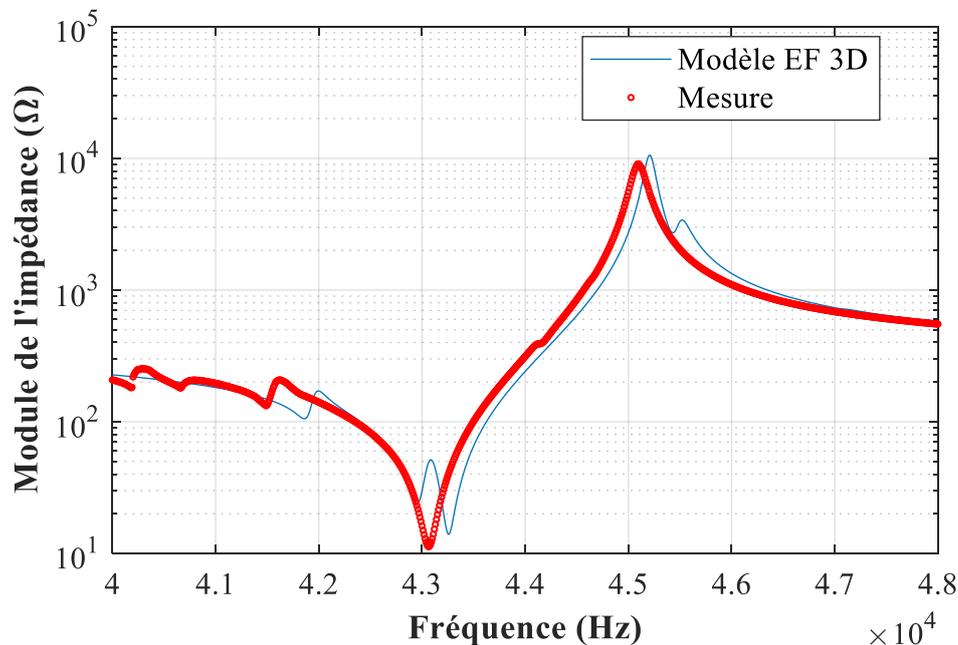


Figure 2.16 : Module d'impédance UNI-LL<sup>Z</sup> en fonction de la fréquence, obtenu expérimentalement et calculé par modélisation EF.

Tableau 2.11 : Comparaison de la mesure et la simulation EF dans le cas de l'UNI-LL<sup>Z</sup>.

	Mesure	Simulation EF	Ecart $\Delta$ (%)
$f_r$ (Hz)	43060	43260	0,46
$Z_r$ ( $\Omega$ )	11,3	13,9	23,0
$f_a$ (Hz)	45090	45210	0,27
$Z_a$ ( $\Omega$ )	9072	10576	16,6

### 1.3. Cas du bimorphe en condition « libre-libre »

#### 1.3.1. Description du dispositif

Le bimorphe est une structure composée de deux couches PZT collées de part et d'autre d'une couche de shim (cf. figure 2.17). Le processus de fabrication de notre échantillon d'unimorphe est décrit dans [126].

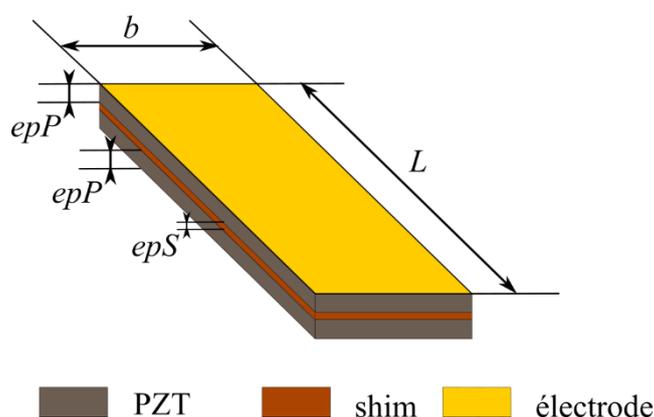


Figure 2.17 : Structure d'un bimorphe.

A l'instar de l'unimorphe, le shim utilisé est en laiton (dont les propriétés sont données dans le tableau 2.9), et les paramètres géométriques du bimorphe sont mesurés et reportés dans le tableau 2.12. La valeur moyenne de l'épaisseur du PZT est égale à  $150,7 \mu\text{m}$  avec une incertitude de 0,6 % liée au processus de fabrication, notamment à l'étape de rectification. Les valeurs des paramètres de la longueur et de la largeur sont 39 mm et 4 mm respectivement, avec une précision de l'ordre du micromètre. Comme pour l'unimorphe, les épaisseurs de la couche de colle et de la couche d'électrode sont négligées, leurs comportements mécaniques ne sont pas pris en compte dans le modèle EF.

