

# BILAPLACIEN AVEC CHANGEMENT DE SIGNE

---

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>257</b>
<b>11.1 Formulation du quatrième ordre</b> . . . . .	<b>258</b>
<b>11.2 Étude de la formulation du quatrième ordre</b> . . . . .	<b>260</b>
11.2.1 Une première approche . . . . .	260
11.2.2 Caractère Fredholm de l'opérateur . . . . .	262
11.2.3 Étude de l'injectivité en 1D . . . . .	264
<b>11.3 Utilisation de la T-coercivité géométrique</b> . . . . .	<b>266</b>
<b>11.4 Bilaplacien avec conditions mixtes</b> . . . . .	<b>271</b>
11.4.1 Le paradoxe de Sapongyan pour le cas $\sigma$ positif . . . . .	271
11.4.2 Étude dans le cas où $\sigma$ change de signe . . . . .	273
11.4.3 Résultats en dimension supérieure . . . . .	280
11.4.4 Problème posé dans $H_0^1(\Delta)$ . . . . .	285

---

## Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit le problème de transmission intérieur qui apparaît dans la théorie de la diffraction. Ce problème intervient lorsqu'on cherche à reconstruire le support d'une inclusion noyée dans un milieu homogène à partir de la mesure de champs lointains à fréquence fixée. On peut le résumer ainsi : pour une fréquence donnée, existe-t-il un champ incident tel que le champ réfléchi par l'inclusion soit nul ? Les fréquences pour lesquelles la réponse à cette question est positive posent problème pour les méthodes de reconstruction. Une question importante dans la théorie consiste donc à prouver le caractère discret de ces fréquences très particulières.

Lorsqu'on écrit la formulation variationnelle associée à ce problème de transmission intérieur, il apparaît un changement de signe dans la partie principale. Les techniques spectrales usuelles sont inopérantes et l'étude de ce problème n'est pas triviale. Pour faire face à cette difficulté du changement de signe, nous avons employé la technique de la T-coercivité. L'utilisation de cette approche se révèle très simple car les deux fonctions mises en jeu dans ce problème vivent sur le même domaine. Il n'est donc pas nécessaire de recourir aux opérateurs de transfert géométriques comme nous l'avons fait dans le Chapitre 1 relatif à l'étude du problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif. Cependant, le point important du travail que nous avons mené reste de tout de même l'analogie forte existant entre le problème de transmission intérieur

( $\mathcal{P}_{\text{TI}}$ ) et le problème de transmission matériau positif/matériau négatif ( $\mathcal{P}_{\text{TPN}}$ ), la frontière du domaine pour ( $\mathcal{P}_{\text{TI}}$ ) jouant le rôle d'interface pour ( $\mathcal{P}_{\text{TPN}}$ ). Pour ( $\mathcal{P}_{\text{TI}}$ ), si nous modélisons le matériau de l'inclusion  $\Omega$  par deux coefficients physiques  $A$  et  $n$  avec  $\varepsilon = \varepsilon_0 n$ ,  $\mu = \mu_0 A^{-1}$ , le problème scalaire pour la composante  $E_z$  du champ électrique est bien posé au sens de Fredholm lorsque  $A$  est plus grand ou plus petit que l'identité au voisinage de  $\partial\Omega$ . Ceci est équivalent à imposer un contraste supérieur ou inférieur à  $-1$  dans un voisinage de l'interface pour ( $\mathcal{P}_{\text{TPN}}$ ). Lorsque  $A - \text{Id}$  s'annule sur un ouvert non vide rencontrant l'interface, le problème de transmission intérieur n'est pas bien posé au sens de Fredholm en raison de singularités fortes localisées sur la frontière. Ceci empêche d'utiliser le théorème de Fredholm analytique pour prouver le caractère discret des valeurs propres de transmission.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas où  $A$  est identiquement égale à l'identité. Autrement dit, nous considérons que le matériau de l'inclusion diffère du matériau de référence uniquement par sa permittivité et non par sa perméabilité. Ce cas de figure semble pouvoir être rencontré en physique et l'intérêt de notre problème n'est pas simplement mathématique même si bien entendu, c'eût été suffisant! Lorsque  $A = \text{Id}$ , pour obtenir un problème bien posé au sens de Fredholm, on peut modifier le cadre fonctionnel en écrivant une formulation du quatrième ordre pour le champ diffracté dans l'inclusion. Celui-ci est alors cherché dans  $H_0^2(\Omega)$ , fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  pour la norme  $H^2$  (cf. Section 11.1). Pour justifier la condition sur la frontière, rappelons que le champ diffracté doit être nul en dehors du support de l'inclusion  $\Omega$ . La partie principale de l'opérateur associé à cette formulation est égale à  $\Delta(n-1)^{-1}\Delta$ . Lorsque  $n$  est plus petit ou plus grand que un sur tout le domaine, cet opérateur est elliptique et son étude s'effectue sans difficulté. Lorsque  $n-1$  change de signe sur  $\Omega$ , l'on voit apparaître un nouveau problème de transmission. La question du caractère discret des valeurs propres de transmission dans cette configuration est restée ouverte pendant longtemps. Récemment, dans [146], J. Sylvester a réalisé une jolie avancée en démontrant ce résultat lorsque  $n-1$  est positif (ou négatif) dans un voisinage de la frontière. Son travail est basé sur une formulation encore différente. Dans ce chapitre, nous souhaitons nous concentrer sur l'étude du problème de bilaplacien avec changement de signe dans la partie principale.

Décrivons à présent le plan. Dans la Section 11.1, nous précisons les notations et introduisons la formulation du quatrième ordre. Dans un second temps, nous étudions cette formulation. Nous prouvons que l'opérateur de  $H_0^2(\Omega)$  dans  $H_0^2(\Omega)$  naturellement associé à cette formulation est toujours de type Fredholm lorsque  $n-1 \in L^\infty(\Omega)$  reste positif ou négatif dans un voisinage de la frontière et vérifie  $(n-1)^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Ceci constitue un résultat surprenant car les hypothèses sont relativement faibles. En particulier, la quantité  $n-1$  peut présenter les changements de signe les plus divers à l'intérieur du domaine. Dans la Section 11.3, en utilisant la T-coercivité géométrique, nous montrons le caractère discret des valeurs propres de transmission dans des cas où  $n-1$  change de signe dans un voisinage de la frontière, complétant ainsi [146]. Malheureusement, le critère de validité de ce résultat n'est pas très explicite. Dans la dernière section, nous nous intéressons à un problème de bilaplacien avec changement de signe avec des conditions aux limites mixtes. Ce problème n'est pas en lien avec le problème de transmission intérieur mais présente des propriétés mathématiques amusantes.

## 11.1 Une formulation du quatrième ordre pour le problème de transmission intérieur

Commençons par introduire les notations que nous utiliserons dans ce chapitre. Considérons  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d > 0$ , un domaine borné à frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne connexe. De façon générale, si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , nous notons indifféremment  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{O}}$  les produits scalaires de  $L^2(\mathcal{O})$  et  $\mathbf{L}^2(\mathcal{O}) := (L^2(\mathcal{O}))^d$ , ainsi que  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$  les normes associées. L'espace  $H_0^2(\Omega)$  est défini comme la fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  pour la norme  $H^2$ . En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on vérifie que

l'application  $(u, v) \mapsto (u, v)_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} := (\Delta u, \Delta v)_\Omega$  définit un produit scalaire sur  $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$ . Définissons  $\|u\|_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} := \|\Delta u\|_\Omega$  pour tout  $u \in \mathbf{H}_0^2(\Omega)$ .

Reprenons le problème de transmission intérieur du chapitre précédent avec  $A$  identiquement égale à l'identité. Notons  $w$  le champ incident et  $u$  le champ total. Dans  $\Omega$ , on a  $\Delta u + k^2 n(\mathbf{x})u = 0$  et  $\Delta w + k^2 w = 0$  où  $k$  désigne le nombre d'onde. Imposons à  $u$  de satisfaire les relations physiques de continuité du champ et de continuité du flux  $[u]_{\partial\Omega} = [\nu \cdot \nabla u]_{\partial\Omega} = 0$ . Ici,  $[\cdot]_{\partial\Omega}$  désigne un saut sur  $\partial\Omega$ , arbitrairement fixé. Si  $w$  est un champ qui ne rayonne pas, alors on a  $u = w$  et  $\nu \cdot \nabla u - \nu \cdot \nabla w = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Ici,  $\nu$  note la normale unitaire à  $\partial\Omega$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ . En résumé, si  $w$  est tel que le champ diffracté est nul, le couple  $(u, w)$  vérifie le problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 n u & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta w + k^2 w & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u - w & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \nu \cdot \nabla u - \nu \cdot \nabla w & = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (11.1)$$

Le coefficient  $n$  est un élément de  $L^\infty(\Omega)$  à valeurs réelles tel que  $n \neq 1$  dans  $\Omega$ . Nous supposons de plus que  $(n - 1)^{-1}$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$ .

Le problème (11.1) est analogue à un problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif dans le cas d'un contraste dans la partie principale égal à  $-1$ . Cela vient du fait que nous avons choisi  $A = \text{Id}$ . Nous savons que pour ce cas,  $\mathbf{H}^1$  ne constitue pas un « bon » cadre fonctionnel, les opérateurs associés à ces problèmes n'étant pas de type Fredholm. Ceci empêche l'utilisation du théorème de Fredholm analytique pour prouver le caractère discret des valeurs propres. Nous allons donc modifier ce cadre fonctionnel.

**Définition 11.1.1** *Les éléments  $k \in \mathbb{C}$  pour lesquels il existe une solution non triviale au problème*

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, w) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ avec } u - w \in \mathbf{H}_0^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta u + k^2 n u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta w + k^2 w = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (11.2)$$

*sont appelés des valeurs propres de transmission.*

**Remarque 11.1.2** *Physiquement, il peut paraître étrange de travailler avec des champs appartenant à  $L^2(\Omega)$  et non à  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . Est-ce simplement un artifice mathématique ? En réalité, les champs incidents  $w$  sont des superpositions d'ondes planes. Ils sont donc très réguliers. Mais il est possible de montrer des résultats de densité de cet « espace d'ondes planes » dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ . Autrement dit, toute fonction de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  ou  $L^2(\Omega)$  peut être approchée avec une précision arbitraire par une superposition d'ondes planes. Par conséquent, si  $k$  est une valeur propre de transmission, on peut toujours trouver une combinaison linéaire d'ondes planes qui rayonne « très peu », le « très peu » pouvant être choisi aussi petit que l'on veut. Le message important de cette remarque est donc le suivant. Pour mettre en place les méthodes de reconstruction, il suffit de savoir prouver que les valeurs propres de transmission forment un ensemble discret dénombrable, lesdites valeurs propres de transmission étant définies dans un cadre fonctionnel dans lequel l'espace des ondes planes est dense. Nous renvoyons le lecteur à [61] pour plus de détails concernant ce point.*

Écrivons à présent une formulation du quatrième ordre pour le problème (11.2). Considérons  $(u, w)$  un couple d'éléments vérifiant (11.2). Définissons  $v := u - w$ . Notons que  $v$  n'est rien d'autre que le champ diffracté dans l'inclusion. Il satisfait la relation  $\Delta v + k^2 n v = k^2(1 - n)w$  dans  $\Omega$ . En divisant de part et d'autre de l'égalité par  $(1 - n)$  et en utilisant l'équation  $\Delta w + k^2 w = 0$ , on obtient, au sens des distributions,

$$(\Delta + k^2) \frac{1}{n - 1} (\Delta v + k^2 n v) = 0.$$

On déduit que si le couple  $(u, w)$  satisfait le problème (11.2) alors  $v = u - w$  vérifie le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{n-1} (\Delta v + k^2 n v) (\Delta \varphi + k^2 \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (11.3)$$

Réciproquement, on montre (voir [139, lemme 3.1] pour les détails) que si  $v$  est solution de (11.3) alors le couple  $(u, w) := ((n-1)^{-1} (\Delta v + k^2 n v) - k^2 v, (n-1)^{-1} (\Delta v + k^2 n v))$  vérifie le problème (11.2). Sur  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ , définissons la forme sesquilinéaire

$$a_k(v, \varphi) = ((n-1)^{-1} (\Delta v + k^2 n v), (\Delta \varphi + k^2 \varphi))_{\Omega}, \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega).$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur continu  $A_k : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$  associé à  $a_k$  tel que

$$(A_k v, \varphi)_{H_0^2(\Omega)} = a_k(v, \varphi), \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega). \quad (11.4)$$

Supposons pour un court moment qu'il existe  $k_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $A_{k_0}$  définisse un isomorphisme de  $H_0^2(\Omega)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{C}$ , il est aisé de prouver que  $A_k$  diffère de  $A_{k_0}$  d'une perturbation compacte. Avec le théorème de Fredholm analytique, on conclut alors, puisque  $A_{k_0}$  est injectif, que  $A_k$  est un isomorphisme de  $H_0^2(\Omega)$  pour tout  $k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est un ensemble discret dénombrable dans  $\mathbb{C}$ . Autrement dit, pour montrer que l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable, il est suffisant de montrer qu'il existe  $k_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $A_{k_0}$  soit un isomorphisme de  $H_0^2(\Omega)$ .

Lorsque  $n(\mathbf{x}) > 1$  p.p. sur  $\Omega$ , la forme bilinéaire  $a_0$  est coercive sur  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$  et donc  $A_0$  est un isomorphisme de  $H_0^2(\Omega)$ . Dans cette configuration, le raisonnement précédent s'applique et l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable. Lorsque  $0 < C_1 \leq n(\mathbf{x}) \leq C_2 < 1$ , où  $C_1, C_2$  sont des constantes, ce résultat est également vrai car  $-a_0$  est coercive sur  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ . Ces résultats sont connus depuis [139]. Lorsque  $n-1$  change de signe, la forme  $a_k$  n'est ni coercive ni « coercive+compacte » sur  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ . Les valeurs propres du problème (11.3) constituent-elles encore un ensemble discret dénombrable dans ce cas de figure ?

Pour tenter de répondre à cette question, nous allons nous concentrer sur la partie principale (la partie qui contient les dérivées d'ordre le plus élevé) de l'opérateur  $A_k$ . Introduisons la forme sesquilinéaire

$$b(v, \varphi) := ((n-1)^{-1} \Delta v, \Delta \varphi)_{\Omega}, \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$$

ainsi que l'opérateur continu  $B : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$  associé tel que

$$(Bv, \varphi)_{H_0^2(\Omega)} = b(v, \varphi), \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega). \quad (11.5)$$

Pour simplifier la présentation, nous notons  $\sigma := (n-1)^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ .

## 11.2 Étude de la formulation du quatrième ordre

Avant d'étudier l'opérateur  $B$ , intéressons-nous au problème obtenu en remplaçant dans (11.3) la condition «  $\partial_\nu v = 0$  sur  $\partial\Omega$  » par la condition «  $\sigma \Delta v = 0$  sur  $\partial\Omega$  ».

### 11.2.1 Une première approche

Pour  $f \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^*$ , considérons le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta \sigma \Delta u = f \\ \sigma \Delta u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (11.6)$$

Ici, nous imposons des conditions aux limites mixtes : la condition  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  est qualifiée d'*essentielle*, elle apparaît dans l'espace, tandis que la condition  $\sigma\Delta u = 0$  sur  $\partial\Omega$  est dite *naturelle*. La trace  $\sigma\Delta u = 0$  est définie au sens faible. Nous dirons que la fonction  $v \in L^2(\Omega)$  telle que  $\Delta v \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^*$  vérifie  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$  si et seulement si on a

$$\langle \Delta v, v' \rangle_\Omega = \int_\Omega v \Delta v', \quad \forall v' \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  désignant ici le crochet de dualité  $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^* \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Avec ces conditions aux limites, nous allons voir qu'il est très facile de résoudre le problème (11.6) en deux étapes. Pour fixer les idées, supposons  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et donnons-nous  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Il existe un unique  $v \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant  $\Delta v = f$ . Notons ensuite  $u$  l'unique fonction vérifiant  $u \in H_0^1(\Omega)$  et  $\Delta u = \sigma^{-1}v$ . Puisque  $\Omega$  est régulier, nous savons que  $u$  appartient à  $H^2(\Omega)$ . Cet élément satisfait donc le problème (11.6). Remarquons bien que pour obtenir ce résultat, les seules hypothèses faites sur  $\sigma$  sont  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  et  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Ainsi,  $\sigma$  peut très bien changer de signe. Cependant, ce changement de signe ne semble pas avoir les conséquences du changement de signe de  $\sigma$  pour l'opérateur  $\operatorname{div}(\sigma\nabla\cdot) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ . Précisons l'étude du problème (11.6).

