# Étude de différents systèmes logiques

## Sommaire

Dans cette partie je propose l'étude de différents systèmes [1] logiques à travers l'histoire, afin de mettre en évidence différentes conceptions de la logique en en faisant ressortir des invariants et des différences. Je cherche alors à déterminer quelles sont les finalités attribuées à la logique dans chacun de ces systèmes. Je fais notamment ressortir l'important travail sur le langage qui est à la base de chacun d'entre eux. Par ailleurs, puisque cette étude épistémologique est un préalable à la constitution d'une référence sur les notions de logique, je souligne dans ces systèmes les choix de mise en forme des éléments du système, ce que j'appelle le *niveau de formalisation* du langage et des raisonnements.

L'approche historique permet de se « déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle [la didactique] manipule au niveau des savoirs » (Artigue, 1990, p. 245) et c'est peut être particulièrement important pour les notions de logique dont nous avons vu qu'elles sont pour la plupart des professeurs de mathématiques des connaissances en acte bien plus qu'un savoir décontextualisé. Je relève alors également dans ces systèmes différents aspects des notions de variable, proposition, connecteur ET et OU, implication, quantificateur, type de raisonnement.

Je porte dans cette étude une attention particulière à la dialectique entre l'aspect syntaxique et l'aspect sémantique de ces systèmes logiques. La syntaxe concerne la forme des expressions, la sémantique s'occupe de la signification des signes qui y interviennent. On parle notamment de règles syntaxiques pour des règles de manipulation des expressions qui peuvent être utilisées indépendamment de la signification des signes, quand bien même elles ont été justifiées par des considérations sémantiques (c'est le cas par exemple des règles de transformation des expressions algébriques : on démontre dans le cas des entiers la règle de distributivité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$, on l'utilise ensuite sans se reporter à la signification numérique des lettres de variable). La syntaxe a ainsi un caractère formel qui peut être particulièrement opératoire, mais qui, seul, est vide de sens. La sémantique fait intervenir le domaine auquel appartiennent les objets sur lesquels portent les raisonnements que ces systèmes étudient.

Il n'est bien sûr pas question de couvrir l'ensemble de l'histoire de la logique et de ses acteurs. J'ai choisi pour cette étude des périodes cruciales, en présentant à chaque fois deux systèmes différents presque contemporains :

– Tout d'abord l'Antiquité grecque, avec d'un côté la logique d'Aristote, d'autre part celle des Stoïciens. Nous verrons que, vieilles de plus de deux mille ans, elles n'en portaient pas moins déjà beaucoup d'éléments jugés essentiels aujourd'hui. La logique d'Aristote a été étudiée notamment à travers la lecture des *Premiers Analytiques*. Il

1. « Système » est entendu ici comme un ensemble de propositions, de principes et de conclusions établis autour d'un sujet précis, ici le raisonnement. En logique mathématique, un système formel est constitué d'un vocabulaire, d'un ensemble d'axiomes et d'un ensemble de règles de déductions. Nous retrouvons tout ou partie de ces éléments dans les systèmes évoqués, mais ce ne sont pas des « systèmes formels » au sens logico-mathématique actuel.

ne reste malheureusement plus beaucoup de sources originales des œuvres logiques des Stoïciens.
– Ensuite, le XVIIe siècle, époque de grandes avancées dans le symbolisme mathématique. Dans cette période, Descartes et Leibniz illustrent deux manières de penser la logique. La position de Descartes sera étudiée à travers le traité connu sous le nom de *logique de Port-Royal* qui permet d'appréhender à la fois certains développements de la logique d'Aristote et des Stoïciens, mais aussi la mise en avant de la méthode prônée par Descartes. En ce qui concerne Leibniz, je me contenterai de présenter ses aspirations plutôt que ce qu'il a réellement mis en place, qui est très complexe et pas toujours abouti.
– Enfin, la constitution récente de la logique mathématique sera étudiée à travers deux œuvres importantes : *Les lois de la pensée* de G. Boole et de l'*Idéographie* de G. Frege. Le premier a « mathématisé » la logique, le deuxième a voulu « logiciser » les mathématiques.

D'autres lectures sur l'histoire de la logique ont servi pour un regard d'ensemble sur ces différentes périodes, notamment *La logique et son histoire d'Aristote à Russell* de R. Blanché.

Je propose une étude relativement détaillée de chaque système. Pour chaque période, les études des deux systèmes choisis seront suivies d'une synthèse intermédiaire qui rappelle les éléments importants des deux systèmes étudiés en les mettant en parallèle l'un avec l'autre. Une synthèse globale est proposée à la fin du chapitre.

## 1.1 L'Antiquité grecque : Aristote et les Stoïciens

L'Antiquité grecque peut être considérée la date de naissance de la logique en tant que science. Une étude des logiques d'Aristote et des Stoïciens nous montre quelles idées étaient déjà présentes dès ce tout jeune âge et sous quelles formes.

### 1.1.1 La logique d'Aristote

*Des extraits des ouvrages mentionnés se trouvent en annexe B, page 455.*

Aristote, philosophe grec du IVe siècle avant JC ($-384$, $-322$), n'est bien sûr pas le premier à avoir réfléchi sur la logique. Mais ses œuvres logiques, qui nous sont parvenues sous la forme d'un recueil de traités, réunis sous le titre d'*Organon*, sont souvent citées comme les premières œuvres logiques aussi complètes.

*Organon* signifie « instrument » en grec. La logique que constitue Aristote est un outil au service de la science, une théorie de la déduction permettant notamment à la science la découverte de vérités. Il expose sa théorie du syllogisme, raisonnement déductif formé de trois propositions : deux prémisses et une conclusion. Dans *Premiers Analytiques*, il considère d'abord le syllogisme seulement du point de vue de sa validité formelle (voir en annexe page 457). Puis dans *Seconds Analytiques*, il traite des syllogismes démonstratifs (dont les prémisses sont nécessaires, la vérité de la conclusion étant alors établie par la validité du syllogisme appliqué à des prémisses vraies). Enfin, dans *Topiques*, il traite des syllogismes dialectiques (dont les prémisses sont simplement probables, la conclusion du syllogisme n'étant alors pas nécessairement vraie, même si celui-ci est valide). Cette distinction montre que co-existent chez Aristote deux conceptions de la logique, l'une comme théorie formelle de la validité des raisonnements, l'autre comme outil, méthode pour la recherche de vérités scientifiques, même si la première phrase des *Premiers Analytiques* semble donner plus d'importance à la deuxième conception : « Il faut d'abord établir quel est le sujet de notre enquête et de quelle discipline elle relève : son sujet, c'est la démonstration, et c'est la science démonstrative dont elle dépend » (Aristote, 2007, p. 15)

### Le travail sur le langage

**(a) Sur les propositions** Les *Analytiques* sont précédés dans l'*Organon* de traités dans lesquels il est question des propositions. Dans le traité des *Catégories*, Aristote distingue dix façons de signifier et de désigner ce qui est (voir en annexe page 455), puis dans le traité *De l'Interprétation* (*Hermeneia*) il précise les besoins de formalisation du langage : « il faut d'abord établir la nature du nom et celle du verbe : ensuite celle de la négation et de l'affirmation, de la proposition et du discours. » (Aristote, 2008, p. 89). Nom, verbe, discours sont ainsi définis, pour aboutir à la proposition qui sera finalement l'objet d'étude : « tout discours n'est pas une proposition, mais seulement le discours dans lequel réside le vrai ou le faux » (Aristote, 2008, p. 95). Les propositions considérées dans la logique d'Aristote, de la forme sujet-copule-prédicat, sont d'abord distinguées en qualité, affirmative ou négative, puis en quantité, universelle ou particulière [2]. Ces distinctions donnent alors quatre types de propositions d'attribution pure [3] :
– Les affirmatives universelles : tout homme est blanc
– Les négatives universelles : aucun homme n'est blanc
– Les affirmatives particulières : quelque homme est blanc
– Les négatives particulières : quelque homme n'est pas blanc.

2. Aristote considère aussi des propositions indéfinies du type *l'homme est blanc* mais il met au jour les difficultés d'interprétation de tels énoncés, dont on ne sait pas s'il faut les comprendre comme des universelles ou des particulières.

3. Aristote considère également des propositions modales exprimant le nécessaire, le contingent, mais ce type de proposition est en dehors de ce qu'on appelle *la logique classique* à laquelle je m'intéresse dans cette recherche.