Tableau 2.12 : Paramètres géométriques du bimorphe

	Laiton	PZT
Largeur $b$ (mm)	4	4
Longueur $L$ (mm)	39	39
Epaisseur $epS/epP$ ( $\mu\text{m}$ )	15,1	150,7

### 1.3.2. Modèle EF 3D

Comme pour la modélisation de l'unimorphe, les paramètres de la modélisation sont :

- Les dimensions géométriques : elles sont résumées dans le tableau 2.12.
- Le maillage : 2 x 500 éléments hexaédriques de 0,8 mm x 0,78 mm x 75,35  $\mu\text{m}$  pour les deux couches PZT et 500 éléments hexaédriques de 0,8 mm x 0,78 mm x 7,55  $\mu\text{m}$  pour la couche de shim.
- Les matériaux : les paramètres de la couche PZT sont identifiés dans la §1.1 et résumés dans le tableau 2.4 ; les paramètres du laiton sont donnés dans le tableau 2.9.
- Les conditions aux limites : l'échantillon est libre partout, aucune contrainte mécanique n'est appliquée ; l'échantillon est sollicité par une tension alternative de 0,1 V.
- Etendue du domaine fréquentiel : 50 kHz – 100 kHz avec une précision de 10 Hz.

### 1.3.3. Comparaison entre courbe expérimentale et simulation

La figure 2.18 présente la comparaison entre la simulation EF et la valeur mesurée du module d'impédance du bimorphe dans les conditions aux limites libre-libre.

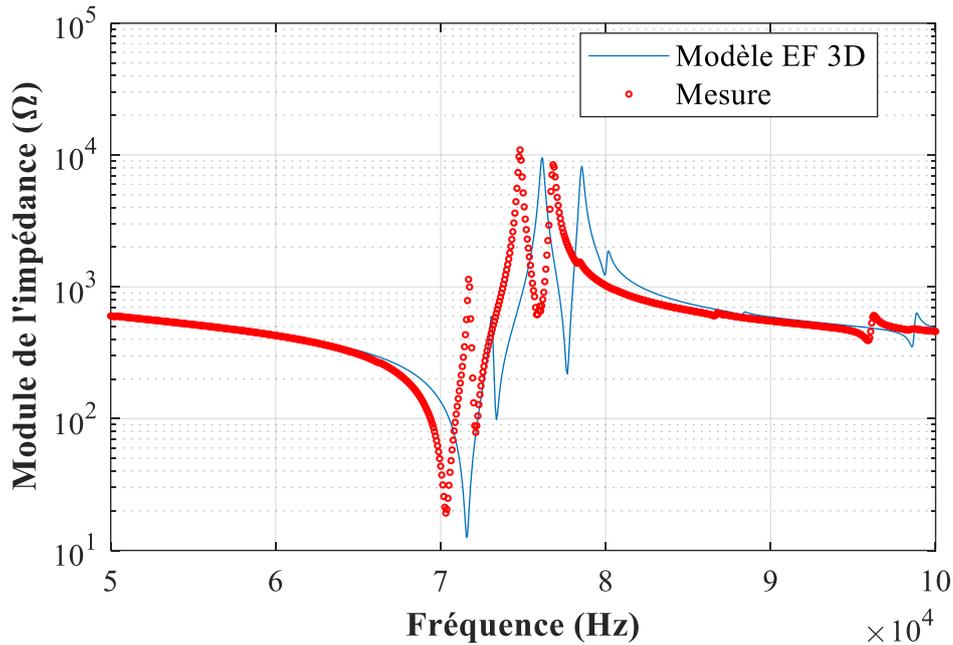


Figure 2.18 : Module d'impédance BIM-LL<sup>Z</sup> en fonction de la fréquence, mesuré expérimentalement et calculé par modélisation EF.

La forme de l'impédance simulée est relativement similaire à celle mesurée : tous les pics observés sur la courbe expérimentale apparaissent dans la courbe simulée. Cependant, le coefficient de détermination est assez faible : presque 42 %. Cela vient peut-être l'imperfection de la géométrie du bimorphe et la non-maîtrise de la couche de colle. Malgré un faible coefficient de détermination, moins de 2 % d'écart est observé en termes de fréquences de résonance (les paramètres qui nous intéressent le plus). En termes de valeur de l'impédance électrique au pic de résonance, le modèle EF prédit l'impédance électrique avec un écart maximal d'environ 35 % (cf. tableau 2.13).

Tableau 2.13 : Comparaison de la mesure et des résultats de simulation EF dans le cas de bimorphe en condition libre-libre.

	Mesure	Simulation EF	Ecart $\Delta$ (%)
$f_r$ (Hz)	70313	71563	1,78
$Z_r$ ( $\Omega$ )	19,2	12,5	34,9
$f_a$ (Hz)	74813	76125	1,75
$Z_a$ ( $\Omega$ )	10928	9538	12,7

Dans l'ensemble, tant en fréquence qu'en amplitude, la différence entre les résultats expérimentaux et les résultats de simulation peut être attribuée à la non-inclusion des couches adhésives dans le modèle numérique. De plus, nous avons également observé qu'il n'était pas évident de déterminer la valeur exacte de l'épaisseur de chaque couche dans de telles structures minces et longues, en raison notamment de l'inexactitude inhérente du processus de fabrication.