Avec le théorème de Lax-Milgram, on montre que le produit scalaire  $(u, v) \mapsto (u, v)_{H_0^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)_\Omega$  que nous avons défini sur  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$  constitue également un produit scalaire sur  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Introduisons la forme sesquilineaire

$$\tilde{b}(v, \varphi) := (\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega, \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

ainsi que l'opérateur continu de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  associé, défini par

$$(\tilde{B}v, \varphi)_{H_0^2(\Omega)} = \tilde{b}(v, \varphi), \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Nous allons voir qu'il est très facile de construire l'inverse de l'opérateur  $\tilde{B}$ .

**Théorème 11.2.1** *Supposons l'ouvert  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour tout  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  tel que  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ , l'opérateur  $\tilde{B}$  constitue un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .*

**Preuve.** Définissons l'opérateur  $T : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  tel que, pour tout  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ,  $Tu$  est défini comme l'unique solution du problème « trouver  $Tu \in H_0^1(\Omega)$  satisfaisant  $\Delta(Tu) = \sigma^{-1}\Delta u$  ». Puisque nous avons supposé  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $Tu$  est bien un élément de  $H^2(\Omega)$ . Pour tout  $u, v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , nous pouvons écrire

$$(\tilde{B}(Tu), v)_{H_0^2(\Omega)} = (\sigma\Delta(Tu), \Delta v)_\Omega = (\Delta u, \Delta v)_\Omega.$$

Par conséquent, l'opérateur  $\tilde{B} \circ T$  est égal à l'identité de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Puisque  $\tilde{B}$  est autoadjoint, on déduit que  $\tilde{B}$  définit un isomorphisme avec  $\tilde{B}^{-1} = T$ . ■

Proposons une autre preuve de ce résultat, légèrement différente, en revenant à la résolution du problème (11.6) en deux étapes. Cela constituera un avant goût de la fin de ce chapitre. Commençons par démontrer le

**Lemme 11.2.2** *Supposons l'ouvert  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Alors pour tout  $f \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^*$ , il existe une unique solution au problème*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in L^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\Omega v \Delta v' = \langle f, v' \rangle_\Omega, \quad \forall v' \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (11.7)$$

la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  désignant le crochet de dualité  $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^* \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .

**Preuve.** Considérons  $v \in L^2(\Omega)$  tel que  $\int_{\Omega} v \Delta v' = 0$  pour tout  $v' \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . En testant avec  $v'$  l'unique solution du problème « trouver  $v' \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  tel que  $\Delta v' = v$  », on déduit  $\int_{\Omega} v^2 = 0$ . Ainsi, le problème (11.7) possède au plus une solution. Maintenant, considérons  $f \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^*$ . D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique  $F \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  tel que  $\int_{\Omega} \Delta F \Delta v' = \langle f, v' \rangle_{\Omega}$  pour tout  $v' \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . La fonction  $v = \Delta F \in L^2(\Omega)$  est alors une solution du problème (11.7). Ceci termine la preuve. ■

**Preuve du Théorème 11.2.1 (bis).** Considérons  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \sigma \Delta u \Delta v' = 0, \quad \forall v' \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

D'après le Lemme 11.2.2, on a alors nécessairement  $\sigma \Delta u = 0$  et donc  $\Delta u = 0$ . Ceci implique  $u = 0$  et prouve que le problème (11.6) possède au plus une solution. Considérons ensuite  $f \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^*$ . D'après le Lemme 11.2.2, il existe un unique  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} v \Delta v' = \langle f, v' \rangle_{\Omega}, \quad \forall v' \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Définissons alors  $u$  l'unique solution du problème « trouver  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  tel que  $\Delta u = \sigma^{-1} v$  ». Cette fonction est une solution du problème (11.6). ■

**Remarque 11.2.3** Pour démontrer le Théorème 11.2.1, nous avons supposé  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Bien entendu, cette hypothèse peut-être affaiblie. Il suffit en fait que l'ouvert  $\Omega$  soit tel que l'opérateur Laplacien avec condition de Dirichlet homogène soit un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ . C'est par exemple le cas lorsque  $\Omega$  est convexe à frontière lipschitzienne. Par contre, en 2D, lorsque  $\Omega$  présente un ou plusieurs coins rentrants, le Laplacien avec condition de Dirichlet homogène n'est pas un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Dans ce cas, nous verrons dans la Section 11.4 que l'opérateur  $\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  ne définit pas toujours un isomorphisme. Un noyau de dimension finie peut apparaître.

### 11.2.2 Caractère Fredholm de l'opérateur

Revenons à l'étude de l'opérateur  $B$  introduit en (11.5). Nous allons prouver qu'il est Fredholm d'indice zéro sous l'hypothèse

( $\mathcal{H}_{\sigma}$ ) Supposons  $\sigma \in L^{\infty}(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^{\infty}(\Omega)$ . Supposons de plus que  $\sigma(\mathbf{x}) \geq C_1 > 0$  p.p. sur  $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$  ou  $\sigma(\mathbf{x}) \leq C_2 < 0$  p.p. sur  $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ , où  $C_1, C_2$  sont des constantes et  $\mathcal{O}$  un ouvert tel que  $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$ .

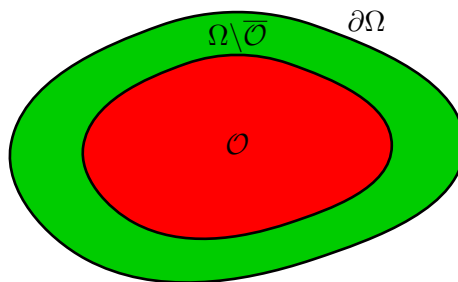


FIGURE 11.1 – La fonction  $\sigma$  est supposée uniformément positive ou uniformément négative dans la région verte  $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ .



En d'autres termes, nous supposons qu'il existe un voisinage de  $\partial\Omega$  sur lequel on a  $n > 1$  presque partout ou  $n < 1$  presque partout. Par contre, en dehors de ce voisinage,  $n - 1$  peut changer de signe. Pour prouver que  $B$  définit un opérateur Fredholm d'indice zéro, nous allons construire une paramétrix à droite pour  $B$ , *i.e.* un opérateur borné  $\mathbf{T}$  tel que  $B \circ \mathbf{T} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$  où  $\mathcal{I} : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  est un isomorphisme et  $\mathcal{K} : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  un opérateur compact.

**Théorème 11.2.4** *Supposons que  $\sigma$  satisfasse l'hypothèse  $(\mathcal{H}_\sigma)$ . Alors l'opérateur  $B : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  vérifiant  $(Bv, \varphi)_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} = (\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega$ , pour tout  $(v, \varphi) \in \mathbf{H}_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_0^2(\Omega)$ , est Fredholm d'indice zéro.*

**Preuve.** Présentons la preuve dans le cas  $\sigma \geq C_1 > 0$  dans un voisinage de la frontière  $\partial\Omega$ . En travaillant sur l'opérateur  $-B$  lorsque  $\sigma \leq C_2 < 0$  dans un voisinage de  $\partial\Omega$ , on peut en effet se ramener à cette configuration. Introduisons  $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, [0; 1])$  une fonction de troncature égale à 1 sur  $\mathcal{O}$ . Remarquons que  $1 - \zeta$  est un élément de  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0; 1])$  qui vaut 1 dans un voisinage de  $\partial\Omega$ . Considérons à présent  $v$  un élément de  $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$ . La fonction  $(1 - \zeta)v$  appartient à  $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$  et par définition, on a pour tout  $\varphi \in \mathbf{H}_0^2(\Omega)$ ,

$$(\sigma\Delta((1 - \zeta)v), \Delta\varphi)_\Omega = b((1 - \zeta)v, \varphi) = (B((1 - \zeta)v), \varphi)_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)}.$$

Ceci permet d'écrire, en développant  $\Delta((1 - \zeta)v)$ ,

$$((1 - \zeta)\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega = (B((1 - \zeta)v), \varphi)_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} + (\sigma(2\nabla v \cdot \nabla\zeta + v\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega. \quad (11.8)$$

Sur le support de  $\zeta$ , il faut procéder un peu différemment car  $\sigma$  change de signe. Définissons  $\psi$  l'unique élément de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tel que  $\Delta\psi = \sigma^{-1}\Delta v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Les résultats classiques de régularité intérieure (voir [88, théorème 2.1.3]) indiquent qu'on a, pour tout  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ,  $\chi\psi \in \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  avec l'estimation  $\|\chi\psi\|_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} \leq C\|\sigma^{-1}\Delta v\|_\Omega \leq C\|v\|_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)}$ . En particulier, la fonction  $\zeta\psi$  appartient à  $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$  et dépend continûment de  $v$ . Puisque  $(\sigma\Delta(\zeta\psi), \Delta\varphi)_\Omega = (B(\zeta\psi), \varphi)_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)}$ , l'on déduit, en développant  $\Delta(\zeta\psi)$ ,

$$(\zeta\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega = (\sigma\zeta\Delta\psi, \Delta\varphi)_\Omega = (B(\zeta\psi), \varphi)_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} - (\sigma(2\nabla\psi \cdot \nabla\zeta + \psi\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega. \quad (11.9)$$

Définissons l'opérateur  $\mathbf{T} : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  tel que  $\mathbf{T}v = \zeta\psi + (1 - \zeta)v$  pour tout  $v \in \mathbf{H}_0^2(\Omega)$ . Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons les opérateurs  $\mathcal{I} : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  et  $\mathcal{K} : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  tels que, pour tout  $(v, \varphi) \in \mathbf{H}_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_0^2(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}v, \varphi)_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} &= ((\zeta + (1 - \zeta)\sigma)\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega \\ (\mathcal{K}v, \varphi)_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} &= (\sigma(2\nabla(\psi - v) \cdot \nabla\zeta + (\psi - v)\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Avec ces définitions, nous avons la relation  $B \circ \mathbf{T} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$ . On vérifie sans mal que  $\mathcal{I} : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  définit un isomorphisme car la forme  $(v, \varphi) \mapsto ((\zeta + (1 - \zeta)\sigma)\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega$  est coercive sur  $\mathbf{H}_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_0^2(\Omega)$ . Le Lemme 11.2.5 ci-dessous indique que  $\mathcal{K} : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  est compact. Par conséquent, l'opérateur  $\mathbf{T}$  définit bien une paramétrix à droite pour  $B$ . Puisque  $B$  est autoadjoint, nous déduisons que c'est un opérateur Fredholm d'indice zéro. ■

**Lemme 11.2.5** *L'opérateur  $\mathcal{K} : \mathbf{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^2(\Omega)$  défini en (11.10) est compact.*

**Preuve.** Considérons  $(\varphi_n)$  une suite bornée d'éléments de  $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$ . Montrons qu'on peut en extraire une sous-suite telle que  $(\mathcal{K}\varphi_n)$  converge dans  $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$ . D'après la définition (11.10) de l'opérateur  $\mathcal{K}$ , nous pouvons écrire

$$\|\mathcal{K}\varphi_n\|_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)}^2 \leq C\|\varphi_n\|_{\mathbf{H}_0^2(\Omega)} \left( \|\varphi_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\psi_n\|_{\mathbf{H}^1(\text{supp}\zeta)} \right).$$

Ci-dessus «  $\text{supp } \zeta$  » désigne le support de  $\zeta$ . Rappelons qu'en vertu du résultat de régularité intérieure, on a l'estimation  $\|\psi_n\|_{H^2(\text{supp } \zeta)} \leq C \|\varphi_n\|_{H_0^2(\Omega)}$ . Puisque l'injection de  $H^2(\Omega)$  (resp.  $H^2(\text{supp } \zeta)$ ) dans  $H^1(\Omega)$  (resp.  $H^1(\text{supp } \zeta)$ ) est compacte, nous pouvons extraire de  $(\varphi_n)$  une sous-suite telle que  $(\varphi_n)$  et  $(\psi_n)$  convergent respectivement dans  $H^1(\Omega)$  et  $H^1(\text{supp } \zeta)$  fortement. Définissons  $\varphi_{mn} := \varphi_m - \varphi_n$  pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ . En utilisant l'estimation

$$\|\mathcal{K}\varphi_{mn}\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C \|\varphi_{mn}\|_{H_0^2(\Omega)} \left( \|\varphi_{mn}\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi_{mn}\|_{H^1(\text{supp } \zeta)} \right),$$

nous déduisons que  $(\mathcal{K}\varphi_n)$  est une suite de Cauchy de  $H_0^2(\Omega)$ . Par conséquent,  $(\mathcal{K}\varphi_n)$  converge. ■

Pour tout  $k \in \mathbb{C}$ , l'opérateur  $A_k$  défini en (11.4) diffère de  $B$  d'une perturbation compacte. Nous pouvons donc énoncer le

**Corollaire 11.2.6** *Supposons que  $\sigma$  satisfasse l'hypothèse  $(\mathcal{H}_\sigma)$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{C}$ , l'opérateur  $A_k$  défini en (11.4) est Fredholm d'indice zéro.*

**Remarque 11.2.7** *De façon quelque peu surprenante, ces résultats indiquent que l'opérateur  $\Delta\sigma\Delta\cdot$ , contrairement à l'opérateur  $\text{div}(\sigma\nabla\cdot)$ , n'est pas sensible aux changements de signe de  $\sigma$  tant que ceux-ci ont lieu à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Notons que les changements de signe de  $\sigma$  peuvent s'effectuer de façon très irrégulière. Ainsi, supposons  $\Omega$  divisé en deux sous-domaines  $\Omega_1, \Omega_2$  avec  $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ,  $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_1(\mathbf{x}) \geq C_1 > 0$  p.p. dans  $\Omega_1$  et  $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_2(\mathbf{x}) \leq C_2 < 0$  p.p. dans  $\Omega_2$ . Définissons l'interface  $\Sigma = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega$ . L'opérateur  $\Delta\sigma\Delta\cdot$  reste de type Fredholm même lorsque  $\Sigma$  présente des coins ou des « cusps ». Maintenant, considérons un domaine symétrique par rapport à l'interface située, pour fixer les idées, en  $y = 0$ . Supposons qu'on ait  $\sigma_1(x, y) = -\sigma_2(x, -y)$ . Dans ce cas, on ne peut utiliser le principe de symétrie pour construire un noyau de dimension infinie pour l'opérateur  $\Delta\sigma\Delta\cdot$  comme nous l'avons fait pour l'opérateur  $\text{div}(\sigma\nabla\cdot)$  (cf. Théorème 1.5.1). Le lecteur vérifiera en effet que les conditions de transmission à l'interface  $[u]_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla u]_\Sigma = [\sigma\Delta u]_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla(\Delta u)]_\Sigma = 0$  sont trop « rigides ».*

**Remarque 11.2.8** *Lorsque  $\sigma$  change de signe dans tout voisinage de  $\partial\Omega$ , il semble qu'il existe des configurations pour lesquelles l'opérateur  $B$  ne soit pas de type Fredholm en raison de l'existence de singularités ponctuelles qui « sortent » de  $H^2$ . Le calcul de ces singularités fait actuellement l'objet du stage de Jérémy Firozaly.*

### 11.2.3 Étude de l'injectivité en 1D

Dans ce paragraphe, nous souhaitons savoir si le résultat que nous venons d'obtenir est sous-optimal ou non. Plus précisément, nous avons prouvé que l'opérateur  $B$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma$  reste positif ou négatif dans un voisinage de  $\partial\Omega$ . Comme pour l'opérateur  $\tilde{B}$ , il se pourrait qu'on ait une propriété plus forte du type :  $B$  définit un isomorphisme de  $H_0^2(\Omega)$  dès lors que  $\sigma$  reste positif ou négatif dans un voisinage de  $\partial\Omega$ . Nous allons voir sur des exemples en 1D pour lesquels on peut effectuer tous les calculs explicitement que ceci n'est pas vrai.