Aristote ne cherche pas à formaliser l'expression de ces propositions en utilisant toujours les mêmes signes [4], ce qui sera fait ultérieurement au Moyen-Âge. Ces propositions peuvent également être exprimées dans le langage des prédicats, ou dans le langage ensembliste. Les tableaux suivants donnent différentes expressions de ces quatre types de propositions [5] :

| | Affirmatives universelles | Négatives universelles |
|---|---|---|
| Aristote | $A$ est affirmé de tout $B$, $A$ appartient à tout $B$ | $A$ n'est affirmé de nul $B$, $A$ n'appartient à nul $B$ |
| Moyen-Âge | Tout $B$ est $A$ | Nul $B$ n'est $A$ |
| Langage des prédicats | $\forall x\,(B[x] \Rightarrow A[x])$ | $\forall x\,(B[x] \Rightarrow \text{NON}\,A[x])$ |
| Langage ensembliste | $B \subset A$ | $B \subset A^c$ |

FIGURE 1.1 – Différentes expressions des propositions universelles

| | Affirmatives particulières | Négatives particulières |
|---|---|---|
| Aristote | $A$ appartient à quelque $B$ | $A$ n'appartient pas à quelque $B$ |
| Moyen-Âge | Quelque $B$ est $A$ | Quelque $B$ n'est pas $A$ |
| Langage des prédicats | $\exists x\,(B[x]\ \text{ET}\ A[x])$ | $\exists x\,(B[x]\ \text{ET NON}\,A[x])$ |
| Langage ensembliste | $B \cap A \neq \emptyset$ | $B \cap A^c \neq \emptyset$ |

FIGURE 1.2 – Différentes expressions des propositions particulières

Par ailleurs, Aristote élabore deux théories sur ces propositions : une théorie de l'opposition et une théorie de la conversion. Ces théories établissent des relations entre des propositions, relations entre leurs formes et entre leurs valeurs de vérité. Elles sont donc à l'articulation syntaxe/sémantique.

La théorie de l'opposition est décrite dans *De l'Interprétation* (voir en annexe page 456). Aristote remarque qu'il existe deux relations d'opposition :

– d'une part la relation de contradiction entre des propositions qui s'opposent par la quantité et par la qualité, c'est-à-dire entre l'affirmative universelle (*Tout $B$ est $A$*) et la négative particulière (*Quelque $B$ n'est pas $A$*), ou entre la négative universelle (*Nul $B$ n'est $A$*) et l'affirmative particulière (*Quelque $B$ est $A$*), relation qui correspond à la notion de négation,
– d'autre part la relation de contrariété entre des propositions universelles qui s'opposent par la qualité, c'est-à-dire entre l'affirmative universelle (*Tout $B$ est $A$*) et la négative universelle (*Nul $B$ n'est $A$*).

4. Par signes, j'entends ici mots ou symboles.

5. Nous verrons quand nous aborderons la conversion des propositions page 35 que dans le cas des affirmatives universelles, les expressions proposées ne sont pas rigoureusement équivalentes.

Nous reviendrons sur ces relations qui seront complétées par les développements de la logique d'Aristote au Moyen-Âge pour donner le *carré des oppositions* (voir page 48).

La théorie de la conversion est décrite dans *Premiers Analytiques* (voir en annexe page 457). Aristote relève les conversions suivantes :

(1) Les négatives universelles sont convertibles : si nul $A$ n'est $B$, alors nul $B$ n'est $A$. Dans le langage des prédicats, il s'agit des deux propositions $\forall x\ (A[x] \Rightarrow \text{NON}\, B[x])$ et $\forall x\ (B[x] \Rightarrow \text{NON}\, A[x])$, dont nous savons qu'elles sont équivalentes, l'une étant la contraposée de l'autre. En termes ensemblistes, l'universelle négative se traduit par $A \cap B = \emptyset$, expression dans laquelle on voit bien la symétrie des rôles joués par $A$ et $B$.

(2) Les affirmatives universelles se convertissent en affirmatives particulières : si tout $A$ est $B$, alors quelque $B$ est $A$. Pour comprendre la validité de cette conversion, il faut savoir que chez Aristote, l'attribution universelle contient une clause d'existence pour le sujet, c'est-à-dire qu'affirmer *Tout A est B* pré-suppose l'existence d'un $A$. Dans le langage des prédicats, les deux propositions dont il est ici question sont : $\forall x\,(A[x] \Rightarrow B[x])$ et $\exists x\ (A[x] \text{ ET } B[x])$. Or, en prenant un prédicat $A$ qui est faux pour toute valeur que peut prendre la variable $x$, on obtiendra une première proposition vraie (par exemple, « $\forall n \in \mathbb{N}\ (n^2 = 3 \Rightarrow n = 0)$ » est vraie puisque la prémisse est toujours fausse[6]), et une seconde proposition fausse (dans l'exemple, « $\exists n \in \mathbb{N}\ (n^2 = 3 \text{ ET } n = 0)$ » est fausse). Pour exprimer cette règle de conversion dans le langage des prédicats, il faut rajouter cette clause d'existence :

   Si les propositions $\forall x\ (A[x] \Rightarrow B[x])$ et $\exists x\ A[x]$ sont vraies,

   alors la proposition $\exists x\ (A[x] \text{ ET } B[x])$ est vraie.

   En termes ensemblistes, il est facile de voir qu'on ne peut déduire $A \cap B \neq \emptyset$ de $A \subset B$ qu'à condition d'avoir l'hypothèse supplémentaire $A \neq \emptyset$.

(3) Les affirmatives particulières sont convertibles : si quelque $A$ est $B$, alors quelque $B$ est $A$. Dans le langage des prédicats, cette règle repose uniquement sur la propriété de commutativité du connecteur ET puisque les deux propositions sont $\exists x\ (B[x] \text{ ET } A[x])$ et $\exists x\ (A[x] \text{ ET } B[x])$ qui sont équivalentes. En termes ensemblistes, les deux propositions se traduisent par $A \cap B \neq \emptyset$.

Aristote souligne aussi que les négatives particulières ne sont pas convertibles. En faisant cela, il donne un caractère d'exhaustivité à son étude. Notons également qu'Aristote ne distingue pas les cas de conversions où il y a équivalence (règle 1 et 3) de celui où il n'y a pas équivalence (règle 2).

Ainsi, Aristote propose une logique qui est souvent qualifiée de première logique formelle, notamment dans la mesure où, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, il utilise des variables pour faire ressortir la forme des propositions qui seule importe pour la validité des syllogismes. Mais comme le souligne R. Blanché, la formalisation n'est pas

6. Se reporter à la table de vérité de l'implication en annexe page 127.

recherchée pour elle-même :

> Il n'est pas sans intérêt de noter que cette variabilité de formulation [des propositions, voir le tableau page 34], non seulement dans le passage de l'expression concrète à l'expression symbolique, mais à l'intérieur même de cette dernière, révèle assez clairement que la logique d'Aristote ne pousse pas le souci formel jusqu'au formalisme. L'essence du formalisme c'est de calculer sur des signes, indépendamment de leur sens. (Blanché, 1970, p. 48)

**(b) Sur les variables** Aristote utilise des variables littérales pour marquer la place des termes dans les propositions. R. Blanché l'illustre avec un passage des *Seconds Analytiques* :

> *Admettons que perdre ses feuilles soit représenté par A, avoir de larges feuilles par B, et vigne par C. Si A appartient à B (car toute plante à feuilles larges perd ses feuilles) et si B appartient à C (car toute vigne est une plante à feuilles larges), alors A appartient à C, autrement dit toute vigne perd ses feuilles.*
>
> La première différence qui saute aux yeux, c'est la substitution de variables littérales $A$, $B$, $C$, aux constantes vigne, perdant ses feuilles, ayant des feuilles larges. Loin d'être un détail négligeable, ce procédé a une portée considérable. Au point que certains logiciens seraient aujourd'hui portés à dire que c'est là, pour la logique, la découverte la plus importante d'Aristote. C'est bien en effet avec elle et par elle que commence une logique qui soit proprement formelle, c'est-à-dire dans les énoncés de laquelle toute allusion au contenu des termes a disparu. (Blanché, 1970, p. 47)

Les variables utilisées ici ne sont pas des noms d'objets mathématiques [7], mais seulement des marque-places permettant de ne considérer que la forme de la proposition pour la validité du syllogisme.