En raison de la difficulté d'évaluer l'épaisseur exacte et les propriétés mécaniques des couches adhésives, la prise en compte de ces couches ne garantit pas une diminution significative de l'erreur. De plus, l'erreur finale sur l'énergie électrique qui sera calculée avec le modèle EF peut ne pas être aussi importante.

## 2. Modélisation EF 3D en condition « encastrée-libre »

La détermination des paramètres effectifs a été effectuée à partir de la mesure d'impédance de la couche PZT en condition « libre-libre ». Il s'agit de vérifier que le modèle EF 3D, avec ce jeu de paramètres effectifs, permet de simuler le comportement de la couche PZT en condition « encastrée-libre », c'est-à-dire une extrémité de la poutre est fixée et l'autre extrémité est libre (cf. figure 2.19). L'encastrement est effectué en pinçant la couche PZT à l'aide d'un système de serrage constitué de deux éléments maintenus par une vis (cf. figure 2.20). Puisque nos dispositifs de récupération d'énergie vont être encastrés, l'influence de ce dispositif de serrage sur leur comportement électromécanique et vibratoire est intéressante à étudier.

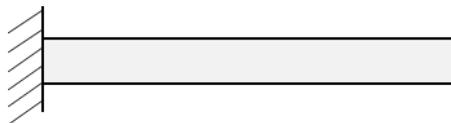


Figure 2.19 : Schéma de la poutre encastrée-libre.

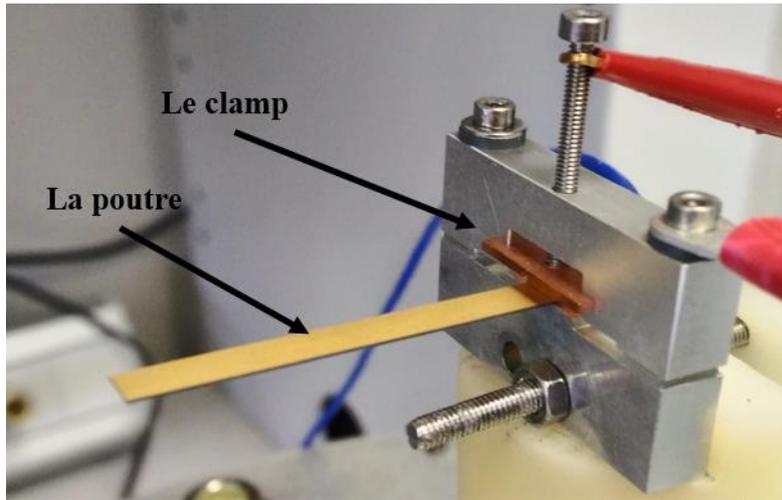


Figure 2.20 : Système de fixation de la poutre et la poutre en PZT de dimensions 36 mm x 4 mm x 150  $\mu\text{m}$ .

## 2.1. Modélisation du dispositif de serrage

Afin d'améliorer la concordance entre la modélisation EF et la mesure pour une poutre PZT « encastrée-libre », il convient de s'interroger sur les paramètres suivants : la nature de la poutre et le dispositif de serrage.

Le dispositif de serrage modélisé est considéré comme parfait, c'est à dire qu'il interdit tout mouvement dans les trois axes y compris translations et rotations. Dans la réalité, un tel système est difficile sinon impossible à réaliser [128]–[130]. Dès lors, il incombe au modèle EF de s'adapter aux conditions réelles.

### 2.1.1. Description du dispositif de serrage

Notre dispositif de serrage est de type vissé. La force de serrage de la vis est contrôlée grâce un tournevis dynamométrique Facom avec un couple de 12 cN.m. La force de serrage est mesurée grâce à une cellule de charge en compression CM de SOMEKO [131]. La force mesurée est d'environ 260 N. La surface d'encastrement est de 3 mm x 4 mm (cf. figure 2.21).