◇ **EXEMPLE 1.** Définissons les domaines  $\Omega = ]a; b[$ ,  $\Omega_1 = ]a; 0[$ ,  $\Omega_2 = ]0; b[$ , avec  $a < 0$  et  $b > 0$ . Introduisons la fonction  $\sigma$  telle que  $\sigma = \sigma_1$  sur  $\Omega_1$ ,  $\sigma = \sigma_2$  sur  $\Omega_2$ . Ici,  $\sigma_1 > 0$  et  $\sigma_2 < 0$  sont des constantes. On s'intéresse au problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta\sigma\Delta u = f \in H^{-2}(\Omega). \end{array} \right. \quad (11.11)$$

En utilisant la preuve du Théorème 11.2.4, on montre que l'opérateur borné de  $H_0^2(\Omega)$  canoniquement associé à ce problème est Fredholm d'indice zéro. Pour savoir si c'est un isomorphisme, il est donc suffisant d'étudier la question de l'injectivité. Considérons donc  $u$  un élément de  $H_0^2(\Omega)$  vérifiant le



problème (11.11) avec  $f = 0$ . Puisque  $\Delta\Delta u = 0$  de part et d'autre de l'interface, en utilisant les conditions aux limites  $u(a) = u(b) = u^{(1)}(a) = u^{(1)}(b) = 0$ , on peut écrire

$$u_1(x) = A_1(x-a)^3 + B_1(x-a)^2 \text{ pour } x \in \Omega_1 \quad \text{et} \quad u_2(x) = A_2(x-b)^3 + B_2(x-b)^2 \text{ pour } x \in \Omega_2.$$

Les conditions de transmission à l'interface  $u_1(0) = u_2(0)$ ,  $u_1^{(1)}(0) = u_2^{(1)}(0)$ ,  $\sigma_1 u_1^{(2)}(0) = \sigma_2 u_2^{(2)}(0)$  et  $\sigma_1 u_1^{(3)}(0) = \sigma_2 u_2^{(3)}(0)$  imposent :

$$\begin{aligned} -a^3 A_1 + a^2 B_1 &= -b^3 A_2 + b^2 B_2 ; & 3a^2 A_1 - 2a B_1 &= 3b^2 A_2 - 2b^2 B_2 ; \\ \sigma_1(-6a A_1 + 2B_1) &= \sigma_2(-6b A_2 + 2B_2) ; & 6\sigma_1 A_1 &= 6\sigma_2 A_2. \end{aligned}$$

On trouve qu'il existe une solution non nulle si et seulement si le contraste  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$  satisfait

$$\kappa_\sigma^2 + \left(-4(b/a) + 6(b/a)^2 - 4(b/a)^3\right) \kappa_\sigma + (b/a)^4 = 0.$$

On peut vérifier que le déterminant de ce polynôme est toujours positif pour  $(b/a) \in \mathbb{R}_*$ . Ainsi, pour tout  $(b/a) \in \mathbb{R}_*$ , il existe deux valeurs du contraste

$$\kappa_\sigma = \left(2 - 3(b/a) + 2(b/a)^2 \pm 2|(b/a) - 1|\sqrt{((b/a)^2 - (b/a) + 1)}\right) (b/a)$$

pour lesquelles il existe une solution non nulle au problème (11.11). Par un calcul de routine, on montre que ces deux racines sont strictement négatives pour  $(b/a) \in \mathbb{R}_*$ . Ceci est plutôt rassurant car la forme bilinéaire associée au problème (11.11) est coercive lorsque  $\kappa_\sigma > 0$ . Dans le cas d'un domaine symétrique par rapport à l'interface, *i.e.* pour  $b = -a$ , l'opérateur n'est pas injectif pour  $\kappa_\sigma = -4 \pm \sqrt{3}$ . Résumons l'idée apportée par ces calculs : à géométrie fixée, l'opérateur borné canoniquement associé au problème (11.11) est Fredholm d'indice 0 mais *n'est pas toujours injectif*.

◇ EXEMPLE 2. Étudions à présent un problème plus proche de celui présenté dans le §11.2.2, avec un changement de signe de  $\sigma$  à l'intérieur du domaine. Définissons les ouverts  $\Omega = ]-1; 1[$ ,  $\Omega_1 = ]-1; -\delta[ \cup ]\delta; 1[$ ,  $\Omega_2 = ]-\delta; \delta[$ , avec  $0 < \delta < 1$ . Introduisons la fonction  $\sigma$  telle que  $\sigma = \sigma_1$  sur  $\Omega_1$ ,  $\sigma = \sigma_2$  sur  $\Omega_2$ . De nouveau,  $\sigma_1 > 0$  et  $\sigma_2 < 0$  sont des constantes. D'après le Théorème 11.2.4, pour tout contraste  $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_*$ , l'opérateur borné de  $H_0^2(\Omega)$  canoniquement au problème (11.11) est Fredholm d'indice zéro. En procédant comme dans l'Exemple 1, on prouve que c'est en fait un isomorphisme si et seulement si

$$\kappa_\sigma \notin \{\delta^3/(\delta^3 - 1), \delta/(\delta - 1)\}.$$

De nouveau, ceci montre que le résultat du paragraphe précédent n'est pas sous-optimal au sens où  $B$  n'est pas toujours un isomorphisme de  $H_0^2(\Omega)$ .

◇ EXEMPLE 3. Reprenons la géométrie de l'Exemple 1 ci-dessus. Intéressons-nous au problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta\sigma\Delta u = f \in H^{-1}(\Omega) \\ \sigma\Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (11.12)$$

Étudions l'injectivité du problème (11.12). Considérons  $u$  un élément de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  vérifiant le problème (11.11) avec  $f = 0$ . En utilisant les conditions aux limites, nous pouvons écrire

$$u_1(x) = A_1(x-a)^3 + B_1(x-a) \text{ pour } x \in \Omega_1 \quad \text{et} \quad u_2(x) = A_2(x-b)^3 + B_2(x-b) \text{ pour } x \in \Omega_2.$$

Les conditions de transmission à l'interface  $u_1(0) = u_2(0)$ ,  $u_1^{(1)}(0) = u_2^{(1)}(0)$ ,  $\sigma_1 u_1^{(2)}(0) = \sigma_2 u_2^{(2)}(0)$  et  $\sigma_1 u_1^{(3)}(0) = \sigma_2 u_2^{(3)}(0)$  imposent :

$$\begin{aligned} a^3 A_1 + a B_1 &= b^3 A_2 + b B_2 ; & 3a^2 A_1 + a B_1 &= 3b^2 A_2 + b B_2 ; \\ 6\sigma_1 a A_1 &= 6\sigma_2 a A_2 ; & 6\sigma_1 A_1 &= 6\sigma_2 A_2. \end{aligned}$$

Ceci implique  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$ . Par conséquent le problème (11.12) est toujours injectif. Ceci est cohérent avec le résultat du Théorème 11.2.1 qui indique que l'opérateur  $\tilde{B}$  associé à ce problème constitue un isomorphisme.

Pour prouver le caractère discret des valeurs propres de transmission, nous avons besoin de savoir montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{C}$  tel que l'opérateur  $A_k : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$  défini en (11.4) constitue un isomorphisme (rappelons que  $B = A_0$ ). La technique que nous avons développée dans ce paragraphe ne permet pas d'obtenir ce résultat. Nous renvoyons le lecteur à [146] pour une preuve basée sur l'étude d'une formulation équivalente à (11.2). Dans ce papier, l'auteur a besoin de l'hypothèse  $n - 1$  plus grand ou plus petit que zéro dans un voisinage de la frontière  $\partial\Omega$ .

**Remarque 11.2.9** *Pour aller plus loin et montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{C}$  tel que  $A_k$  soit injectif, sans hypothèse de signe de  $n - 1$ , on peut imaginer utiliser la technique d'addition de variable permettant d'étudier les opérateurs à paramètre (cf. [1] ainsi que les preuves des Lemmes 3.1.11 et 8.3.6). L'idée consiste à remplacer le paramètre spectral  $k$  par une dérivée  $i\partial_z$  par rapport à une nouvelle variable  $z$ . En établissant une estimation a priori en  $3D$ , on peut alors prouver le résultat d'injectivité désiré en  $2D$ . Nous travaillons actuellement sur cette méthode.*

Dans la prochaine section, nous allons étudier l'opérateur  $B$  en utilisant l'approche T-coercivité géométrique du Chapitre 1. Cela permettra de prouver facilement l'injectivité pour  $B$  et donc le caractère discret des valeurs propres de transmission. Indiquons également que nous serons en mesure de démontrer ces résultats dans des configurations pour lesquelles  $n - 1$  change de signe sur la frontière. Malheureusement, le critère que nous allons devoir imposer à  $n - 1$  est difficile à vérifier a priori.

### 11.3 Utilisation de la T-coercivité géométrique

Supposons  $\Omega$  divisé en deux sous-domaines  $\Omega_1, \Omega_2$  avec  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Faisons l'hypothèse  $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_1(\mathbf{x}) \geq C_1 > 0$  p.p. dans  $\Omega_1$  et  $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_2(\mathbf{x}) \leq C_2 < 0$  p.p. dans  $\Omega_2$ . Définissons l'interface  $\Sigma = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega$ . Notons  $\Gamma_1 := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$  et  $\Gamma_2 := \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$ . Introduisons les constantes

$$\sigma_1^+ := \sup_{\Omega_1} \sigma_1 < \infty, \quad \sigma_2^+ := \sup_{\Omega_2} |\sigma_2| < \infty, \quad \sigma_1^- := \inf_{\Omega_1} \sigma_1 > 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2^- := \inf_{\Omega_2} |\sigma_2| > 0.$$

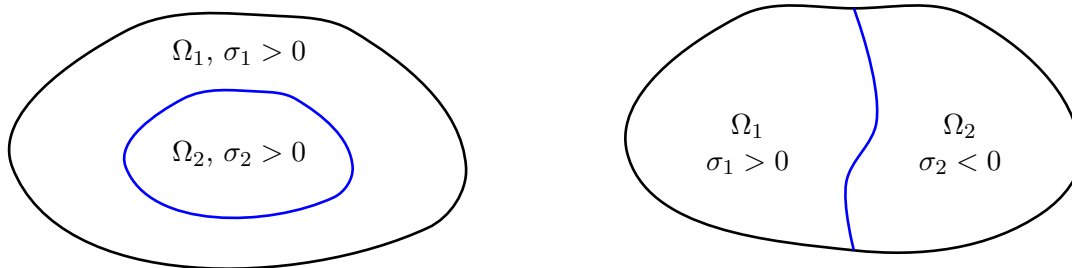


FIGURE 11.2 – Exemples de géométries considérées.

Cette fois-ci, nous avons à construire des isomorphismes  $T$  de  $H_0^2(\Omega)$  tels que la forme  $(v, \varphi) \rightarrow b(v, T\varphi) = (\sigma\Delta v, \Delta(T\varphi))_\Omega$  soit coercive sur  $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ . Au niveau de l'interface, les éléments de  $H_0^2(\Omega)$  se raccordent en trace et en trace normale. Plus précisément, si  $u \in H_0^2(\Omega)$  alors on a  $[u]_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla u]_\Sigma = 0$  où  $[\cdot]_\Sigma$  correspond au saut sur  $\Sigma$ . Ici,  $\nu_\Sigma$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$  dirigé, pour fixer les idées, vers  $\Omega_2$ . À cause de la condition de raccord de trace

normale, nous n'allons pas pouvoir utiliser les opérateurs du Chapitre 1.

Pour  $k = 1, 2$ , introduisons l'espace des restrictions des éléments de  $H_0^2(\Omega)$  à  $\Omega_k$  :

$$H_{0,\Gamma_k}^2(\Omega_k) := \left\{ v|_{\Omega_k}, v \in H_0^2(\Omega) \right\}.$$

Nous notons  $\mathcal{L}(H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1), H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2))$  l'espace des opérateurs bornés de  $H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1)$  dans  $H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2)$ . L'espace  $\mathcal{L}(H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2), H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1))$  est défini de façon analogue. De plus, si  $R_1 \in \mathcal{L}(H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1), H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2))$  et  $R_2 \in \mathcal{L}(H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2), H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1))$ , nous définissons

$$\|R_1\| := \sup_{v \in H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1), \|\Delta v\|_{\Omega_1}=1} \|\Delta(R_1 v)\|_{\Omega_2} \quad \text{et} \quad \|R_2\| := \sup_{v \in H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2), \|\Delta v\|_{\Omega_2}=1} \|\Delta(R_2 v)\|_{\Omega_1}.$$

Introduisons les espaces d'« opérateurs de transfert »

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &:= \{R_1 \in \mathcal{L}(H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1), H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2)) \mid R_1 v|_{\Sigma} = v|_{\Sigma} \text{ et } \nu_{\Sigma} \cdot \nabla(R_1 v)|_{\Sigma} = \nu_{\Sigma} \cdot \nabla v|_{\Sigma}, \forall v \in H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1)\}; \\ \mathcal{R}_2 &:= \{R_2 \in \mathcal{L}(H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2), H_{0,\Gamma_1}^2(\Omega_1)) \mid R_2 v|_{\Sigma} = v|_{\Sigma} \text{ et } \nu_{\Sigma} \cdot \nabla(R_2 v)|_{\Sigma} = \nu_{\Sigma} \cdot \nabla v|_{\Sigma}, \forall v \in H_{0,\Gamma_2}^2(\Omega_2)\}. \end{aligned}$$

Remarquons que ces espaces ne sont pas vides. Considérons par exemple l'opérateur  $R_1$  qui à  $\varphi \in H_0^2(\Omega)$  fait correspondre l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } R_1 \varphi \in H^2(\Omega_2) \text{ tel que :} \\ \Delta \sigma_2 \Delta(R_1 \varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ R_1 \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \nu \cdot \nabla(R_1 \varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ R_1 \varphi = \varphi & \text{sur } \Sigma \\ \nu_{\Sigma} \cdot \nabla(R_1 \varphi) = \nu_{\Sigma} \cdot \nabla \varphi & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (11.13)$$

De la même façon, notons  $R_2$  l'opérateur qui à  $\varphi \in H_0^2(\Omega)$  fait correspondre l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } R_2 \varphi \in H^2(\Omega_1) \text{ tel que :} \\ \Delta \sigma_1 \Delta(R_2 \varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ R_2 \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \nu \cdot \nabla(R_2 \varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ R_2 \varphi = \varphi & \text{sur } \Sigma \\ \nu_{\Sigma} \cdot \nabla(R_2 \varphi) = \nu_{\Sigma} \cdot \nabla \varphi & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (11.14)$$

On vérifie sans mal que  $R_1$  appartient à  $\mathcal{R}_1$  tandis que  $R_2$  constitue un élément de  $\mathcal{R}_2$ . Maintenant, pour  $R_1 \in \mathcal{R}_1$  et  $R_2 \in \mathcal{R}_2$  fixés, définissons les opérateurs

$$T_1 \varphi := \begin{cases} \varphi_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ -\varphi_2 + 2R_1 \varphi_1 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases} \quad ; \quad T_2 \varphi := \begin{cases} \varphi_1 - 2R_2 \varphi_2 & \text{sur } \Omega_1 \\ -\varphi_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}.$$

Pour tout  $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ , on a  $[T_1 \varphi]|_{\Sigma} = [\nu_{\Sigma} \cdot \nabla(T_1 \varphi)]|_{\Sigma} = 0$  et  $[T_2 \varphi]|_{\Sigma} = [\nu_{\Sigma} \cdot \nabla(T_2 \varphi)]|_{\Sigma} = 0$ . Par ailleurs, on note que  $T_1 \circ T_1 = T_2 \circ T_2 = \text{Id}$ . Ceci prouve que  $T_1$  et  $T_2$  sont des isomorphismes de  $H_0^2(\Omega)$ . Par conséquent, nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} & [v \text{ vérifie } b(v, \varphi) = l(\varphi), \forall \varphi \in H_0^2(\Omega)] \\ \Leftrightarrow & [v \text{ vérifie } b(v, T_1 \varphi) = l(T_1 \varphi), \forall \varphi \in H_0^2(\Omega)] \\ \Leftrightarrow & [v \text{ vérifie } b(v, T_2 \varphi) = l(T_2 \varphi), \forall \varphi \in H_0^2(\Omega)]. \end{aligned}$$

Évaluons à présent  $b(v, T_1 v)$  pour  $v \in H_0^2(\Omega)$ . Avec l'inégalité de Young, nous pouvons écrire, pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\begin{aligned} b(v, T_1 v) &= (\sigma_1 \Delta v, \Delta v)_{\Omega_1} + (|\sigma_2| \Delta v, \Delta v)_{\Omega_2} - 2(|\sigma_2| \Delta v, \Delta(R_1 v))_{\Omega_2} \\ &\geq ((\sigma_1 - \sigma_2^+ \|R_1\|^2 \eta^{-1}) \Delta v, \Delta v)_{\Omega_1} + (|\sigma_2| (1 - \eta) \Delta v, \Delta v)_{\Omega_2}. \end{aligned}$$

En calculant de la même façon  $b(v, T_2 v)$  pour  $v \in H_0^2(\Omega)$ , nous pouvons alors énoncer le

**Théorème 11.3.1** *Supposons  $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \inf_{R_1 \in \mathcal{R}_1} \|R_1\|^2$  ou  $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \inf_{R_2 \in \mathcal{R}_2} \|R_2\|^2$ . Alors  $B : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$  définit un isomorphisme.*

**Remarque 11.3.2** *Le résultat de ce théorème est plus riche que celui du Théorème 11.2.4 car ici, on obtient également l'injectivité de  $B$ . Par contre, bien entendu, les hypothèses sont plus fortes et surtout, ne sont pas vérifiables a priori car il est délicat d'évaluer les valeurs  $\inf_{R_1 \in \mathcal{R}_1} \|R_1\|^2$  et  $\inf_{R_2 \in \mathcal{R}_2} \|R_2\|^2$ .*

En remarquant que l'opérateur  $A_k$  est inversible pour des  $k$  petits en valeur absolue et en utilisant le théorème de Fredholm analytique, on déduit le

**Corollaire 11.3.3** *Supposons  $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \inf_{R_1 \in \mathcal{R}_1} \|R_1\|^2$  ou  $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \inf_{R_2 \in \mathcal{R}_2} \|R_2\|^2$ . Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret et dénombrable dans  $\mathbb{C}$ .*

### Illustrations numériques

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'approcher par une méthode éléments finis la solution, en supposant qu'elle est définie de façon unique, du problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta \sigma \Delta u = f. \end{array} \right. \quad (11.15)$$

Nous prenons  $\Omega := \{(x, y) \in ]-5; 5[ \times ]-3; 3[ \}$ ,  $\Omega_2 := \{(x, y) \in ]-2.5; 2.5[ \times ]-1.5; 1.5[ \}$  et  $\Omega_1 := \Omega \setminus \overline{\Omega_2}$ . Nous fixons le terme source  $f$  tel que  $f = 1$  sur  $\Omega_1$  et  $f = 0$  sur  $\Omega_2$ . Nous choisissons  $\sigma$  vérifiant  $\sigma|_{\Omega_1} = \sigma_1 = 1$  et  $\sigma|_{\Omega_2} = \sigma_2$  constant. Rappelons que nous définissons le contraste  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ . Introduisons le problème approché

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que :} \\ (\sigma \Delta u_h, \Delta v_h)_\Omega = (f, v_h)_\Omega, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \end{array} \right. \quad (11.16)$$

où  $\mathcal{V}_h$  est un espace d'approximation de  $H_0^2(\Omega)$ . Nous utilisons l'élément fini de Morley qui est codé dans le logiciel *Freefem++*. Nous renvoyons le lecteur à [118, 32] pour une description de cet élément fini conforme. Pour la visualisation des résultats, nous utilisons les logiciels *Matlab* et *Paraview*.