L'un des successeurs d'Aristote, Théophraste, introduit un sujet indéterminé prédiqué de deux attributs, mais ne franchit pas le pas de donner un nom de variable à cet indéterminé :

> L'idée , il est vrai, n'était pas absolument nouvelle, puisqu'on la trouve déjà chez Aristote, en un passage sans doute tardif des *Premiers Analytiques*, mais celui-ci ne l'avait pas exploitée. La proposition $A$ est prédiqué universellement de $B$ peut en effet s'exprimer de façon plus explicite de la façon suivante : ce de quoi $B$ est prédiqué universellement, de cela $A$ est aussi prédiqué universellement... Le sujet, c'est un troisième terme, qu'il faut « prendre en surplus », et qui est ce quelque chose, qui demeure indéterminé, de quoi $A$

7. D'une part parce que les variables n'ont pas encore ce statut de nom d'objet, mais aussi parce que les propositions elles-mêmes ne sont pas encore des objets mathématiques.

> et $B$ sont prédiqués. Seulement, ce terme indéterminé, Théophraste n'a pas eu l'idée de l'exprimer par une variable ; ce qui invite à penser que non seulement chez Aristote, mais aussi bien chez ceux qui raffinent sur son enseignement, le rôle des variables n'était pas encore pleinement perçu, et que la substitution de lettre aux termes concrets ne devait guère remplacer une fonction d'abréviation. (Blanché, 1970, p. 84)

**(c) Sur les connecteurs logiques** Aristote n'utilise pas à proprement parler de connecteur logique, dans le sens d'un opérateur sur l'ensemble des propositions [8]. Sa logique n'est pas une logique propositionnelle, nous avons vu que pour la décrire en termes modernes nous avions besoin du langage des prédicats (et nous retrouvons la forme très courante en mathématiques $\forall x\, (A[x] \Rightarrow B[x])$). Les connecteurs ET et OU ne sont donc pas étudiés par Aristote. La négation apparaît dans la théorie de l'opposition décrite à la section précédente, mais en tant que relation entre deux propositions, pas en tant que connecteur. L'implication est indirectement présente à travers la forme « Tout $A$ est $B$ », mais là non plus pas en tant que connecteur.

#### La syllogistique

Le mot « syllogisme » apparaît, comme terme technique, dans les *Topiques*. Le syllogisme y est présenté comme l'une des deux manières possibles de raisonner, l'autre étant l'induction. Les syllogismes sont tous organisés de la même manière : une conclusion est déduite de deux prémisses. Ils sont présentés sous forme de lois logiques : « si $P_1[A, B]$ et $P_2[B, \Gamma]$ alors $C[A, \Gamma]$ », où $P_1$, $P_2$, $C$ sont des propositions faisant intervenir les termes $A$, $B$ et $\Gamma$. Les syllogismes sont organisés en trois figures selon la place du terme qui intervient dans les deux prémisses (moyen terme). Ces lois logiques ne disent rien de la vérité des propositions qui les composent, mais donnent une relation entre ces valeurs de vérité et garantissent ainsi la validité de certaines inférences [9]. Par exemple, dans la première figure on peut trouver le syllogisme suivant : « Si $A$ est affirmé de tout $B$, et $B$ de tout $\Gamma$, nécessairement $A$ est affirmé de tout $\Gamma$. » (Aristote, 2007, p. 28), qui permet de garantir que l'inférence suivante est valide : « tous les carrés sont des rectangles et tous les rectangles sont des parallélogrammes, donc tous les carrés sont des parallélogrammes. » Aristote a conscience de la différence entre (voir Durand-Guerrier, 2005, p. 13) :

- la vérité d'une proposition,
- la validité d'une loi logique (c'est-à-dire qu'elle est vraie quelle que soit l'interprétation des lettres qui y interviennent),
- la validité d'un raisonnement que l'on contrôle en s'assurant que la loi logique est valide et que les prémisses sont vraies.

8. Faire opérer un connecteur binaire $\alpha$ sur deux propositions $P$ et $Q$ donne la proposition $P\alpha Q$.
9. Une inférence est une opération qui consiste à admettre une proposition en raison de son lien avec une proposition préalable tenue pour vraie.

Dans la première figure le moyen terme est sujet dans la première prémisse et prédicat dans la deuxième (l'intégralité de la description des syllogismes de la première figure se trouve en annexe page 457). La validité de ces syllogismes n'est pas démontrée, elle est admise. Pour les syllogismes non concluants de cette figure, Aristote donne des contre-exemples, c'est-à-dire des « instanciations » de variables (des choix des sujets et prédicats) avec les deux mêmes types de prémisses et des conclusions différentes vraies à chaque fois (ainsi, les deux exemples *Quelque cheval est blanc, nul cygne n'est cheval, tout cygne est blanc* et *Quelque cheval est blanc, nul corbeau n'est cheval, nul corbeau n'est blanc* montrent qu'aucune conclusion nécessaire ne peut venir à la suite des prémisses *Quelque* $B$ *est* $A$ et *nul* $\Gamma$ *n'est* $B$).

Les syllogismes concluants de la deuxième figure (moyen terme prédicat dans les deux prémisses, par exemple « Nul $A$ n'est $B$, Tout $\Gamma$ est $B$, Nul $\Gamma$ n'est $A$ ») et de la troisième figure (moyen terme sujet dans les deux prémisses, par exemple « Tout $B$ est $A$, Tout $B$ est $\Gamma$, Quelque $\Gamma$ est $A$ ») sont démontrés en utilisant les deux traitements des propositions : soit la conversion d'une des prémisses pour se ramener à un syllogisme concluant de la première figure (voir un exemple en annexe page 460), soit la négation de la conclusion pour utiliser une réduction à l'absurde [10] (voir en annexe page 461). Si la possibilité de tels traitements pour les propositions a été établie en s'appuyant sur des arguments sémantiques, leur utilisation ensuite dans les démonstrations de la validité des syllogismes relève plutôt d'une démarche syntaxique.

Le *modus ponens* (raisonnement direct, « (si $A$ alors $B$) et $A$, donc $B$ ») et le *modus tollens* (raisonnement par contraposition, « (si $A$ alors $B$) et NON $B$, donc NON $A$ ») sont connus d'Aristote, il les décrit ainsi dans *Topiques* :

> Quand on veut établir une thèse, il faut rechercher de quelle chose donnée la chose en question suivra (car si on a prouvé l'existence de la première, on aura par là même prouvé l'existence du sujet en question) ; par contre quand on veut réfuter une thèse, il faut rechercher quelle chose est si le sujet proposé est donné, car quand nous aurons montré que le conséquent du sujet proposé n'existe pas, nous aurons par là même ruiné la chose en question. (Aristote, 2012, pp. 77-78)

10. Aristote pratique le raisonnement par l'absurde sous la forme suivante :
   - d'abord nier la conclusion d'un syllogisme dont on suppose les prémisses vraies,
   - prendre alors la négation de la conclusion et la substituer à l'une des prémisses,
   - obtenir alors une nouvelle conclusion contradictoire à cette même prémisse.

Par exemple, supposons que nous voulions montrer la validité du syllogisme suivant :

Tout $B$ est $A$, Tout $B$ est $\Gamma$, Quelque $\Gamma$ est $A$

Considérons alors la négation de la conclusion : Nul $\Gamma$ n'est $A$. Formons alors le syllogisme :

Nul $\Gamma$ n'est $A$, Tout $B$ est $\Gamma$, Nul $B$ n'est $A$

Sa conclusion est en contradiction avec la prémisse Tout $B$ est $A$.