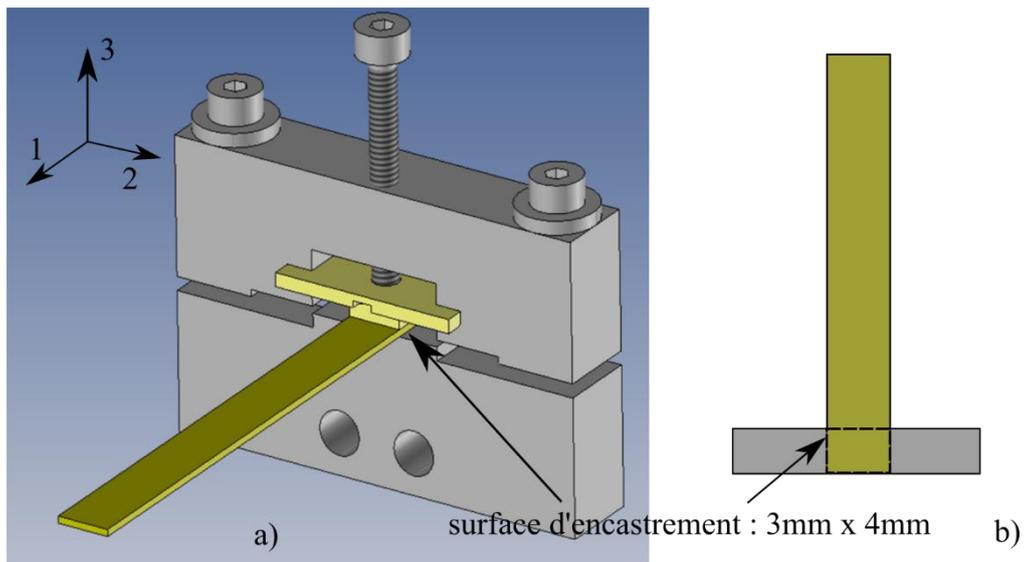


Figure 2.21 : Système d'encastrement en vue 3D a) et vue de dessus simplifiée b).

Un profilomètre optique de type Microscope Olympus Confocal OLS4000 (présent sur la plateforme CERTEM+) est utilisé pour vérifier l'état de surface CA et CB de notre dispositif de serrage (cf. figure 2.22). Les photos prises à la surface CA et la surface CB sont présentées dans la figure 2.23.

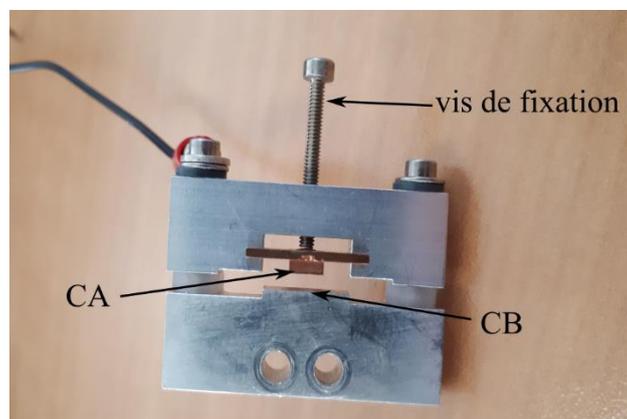


Figure 2.22 : Photo du dispositif de serrage CA : surface de contact avec l'électrode supérieure de l'échantillon, CB : surface de contact avec l'électrode inférieure de l'échantillon.

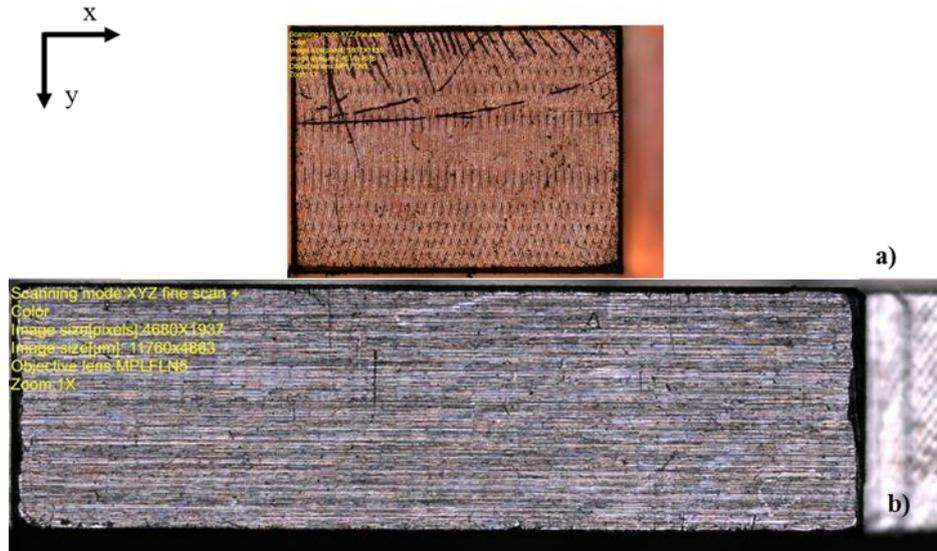


Figure 2.23 : État de la surface a) CA et de la surface b) CB du dispositif de serrage (photo prise avec le microscope Confocal OLS4000).

La figure 2.24 montre l'état de la surface CA, les lignes dans l'axe x sont tracées à 5 positions  $y = 0,5 \text{ mm} : 0,5 \text{ mm} : 2,5 \text{ mm}$ . La surface est assez plate, les moyennes des lignes sont assez homogènes ( $5 \mu\text{m}$  de variation maximale). Les écarts des lignes sont assez faibles ( $< 18 \mu\text{m}$ ). Pourtant, il y a des pics qui apparaissent localement avec une amplitude élevée par rapport à la moyenne ( $> 200 \mu\text{m}$ ).