D'après le Théorème 11.2.4, nous savons que l'opérateur  $B$  associé au problème (11.15) est Fredholm d'indice zéro. Par conséquent, en supposant  $B$  injectif, nous savons que le problème (11.15) possède une et une seule solution. Mais même sous cette hypothèse, en raison du caractère non fortement elliptique de l'opérateur  $B$ , il n'est pas évident de prouver que le problème approché (11.16) est bien posé, y compris pour  $h$  suffisamment petit. Nous laissons cette question de la justification de la méthode d'approximation de côté et supposons que l'on a bien convergence. Autrement dit, nous supposons que le problème (11.16) est bien posé pour  $h$  assez petit et que sa solution approche la solution du problème (11.15). Ici, nous souhaitons surtout avoir une idée de l'influence du changement de signe de  $\sigma$  dans le problème (11.15).

Sur la Figure 11.3, nous représentons la solution  $u_h$  du problème (11.16) dans la configuration  $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$ , *i.e.* dans le cas où  $\kappa_\sigma = -1$ . Nous n'observons pas de comportement singulier au voisinage de l'interface contrairement à ce que nous aurions obtenu en discrétisant le problème « trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $(\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega$ , pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  ». Ce résultat est en accord avec le caractère Fredholm de l'opérateur  $B$ . Lorsqu'on observe cette simulation numérique, il n'est pas évident de retrouver le changement de signe dans l'équation. Ceci vient du fait que la solution dans  $H_0^2(\Omega)$ , à l'interface, vérifie les conditions de raccord  $[u]|_\Sigma = [\nu_\Sigma \cdot \nabla u]|_\Sigma = 0$ . On n'observe donc pas la « cassure » caractéristique de la solution du problème « trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $(\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega$ , pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  », due à la relation de transmission  $[\sigma \nu_\Sigma \cdot \nabla u]|_\Sigma = 0$ .

La Figure 11.4 montre une vue en coupe dans le plan d'équation  $y = 0$  des solutions du problème (11.16) pour  $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$  et  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ . Il y a bien une différence entre ces deux solutions. Sur la Figure 11.5, on trace la norme  $\|\Delta u_h\|_\Omega$  de la solution du problème (11.16) en fonction du contraste  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ . Plus précisément, on fixe  $\sigma_1 = 1$  et on fait varier  $\sigma_2$ . On remarque la présence de pics laissant penser que l'opérateur  $B$  n'est pas toujours injectif. Ceci concorde avec les calculs menés en 1D dans le §11.2.3. Pour nous assurer que le calcul n'est pas complètement faux, nous avons affiché la norme de  $u_h$  pour des contrastes positifs (Figure 11.5, en haut). Pour de telles valeurs de  $\kappa_\sigma$ , le problème (11.15) est bien posé et il n'y a pas de pics. La dernière remarque concerne l'intervalle de contrastes dans lequel se situe les pics. Dans le §11.3, nous avons prouvé que l'opérateur  $B$  est un isomorphisme pour  $\kappa_\sigma \ll -1$  et  $\kappa_\sigma^{-1} \ll -1$ . Encore une fois, les deux courbes de la Figure 11.5 sont en accord avec ce résultat.

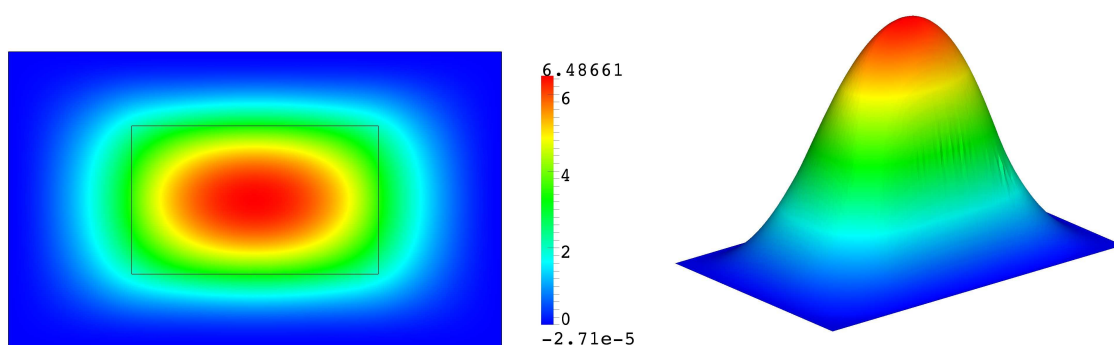


FIGURE 11.3 – Approximation numérique de la solution du problème (11.15) pour  $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$ .

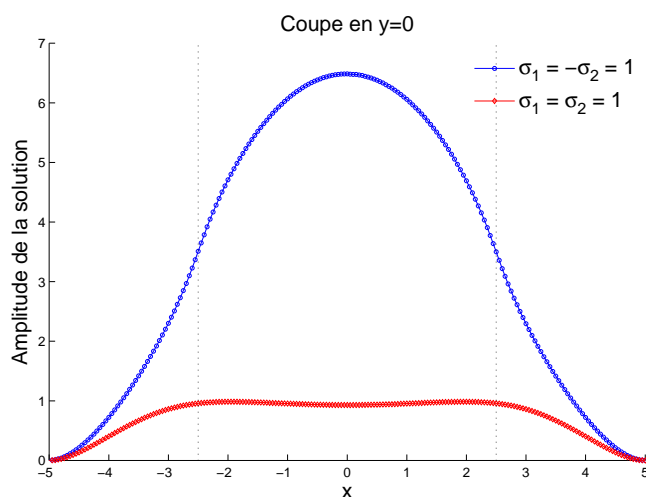


FIGURE 11.4 – Vue en coupe dans le plan d'équation  $y = 0$  des solutions du problème (11.16) pour  $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$  (en bleu) et  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  (en rouge).

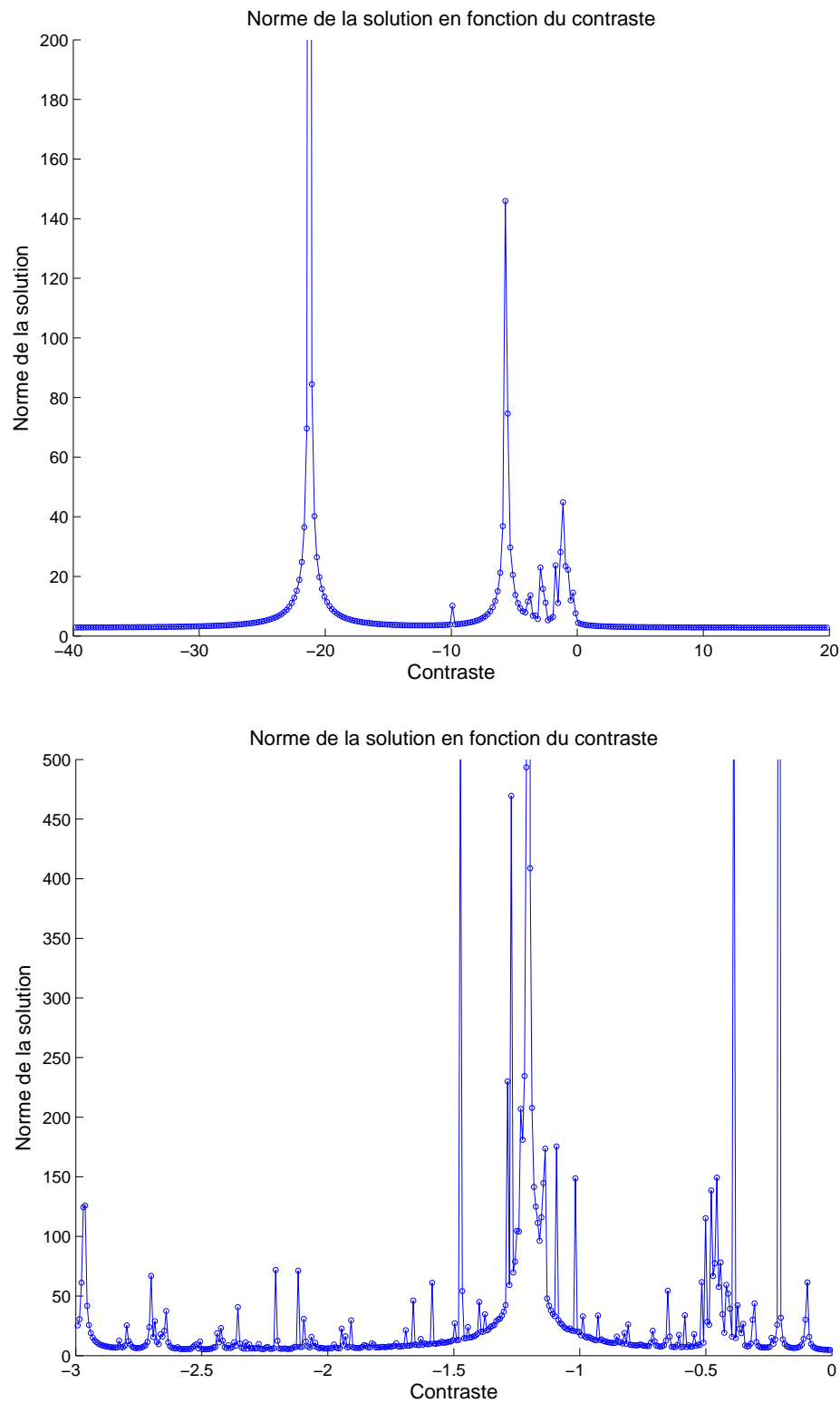


FIGURE 11.5 – Approximation numérique de la solution du problème (11.15) en fonction du contraste  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ . On fixe  $\sigma_1 = 1$  et on fait varier  $\sigma_2$ . En haut,  $\sigma_2 \in [-40; 20] \setminus \{0\}$ . En bas, on fait un zoom pour  $\sigma_2 \in [-3; 0[$ .



## 11.4 Étude du problème de bilaplacien avec changement de signe avec conditions mixtes

Revenons à l'étude du problème de bilaplacien avec conditions aux limites mixtes, posé dans le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta \sigma \Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \sigma \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (11.17)$$

Pour  $f \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^*$ , nous avons prouvé avec le Théorème 11.2.1 que ce problème est bien posé quand  $\Omega$  est convexe ou de classe  $\mathcal{C}^2$ , et lorsque  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  vérifie  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Nous voulons dans cette partie étudier d'autres configurations, notamment des situations dans lesquelles  $\Omega$  n'est ni de classe  $\mathcal{C}^2$  ni convexe. Nous supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert à frontière  $\partial\Omega$  polygonale.

De nouveau, nous munirons  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  du produit scalaire  $(u, v) \mapsto (u, v)_{H_0^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)_\Omega$ . En intégrant par parties, on prouve l'estimation *a priori* (voir [88, théorème 2.2.3] ou [96, 110]) :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_\Omega, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que du domaine  $\Omega$ . Cette estimation apporte beaucoup d'informations. Elle montre que l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est injectif à image fermée (c'est un monomorphisme). On peut ensuite caractériser l'orthogonal de l'image de l'opérateur  $\Delta$  dans  $L^2(\Omega)$ . Le théorème 2.3.7 de [88] indique qu'il est de dimension finie  $N$  où  $N$  est le nombre de sommets de  $\partial\Omega$  dont l'ouverture est plus grande que  $\pi$ . Ainsi,  $\Delta$  est un opérateur injectif de type Fredholm d'indice  $-N$ . Lorsqu'il n'y a pas de coin rentrant, *i.e.* lorsque  $\Omega$  est convexe, on retrouve le fait que le Laplacien avec condition de Dirichlet homogène définit un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Dans le paragraphe 11.2.1, nous avons défini la forme sesquilinéaire

$$\tilde{b}(v, \varphi) = (\sigma \Delta v, \Delta \varphi)_\Omega, \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

et l'opérateur continu de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  associé tel que

$$(\tilde{B}v, \varphi)_{H_0^2(\Omega)} = \tilde{b}(v, \varphi), \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (11.18)$$

### 11.4.1 Le paradoxe de Sapongyan pour le cas $\sigma$ positif

Supposons dans ce paragraphe qu'il existe une constante  $C$  telle que  $\sigma \geq C > 0$  p.p. dans  $\Omega$ . Dans ce cas, la forme  $\tilde{b}$  est coercive sur  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  que le domaine  $\Omega$  soit convexe ou non. D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (11.17) possède une unique solution et  $\tilde{B}$  constitue un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .

Maintenant cherchons à résoudre en deux étapes le problème (11.17). Pour simplifier, supposons ici que  $f$  appartient à  $H^{-1}(\Omega)$ . Notons  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  la fonction telle que  $\Delta v_0 = f$ . Introduisons ensuite  $u_0$  l'élément de  $H_0^1(\Omega)$  satisfaisant  $\Delta u_0 = \sigma^{-1} v_0$ . Lorsque  $\Omega$  est convexe, on a  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Dans ce cas,  $u_0$  vérifie le problème (11.17). Puisque celui-ci est bien posé, on déduit  $u_0 = u$ . Quand  $\Omega$  n'est pas convexe, il peut arriver qu'on ait  $u_0 \notin H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Dans cette situation, on a  $\Delta \sigma \Delta u_0 = f$  dans  $\Omega$  et  $u_0 = \sigma \Delta u_0 = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$  mais  $u_0$  n'est pas la solution du problème (11.17). C'est ce que S.A. Nazarov et G.H. Sweers appellent, dans les articles très instructifs [120, 121, 122], le *paradoxe de Sapongyan*. Ce dernier, mathématicien russe du début du XIX<sup>ème</sup> siècle, obtenait, grâce à des techniques de transformations conformes, une solution qui n'était pas d'énergie mécanique finie. Puisqu'il n'avait pas d'explication, il a qualifié ce phénomène de paradoxe.

Néanmoins, et c'est l'objet des articles [120, 121, 122], il existe un moyen de résoudre le problème de bilaplacien (11.17) en deux étapes tout en obtenant bien la solution d'énergie finie, c'est-à-dire celle dans  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Pour simplifier, nous commençons par supposer que  $\Omega$  ne présente qu'un seul coin rentrant  $O$  dont l'ouverture est égale à  $\alpha \in ]\pi; 2\pi[$  (cf. Figure 11.6). La méthode consiste à résoudre de façon intelligente les deux problèmes de Laplacien avec condition de Dirichlet homogène qui apparaissent dans le problème (11.17). Avant d'aller plus loin, nous devons rappeler quelques éléments classiques de la théorie des singularités pour le problème du Laplacien dans un polygone non convexe.