### 1.1.2 La logique des Stoïciens

L'expression « logique des Stoïciens » désigne une logique développée aux IVe et IIIe siècles avant JC. Nous avons beaucoup moins de sources pour connaître cette logique que pour celle d'Aristote. Elle a été jusqu'à une époque récente à la fois mal comprise et peu appréciée. Ce sont les développements de la logique au XXe siècle qui ont peut-être permis que celle-ci soit réhabilitée, notamment grâce à un article de Lukasiewicz en 1934 qui a définitivement fait admettre que la logique des Stoïciens était la forme ancienne du moderne calcul des propositions. En cela elle diffère profondément de la logique d'Aristote puisque la formulation de celle-ci en termes modernes fait intervenir des prédicats monadiques (à une seule variable). Selon R. Blanché, les Stoïciens sont aussi plus formalistes dans le sens où ils s'attachent à utiliser dans leur description des raisonnements des mots toujours identiques :

> Ils [les Stoïciens] font choix, pour leurs schémas de raisonnement, de formes canoniques, auxquels ils se tiennent scrupuleusement. Et ils étaient parvenus, autant que nous pouvons en juger, à ramener leurs raisonnements à un calcul sur des signes verbaux, sans rien sous-entendre comme allant de soi, veillant au contraire à expliciter toutes les présuppositions nécessaires aux opérations logiques. (Blanché, 1970, p. 96)

Le principal auteur de cette logique stoïcienne est Chrysippe, qui vécut au IIIe siècle avant JC. Ce que nous connaissons de ses œuvres se trouve essentiellement dans ce qu'en ont rapporté Sextus Empiricus et Diogène Laërce au IIIe siècle après JC. Ce dernier rapporte par exemple les fins attribuées à la logique par les Stoïciens : « Ils disent que l'étude des syllogismes est très utile, en effet le syllogisme a un pouvoir démonstratif, il contribue beaucoup à la droite compréhension des propositions, il met de l'ordre dans la compréhension des sciences et soutient notre mémoire. » (Brun, 1957, p. 28)

**Les propositions et les connecteurs logiques.**

La dialectique [11] des Stoïciens est scindée en deux parties, l'une concernant les signifiants et traitant de tout ce qui touche à la langue, l'autre se concentrant sur le signifié. Dans leur volonté de formaliser de manière univoque les structures du langage, les Stoïciens sont soucieux de « maintenir les structures logiques en accord aussi complet que possible avec les structures grammaticales. » (Blanché, 1970, p. 107)

Il est à peu près impossible de traduire le terme grec employé par les Stoïciens pour désigner le signifié, R. Blanché se contente d'une transcription et le nomme le *lecton* :

> Le *lecton* n'est une pensée qu'au sens d'une pensée pensée, non en celui d'une pensée pensante. [...] Le *lecton*, c'est donc proprement cette chose in-

11. La logique stoïcienne se divisait en deux parties : la rhétorique qui s'occupe du bien parler et la dialectique.

> corporelle et extra-mondaine qu'est le sens d'une expression. (Blanché, 1970, p. 107)

C'est à certains de ces *lecta* que peuvent s'appliquer les qualificatifs de vrai ou de faux, ceux qui sont des propositions. Les propositions se divisent en simples et non-simples ou composées. Par exemple, l'affirmation *il est jour* est une proposition simple. La forme négative *il n'est pas jour* est aussi considérée comme une forme simple. Les Stoïciens insistent sur l'obligation de placer la particule négative en tête de phrase et non dans le corps, ce qui est possible en grec [12]. Sextus Empiricus et Diogène Laërce donnent chacun une liste différente de types de propositions simples, aucune ne recouvrant la catégorisation d'Aristote, et il est difficile de savoir ce qu'il en était exactement dans la logique des Stoïciens.

Ces propositions simples sont ensuite utilisées pour former différents types de propositions composées : la proposition hypothétique ou conditionnelle (*s'il est jour il fait clair*), la proposition consécutive ou inférentielle (*puisqu'il est jour il fait clair*), la proposition conjonctive (*il est jour et il fait clair*), la proposition disjonctive (*ou il est jour ou il fait clair*), la proposition causale (*parce qu'il est jour il fait clair*), la proposition comparative (*il est plus/moins jour que nuit*). Dans cette liste, nous pouvons distinguer des types de propositions dont la vérité dépend de la vérité des propositions simples qui les composent (c'est le cas des propositions hypothétiques, conjonctives et disjonctives) et d'autres pour lesquelles ça n'est pas le cas (pour les propositions consécutives, causales et comparatives), qui étaient laissées de côté dans les travaux proprement logiques des Stoïciens. Dans cette catégorisation, nous retrouvons « un exemple manifeste d'une contamination entre le point de vue de la logique formelle et celui de l'analyse du langage. » (Blanché, 1970, p. 109)

Il y a ainsi des connecteurs qui ont un rôle syntaxique dans cette logique : ils permettent, à partir de deux (ou une pour la négation) propositions d'en construire une nouvelle. Le choix pour la forme négative de la particule placée en tête de phrase donne à voir cet aspect pour la négation, la particule agissant comme un connecteur NON. Sont présents également le connecteur ET et le connecteur OU EXCLUSIF [13]. Les propositions hypothétiques font bien sûr penser au connecteur IMPLIQUE, mais la sémantique associée n'est pas exactement celle du connecteur moderne.

Ces propositions hypothétiques sont l'objet d'un désaccord entre les mégariques [14] Diodore de Cronos et son élève Philon. Ce dernier avait une conception de l'implication en tant que connecteur et une conception de la proposition hypothétique comme ayant une valeur de vérité déterminée par la table de vérité que nous connaissons, c'est-à-dire qu'elle « est

12. La langue grecque dispose de deux particules pour exprimer la négation, l'une se plaçant en tête de phrase, l'autre dans le corps de la phrase.

13. Il semble que les Stoïciens connaissent aussi la disjonction inclusive qui pose seulement que l'une des composantes est vraie.

14. L'école mégarique est une école de philosophie grecque fondée entre les Vᵉ et IVᵉ siècles avant JC, dont s'inspirent les Stoïciens.

vraie lorsqu'elle ne commence pas avec le vrai pour finir avec le faux ; de sorte qu'il y a pour cette proposition hypothétique trois façons d'être vraie, et une d'être fausse. » (Blanché, 1970, p. 99) Diodore s'oppose à la thèse philonienne, en en montrant des aspects paradoxaux sur des propositions telles que *s'il est jour je discute*. De telles propositions se retrouvent effectivement alors vraies à certains moments (par exemple lorsqu'il fait jour et que je discute, ou lorsqu'il fait nuit), fausses à d'autres (par exemple lorsqu'il fait jour et que je me tais). Diodore propose alors de dire qu'une proposition hypothétique est vraie lorsqu'elle *n'a pas pu ou ne peut pas* commencer par le vrai pour finir par le faux. En fait, dans l'exemple donné par Diodore, il y a une variable « temps » qui entre en jeu. Elle se modéliserait dans notre logique moderne par la proposition « à tout instant, s'il est jour je discute », c'est-à-dire par une implication universellement quantifiée, qui est bien soit vraie soit fausse.

Chrysippe a une troisième conception des propositions conditionnelles [15], rapportée par Diogène Laërce :

> En outre, les propositions peuvent s'opposer les unes aux autres selon la vérité ou l'erreur si l'une contredit l'autre, par exemple : « Il fait jour et il ne fait pas jour ». Donc la proposition conditionnelle est vraie quand le contraire de la proposition finale s'oppose à la proposition initiale par exemple, « S'il fait jour il fait clair ». [. . . ] La proposition conditionnelle est fausse quand le contraire de la proposition finale ne s'oppose pas à la proposition initiale, par exemple « s'il fait jour Dion se promène ». (Brun, 1957, p. 35)

Le dernier exemple de cette citation est encore une implication entre propositions dépendantes d'une variable « temps ».

### Les raisonnements et les variables

Une fois établie la théorie des propositions, la logique des Stoïciens s'occupe de la validité des raisonnements, qui sont ainsi définis :

> Certaines combinaisons de propositions forment des raisonnements. Un raisonnement est un système de propositions dont les unes, appelées prémisses, ont pour fonction d'en prouver une autre , qui est la conclusion .[. . . ] Les Stoïciens faisaient, en la marquant par le langage, une distinction qui était demeurée implicite chez Aristote et qui est essentielle pour une logique formelle : celle du raisonnement en termes concrets et du schéma formel qu'on obtient en remplaçant ces termes concrets par des variables. (Blanché, 1970, p. 113)

15. Pour plus de détails sur ces distinctions, on pourra se reporter à la thèse de V. Durand-Guerrier, (Durand-Guerrier, 1996).

Dans la logique de Chrysippe, il y a 5 schémas de raisonnement (*modes* ou *tropes*) non démontrés :

– **Trope 1 :** Si le premier alors le second ; or le premier ; donc le second.
– **Trope 2 :** Si le premier alors le second ; or pas le second ; donc pas le premier.
– **Trope 3 :** Pas à la fois le premier et le second ; or le second ; donc pas le premier.
– **Trope 4 :** Ou le premier ou le second ; or le premier ; donc pas le second.
– **Trope 5 :** Ou le premier ou le second ; or pas le second ; donc le premier.