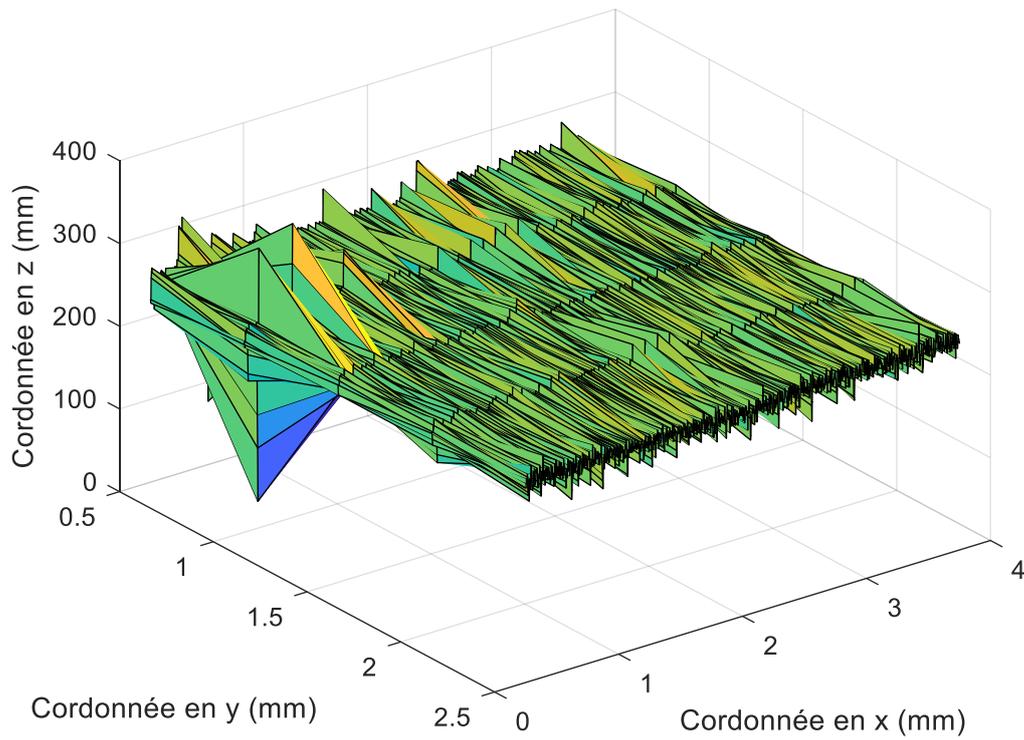


Figure 2.24 : Etat de la surface CA.

A l’instar de la surface CA, la surface CB est assez plate, les moyennes des lignes sont assez homogènes ( $4\ \mu\text{m}$  de variation maximale). Les écarts des lignes sont assez faibles ( $< 15\ \mu\text{m}$ ). Pourtant, il y a des pics qui apparaissent localement avec une amplitude élevée par rapport à la moyenne ( $> 87\ \mu\text{m}$ ) (cf. figure 2.25).

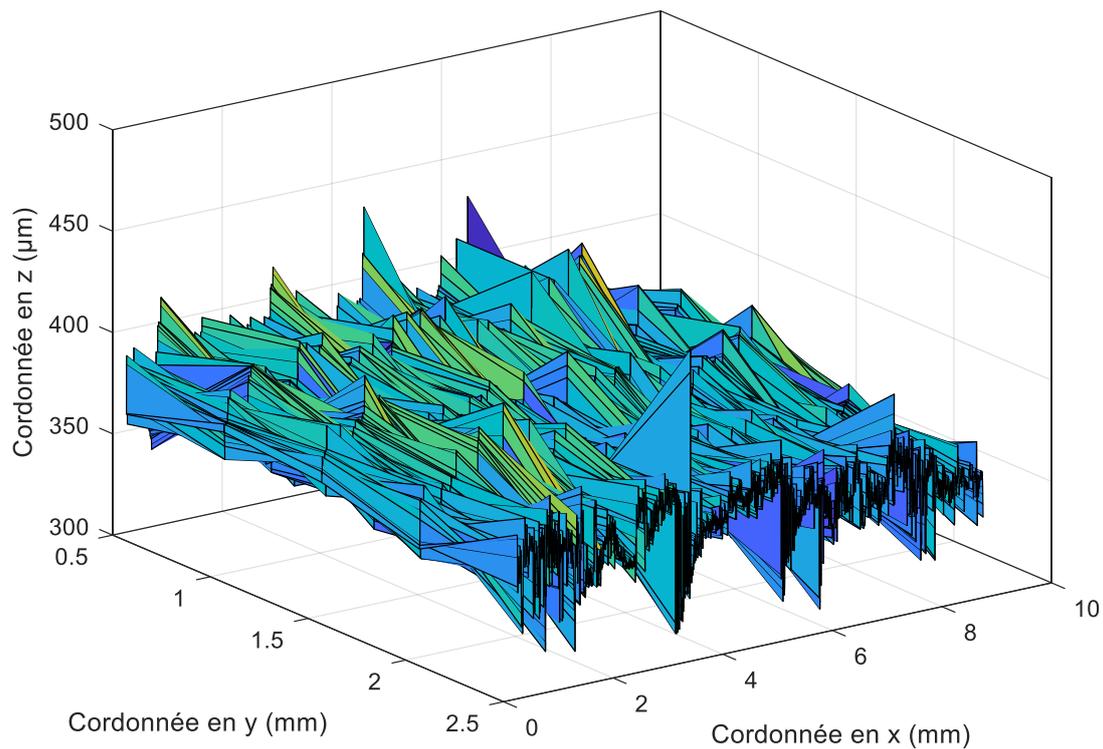


Figure 2.25 : Etat de la surface CB.