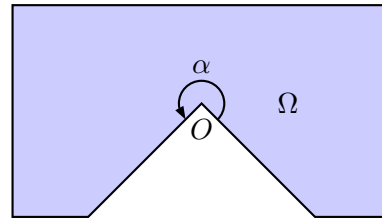


FIGURE 11.6 – Frontière polygonale non convexe présentant un seul coin rentrant –  $N = 1$ .

Introduisons  $\zeta$  telle que

$$\zeta(\mathbf{x}) = r^{-\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha) + \tilde{\zeta}(\mathbf{x}). \tag{11.19}$$

où  $\tilde{\zeta}$  est l'unique fonction de  $H^1(\Omega)$  vérifiant  $\Delta\tilde{\zeta} = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\tilde{\zeta} = -r^{-\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha)$  p.p. sur  $\partial\Omega$ . Ici,  $(r, \theta)$  désignent les coordonnées polaires centrées en  $O$  avec  $\mathbf{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Nous supposons  $\Omega$  non convexe en  $O$ . Ceci impose  $0 < \pi/\alpha < 1$ . Par un calcul direct, on montre alors que  $\mathbf{x} \mapsto r^{-\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha)$  appartient à  $L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$ . Cela prouve que  $\zeta$  n'est pas nulle. Résumons les propriétés vérifiées par  $\zeta$ . On a  $\zeta \neq 0$ ,  $\zeta \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$ ,  $\Delta\zeta = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\zeta = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$ . En fait,  $\zeta$  constitue une base de l'espace des fonctions présentant de telles propriétés. Avec le lemme 2.3.6 de [88], on prouve la

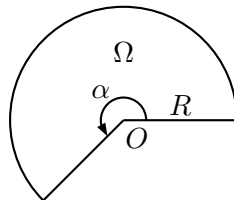
**Proposition 11.4.1** *Soit  $\varphi \in L^2(\Omega)$  une fonction telle que  $\Delta\varphi = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\varphi = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$ . Alors il existe une constante  $a$  telle que  $\varphi = a\zeta$ .*

On déduit que toute fonction  $v \in L^2(\Omega)$  vérifiant  $\Delta v = f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $v = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$ , admet la décomposition

$$v(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) + a\zeta(\mathbf{x}), \tag{11.20}$$

avec  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant  $\Delta v_0 = f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $a$  constante. Autrement dit, l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Omega)$  telles que  $\Delta v = f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $v = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$  est un espace affine de dimension un.

**Remarque 11.4.2** *Pour le domaine particulier  $\Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \alpha\}$ , avec  $R > 0$  et  $\alpha \in ]\pi; 2\pi[$ , on a  $\zeta(\mathbf{x}) = (r^{-\pi/\alpha} - R^{-2\pi/\alpha} r^{\pi/\alpha}) \sin(\pi\theta/\alpha)$ .*



Présentons ensuite un résultat de décomposition en partie singulière/partie régulière des éléments de  $H_0^1(\Omega)$  à Laplacien dans  $L^2(\Omega)$ .

**Proposition 11.4.3** *Considérons  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta\varphi = g \in L^2(\Omega)$ . Alors  $\varphi$  admet la décomposition*

$$\varphi(\mathbf{x}) = c r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha) + \tilde{\varphi}(\mathbf{x}), \tag{11.21}$$

avec  $\tilde{\varphi} \in H^2(\Omega)$ . Par ailleurs, le coefficient de singularité  $c$  dans (11.21) est donné par l'expression

$$c = -(\pi)^{-1}(g, \zeta)_\Omega.$$

**Remarque 11.4.4** Pour montrer la deuxième partie de cette proposition, on travaille exactement comme dans la Proposition 5.3.3 du Chapitre 5 : on intègre par parties dans  $(\Delta\varphi, \zeta)_{\Omega_\delta}$  où  $\Omega_\delta := \Omega \setminus \overline{B(0, \delta)}$ , on utilise la relation  $\Delta\zeta = 0$  p.p. dans  $\Omega$ , puis on fait tendre  $\delta$  vers 0.

En remarquant que  $\mathbf{x} \mapsto r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha)$  appartient à  $H^1(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$  (car  $\pi/\alpha < 1$ ), on déduit le

**Corollaire 11.4.5** Soit  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta\varphi = g \in L^2(\Omega)$ . Alors  $\varphi \in H^2(\Omega)$  si et seulement si  $(g, \zeta)_\Omega = 0$ .

Nous disposons maintenant de tous les outils pour résoudre le problème (11.17) en deux étapes. Considérons  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et définissons  $v \in L^2(\Omega)$  comme en (11.20). D'après le Corollaire 11.4.5, pour que la fonction  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta u_0 = \sigma^{-1}v$  soit dans  $H^2(\Omega)$ , il faut bien choisir  $v$ , grâce au degré de liberté que l'on a dans (11.20). Plus précisément, dans (11.20), il faut prendre  $a$  tel que

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma^{-1}v, \zeta)_\Omega = (\sigma^{-1}v_0, \zeta)_\Omega + a(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \\ \Leftrightarrow a &= -(\sigma^{-1}v_0, \zeta)_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Résumons le processus pour obtenir la solution dans  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  du problème (11.17) :

- ◇ 1. On considère  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  la fonction vérifiant  $\Delta v_0 = f$ .
- ◇ 2. On introduit  $v = v_0 + a\zeta$  avec  $\zeta$  définie par (11.19) et  $a$  constante.
- ◇ 3. On choisit  $a = -(\sigma^{-1}v_0, \zeta)_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega$  de sorte que  $(\sigma^{-1}v, \zeta)_\Omega = 0$ .
- ◇ 4. La fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta u = \sigma^{-1}v$  est alors la solution de (11.17) car elle appartient à  $H^2(\Omega)$ .

### 11.4.2 Étude dans le cas où $\sigma$ change de signe

Lorsque  $\sigma$  change de signe, la forme sesquilinéaire  $\tilde{b}$  associée au problème (11.17) n'est bien sûr plus coercive. Lorsque le domaine  $\Omega$  est convexe ou de classe  $\mathcal{C}^2$ , en utilisant la technique de la T-coercivité, nous avons montré dans le Théorème 11.2.1 que le problème (11.17) est bien posé. D'autre part, dans la deuxième preuve du Théorème 11.2.1, nous avons prouvé que sous ces hypothèses, le problème de bilaplacien (11.17) peut également se résoudre en deux étapes. Nous souhaitons maintenant étudier le cas où  $\Omega$  n'est ni convexe ni de classe  $\mathcal{C}^2$ . Rappelons que nous avons supposé la frontière  $\partial\Omega$  polygonale. Nous allons prouver que le problème (11.17) est bien posé au sens de Fredholm. Cependant, et c'est la nouveauté par rapport au cas  $\Omega$  convexe ou de classe  $\mathcal{C}^2$ , selon les valeurs de  $\sigma$ , il peut apparaître un noyau (et un conoyau) dont la dimension est inférieure ou égale au nombre de coins rentrants du domaine.

#### Frontière présentant un seul coin rentrant

Pour débiter, nous supposons que  $\partial\Omega$  ne présente qu'un coin rentrant situé en  $O$ , d'ouverture  $\alpha \in ]\pi; 2\pi[$ . Pour nous donner une intuition, étudions le noyau de l'opérateur  $\tilde{B}$ . Si  $u$  vérifie le problème (11.17) avec  $f = 0$ , nous savons d'après la Proposition 11.4.1 qu'il existe une constante  $a$  telle que  $\Delta u = a\sigma^{-1}\zeta$ . Puisque  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , en vertu du Corollaire 11.4.5, on a alors nécessairement la relation

$$a(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0. \quad (11.23)$$

Ceci nous amène à considérer deux cas : ou bien  $\sigma$  est tel que  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$  ou bien  $\sigma$  est tel que  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$ .

\*\*\*\*\*

CAS  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$

\*\*\*\*\*

Supposons d'abord  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ . On a alors la

**Proposition 11.4.6** *Supposons que la frontière de  $\Omega$  soit un polygone comportant un coin rentrant. Supposons que  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  vérifie  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$  et  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ , où  $\zeta$  est définie en (11.19). Alors pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème (11.17) possède une unique solution avec l'estimation de continuité*

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

**Preuve.** ★ INJECTIVITÉ. Soit  $u$  un élément du noyau de  $\tilde{B}$ . Nous venons de voir qu'il doit satisfaire la relation  $\Delta u = a\sigma^{-1}\zeta$  avec  $a$  telle que  $a(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$ . Lorsque  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ , nous déduisons  $\Delta u = 0$ . Puisque l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est injectif, ceci entraîne  $u = 0$ .

★ SURJECTIVITÉ. En reprenant la démarche du paragraphe précédent, on observe que lorsque  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ , on peut continuer à exploiter le degré de liberté dans (11.22) pour construire une solution dans  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  au problème (11.17). Plus précisément, pour  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , on considère  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  la fonction vérifiant  $\Delta v_0 = f$ . On introduit  $v = v_0 + a\zeta$  avec  $\zeta$  définie par (11.19) et  $a = -(\sigma^{-1}v_0, \zeta)_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega$ . La fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta u = \sigma^{-1}v$  est alors une solution de (11.17) car elle appartient à  $H^2(\Omega)$ . On a de plus les estimations suivantes, avec  $C$  constante variant d'une ligne à l'autre,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^2(\Omega)} &\leq C \|\sigma^{-1}v\|_\Omega \\ &\leq C (\|v_0\|_\Omega + |a|) \\ &\leq C (\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} + |(\sigma^{-1}v_0, \zeta)_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega|) \\ &\leq C \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Pour la forme, montrons ce résultat avec la technique de la T-coercivité.

**Proposition 11.4.7** *Supposons que la frontière de  $\Omega$  soit un polygone comportant un coin rentrant. Supposons que  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  vérifie  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$  et  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ , où  $\zeta$  est définie en (11.19). Alors  $\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  définit un isomorphisme.*

**Preuve.** Introduisons l'opérateur  $T$  qui à  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  associe la fonction  $Tu \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta(Tu) = \sigma^{-1}(\Delta u + a\zeta)$  avec  $a = -(\sigma^{-1}\Delta u, \zeta)_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega$ . Puisque  $(\sigma^{-1}(\Delta u + a\zeta), \zeta)_\Omega = 0$ , nous savons que  $Tu$  appartient à  $H^2(\Omega)$  d'après le Corollaire 11.4.5. Ainsi,  $T$  constitue un opérateur continu de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Pour tout  $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , on calcule alors

$$\begin{aligned} (\tilde{B}(Tu), v)_{H_0^2(\Omega)} &= \tilde{b}(Tu, v) = (\sigma \Delta(Tu), \Delta v)_\Omega \\ &= (\Delta u + a\zeta, \Delta v)_\Omega \\ &= (\Delta u, \Delta v)_\Omega = (u, v)_{H_0^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne s'obtient en remarquant que  $(\zeta, \Delta v)_\Omega = 0$  car  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  (Corollaire 11.4.5). Ainsi, nous avons  $\tilde{B} \circ T = \text{Id}$ . Puisque  $\tilde{B}$  est autoadjoint, nous déduisons que  $\tilde{B}$  constitue un isomorphisme avec  $\tilde{B}^{-1} = T$ . ■

**Remarque 11.4.8** *Le résultat de la Proposition 11.4.7 est un peu plus général que celui de la Proposition 11.4.6 car il indique que le problème (11.17) est bien posé pour un second membre dans  $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^*$ , espace plus gros que  $H^{-1}(\Omega)$ .*

Arrêtons là l'étude du cas  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$  et intéressons-nous à la situation  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$ .

$$\begin{aligned} & \star \star \star \star \star \\ & \text{CAS } (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0 \\ & \star \star \star \star \star \end{aligned}$$

Nous n'allons plus pouvoir utiliser ce fameux degré de liberté pour construire une solution au problème (11.22) dans  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  et il va apparaître un noyau ainsi qu'un conoyau. Notons  $\psi$  la fonction de  $H_0^1(\Omega)$  satisfaisant

$$\Delta\psi = \sigma^{-1}\zeta. \tag{11.24}$$

Puisque  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$ , le Corollaire 11.4.5 indique que  $\psi$  appartient à  $H^2(\Omega)$ . Par conséquent,  $\psi$  constitue un élément de  $\ker \tilde{B}$ . Pour caractériser le conoyau associé au problème (11.17), introduisons la fonction  $\xi \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$(\nabla\xi, \nabla\xi')_\Omega = (\sigma^{-1}\zeta, \xi')_\Omega, \quad \forall \xi' \in H_0^1(\Omega). \tag{11.25}$$

On a alors la

**Proposition 11.4.9** *Supposons que la frontière de  $\Omega$  soit un polygone comportant un coin rentrant. Supposons que  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  vérifie  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$  et  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$ . Alors pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème (11.17) possède une solution si et seulement si  $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$ . Dans ce cas, la solution est définie à la droite  $\text{vect}(\psi)$  près.*

*Dans cet énoncé, les fonctions  $\zeta$ ,  $\xi$  et  $\psi$  sont respectivement définies en (11.19), (11.25) et (11.24).*

**Preuve.**  $\star$  NOYAU. Si  $u$  appartient à  $\ker \tilde{B}$  alors, d'après (11.23), on a  $\sigma \Delta u = a\zeta$  où  $a$  est une constante. Ainsi,  $\ker \tilde{B} \subset \text{vect}(\psi)$ . Comme indiqué précédemment, on a  $\psi \in \ker \tilde{B}$  et donc  $\ker \tilde{B} = \text{vect}(\psi)$ .

$\star$  CONOYAU. Considérons  $f \in H^{-1}(\Omega)$  tel que  $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$ . Dans ce cas, la fonction  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta v_0 = f$  satisfait la relation de compatibilité  $(\sigma^{-1}v_0, \zeta)_\Omega = 0$ . Par conséquent, toujours en vertu du Corollaire 11.4.5, la fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant  $\Delta u = \sigma^{-1}v_0$  est dans  $H^2(\Omega)$  et constitue donc une solution du problème (11.17). Maintenant considérons  $f \in H^{-1}(\Omega)$  tel que  $\langle f, \xi \rangle_\Omega \neq 0$ . Supposons qu'il existe une solution  $u$  au problème (11.17). Alors, on a  $\sigma \Delta u = v_0 + a\zeta$ , où  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  satisfait  $\Delta v_0 = f$  et  $a$  est une constante. Ceci impose,  $(\sigma^{-1}v_0, \zeta)_\Omega = 0$ . Mais l'on a  $(\sigma^{-1}v_0, \zeta)_\Omega = \langle f, \xi \rangle_\Omega$ . Nous sommes donc conduits à une absurdité. Ceci montre qu'il existe une solution au problème (11.17) si et seulement si  $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$ .  $\blacksquare$

### Frontière présentant plusieurs coins rentrants

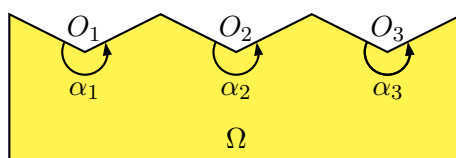


FIGURE 11.7 – Frontière polygonale non convexe présentant trois coins rentrants –  $N = 3$ .

Supposons que la frontière  $\partial\Omega$  présente  $N$  coins rentrants  $O_i$  d'ouverture  $\alpha_i \in ]\pi; 2\pi[$ ,  $i = 1 \dots N$  (voir Figure 11.7). Nous notons  $(r_i, \theta_i)$  les coordonnées polaires associées à  $O_i$ . Commençons par rappeler quelques résultats de la théorie des singularités pour le problème du Laplacien dans un polygone comportant plusieurs coins rentrants.

Pour  $i = 1 \dots N$ , introduisons  $\zeta_i \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$  la fonction telle que

$$\zeta(\mathbf{x}) = r_i^{-\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i) + \tilde{\zeta}_i(\mathbf{x}). \quad (11.26)$$

où  $\tilde{\zeta}_i$  est l'unique élément de  $H^1(\Omega)$  vérifiant  $\Delta\tilde{\zeta}_i = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\tilde{\zeta}_i = -r_i^{-\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i)$  p.p. sur  $\partial\Omega$ . Notons que  $\zeta_i \neq 0$ ,  $\zeta_i \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$ ,  $\Delta\zeta_i = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\zeta_i = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$ . Le résultat suivant généralise la Proposition 11.4.1 au cas où il y a plusieurs coins rentrants dans la frontière  $\partial\Omega$ .