Dans ces tropes, les variables, symbolisées par des nombres ordinaux, représentent des propositions. Le fait que Chrysippe n'ait pas cédé à la tentation de dédoubler les tropes [16] 3, 4 et 5 montre, selon R. Blanché, que :

> 1°) il savait distinguer entre le cas des connecteurs symétriques et celui du connecteur asymétrique. 2°) il savait pratiquer la substitution des variables, et donc traiter celles-ci autrement que comme de simples abréviations de langage. (Blanché, 1970, p. 116)

Ces schémas de raisonnement ne sont pas exprimés sous forme de lois logiques comme chez Aristote, mais sous forme de schémas d'inférences. Ici, La vérité des prémisses n'est pas hypothétique mais posée. Une loi logique sous-jacente par exemple au premier trope s'exprimerait avec deux implications : « Si (si le premier alors le second et le premier), alors le second. »

Les cinq tropes donnés ci-dessus sont des indémontrés. De ceux-là sont déduits d'autres schémas :

> De cinq indémontrés on tirait, nous dit Cicéron, des conclusions innombrables, c'est-à-dire qu'on démontrait par eux un grand nombre de raisonnements, en réduisant ceux-ci à l'aide d'un petit nombre de règles, appelées des thèmes. Nous savons que les Stoïciens ramenaient ces règles à quatre, dont nous ne connaissons que deux, la première et la troisième. La première est une règle de réduction à l'impossible. L'autre revient à dire que lorsque de deux propositions en résulte une troisième, et que l'une des deux premières peut elle-même être conclue d'une autre paire de prémisses, on a le droit de conclure la troisième proposition de cette seconde paire de prémisses et de la prémisse qui reste de la première paire. (Blanché, 1970, p. 117)

Seul un tout petit nombre des ces innombrables conclusions a été conservé, mais celles que nous connaissons nous renseignent sur la conception de la logique qu'avait Chrysippe. Par exemple, une de ces conclusions est *Si le premier le premier*[17] *; or le premier ; donc le premier*. Il peut être étonnant de considérer cela comme un théorème logique et non comme une évidence. Cela nous montre que Chrysippe pensait que la formalisation permettait de ne rien sous-entendre, ce qui était la garantie d'un système logique rigoureux, ou en

16. Par exemple de doubler le trope 3 par « Pas à la fois le premier et le second ; or le premier ; donc pas le second ».
17. Principe d'identité, postulat fondamental dans la logique stoïcienne.

d'autres termes « qu'il donne pour objet à la démonstration non pas d'établir des choses non-évidentes, mais d'organiser un ensemble de propositions jusque là isolées, de les unifier en un système déductif. » (Blanché, 1970, p. 118)

Comme chez Aristote, nous pouvons trouver dans la logique stoïcienne les principes du raisonnement direct (trope 1) et du raisonnement par contraposée (trope 2), ainsi que celui du raisonnement par l'absurde.

### 1.1.3 Synthèse pour la période de l'Antiquité grecque

Nous avons eu un aperçu de deux systèmes logiques de l'Antiquité grecque : celui d'Aristote et celui de Stoïciens. J'en rappelle les principaux éléments en relation avec mon étude :

1. ils contiennent tous deux un travail important sur le langage, travail qui consiste à préciser de quel type de discours s'occupe la logique, puis à décrire les formes de ce discours, pour pouvoir élaborer un système logique formel.
   – La proposition, qui affirme des faits et porte le vrai ou le faux, est un élément de base de ces systèmes logiques. Dans la logique d'Aristote, la proposition est décomposée en sujet, copule, prédicat. La copule peut-être affirmative ou négative, le sujet peut être prédiqué universellement ou particulièrement, ce qui donne 4 types de propositions. Cette logique est qualifiée de « logique des termes [18] » et nécessite pour la modéliser dans la logique mathématique actuelle d'utiliser le langage des prédicats. Dans la logique des Stoïciens, les propositions simples permettent de fabriquer des propositions composées et l'on retrouve certains connecteurs de notre calcul propositionnel moderne : la négation, la conjonction, la disjonction exclusive. L'implication était sujet de débat : Philon de Mégare en avait une conception conforme au connecteur propositionnel moderne, mais s'opposait ainsi à la conception de son maître Diodore de Cronos. Et Chrysippe en avait encore une autre conception (les discussions s'expliquent notamment par le fait qu'ils ne distinguaient pas entre l'implication entre propositions et l'implication universellement quantifiée).
   – Des variables sont utilisées pour remplacer, dans les schémas de raisonnement, les termes chez Aristote ou les propositions chez les Stoïciens. Elles ne sont que des simples marque-place chez Aristote, ces lettres de variables n'ont vocation qu'à être instanciées par des termes. Chez les Stoïciens, les variables utilisées sont des ordinaux, celles-ci étant également vouées à être remplacées par des propositions. Mais les Stoïciens pratiquaient également la substitution de variable, c'est-à-dire le remplacement d'une variable non plus par une valeur, mais par une autre variable.

18. Les termes sont ce qui peut être sujet ou prédicat.

2. Ces logiques s'occupent de la validité des raisonnements, garantie par la forme et non le contenu des propositions qui y interviennent. En cela, ces deux logiques peuvent être qualifiées de formelles. Notons cependant deux différences :
   – les Stoïciens montraient une attention particulière au langage utilisé à l'intérieur même de la proposition, c'est-à-dire qu'ils rigidifiaient l'utilisation de certains mots de la langue courante, donnant alors à ces mots un rôle de constante logique. Ce souci était moins présent chez Aristote. Nous pouvons ainsi dire que les Stoïciens étaient plus formalistes qu'Aristote.
   – Aristote exprimait les schémas de raisonnement sous forme de lois logiques (si $P_1$ et $P_2$ alors $C$). La validité de ces lois logiques, qui garantissait la vérité de la conclusion sous réserve de la vérité des prémisses, était distinguée de la validité d'un raisonnement, qui était établie lorsque l'on appliquait une loi logique valide à des prémisses vraies. Les Stoïciens exprimaient leurs schémas de raisonnement sous forme de règles d'inférence ($P_1$ et $P_2$ donc $C$), dans lesquelles les prémisses sont posées comme vraies et donc aussi la conclusion.

Dans ces deux systèmes cohabitent les aspects syntaxique (les schémas formels de raisonnement) et sémantique (les raisonnements, instanciations de ces schémas). De plus, les règles de conversion des propositions chez Aristote ou les thèmes chez les Stoïciens (règles permettant de ramener des schémas de raisonnement aux cinq tropes indémontrés) sont posés en se référant aux valeurs de vérité, c'est-à-dire avec des considérations sémantiques, mais sont ensuite utilisées de façon syntaxique dans le sens d'une manipulation de signes indépendamment de leur sens.

Il est important de souligner que ces deux systèmes logiques n'ont pas particulièrement vocation à être utilisés en mathématiques. Ils sont des théories du raisonnement dans un cadre général. Les démonstrations d'Euclide, par exemple, ne sont pas du tout rédigées sous forme de syllogismes. Ces deux systèmes sont en effet bien insuffisants pour rendre compte des raisonnements mathématiques, ce que nous voyons bien quand nous les « traduisons » dans les termes de la logique mathématique moderne : la logique des Stoïciens reste une logique propositionnelle et dans la logique d'Aristote n'interviennent que des prédicats monadiques, une proposition telle que « $\forall x \, \exists y \quad x < y$ » n'y est pas exprimable.

La logique d'Aristote a continué d'être développée, notamment par des philosophes du Moyen-Âge en Europe. C'est de cette époque par exemple que date le classement des syllogismes à l'aide de noms mnémotechniques (*Barbara, Baroco* ...). Cette logique est parfois qualifiée de scolastique, car elle était enseignée dans les écoles à l'aide de volumineux traités. Nous allons maintenant voir les positions de deux philosophes et mathématiciens du XVII$^{e}$ siècle par rapport à cette logique : celle de Descartes et celle de Leibniz.

## 1.2 L'époque moderne : Descartes et Leibniz

L'esprit humaniste de la Renaissance, que l'on retrouve dans les propos de Descartes (philosophe et mathématicien français, 1596-1650), rejette l'aspect trop formel de cette logique scolastique. Descartes n'a pas écrit de logique, mais on retrouve ses idées dans *La logique ou l'art de penser*, traité écrit en 1662, connu sous le nom de *logique de Port-Royal* car on la doit à Antoine Arnauld et Pierre Nicole, membres de cette abbaye. Leibniz (philosophe et mathématicien allemand, 1646-1716) s'oppose presque à cette position. Pour lui l'aspect formel de la logique est la garantie de la validité des raisonnements, l'assimilation d'une démonstration à un calcul l'assurance de la nécessité des conclusions.