Globalement, les surfaces s'encastrement sont assez plates. La surface CA présente des pics de rugosité importants. La surface CB présente aussi localement des pics de rugosité.

### 2.1.2. Modélisation du dispositif de serrage

La poutre PZT décrite dans la section 1.1 est modélisée en condition encastree-libre. Pour prendre en compte la condition encastree-libre, le dispositif de serrage dans le système est modélisé par deux encastrements de surface de 3 mm x 4 mm au-dessus et en dessous de l'échantillon comme montré dans la figure 2.26. Cette condition d'encastrement interdit tous les mouvements de translation et de rotation dans les trois axes. La géométrie de la poutre, le maillage ainsi que la sollicitation électrique sont inchangés et sont décrits dans la section 1.1. Le jeu des paramètres effectifs identifié est utilisé pour la poutre PZT.

En parallèle avec la modélisation, la mesure d'impédance de ce système est effectuée par l'analyseur d'impédance HIOKI IM3570. La gamme de fréquence est de 20 kHz à 27 kHz avec un pas de 9 Hz.

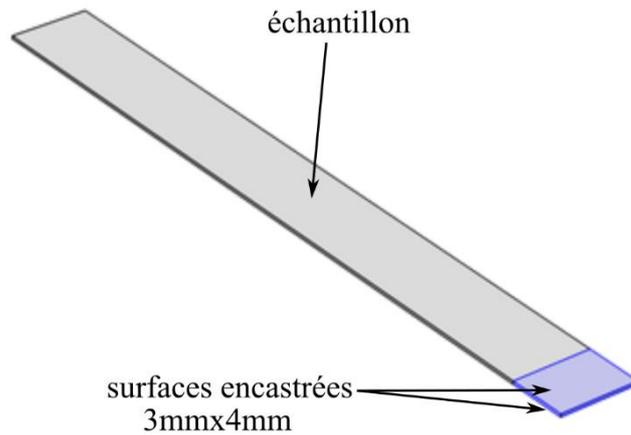


Figure 2.26 : Modélisation du dispositif de serrage.

La figure 2.27 présente le module de l'impédance mesuré expérimentalement et simulé par le modèle EF 3D à la première résonance observée sur la poutre encastrée-libre. Il faut toutefois noter que la courbe expérimentale présente des résonances supplémentaires de structure. Étant donné que dans la gamme de fréquences observée la poutre « encastrée-libre » ne produit aucun mode de flexion, on observe plutôt un mode latéral sensible à la présence du dispositif de serrage. Ainsi, ces pics traduisent vraisemblablement l'influence du dispositif de serrage sur la réponse électrique du système.

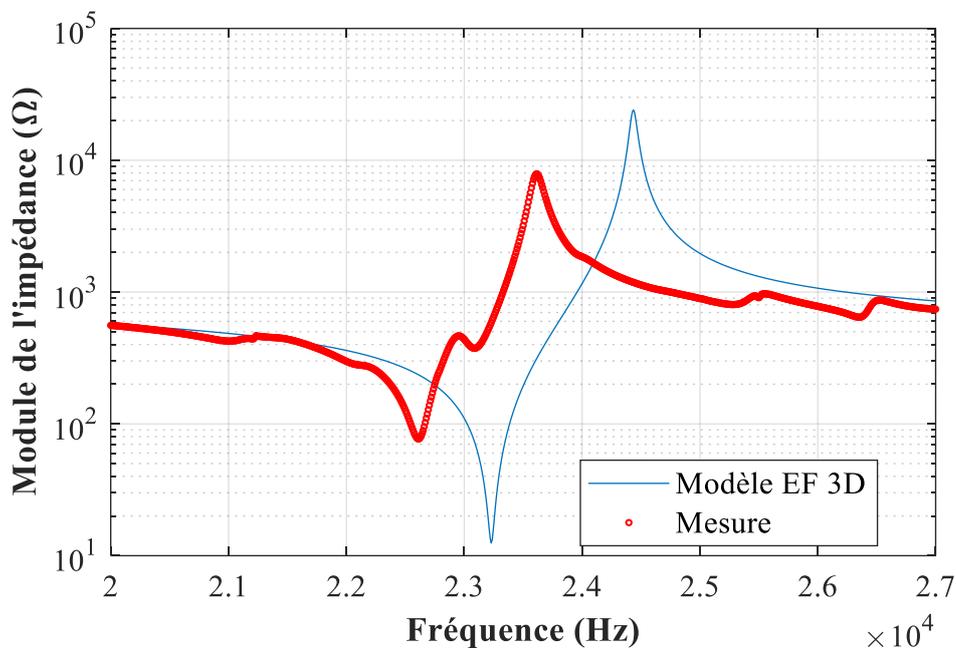


Figure 2.27 : Module d'impédance PZT-EL<sup>Z</sup> en fonction de la fréquence, obtenu expérimentalement et calculé par modélisation EF.