**Proposition 11.4.10** *La famille  $(\zeta_i)_{i=1}^N$  constitue une base de l'espace  $\{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \Delta\varphi = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \varphi = 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega\}$ .*

**Preuve.** Avec le lemme 2.3.6 de [88], on montre que si  $\varphi \in L^2(\Omega)$  est une fonction telle que  $\Delta\varphi = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\varphi = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$ , alors il existe  $N$  constantes  $a_1, \dots, a_N$  telles que  $\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \zeta_i$ . Ainsi,  $(\zeta_i)_{i=1}^N$  est une famille génératrice de  $\{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \Delta\varphi = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \varphi = 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega\}$ . D'autre part, si  $\sum_{i=1}^N a_i \zeta_i = 0$  p.p. dans  $\Omega$ , puisque les fonctions  $\mathbf{x} \mapsto r_i^{-\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i)$  ne sont pas  $H^1$  localement au voisinage de  $O_i$ , on déduit  $a_1 = \dots = a_N = 0$ . La famille  $(\zeta_i)_{i=1}^N$  est donc libre. ■

La Proposition 11.4.10 montre que toute fonction  $v \in L^2(\Omega)$  vérifiant  $\Delta v = f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $v = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$ , admet la décomposition

$$v(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i \zeta_i(\mathbf{x}). \quad (11.27)$$

Ci-dessus,  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  est la fonction vérifiant  $\Delta v_0 = f \in H^{-1}(\Omega)$  tandis que  $a_1, \dots, a_N$  sont des constantes.

En présence de  $N$  coins rentrants dans la frontière, le résultat de décomposition en partie singulière/partie régulière des éléments de  $H_0^1(\Omega)$  à Laplacien dans  $L^2(\Omega)$  devient (cf. théorème 6.4.4 et paragraphe 6.6.1. de [102]) :

**Proposition 11.4.11** *Considérons  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta\varphi = g \in L^2(\Omega)$ . Alors  $\varphi$  admet la décomposition*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N c_i r_i^{\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i) + \tilde{\varphi}_i(\mathbf{x}), \quad (11.28)$$

avec  $\tilde{\varphi}_i \in H^2(\Omega)$ ,  $i = 1 \dots N$ . Par ailleurs, le coefficient de singularité  $c_i$  dans (11.28) est donné par la formule

$$c_i = -(\pi)^{-1}(g, \zeta_i)_\Omega.$$

En remarquant que  $\mathbf{x} \mapsto r_i^{\pi/\alpha_i} \sin(\pi\theta_i/\alpha_i)$  appartient à  $H^1(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$ , on déduit le

**Corollaire 11.4.12** *Soit  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta\varphi = g \in L^2(\Omega)$ . Alors  $\varphi \in H^2(\Omega)$  si et seulement si  $(g, \zeta_i)_\Omega = 0$  pour  $i = 1 \dots N$ .*

Nous sommes maintenant en mesure de nous lancer dans l'étude du problème (11.17). De nouveau, pour nous faire une idée, considérons  $u$  une solution de (11.17) avec  $f = 0$ . D'après la Proposition 11.4.10, on a alors  $\sigma\Delta u = \sum_{i=1}^N a_i \zeta_i$  où  $a_1, \dots, a_N$  sont des constantes. Puisque  $u \in H^2(\Omega)$ , on doit avoir  $(\sum_{i=1}^N a_i \sigma^{-1} \zeta_i, \zeta_j)_\Omega = 0$  pour  $j = 1 \dots N$ . Ceci nous conduit à introduire la matrice

$$\mathbb{M} := \begin{pmatrix} (\sigma^{-1}\zeta_1, \zeta_1)_\Omega & \dots & (\sigma^{-1}\zeta_1, \zeta_N)_\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sigma^{-1}\zeta_N, \zeta_1)_\Omega & \dots & (\sigma^{-1}\zeta_N, \zeta_N)_\Omega \end{pmatrix}. \quad (11.29)$$

Divisons notre étude en deux cas selon la dimension du noyau de  $\mathbb{M}$ .



\*\*\*\*\*

CAS  $\mathbb{M}$  INVERSIBLE

\*\*\*\*\*

Supposons la matrice  $\mathbb{M}$  inversible. Construisons une base duale de  $\text{vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  qui nous servira dans la suite.

**Lemme 11.4.13** *Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Supposons de plus  $\sigma$  tel que la matrice  $\mathbb{M}$  soit inversible. Alors il existe  $N$  fonctions  $\lambda_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , appartenant à  $\text{vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ , telles que*

$$(\sigma^{-1}\lambda_i, \zeta_j)_\Omega = \delta_{ij}, \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

**Preuve.** Soit  $\mathbb{A}$  l'inverse de  $\mathbb{M}$ . Il suffit de prendre  $\lambda_i := \sum_{k=1}^N \mathbb{A}_{ik} \zeta_k$ . ■

On peut alors prouver la

**Proposition 11.4.14** *Soit  $\Omega$  un polygone comportant  $N$  coins rentrants. Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Supposons de plus  $\sigma$  tel que la matrice  $\mathbb{M}$  définie en (11.29) soit inversible. Alors pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème (11.17) possède une unique solution avec l'estimation de continuité*

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

**Preuve.** ★ INJECTIVITÉ. Si  $u$  est un élément de  $\ker \tilde{B}$ , on a  $\sigma \Delta u = \sum_{i=1}^N a_i \zeta_i$  où les  $a_i$  sont des constantes. Puisque  $u$  appartient à  $H^2(\Omega)$ , les relations de compatibilité impliquent  $(\sum_{i=1}^N a_i \sigma^{-1} \zeta_i, \zeta_j)_\Omega = 0$  pour  $j = 1 \dots N$ . Ceci implique  $a_1 = \dots = a_N = 0$  car la matrice  $\mathbb{M}$  est inversible. Ainsi, nous pouvons écrire  $\Delta u = 0$ . Une nouvelle fois, on déduit  $u = 0$  car l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est injectif.

★ SURJECTIVITÉ. Considérons  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Introduisons  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta v_0 = f$ . Définissons ensuite  $v := v_0 - \sum_{i=1}^N a_i \lambda_i$  avec, pour  $i = 1 \dots N$ ,  $a_i := (\sigma^{-1} v_0, \zeta_i)_\Omega$ . La fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta u = \sigma^{-1} v$  est alors dans  $H^2(\Omega)$  car le second membre vérifie les conditions de compatibilité. Ceci termine la preuve. ■

Prouvons ce résultat avec la méthode de la T-coercivité.

**Proposition 11.4.15** *Soit  $\Omega$  un polygone comportant  $N$  coins rentrants. Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Supposons de plus  $\sigma$  tel que la matrice  $\mathbb{M}$  définie en (11.29) soit inversible. Alors  $\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  définit un isomorphisme.*

**Preuve.** Introduisons l'opérateur  $T$  qui à  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  associe la fonction  $Tu \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta(Tu) = \sigma^{-1}(\Delta u + \sum_{i=1}^N a_i \lambda_i)$  avec, pour  $i = 1 \dots N$ ,  $a_i = -(\sigma^{-1} \Delta u, \zeta_i)_\Omega$ . Puisque  $(\sigma^{-1}(\Delta u + \sum_{i=1}^N a_i \lambda_i), \zeta_j)_\Omega = 0$  pour  $j = 1 \dots N$ , on a  $Tu \in H^2(\Omega)$  d'après le Corollaire 11.4.12. Ainsi,  $T$  est un opérateur continu de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . On vérifie alors comme dans la preuve de la Proposition 11.4.7 l'égalité  $\tilde{B} \circ T = \text{Id}$ . Ceci montre que  $\tilde{B}$  et  $T$  sont des isomorphismes de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  avec  $\tilde{B}^{-1} = T$ . ■

**Remarque 11.4.16** *L'hypothèse «  $\mathbb{M}$  inversible » porte uniquement sur les valeurs de  $\sigma$  en fonction de la géométrie du domaine. En effet, les singularités  $\zeta_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , ne dépendent que de la géométrie de  $\Omega$ .*

**Remarque 11.4.17** *Lorsqu'il n'y a qu'un coin rentrant dans  $\partial\Omega$ , la matrice  $\mathbb{M}$ , un scalaire dans ce cas, est inversible si et seulement si  $(\sigma^{-1} \zeta_1, \zeta_1)_\Omega \neq 0$ . On retrouve ainsi le résultat de la Proposition 11.4.6.*

**Remarque 11.4.18** Lorsque  $\sigma \geq C > 0$ , la matrice  $\mathbb{M}$  est toujours inversible. En effet, si  $(a_1 \dots a_N)^t \in \ker \mathbb{M}$ , alors la fonction  $\tau := \sum_{i=1}^N a_i \zeta_i$  vérifie  $(\sigma^{-1} \tau, \zeta_j)_\Omega = 0$  pour  $j = 1 \dots N$ , et donc  $(\sigma^{-1} \tau, \tau)_\Omega = 0$ . Cela implique  $\tau = 0$ . Puisque la famille  $(\zeta_i)_{i=1}^N$  est libre, on déduit  $a_1 = \dots = a_N = 0$ . Ceci est cohérent avec le fait que  $\tilde{b}$  est coercive sur  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  lorsque  $\sigma \geq C > 0$ .

\*\*\*\*\*

CAS  $\mathbb{M}$  NON INVERSIBLE

\*\*\*\*\*

Supposons à présent que la matrice  $\mathbb{M}$  définie en (11.29) possède un noyau de dimension  $M > 0$ . Introduisons  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M$  une base de ce noyau avec  $\mathbf{b}_m = (b_{m1} \dots b_{mN})^t$  pour  $m = 1 \dots M$ . Définissons ensuite les fonctions

$$\beta_m := \sum_{i=1}^N b_{mi} \zeta_i. \quad (11.30)$$

**Lemme 11.4.19** La famille  $(\beta_1, \dots, \beta_M)$  constitue une famille libre de  $\text{vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ .

**Preuve.** Supposons  $\sum_{i=1}^M a_i \beta_i = 0$ . Ceci implique

$$0 = \sum_{i=1}^M a_i \left( \sum_{j=1}^N b_{ij} \zeta_j \right) = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^M a_i b_{ij} \right) \zeta_j = 0.$$

Puisque la famille  $(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  est libre, on déduit  $\sum_{i=1}^M a_i b_{ij} = 0$  pour  $j = 1 \dots N$ . Autrement dit, on a  $\sum_{i=1}^M a_i \mathbf{b}_i = 0$ . Puisque  $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_M$  est une base de  $\ker \mathbb{M}$ , on a nécessairement  $a_1 = \dots = a_M = 0$ . Cela termine la preuve de ce lemme. ■

Introduisons alors  $N - M$  fonctions  $\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M}$  telles que

$$\text{vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \text{vect}(\beta_1, \dots, \beta_M) \oplus \text{vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M}).$$

Prouvons l'existence d'une base duale sur  $\text{vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M})$ .

**Lemme 11.4.20** Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Supposons de plus  $\sigma$  tel que la matrice  $\mathbb{M}$  définie en (11.29) possède un noyau de dimension  $M > 0$ . Alors il existe  $N - M$  fonctions  $\lambda_i$ ,  $i = 1 \dots N - M$ , appartenant à  $\text{vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M})$ , telles que

$$(\sigma^{-1} \lambda_i, \gamma_j)_\Omega = \delta_{ij}, \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, N - M\}.$$

**Preuve.** Définissons la matrice

$$\tilde{\mathbb{M}} := \begin{pmatrix} (\sigma^{-1} \gamma_1, \gamma_1)_\Omega & \dots & (\sigma^{-1} \gamma_1, \gamma_{N-M})_\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sigma^{-1} \gamma_{N-M}, \gamma_1)_\Omega & \dots & (\sigma^{-1} \gamma_{N-M}, \gamma_{N-M})_\Omega \end{pmatrix}. \quad (11.31)$$

Prouvons que cette matrice est inversible. Pour  $(a_1, \dots, a_{N-M})^t \in \ker \tilde{\mathbb{M}}$ , définissons la fonction  $\tau = \sum_{i=1}^{N-M} a_i \gamma_i$ . Pour tout  $j = 1 \dots N - M$ , on a  $(\sigma^{-1} \tau, \gamma_j)_\Omega = 0$ . Puisque  $(\sigma^{-1} \tau, \beta_j)_\Omega = 0$  pour  $j = 1 \dots M$ , on déduit  $(\sigma^{-1} \tau, \zeta_j)_\Omega = 0$  pour  $j = 1 \dots N$ . Ainsi,  $\tau \in \text{vect}(\beta_1, \dots, \beta_N)$ . Puisque, par définition, on a également  $\tau \in \text{vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M})$ , on déduit  $\tau = \sum_{i=1}^{N-M} a_i \gamma_i = 0$ . Or la famille  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-M})$  est libre. Par conséquent,  $a_1 = \dots = a_{N-M} = 0$ . Ceci montre que  $\tilde{\mathbb{M}}$  est inversible. Soit alors  $\tilde{\mathbb{A}}$  l'inverse de  $\tilde{\mathbb{M}}$ . Il ne reste plus qu'à définir  $\lambda_i := \sum_{k=1}^{N-M} \tilde{\mathbb{A}}_{ik} \gamma_k$ . ■

Lorsque la matrice  $\mathbb{M}$  présente un noyau de dimension  $M$ , il va apparaître un noyau et un conoyau de dimensions  $M$  pour le problème (11.17).

Pour caractériser le noyau de  $\tilde{B}$ , introduisons, pour  $i = 1 \dots M$ , la fonction  $\psi_i \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant

$$\Delta\psi_i = \sigma^{-1}\beta_i. \tag{11.32}$$

Puisque  $(\sigma^{-1}\beta_i, \zeta_j)_\Omega = 0$  pour  $j = 1 \dots M$ , nous savons d'après le Corollaire 11.4.12 que  $\psi_i$  appartient à  $H^2(\Omega)$ . Par conséquent,  $\psi_i$  constitue un élément de  $\ker \tilde{B}$ . Pour caractériser le conoyau associé au problème (11.17), introduisons, pour  $i = 1 \dots M$  la fonction  $\xi_i \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$(\nabla\xi_i, \nabla\xi')_\Omega = (\sigma^{-1}\beta_i, \xi')_\Omega, \quad \forall \xi' \in H_0^1(\Omega). \tag{11.33}$$

On a alors la

**Proposition 11.4.21** *Soit  $\Omega$  un polygone comportant  $N$  coins rentrants. Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Supposons de plus  $\sigma$  tel que la matrice  $\mathbb{M}$  définie en (11.29) possède un noyau de dimension  $M > 0$ . Alors pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème (11.17) possède une solution si et seulement si  $\langle f, \xi_i \rangle_\Omega = 0$  pour  $i = 1 \dots M$ . Dans ce cas, la solution est définie à vect $(\psi_1, \dots, \psi_M)$  près.*

*Dans cet énoncé, la matrice  $\mathbb{M}$  et les fonctions  $\xi_i, \psi_i$  sont respectivement définies en (11.29), (11.33) et (11.32).*

**Preuve.**★ NOYAU. Si  $u$  appartient à  $\ker \tilde{B}$  alors, d'après (11.23),  $\sigma\Delta u = \sum_{j=1}^N a_j \zeta_j$  où les  $a_1, \dots, a_N$  sont des constantes. Puisque  $u \in H^2(\Omega)$ , on a nécessairement  $(\sum_{j=1}^N a_j \sigma^{-1}, \zeta_j)_\Omega = 0$  pour  $j = 1 \dots N$ . Ceci implique  $(a_1 \dots a_N)^t \in \ker \mathbb{M} = \text{vect}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M)$ . Autrement dit, il existe des constantes  $c_i, i = 1 \dots M$ , telles que  $(a_1 \dots a_N)^t = \sum_{i=1}^M c_i \mathbf{b}_i$ . On déduit

$$\sigma\Delta u = \sum_{j=1}^N a_j \zeta_j = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^M c_i b_{ij} \right) \zeta_j = \sum_{i=1}^M c_i \left( \sum_{j=1}^N b_{ij} \zeta_j \right) = \sum_{i=1}^M c_i \beta_i.$$

On peut alors écrire  $u = \sum_{i=1}^M c_i \beta_i$ . Ceci montre la relation  $\ker \tilde{B} \subset \text{vect}(\psi_1, \dots, \psi_M)$ . Puisque, l'inclusion réciproque est vraie, on déduit  $\ker \tilde{B} = \text{vect}(\psi_1, \dots, \psi_M)$ .