Le contexte mathématique dans lequel ces deux positions co-existent presque est très important : depuis Viète, les mathématiques sont en train de vivre une époque de symbolisation féconde, à laquelle Descartes et Leibniz ont grandement contribué. Pour l'un comme pour l'autre la démonstration mathématique est un modèle de pensée pour qui recherche des vérités, mais ils n'ont pas la même conception de la démonstration mathématique, comme le suggère J. Bouveresse :

Pour Descartes :

> La correction du raisonnement ne peut être garantie, justement, que par une attention suffisante et constante au contenu lui-même, et certainement pas par la séparation rigoureuse de la forme d'avec le contenu et le respect de règles formelles de quelque nature que ce soit. (Bouveresse, 2006, p. 18)

Au contraire :

> Leibniz soutient que la démonstration est valide en vertu de sa forme et non de son contenu. Elle est constituée d'une suite de propositions qui commence par des identités explicites totales ou partielles, c'est-à-dire des propositions de la forme « $A$ est $A$ », « $AB$ est $A$ », etc., et dont chaque proposition est tirée d'une des précédentes par une application du principe de substituabilité des termes identiques *salva veritate*. (Bouveresse, 2006, p. 20)

### 1.2.1 Descartes, la logique de Port-Royal

#### La méthode cartésienne

Descartes est l'un des meilleurs représentants de l'attitude critique vis-à-vis de la logique scolastique. Il lui reproche d'être trop formelle et de peu d'utilité dans la recherche de la vérité :

> On sait que des sources de connaissance certaines qu'il admet, l'intuition et la déduction, il fait reposer la seconde sur la première. [...] Dans ces conditions il ne saurait y avoir de raisonnement purement formel qui tienne : ou bien

> le départ de la déduction consiste en idées claires et distinctes, et alors la déduction n'est pas seulement valable formellement, elle est matériellement vraie ; ou bien les idées initiales sont obscures et confuses, et alors nous n'avons plus de certitude, même logique, quant aux conséquences que nous essayons d'en tirer. On ne saurait raisonner à vide. Ce que Descartes recherche pour la science, ce n'est pas essentiellement la cohérence, c'est la vérité. Ce qu'il demande à la méthode, ce n'est pas d'endormir l'esprit sous la fausse sécurité des règles, c'est au contraire de le rendre vigilant, d'« accroître la lumière naturelle de la raison ». (Blanché, 1970, p. 178)

Le syllogisme n'est plus le modèle pour raisonner, il lui préfère une méthode inspirée des raisonnements par analyse et synthèse des mathématiques. Descartes la résume dans les quatre règles données dans le *Discours de la méthode, Pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* :

> [...] ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.
>
> Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.
>
> Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.
>
> Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.
>
> Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.
>
> Ces longues chaînes de raison toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent de la même façon, et que pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on en découvre. (Descartes, 1991, pp. 90-91)

Nous retrouvons ici une description de la méthode déductive dans laquelle est affirmé un attachement à la connaissance des objets, c'est-à-dire une préoccupation constante du contenu et le refus d'un raisonnement se détachant du sens.

### La logique de Port-Royal

*Des extraits de la logique de Port-Royal se trouvent en annexe C, page 463.*

Ces positions de Descartes sont reprises dans *La logique ou l'art de penser*, rédigée par Antoine Arnauld et Pierre Nicole. Cet ouvrage a eu un grand succès et a servi pendant près de deux siècles à l'initiation à la logique de beaucoup de jeunes gens. Sa rédaction marque une rupture avec les gros traités de l'époque scolastique, la volonté des auteurs étant explicitement de proposer quelque chose de court, aisé à retenir et utile (voir extraits du premier discours en annexe page 463). Cette importance accordée à l'aspect pratique de la logique se voit dans l'utilisation de nombreux exemples plutôt que de schémas syllogistiques utilisant des variables.

Par ailleurs, la logique est conçue comme étant un outil d'analyse du langage et du raisonnement plutôt qu'un outil pour s'exprimer et raisonner (voir intégralité du préambule intitulé « Logique » en annexe page 465) :

> La logique est l'art de bien conduire sa raison dans la connaissance des choses, tant pour s'instruire soi-même que pour en instruire les autres.
>
> Cet art consiste dans les réflexions que les hommes ont faites sur les quatre principales opérations de leur esprit, *concevoir, juger, raisonner* et *ordonner.*
>
> [. . . ]
>
> Tout cela se fait naturellement, et quelquefois mieux par ceux qui n'ont appris aucune règle de la logique que par ceux qui les ont apprises.
>
> Ainsi, cet art ne consiste pas à trouver le moyen de faire ces opérations, puisque la nature seule nous les fournit en nous donnant la raison ; mais à faire des réflexions sur ce que la nature nous fait faire. (Arnauld & Nicole, 1992, p. 30)

La logique de Port-Royal est divisée en quatre parties, les trois premières reprennent les développements de la logique d'Aristote, la quatrième traite de la méthode cartésienne. C'est l'association de ces deux approches qui est une véritable nouveauté, même si elles sont plus juxtaposées qu'articulées.

**(a) Sur les propositions** On retrouve la classification des propositions selon la quantité et la qualité et les quatre types de propositions assorties des lettres qu'on leur associe désormais (voir en annexe page 468). Les relations entre les valeurs de vérité de chaque type de proposition sont maintenant établies de manière exhaustive (voir en annexe page 468) et représentées selon le schéma suivant appelé *carré des oppositions*[19] :

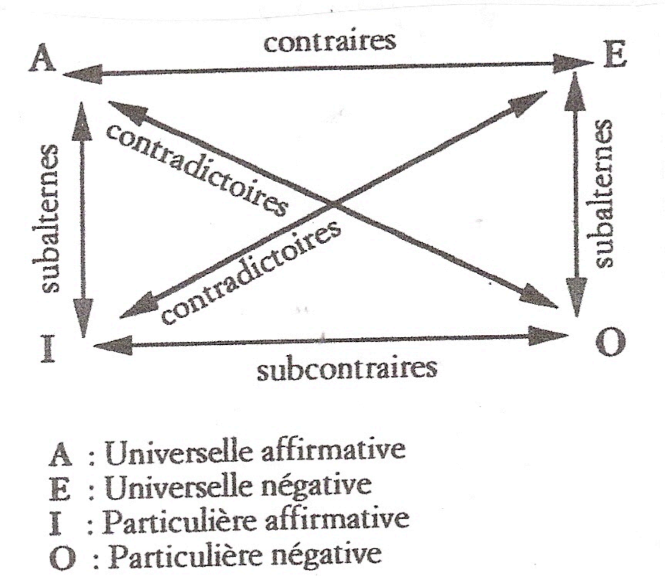


FIGURE 1.3 – Carré des oppositions

Sont ensuite présentés différents types de propositions composées. Il est précisé que pour trouver les contradictoires de ces propositions composées, on le fait en latin en mettant une négation en tête ou en français en utilisant *il n'est pas vrai que*. Ce syntagme fonctionne ainsi comme le connecteur logique propositionnel NON. Il y a six sortes de propositions composées (voir en annexe page 471) :

– les **copulatives**, qui s'expriment avec un *et* (propositions de la forme $P$ ET $Q$), ou un *ni* (propositions de la forme NON $P$ ET NON $Q$).
– les **disjonctives**, qui s'expriment avec un *ou* qui est exclusif.
  Pour ces deux types de propositions, il est précisé que la valeur de vérité de la proposition composée dépend des valeurs de vérité des deux parties.
– les **conditionnelles**, qui s'expriment avec un *si*. Deux types de conséquence sont distinguées : les conséquences médiates, quand il n'y a aucun terme commun entre les deux parties de la conditionnelle, et les conséquences immédiates quand il y a un terme commun. Ainsi, en considérant des propositions telles que « si la terre est immobile, le soleil tourne », les auteurs semblent s'orienter vers une conception des conditionnelles comme implication entre propositions. Cependant, quand il s'agit d'établir à quelles conditions les conditionnelles sont vraies, ils ne considèrent qu'un exemple, « Si la volonté de la créature est capable d'empêcher que la volonté absolue de Dieu ne s'accomplisse, Dieu n'est pas tout puissant », qui est une conditionnelle immédiate, et qui est vraie car

19. Le diagramme présenté ici est dû à Boèce, philosophe latin (470-524). Il a été largement utilisé par les logiciens médiévaux.