Enfin, le modèle EF prédit la fréquence de résonance de la poutre PZT encastree-libre avec un écart de 2,7 %. Un écart de 3,5 % est observé à la fréquence d'anti-résonance. Pourtant, un écart très important est observé au niveau des impédances  $Z_r$  et  $Z_a$ , -83,7 % et 204,6 % respectivement (cf. tableau 2.14).

Tableau 2.14 : Comparaison de  $f_r$ ,  $Z_r$ ,  $f_a$ ,  $Z_a$  entre la mesure et simulation EF d'une PZT-EL<sup>Z</sup>

	<b>Mesure</b>	<b>Simulation EF</b>	<b>Ecart <math>\Delta</math> (%)</b>
$f_r$ (Hz)	22608	23229	2,7
$Z_r$ ( $\Omega$ )	76,8	12,5	-83,7
$f_a$ (Hz)	23614	24436	3,5
$Z_a$ ( $\Omega$ )	7896	24053	204,6

## 2.2. Cas de l'unimorphe en condition « encastree-libre »

L'unimorphe est fixé au dispositif de serrage présenté à la figure 2.21. La figure 2.28 présente le module de l'impédance obtenu expérimentalement et simulé par le modèle EF 3D à la première résonance observée de l'unimorphe dans les conditions aux limites encastree – libre. La figure montre que la simulation EF a bien prédit le comportement électrique du système avec un coefficient de détermination de 46 %. Un écart de 4,0 % est observé à la fréquence  $f_r$ , 3,9 % à la fréquence  $f_a$ , -7,2 % d'écart pour l'impédance  $Z_r$  et 0,7 % d'écart sur la valeur de  $Z_a$  (cf. tableau 2.15).

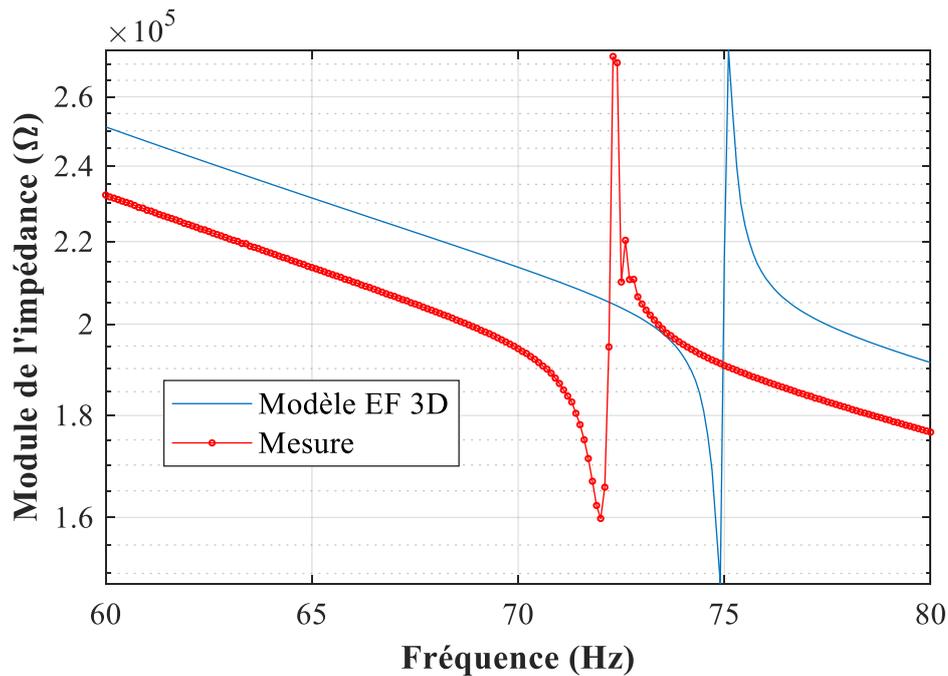


Figure 2.28 : Module d'impédance UNI-EL<sup>Z</sup> en fonction de la fréquence, obtenu expérimentalement et calculé par modélisation EF.

Tableau 2.15 : Comparaison de la mesure et la simulation EF dans le cas de l'UNI-EL<sup>Z</sup>.