★ CONOYAU. Considérons  $f \in H^{-1}(\Omega)$  tel que  $\langle f, \xi_i \rangle_\Omega = 0$  pour  $i = 1 \dots M$ . Introduisons la fonction  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant  $\Delta v_0 = f$ . Définissons ensuite  $v := v_0 - \sum_{i=1}^{N-M} a_i \lambda_i$  avec, pour  $i = 1 \dots N-M$ ,  $\alpha_i := (\sigma^{-1}v_0, \zeta_i)_\Omega$ . On a  $(\sigma^{-1}v, \gamma_i)_\Omega = 0$  pour  $i = 1 \dots N-M$ . Mais l'on a également  $(\sigma^{-1}v, \beta_i)_\Omega = 0$  pour  $i = 1 \dots M$ . En effet, d'une part, on  $(\sigma^{-1}v_0, \beta_i)_\Omega = (\nabla v_0, \nabla \xi_i)_\Omega = \langle f, \xi_i \rangle_\Omega = 0$ . D'autre part,  $(\sigma^{-1}\lambda_j, \beta_i)_\Omega = 0$  pour tout  $i = 1 \dots N-M, j = 1 \dots M$ . Ceci prouve  $(\sigma^{-1}v, \zeta_i)_\Omega = 0$  pour  $i = 1 \dots N$ . La fonction  $u$  est donc dans  $H^2(\Omega)$  d'après le Corollaire 11.4.12 et constitue une solution du problème (11.17).

Maintenant considérons  $f \in H^{-1}(\Omega)$  tel que  $\langle f, \xi_i \rangle_\Omega \neq 0$  pour un certain  $i \in \{1, \dots, M\}$ . Supposons qu'il existe une solution  $u$  au problème (11.17). Alors, on a  $\sigma\Delta u = v_0 + \sum_{j=1}^N a_j \zeta_j$ . Ici,  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  satisfait  $\Delta v_0 = f$  et les  $a_1, \dots, a_N$  sont des constantes. On a alors nécessairement  $(\sigma^{-1}v_0, \beta_i)_\Omega = 0$  pour  $i = 1 \dots M$ . Mais puisque  $(\sigma^{-1}v_0, \beta_i)_\Omega = (\nabla v_0, \nabla \xi_i)_\Omega = \langle f, \xi_i \rangle_\Omega$ , nous sommes conduits à une absurdité. Ceci montre qu'il existe une solution au problème (11.17) si et seulement si  $\langle f, \xi_i \rangle_\Omega = 0$  pour  $i = 1 \dots M$ . ■

◇ EXEMPLE. Considérons l'ouvert  $\Omega$  décrit par la Figure 11.8 qui présente la particularité d'être symétrique par rapport à l'axe  $(Ox)$ . On choisit également de placer les sommets des coins rentrants sur l'axe  $(Ox)$ . Dans cette configuration, il est aisé de montrer que les singularités  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  sont symétriques par rapport à l'axe  $(Ox)$ . En effet, pour  $i = 1, 2$ , la fonction  $\hat{\zeta}_i : (x, y) \mapsto \zeta_i(x, -y)$  vérifie  $\hat{\zeta}_i \neq 0, \hat{\zeta}_i \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega), \Delta \hat{\zeta}_i = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\hat{\zeta}_i = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$ . La Proposition 11.4.10 et le comportement de  $\hat{\zeta}_i$  en  $O_i$  imposent alors  $\hat{\zeta}_i = \zeta_i$  pour  $i = 1, 2$ .

Par conséquent, lorsque  $\sigma$  est antisymétrique par rapport à l'axe  $(Ox)$ , *i.e.* lorsque  $\sigma(x, y) = -\sigma(x, -y)$  p.p. dans  $\Omega$ , la matrice  $\mathbb{M}$  est égale à la matrice nulle. Dans cette situation, le problème (11.17) possède un noyau et un conoyau tous deux de dimension 2.

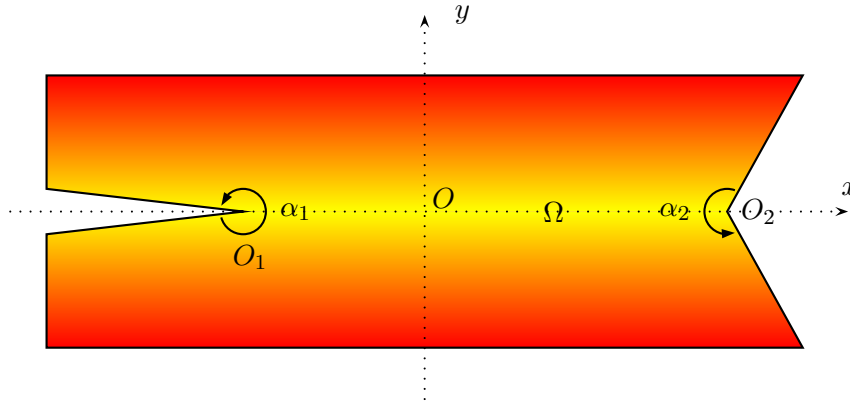


FIGURE 11.8 – Domaine à frontière polygonale symétrique par rapport à l’axe  $(Ox)$ . Ici,  $\Omega$  présente deux coins rentrants –  $N = 2$ .

### 11.4.3 Résultats en dimension supérieure

Présentons maintenant quelques résultats pour le problème (11.17) posé dans le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  avec  $d > 0$ . Comme nous l’avons vu, la nature de ce problème dépend de façon cruciale des propriétés de l’opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ . En 2D, pour un ouvert polygonal, on a les résultats suivants. Ou bien le domaine  $\Omega$  est convexe et alors  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  constitue un isomorphisme. Ou bien,  $\Omega$  présente des coins rentrants et alors  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est Fredholm injectif avec un conoyau de dimension finie égale au nombre de coins rentrants. En dimension  $d > 0$  quelconque, les propriétés de  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  sont plus variées.

#### Domaines réguliers en dimension $d$

Lorsque  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  ([83, théorème 8.12]) ou convexe ([87, théorème 3.2.1.2]), pour tout  $d > 0$ , l’opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  définit un isomorphisme. Dans ce cas, avec la technique de la T-coercivité, on montre comme en 2D la

**Proposition 11.4.22** *Supposons  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d > 0$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  ou convexe. Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Alors  $\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  définit un isomorphisme.*

Lorsque  $\Omega$  n’est ni de classe  $\mathcal{C}^2$  ni convexe, les choses se corsent quelque peu.

#### Pointes coniques non convexes en dimension $d$

Intéressons-nous d’abord aux « singularités géométriques non convexes » de dimension 0. Autrement dit, nous étudions les domaines comportant des *pointes coniques* concaves. Pour simplifier la présentation, nous supposons que  $\Omega$  ne présente qu’une telle singularité :  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est à frontière  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$  mis à part en  $O$ . En ce point,  $\Omega$  coïncide localement avec un cône. Précisons cette notion en introduisant des notations qui serviront à étudier l’opérateur  $\tilde{B}$ . Considérons  $\omega$  un domaine de  $\mathbb{S}^{d-1}$ , la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ . Définissons  $K_\omega^R := \{r\theta \mid 0 < r < R, \theta \in \omega\}$ . Nous supposons qu’il existe  $R > 0$  et  $\omega \subset \mathbb{S}^{d-1}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  tels que  $\Omega \cap B(R, O) = K_\omega^R$ . Ici, nous définissons  $B(R, O) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid |\mathbf{x}| < R\}$ .

Nous savons que le caractère bien posé du problème (11.17) dépend des propriétés de  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ . En vertu du théorème de Lax-Milgram, cet opérateur est injectif en toute dimension. Le travail se résume donc à obtenir des informations sur son conoyau. D’après [100], nous savons qu’un bon point de départ consiste à déterminer les fonctions non triviales de la forme

$$u(\mathbf{x}) = r^\Lambda \Phi(\theta) \tag{11.34}$$

vérifiant le problème

$$\Delta u = 0 \text{ p.p. dans } K_\omega^\infty \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ p.p. sur } \partial K_\omega^\infty.$$

Ici, nous avons noté  $K_\omega^\infty := \{r\boldsymbol{\theta} \mid 0 < r, \boldsymbol{\theta} \in \omega\}$ . Cette recherche de solutions à variables séparées du problème homogène s'apparente au calcul des modes dans les guides d'ondes. En coordonnées sphériques, l'opérateur Laplacien s'écrit formellement

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \tilde{\Delta},$$

où  $\tilde{\Delta}$  désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité. On peut alors obtenir les expressions des exposants de singularité dans (11.34) :

$$\Lambda_k^\pm := 1 - \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 + \mu_k}. \quad (11.35)$$

Ici,  $\mu_k$ , est la  $k^{\text{ième}}$  valeur propre du problème

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \mu \Phi(\boldsymbol{\theta}) & \text{dans } \omega \\ \Phi(\boldsymbol{\theta}) = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}, \quad (11.36)$$

et les fonctions  $\Phi$  dans (11.34) sont égales aux fonctions propres du problème (11.36). L'opérateur de Laplace-Beltrami est autoadjoint défini-positif. Par conséquent, les valeurs propres du problème (11.36) forment la suite

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \quad \text{avec } \mu_k \rightarrow \infty \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Classiquement, la première valeur propre  $\mu_1$  est simple (cf. [93, théorème 1.2.5]). Les exposants positifs de (11.34) vérifient alors

$$0 < \Lambda_1^+ < \Lambda_2^+ \leq \Lambda_3^+ \leq \dots \quad \text{avec } \Lambda_k^+ \rightarrow \infty \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Les exposants négatifs sont eux donnés par  $\Lambda_k^- = 2 - d - \Lambda_k^+$ .

Introduisons maintenant des espaces adaptés pour mesurer les singularités (11.34). Notons  $\mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus O) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \mid \text{supp}(\varphi) \cap B(O, \delta) = \emptyset \text{ pour un certain } \delta > 0\}$ . Pour  $l \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , définissons alors l'espace  $V_\beta^l(\Omega)$  comme la fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus O)$  pour la norme

$$\|\varphi\|_{V_\beta^l(\Omega)} := \left( \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq l} \int_\Omega r^{2(\beta-l+|\boldsymbol{\alpha}|)} |\partial_{\boldsymbol{x}}^\boldsymbol{\alpha} \varphi|^2 d\boldsymbol{x} \right)^{1/2}. \quad (11.37)$$

Dans la définition ci-dessus, pour le multi-indice  $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , nous avons utilisé les notations  $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$  et  $\partial_{\boldsymbol{x}}^\boldsymbol{\alpha} := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ . Attention, les  $\alpha$  ici n'ont pas de rapport avec l'ouverture du cône en  $O$ . Dans la suite, il n'y aura pas de confusion possible. Pour  $l \geq 1$ , on peut définir la trace des éléments de  $V_\beta^l(\Omega)$  sur  $\partial\Omega$ . Celle-ci n'a aucune raison d'être nulle. Pour prendre en compte la condition de Dirichlet homogène, introduisons, pour  $l \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , l'espace  $\mathring{V}_\beta^l(\Omega)$ , fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  pour la norme (11.37).

Pour  $l \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , nous pouvons alors définir les opérateurs

$$\begin{aligned} A_\beta^l : V_\beta^{l+1}(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-l}^1(\Omega) &\rightarrow V_\beta^{l-1}(\Omega) \\ \varphi &\mapsto A_\beta^l \varphi = \Delta \varphi \end{aligned}. \quad (11.38)$$

On a le théorème fondamental (voir notamment [100, 102, 119, 114, 70, 71])

**Théorème 11.4.23** Soit  $\Lambda_1^+$  défini en (11.35). Pour  $l \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $A_\beta^l : V_\beta^{l+1}(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-l}^1(\Omega) \rightarrow V_\beta^{l-1}(\Omega)$  constitue un isomorphisme si et seulement si

$$1 - \Lambda_1^+ < \beta - l + \frac{d}{2} < d - 1 + \Lambda_1^+. \tag{11.39}$$

Plus précisément,

- i) si  $\beta - l + d/2 < 1 - \Lambda_1^+$ ,  $A_\beta^l$  est de type Fredholm injectif mais pas surjectif;
- ii) si  $\beta - l + d/2 > d - 1 + \Lambda_1^+$ ,  $A_\beta^l$  est de type Fredholm surjectif mais pas injectif;
- iii) si  $\beta - l + d/2 = 1 - \Lambda_1^+$  ou si  $\beta - l + d/2 = d - 1 + \Lambda_1^+$ , l'opérateur  $A_\beta^l$  n'est pas de type Fredholm car son image n'est pas fermée dans  $V_\beta^{l-1}(\Omega)$ .

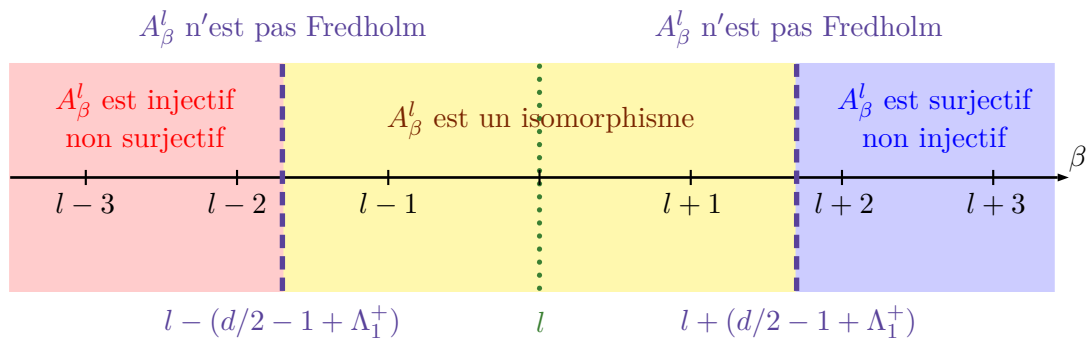


FIGURE 11.9 – Propriétés de l'opérateur  $A_\beta^l : V_\beta^{l+1}(\Omega) \cap \mathring{V}_{\beta-l}^1(\Omega) \rightarrow V_\beta^{l-1}(\Omega)$  en fonction de  $\beta$ ,  $d$  étant la dimension de l'espace.

Pour notre problème, nous nous intéressons à l'opérateur  $A_0^1$ , i.e.  $A_\beta^l$  avec  $l = 1$  et  $\beta = 0$ . En effet, on remarque que  $V_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ . D'autre part, on peut montrer (voir [121, lemme 3.4]) le

**Lemme 11.4.24** On a  $V_0^2(\Omega) \cap \mathring{V}_{-1}^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .

**Remarque 11.4.25** L'injection  $V_0^2(\Omega) \cap \mathring{V}_{-1}^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  est directe. L'autre sens se montre en utilisant une inégalité de Hardy et l'inégalité de Poincaré sur  $\omega \subset \mathbb{S}^{d-1}$ .

\*\*\*\*\*

POINTES CONIQUES EN DIMENSION  $d \geq 4$

\*\*\*\*\*

Le Théorème 11.4.23 indique que l'opérateur  $A_0^1 : V_0^2(\Omega) \cap \mathring{V}_{-1}^1(\Omega) \rightarrow V_0^0(\Omega)$  constitue un isomorphisme si et seulement si

$$1 - \Lambda_1^+ < 0 - 1 + d/2 < d - 1 + \Lambda_1^+ \iff d > 4 - 2\Lambda_1^+.$$

Ceci est toujours vrai en dimension  $d \geq 4$ . En vertu, du Lemme 11.4.24, on déduit que l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  définit un isomorphisme. En procédant comme dans la preuve du Théorème 11.2.1, avec la technique de la T-coercivité, on montre alors sans difficulté la

**Proposition 11.4.26** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 4$ , un domaine dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  mis à part en un nombre fini de points où il coïncide localement avec un cône non convexe. Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Alors  $\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  définit un isomorphisme.



\*\*\*\*\*

POINTES CONIQUES EN DIMENSION  $d = 3$

\*\*\*\*\*

En dimension  $d = 3$ , on n'a pas nécessairement  $d > 4 - 2\Lambda_1^+$ . Cela dépend de la valeur de  $\Lambda_1^+$ , donc de celle de  $\mu_1$ , la première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la portion de sphère  $\omega$ .