« quoique l'une et l'autre partie fussent fausses, néanmoins la conséquence de l'une à l'autre est bonne » (Arnauld & Nicole, 1992, p. 126). Cette définition de la vérité des conditionnelles ne correspond pas à celle donnée par la table de vérité de l'implication, mais plutôt à la notion de conséquence logique (voir en annexe page 453 pour une définition de cette notion).
– les **causales**.
– les **relatives** qui renferment une comparaison.
– les **discrétives** où l'on marque une différence de jugement par *mais* ou *néanmoins*.

Des propositions avec « mais » sont souvent utilisées en mathématiques, par exemple quand on donne un contre-exemple. Ainsi, pour infirmer « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 1$ », on pourra arguer que « $(-2)^2 \geqslant 1$ mais $-2 < 1$ », l'utilisation du terme « mais » venant renforcer la différence entre la satisfaction de la prémisse et la non-satisfaction de la conclusion. Si nous cherchions à modéliser les propositions discrétives à l'aide des connecteurs du calcul propositionnel, le plus proche serait de dire que « $A$ mais $B$ » est équivalent à « $A$ ET $B$. » Mais dans cette modélisation, cette « différence de jugement » serait perdue. Nous pouvons voir dans cette distinction entre copulatives et discrétives l'attention des auteurs de la logique de Port-Royal à l'analyse du langage ordinaire.

Pour ces discrétives, il est proposé plusieurs contradictoires possibles :

> Il peut y avoir plusieurs contradictoires d'une proposition de cette sorte, comme si on disait :
> *Ce n'est pas des richesses, mais de la science que dépend le bonheur.*
> On peut contredire cette proposition en toutes ces manières :
> *Le bonheur dépend des richesses, et non de la science.*
> *Le bonheur ne dépend ni des richesses, ni de la science.*
> *Le bonheur dépend des richesses et de la science.*
> (Arnauld & Nicole, 1992, p. 128)

Ainsi, pour contredire « $A$ mais $B$ », il faut affirmer « NON $A$ ET $B$ » ou bien affirmer « NON $A$ ET NON $B$ » ou bien affirmer « $A$ ET NON $B$ ». Au lieu de donner une seule contradictoire qui serait une proposition disjonctive [20], les auteurs proposent trois contradictoires correspondant chacune à une des composante de la disjonction. Ceci appuie le caractère pratique de la logique de Port-Royal : la contradictoire n'est pas obtenue formellement, elle a un aspect pratique : est contradictoire ce qui permet l'acte de contredire.

20. En réunissant les trois possibilités dans une seule affirmation, on obtient la proposition « (NON $A$ ET $B$) OU BIEN (NON $A$ ET NON $B$) OU BIEN ($A$ ET NON $B$) », qui est l'expression sous forme d'une disjonction exclusive de la négation de « $A$ ET $B$ », négation que l'on présente généralement sous la forme d'une disjonction inclusive « NON $A$ OU NON $B$ ».

Puis sont présentées des propositions composées au niveau du sens, c'est-à-dire des propositions qui renferment deux jugements (voir en annexe page 473) :

- les exclusives, « qui marquent qu'un attribut convient à un sujet, et qu'il ne convient qu'à ce seul sujet. »
- les exceptives, « où l'on affirme une chose de tout un sujet, à l'exception de quelqu'un des inférieurs à ce sujet. »
- les comparatives.
- les inceptives ou désitives, « lorsqu'on dit qu'une chose a commencé ou cesse d'être telle. » (Arnauld & Nicole, 1992, pp. 129 à 135)

Pour ces propositions composées au niveau du sens, il est également proposé plusieurs manières de les contredire puisqu'elles correspondent chacune à des propositions qui s'écriraient comme des conjonctions. Nous retrouvons de telles propositions dans le discours mathématique, comme par exemple quand nous affirmons :

- « la solution de l'équation $f(x) = 1$ est -3 » (exclusive),
- « tous les nombres premiers excepté 2 sont impairs » (exceptive),
- « la suite $u$ est croissante à partir du rang 6 » (inceptive).

Même si nous n'utilisons pas des conjonctions pour exprimer ces propositions, nous savons bien que pour les démontrer il y a à chaque fois deux choses à faire :

- montrer que -3 est solution et que c'est la seule,
- montrer que 2 est un nombre premier non impair et que tous les autres nombres premiers sont impairs,
- montrer que la suite $u$ est croissante à partir du rang 6 et pas avant. [21]

*La logique de Port-Royal* propose ainsi une analyse très fine du langage dont le but est de découvrir les structures fondamentales qui sont dissimulées sous la variété des formes de l'expression. Nous voyons qu'une telle analyse, bien qu'insuffisante pour décrire le langage mathématique, permet un premier niveau de lecture des propositions mathématiques, quand elles sont exprimées dans des formulations proches du langage courant. Dans les exemples donnés ci-dessus, souligner le fait que ces propositions « composées au niveau du sens » sont des conjonctions permet de voir qu'il y aura deux étapes dans leur démonstration.

**(b) Sur les raisonnements** La troisième partie de la logique de Port-Royal traite des raisonnements. Les auteurs avertissent le lecteur :

> Cette partie que nous avons maintenant à traiter, qui comprend les règles du raisonnement, est estimée la plus importante de la logique, et c'est presque l'unique qu'on y traite avec quelque soin ; mais il y a sujet de douter si elle est aussi utile qu'on se l'imagine. La plupart des erreurs des hommes, comme nous avons déjà dit ailleurs, viennent bien plus de ce qu'ils raisonnent sur de

21. Même si dans ce cas on accepte généralement un sens plus large qui est « croissante au moins à partir du rang 6 », qui n'est pas une conjonction.

faux principes, que non pas de ce qu'ils raisonnent mal suivant leurs principes. (Arnauld & Nicole, 1992, p. 167)

Les syllogismes y sont présentés selon le traitement développé au Moyen-Âge, dans la lignée d'Aristote. Les syllogismes, qui comportent deux prémisses et une conclusion, sont classés en quatre *figures* selon la place (sujet ou attribut) du moyen terme [22]. Puisqu'il y a quatre types de propositions, il y a dans chaque figure soixante-quatre ($4^3$) *modes* correspondant chacun à un choix pour chacune des trois propositions. Le but est de savoir dans chaque figure quels sont les modes qui correspondent à des syllogismes concluants. Des règles générales sont données pour les quatre figures qui permettent de réduire à dix le nombre de modes possiblement concluants dans chaque figure (voir en annexe page 476). Ensuite, le même schéma est suivi pour chaque figure (voir en annexe page 477) :

– donner d'autres règles spécifiques à la figure en question,
– en déduire les syllogismes concluants : ceux qui ne sont pas éliminés par les règles,
– donner les noms de ces modes, associés chacun à un exemple,
– donner finalement des principes de cette figure, sortes de maximes résumant les syllogismes concluants.

Notons alors deux caractéristiques de cette présentation : il y a une justification de chacune des règles, mais il n'est pas démontré que les syllogismes restants sont bien concluants. Il n'y a aucun schéma syllogistique donné avec des variables, mais seulement des exemples pour présenter chaque mode concluant, chaque exemple étant présenté sous la forme d'une inférence *Prémisse 1, Prémisse 2, donc Conclusion.*

À côté de ces modes concluants des quatre figures sont présentées d'autres formes de syllogismes, dont notamment :

– les syllogismes conjonctifs dont la majeure est composée et qui sont de trois genres, dans lesquels nous retrouvons les cinq tropes des Stoïciens (voir en annexe page 479) :

  (1) les syllogismes conditionnels qui correspondent au *modus ponens* et au *modus tollens*, caractérisés chacun par une règle : *en posant l'antécédent, on pose le conséquent*, et *ôtant le conséquent, on ôte l'antécédent.* Les auteurs précisent explicitement qu'il n'est pas valide d'inférer l'antécédent du conséquent, ou la négation du conséquent de la négation de l'antécédent.

  (2) Les syllogismes disjonctifs sont ceux contenant une prémisse qui est une proposition disjonctive. Puisqu'il s'agit d'un ou exclusif, il y a là aussi deux sortes de tels syllogismes concluants : quand on nie l'une des deux parties de la disjonction, on peut alors en déduire l'autre, ou quand on affirme une des deux parties, on peut alors en déduire la négation de l'autre.