	Mesure	Simulation EF	Ecart $\Delta$ (%)
$f_r$ (Hz)	72	74,9	4,0
$Z_r$ ( $\Omega$ )	159822	148282	-7,2
$f_a$ (Hz)	72,3	75,1	3,9
$Z_a$ ( $\Omega$ )	272395	274357	0,7

### 2.3. Cas du bimorphe en condition « encastree-libre »

Le bimorphe est fixé à l'aide du dispositif de serrage décrit à la figure 2.21. La figure 2.29 présente le module de l'impédance obtenu expérimentalement et simulé par le modèle EF 3D à la première résonance observée du bimorphe en condition « encastree – libre » sur la gamme de fréquence [125 Hz, 145 Hz] avec un pas de 0,1 Hz. La fréquence de la première résonance du bimorphe « encastree-libre » est mesurée à 132,1 Hz. Cette fréquence calculée par la modélisation EF est à 135,1 Hz, soit un écart est de 2,3 %. L'écart de la fréquence d'anti-résonance entre la mesure et la modélisation est aussi faible : 2,4 %. Pourtant, un écart médian

est observé au niveau du module de l'impédance. Cet écart est de 16 % à la résonance et 11,7 % à l'anti-résonance (cf. tableau 2.16).

Tableau 2.16 : Comparaison entre la mesure et la modélisation EF dans le cas de bimorphe encastré-libre.

	Mesure	Simulation EF	Ecart $\Delta$ (%)
$f_r$ (Hz)	132,1	135,1	2,3
$Z_r$ ( $\Omega$ )	11837	9948	16
$f_a$ (Hz)	135,9	139,1	2,4
$Z_a$ ( $\Omega$ )	5505456	4863184	11,7

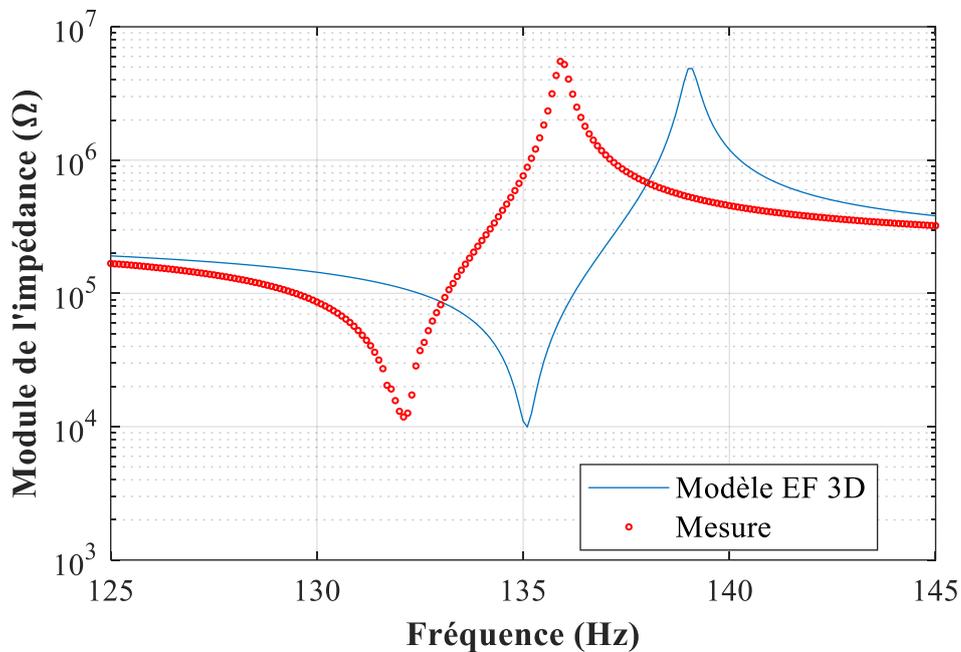


Figure 2.29 : Module d'impédance BIM-EL<sup>Z</sup> en fonction de la fréquence, mesuré expérimentalement et calculé par modélisation EF.

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre, une démarche de détermination des paramètres effectifs pour la modélisation par éléments finis (EF) a été développée. La modélisation EF 3D de différents dispositifs (1 couche – PZT, 2 couches – unimorphe, 3 couches – bimorphe) pour différentes conditions aux limites mécaniques (libre-libre, encastré-libre) a été réalisée avec succès et

comparée aux mesures expérimentales. L'écart entre la modélisation EF 3D et l'expérience est inférieur à 4 % en termes de fréquence, ce qui est un des paramètres les plus critiques pour concevoir un générateur d'énergie. Cela montre une bonne précision de notre outil de modélisation pour prédire le comportement électrique de nos dispositifs. La modélisation du dispositif de serrage nous a permis de mieux comprendre l'influence de la qualité de l'encastrement sur le comportement électromécanique de nos dispositifs. Apparemment, le dispositif de serrage réel a pour effet de diminuer la fréquence de résonance mesurée sur nos dispositifs, par rapport à la simulation. Cela peut peut-être provenir de l'imperfection de notre dispositif de serrage. Des efforts ont été faits au niveau expérimental pour l'améliorer, mais un tel système parfait est difficilement obtenu en réalité. Néanmoins, les écarts entre la simulation EF 3D et la mesure restent relativement faibles ( $< 4\%$ ). Dans le chapitre suivant, nous allons appliquer notre démarche pour modéliser les dispositifs soumis à une vibration, correspondant au mode de fonctionnement de nos générateurs.