La valeur propre  $\mu_1(\omega)$  dépend continûment du domaine  $\omega$  (voir [98, 93]) et, d'après le principe du *min-max* si  $\omega_a \subset \omega_b$ , on a  $\mu_1(\omega_a) > \mu_1(\omega_b)$ . Par conséquent, lorsque  $\Omega$  est convexe, on a  $\mu_1(\omega) > \mu_1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{S}^2) = 2$ . Cela implique  $\Lambda_1^+ > 1$ . Ainsi, lorsque la pointe conique est convexe, on a  $d > 4 - 2\Lambda_1^+$  dès lors que  $d \geq 2$  et l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  constitue un isomorphisme. Ceci est en accord avec le théorème 3.2.1.2 de [87] que nous avons utilisé et qui indique que  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est un isomorphisme en dimension quelconque dès lors que le domaine  $\Omega$  est convexe. Ce résultat reste vrai quand la pointe conique est non convexe avec  $\Lambda_1^+ > 1/2 \Leftrightarrow \mu_1 > 3/4$ . Ceci permet d'énoncer la

**Proposition 11.4.27** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  mis à part en un en point  $O$  où il coïncide avec un cône d'ouverture  $\omega \subset \mathbb{S}^2$ . Supposons  $\omega$  tel que  $\mu_1(\omega)$ , la première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami définie en (11.36), vérifie  $\mu_1(\omega) > 3/4$ . Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Alors  $\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  définit un isomorphisme.*

**Remarque 11.4.28** *Ce résultat n'est pas vide ! En effet, il existe des pointes coniques non convexes pour lesquelles  $\mu_1(\omega) > 3/4$ . Pour se persuader de cela, il suffit de se souvenir que  $\mu_1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{S}^2) = 2$  et que  $\mu_1(\omega)$  dépend continûment de  $\omega$ .*

Comme indiqué dans le lemme 5.1 de [121], il existe des pointes coniques telles que  $\mu_1(\omega) < 3/4$ . Ceci implique l'existence de points coniques pour lesquelles  $\mu_1(\omega) = 3/4$  (cf. [68, 54, 4]). Pour ces dernières, d'après le Théorème 11.4.23, l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  n'est pas de type Fredholm car son image n'est pas fermée dans  $L^2(\Omega)$ . L'on ne peut alors pas utiliser le procédé de résolution itérative pour montrer que le problème (11.17) est bien posé. Pour de telles pointes coniques, l'exemple 5.3.2 de [121] montre que l'opérateur  $\tilde{B}$  n'est pas de type Fredholm pour  $\sigma = 1$ . Laissons ces cas de côté et supposons maintenant  $\Omega$  tel que  $\mu_1(\omega) < 3/4$ .

Le lemme 5.2 de [121] indique que  $\Lambda_2^+ > 1$ . Par conséquent le conoyau de  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est de dimension égale à un. Nous allons pouvoir remettre en place la démarche qui a permis de démontrer les Propositions 11.4.15 et 11.4.21.

Introduisons la fonction  $\zeta$  telle que

$$\zeta(\mathbf{x}) = r^{-1-\Lambda_1^+} \Phi_1(\boldsymbol{\theta}) + \tilde{\zeta}(\mathbf{x}), \tag{11.40}$$

où  $\tilde{\zeta}$  est l'unique élément de  $H^1(\Omega)$  vérifiant  $\Delta \tilde{\zeta} = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\tilde{\zeta} = -r^{-1-\Lambda_1^+} \Phi_1(\boldsymbol{\theta})$  p.p. sur  $\partial\Omega$ . Considérons ensuite la fonction  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\Delta \psi = \sigma^{-1} \zeta. \tag{11.41}$$

Lorsque  $\sigma$  change de signe, il peut arriver que  $(\sigma^{-1} \zeta, \zeta)_\Omega = 0$ . Dans ce cas, on montre comme en 2D que  $\psi \in H^2(\Omega)$  et donc  $\psi \in \ker \tilde{B}$ . De plus, dans cette situation, le problème (11.17) possède un conoyau. Pour caractériser ce dernier, introduisons la fonction  $\xi \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$(\nabla \xi, \nabla \xi')_\Omega = (\sigma^{-1} \zeta, \xi')_\Omega, \quad \forall \xi' \in H_0^1(\Omega). \tag{11.42}$$

Nous pouvons énoncer à présent la

**Proposition 11.4.29** *Supposons le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^2$  mis à part en un point  $O$  où il coïncide avec un cône d'ouverture  $\omega \subset \mathbb{S}^2$ . Supposons  $\omega$  tel que  $\mu_1(\omega)$ , la première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami définie en (11.36), vérifie  $\mu_1(\omega) < 3/4$ .*

*Si  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  vérifie  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$  et  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ . Alors  $\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  définit un isomorphisme.*

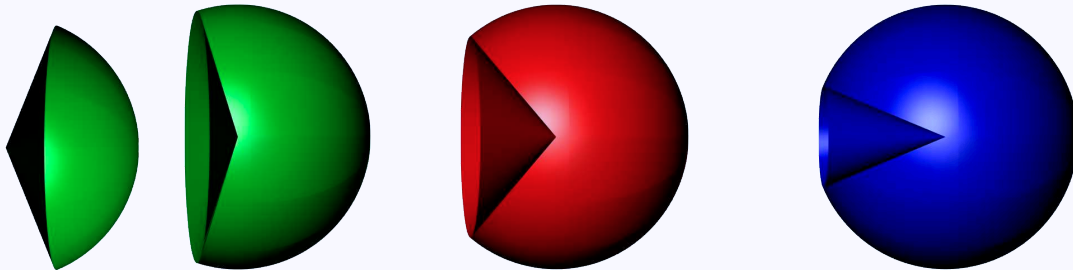
*Si  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  vérifie  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$  et  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$ . Alors pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème (11.17) possède une solution si et seulement si  $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$ . Dans ce cas, la solution est définie à la droite  $\text{vect}(\psi)$  près.*

*Dans cet énoncé, les fonctions  $\zeta$ ,  $\xi$  et  $\psi$  sont respectivement définies en (11.40), (11.42) et (11.41).*

◇ EXEMPLE. Introduisons les coordonnées sphériques définies par les relations  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi)$ . Pour  $R > 0$  et  $0 < \alpha < \pi$  considérons le domaine

$$\Omega := \{(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi), 0 < r < R, 0 \leq \theta < \alpha, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Pour  $\alpha \in ]\pi/2; \pi[$ , on a  $\zeta(\mathbf{x}) = r^{-1-\Lambda_1^+} \Phi_1(\boldsymbol{\theta}) - R^{-1-\Lambda_1^+} (r/R)^{\Lambda_1^+} \Phi_1(\boldsymbol{\theta})$ . Appelons  $\alpha_c > \pi/2$  la valeur de  $\alpha$  pour laquelle on a  $\mu_1(\omega) = 3/4$ .



Lorsque  $0 < \alpha < \alpha_c$ , l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  définit un isomorphisme. Par conséquent,  $\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  constitue un isomorphisme.

Lorsque  $\alpha = \alpha_c$ , l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  n'est pas de type Fredholm. Par conséquent, même pour  $\sigma = 1$ ,  $\tilde{B}$  n'est pas de type Fredholm.

Lorsque  $\alpha > \alpha_c$ , si  $\sigma$  vérifie  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ ,  $\tilde{B}$  est un isomorphisme. Si  $\sigma$  vérifie  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$ , (11.17) possède une solution si et seulement si  $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$ . Dans ce cas, la solution est définie à  $\text{vect}(\psi)$  près.

**Arêtes non convexes en dimension  $d = 3$**

Le cas des « singularités géométriques non convexes » de dimension supérieure ou égale à 1 présente des difficultés supplémentaires. La Figure 11.10 montre des arêtes en dimension 3 (singularités géométriques non convexes de dimension 1). Effectuons quelques remarques concernant cette configuration. Dans une telle géométrie, l'opérateur injectif  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  n'est pas de type Fredholm. Pour faire court, cela vient du fait que les coefficients devant les singularités sont remplacés par des fonctions. Le conoyau de  $\Delta$ , égal à  $\text{vect}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  en 2D (cf. Proposition 11.4.10) est maintenant un espace fonctionnel de dimension infinie. Lorsque  $\sigma = 1$ , dans [120], les auteurs parviennent tout de même à montrer que le problème (11.17) est bien posé en étendant l'idée du cas 2D. Cette fois-ci les relations de compatibilité sont écrites contre des espaces fonctionnels tout entier. On peut imaginer dérouler la même démarche pour étudier le problème (11.17). On obtiendrait un résultat du type : le problème (11.17) est bien posé si  $\sigma$  vérifie une infinité de relations

d'« orthogonalité ». Lorsque ce n'est pas le cas, on peut penser qu'il existe des configurations pour lesquelles l'opérateur  $\tilde{B}$  associé au problème (11.17) n'est pas de type Fredholm.

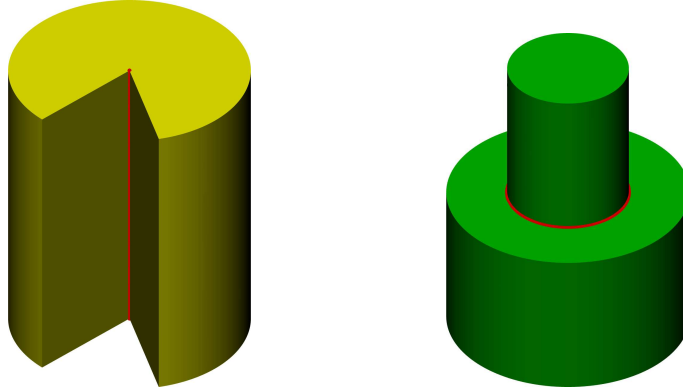


FIGURE 11.10 – Arêtes non convexes (en rouge).

#### 11.4.4 Problème posé dans $H_0^1(\Delta)$

Jusqu'à présent dans cette section, nous avons imposé de façon faible la condition  $\sigma\Delta u = 0$  sur  $\partial\Omega$  en travaillant avec la formulation

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \sigma\Delta u \Delta \varphi = \langle f, \varphi \rangle_{\Omega}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Notons que cette formulation variationnelle a encore un sens, pour un terme source suffisamment régulier, lorsque les fonctions  $u, \varphi$  sont choisies dans l'espace des éléments de  $H_0^1(\Omega)$  dont le Laplacien appartient à  $L^2(\Omega)$ . Dans ce paragraphe, nous souhaitons étudier une telle formulation. Dans cette optique, introduisons  $H_0^1(\Delta) := \{\varphi \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\}$ . D'après le théorème de Lax-Milgram, on a  $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|\Delta\varphi\|_{\Omega}$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Delta)$ . Par conséquent,  $(u, v) \mapsto (u, v)_{H_0^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)_{\Omega}$  définit un produit scalaire sur  $H_0^1(\Delta)$ . Pour  $f \in H_0^1(\Delta)^*$ , considérons le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{\sharp} \in H_0^1(\Delta) \text{ tel que :} \\ b^{\sharp}(u^{\sharp}, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{\Omega}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Delta) \end{array} \right. \quad (11.43)$$

avec

$$b^{\sharp}(v, \varphi) = (\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_{\Omega}, \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^1(\Delta) \times H_0^1(\Delta).$$

Introduisons l'opérateur continu de  $H_0^1(\Delta)$  associé tel que

$$(B^{\sharp}v, \varphi)_{H_0^2(\Omega)} = b^{\sharp}(v, \varphi), \quad \forall (v, \varphi) \in H_0^1(\Delta) \times H_0^1(\Delta). \quad (11.44)$$

On a alors la

**Proposition 11.4.30** *Supposons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Alors  $B^{\sharp} : H_0^1(\Delta) \rightarrow H_0^1(\Delta)$  définit un isomorphisme.*

**Preuve.** Introduisons l'opérateur  $T$  qui à  $v \in H_0^1(\Delta)$  associe la fonction  $Tv \in H_0^1(\Delta)$  telle que  $\Delta(Tv) = \sigma^{-1}\Delta v$ . La continuité de  $T$  ne souffre d'aucune contestation. Pour tout  $(v, \varphi) \in H_0^1(\Delta) \times H_0^1(\Delta)$ , on a

$$(B^{\sharp}(Tv), \varphi)_{H_0^2(\Omega)} = b^{\sharp}(Tv, \varphi) = (\sigma\Delta(Tv), \Delta\varphi)_{\Omega} = (\Delta v, \Delta\varphi)_{\Omega}.$$

Par conséquent, nous avons  $B^{\sharp} \circ T = \text{Id}$ . Puisque  $B^{\sharp}$  est autoadjoint, nous déduisons que  $B^{\sharp}$  constitue un isomorphisme d'inverse égal à  $T$ . ■

Intéressons-nous à la régularité de la solution  $u^\sharp$  du problème (11.43). On a  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset H_0^1(\Delta) \subset H_0^1(\Omega)$  et donc  $H^{-1}(\Omega) \subset H_0^1(\Delta)^* \subset (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^*$ . Considérons  $f \in H_0^1(\Delta)^*$ . Réécrivons le problème (11.17).

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \tilde{b}(\tilde{u}, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_\Omega, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (11.45)$$

Nous voulons comparer  $u^\sharp$  à la solution  $\tilde{u}$  du problème (11.45) lorsque cette dernière est bien définie.

Dès lors que le domaine  $\Omega$  est tel que l'opérateur  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  constitue un isomorphisme, on a  $H_0^1(\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Dans ce cas, par exemple lorsque  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est convexe, de classe  $\mathcal{C}^2$  ou égale à une pointe conique en dimension  $d \geq 4$ , on a  $u^\sharp = \tilde{u}$ .

Étudions maintenant une situation dans laquelle,  $H_0^1(\Delta) \neq H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Plaçons-nous en dimension 2, dans un domaine  $\Omega$  présentant, pour fixer les idées, un seul coin rentrant situé en  $O$ . Réintroduisons la fonction  $\zeta$  définie en (11.19) vérifiant  $\zeta \neq 0$ ,  $\zeta \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$ ,  $\Delta\zeta = 0$  p.p. dans  $\Omega$  et  $\zeta = 0$  p.p. sur  $\partial\Omega$ . Comme en (11.24), définissons  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  la fonction telle que  $\Delta\psi = \sigma^{-1}\zeta$ . Puisque  $\zeta \in L^2(\Omega)$ , on a  $\psi \in H_0^1(\Delta)$  et donc  $b^\sharp(u^\sharp, \psi) = \langle f, \psi \rangle_\Omega$ . Ceci s'écrit également  $(\Delta u^\sharp, \zeta)_\Omega = \langle f, \psi \rangle_\Omega$ . Ainsi, en vertu du Corollaire 11.4.5, on a  $u^\sharp \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  si et seulement si  $\langle f, \psi \rangle_\Omega = 0$ . Distinguons alors deux cas.

- Si  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ , alors le problème (11.45) est bien posé d'après la Proposition 11.4.7. Par conséquent, la solution  $\tilde{u}$  du problème (11.45) est définie de façon unique.
  - Si  $\langle f, \psi \rangle_\Omega = 0$ , alors  $u^\sharp$  vérifie le même problème que  $\tilde{u}$ . On déduit  $u^\sharp = \tilde{u}$  dans cette configuration.
  - Si  $\langle f, \psi \rangle_\Omega \neq 0$ , alors  $u^\sharp \notin H^2(\Omega)$  et donc  $u^\sharp \neq \tilde{u}$ . Plus précisément, puisque  $(\sigma\Delta(\tilde{u} - u^\sharp), \Delta\varphi)_\Omega = 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , on déduit  $\Delta(u^\sharp - \tilde{u}) = a\sigma^{-1}\zeta$ , où  $a$  est une constante. En multipliant par  $\zeta$ , en intégrant sur  $\Omega$  et en utilisant le fait que  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , on déduit  $a = (\Delta u^\sharp, \zeta) / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = \langle f, \psi \rangle_\Omega / (\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega$ . Ainsi, dans cette configuration, on a

$$u^\sharp - \tilde{u} = \frac{\langle f, \psi \rangle_\Omega}{(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega} \psi$$

- Si  $(\sigma^{-1}\zeta, \zeta)_\Omega = 0$ , alors, d'après la Proposition 11.4.9, le problème (11.45) possède une solution si et seulement si  $\langle f, \xi \rangle_\Omega = 0$ , en supposant pour simplifier  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Supposons donc cela vérifié. On a alors  $u^\sharp \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Expliquons pourquoi  $\psi$  appartient à  $\ker \tilde{B}$  mais pas à  $\ker B^\sharp$ . Pour constituer un élément du noyau de  $\tilde{B}$ , il suffit de vérifier  $(\sigma\Delta\psi, \Delta\varphi)_\Omega = 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Puisque  $(\sigma\Delta\psi, \Delta\varphi)_\Omega = (\zeta, \Delta\varphi)_\Omega$ , on a bien  $\psi \in \ker \tilde{B}$ . Par contre,  $\psi \in \ker B^\sharp$  si et seulement si on a  $(\sigma\Delta\psi, \Delta\varphi)_\Omega = 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Delta)$ . En testant avec  $\varphi$  tel que  $\Delta\varphi = \zeta$ , on voit que  $\psi$  n'est pas un élément de  $\ker B^\sharp$ . Bien sûr, un tel  $\varphi$  n'appartient pas à  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  car  $(\zeta, \zeta)_\Omega \neq 0$ .