22. Le petit terme est le sujet de la conclusion, le grand terme l'attribut de la conclusion, le moyen terme est le troisième terme, relié à chacun des deux autres dans chacune des prémisses, qui va permettre de les mettre en relation. Par exemple, dans le syllogisme « Tout $B$ est $A$, Tout $C$ est $B$, Tout $C$ est $A$ », le petit terme est $C$, le grand terme est $A$, le moyen terme $B$ est sujet dans la première prémisse (la majeure) et attribut dans la deuxième (la mineure), c'est un syllogisme de la première figure.

(3) Les syllogismes copulatifs sont des syllogismes contenant une proposition copulative niante dans l'une des prémisses ( NON($A$ ET $B$)), quand on affirme ensuite l'une des parties, on peut en déduire la négation de l'autre.

– Les syllogismes dont la conclusion est conditionnelle (voir en annexe page 480). En fait, les auteurs remarquent qu'un syllogisme tel que :
*Tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux :*
*Or, la lune réfléchit la lumière de toutes parts :*
*Donc la lune est un corps raboteux.*
peut être exprimé avec seulement deux propositions :
*Tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux :*
*Donc si la lune réfléchit la lumière de toutes parts, c'est un corps raboteux.*
Et même avec une seule :
*Si tout corps qui réfléchit la lumière de toutes parts est raboteux, et que la lune réfléchisse la lumière de toutes parts, il faut avouer que ce n'est point un corps poli, mais raboteux.*
Cependant, même si ces diverses formulations sont associées, les auteurs les distinguent bien par rapport à ce qu'elles posent pour vrai ou non :

> Toute la différence qu'il y a entre les syllogismes absolus et ceux dont la conclusion est enfermée avec l'une des prémisses dans une proposition conditionnelle, est que les premiers ne peuvent être accordés tout entiers, que nous ne demeurions d'accord de ce qu'on aurait voulu nous persuader ; au lieu que dans les derniers, on peut accorder tout, sans que celui qui les fait ait encore rien gagné, parce qu'il lui reste à prouver que la condition d'où dépend la conséquence qu'on lui a accordée est véritable. (Arnauld & Nicole, 1992, p. 208)

Ainsi, quand bien même *si ... alors* et *donc* sont associés, ils sont clairement différenciés.

**(c) Sur la méthode** À côté de la présentation des syllogismes, la méthode vient donner les principes de la démonstration (voir les règles inspirées de la méthode des géomètres en annexe page 481) :

> Il nous reste à expliquer la dernière partie de la logique, qui regarde la méthode, laquelle est sans doute l'une des plus utiles et des plus importantes. Nous avons cru devoir y joindre ce qui regarde la démonstration, parce qu'elle ne consiste pas d'ordinaire en un seul argument, mais dans une suite de plusieurs raisonnements, par lesquels on prouve invinciblement quelque vérité ; et que même il sert de peu pour bien démontrer, de savoir les règles des syllogismes, ce à quoi l'on manque très-peu souvent ; mais que le tout est de bien arranger ses pensées, en se servant de celles qui sont claires et évidentes, pour pénétrer dans ce qui paraissait plus caché. (Arnauld & Nicole, 1992, p. 273)

Les auteurs affirment ici clairement que les schémas de raisonnement ne peuvent pas seuls amener à démontrer des vérités. Cette intégration de la méthode à la logique en fait un art de diriger la pensée et s'écarte de la conception de la logique comme science formelle. Nous retrouvons là toute la problématique des relations entre la logique mathématique (même si à l'époque rien de tel n'est encore constitué) et la logique des mathématiques, à l'œuvre dans l'activité mathématique (bien qu'ici il ne s'agisse pas seulement de la logique des mathématiques, mais de la logique de la science, ou même plus largement de la logique dont nous devons user dans nos réflexions quotidiennes).

### 1.2.2 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz est considéré comme un grand pionnier dans l'histoire de la logique, à l'origine de la lignée des logiciens modernes. Signalons tout de suite que si l'on peut effectivement trouver dans les idées de Leibniz des éléments qui seront développés à la fin du XIXe siècle, ces développements auront lieu indépendamment des travaux de Leibniz qui seront plutôt redécouverts et réinterprétés à la lueur des nouveautés de la logique mathématique.

Pour ce qui est de la logique classique, Leibniz se situe dans la continuité des auteurs qui l'ont précédé. Il apporte quelques développements à la syllogistique aristotélicienne et essaie d'imaginer des représentations diagrammatiques pour les figures du syllogisme.

Mais ses réflexions portent aussi sur les inférences qui échappent aux schémas syllogistiques, telles que celles que Jungius (1587-1657) avait listées dans son *Logica hamburgernsis*, par exemple l'inversion des relations (de *Pierre est le père de Paul*, je peux déduire que *Paul est le fils de Pierre*), les conséquences *a compositis ad divisa* (de *Platon est un philosophe éloquent*, je peux déduire que *Platon est éloquent*)... À la manière de Jungius, Leibniz tente d'exprimer de telles inférences de manière à les réduire à des formes classiques.

Leibniz est attaché au développement d'un système logique en tant que système cohérent permettant la description de tous les raisonnements, attachement qui contraste avec la position des auteurs de la logique de Port-Royal qui ne s'occupent pas de développer un système, mais seulement de donner des indications pour guider les raisonnements. Notons aussi qu'avec ces réflexions, Leibniz s'engage dans la voie d'une logique des relations, mais un attachement exclusif à la forme attributive de la proposition (Sujet *est* Prédicat) l'empêche d'aller plus avant dans cette élaboration.

Pour Leibniz, le but de la logique est d'assurer l'infaillibilité du raisonnement en le réduisant à sa forme et c'est surtout en cela qu'il est novateur. Pour parvenir à un tel but, il lui faut élaborer une caractéristique universelle (*Lingua characteristica universalis*) permettant que les raisonnements soient réduits à un calcul (*Calculus ratiocinator*), ce qu'il décrit dans *Fondements du calcul rationnel* :

> Quant aux langues ordinaires, même si elles servent beaucoup le raisonnement, elles sont cependant sujettes à d'innombrables équivoques et ne peuvent faire l'office d'un calcul, à savoir nous permettre de déceler des erreurs de raisonnement à partir de la seule formation et construction des mots, à la façon de solécismes [23] et de barbarismes [24]. Tel est en revanche l'avantage admirable de l'arithmétique et de l'algèbre, où tout raisonnement consiste dans l'usage de caractères et où l'erreur de l'esprit coïncide avec celle du calcul.
>
> Lorsque j'ai creusé plus profondément ce sujet, m'est apparu aussitôt de façon manifeste que toutes les pensées humaines peuvent tout à fait se résoudre en un petit nombre d'entre elles considérées comme primitives, et qu'en assignant des caractères à celles-ci, il est alors possible de former les caractères des notions dérivées, desquels on peut toujours extraire la totalité de leurs réquisits, les notions primitives qui y interviennent, en un mot leur définition, c'est-à-dire leur valeur, et donc aussi les affections que l'on peut démontrer à partir des définitions. Une fois pourvu de cette seule réalisation, quiconque se servirait de caractères de ce genre en écrivant et en raisonnant ne faillirait jamais, ou alors pourrait lui-même, non moins que d'autres, surprendre ses propres fautes par les plus faciles examens. De plus, il trouverait les vérités, dans la mesure où les données dont il dispose le permettent, et lorsque les données ne suffisent pas pour trouver ce qui est demandé, il verrait aussitôt de quelles expériences et de quelles connaissances on peut bien encore avoir besoin pour accéder à la vérité, dans la mesure où c'est possible à partir des données, que ce soit par l'approximation ou par la détermination du plus grand degré de probabilité. Quant aux sophismes et aux paralogismes, ils ne seraient pas différents ici des erreurs de calcul qu'on fait en arithmétique et des solécismes et barbarismes dans les langues. (Leibniz, 1998, pp. 167-168)

Cette longue citation montre la conviction de Leibniz qu'un tel but est atteignable et qu'il serait d'un grand secours pour le raisonnement. L'œuvre logique de Leibniz est extrêmement riche et complexe. Je me contenterai ici de donner un extrait de *Suppléments à l'échantillon de calcul universel*, écrit entre 1679 et 1686, qui illustre bien selon moi le but et la méthode de Leibniz. Ici, les lettres minuscules représentent des termes, c'est-à-dire non pas des noms mais ce qui est signifié par les noms, à savoir les concepts. Elles jouent le même rôle que les lettres dans le calcul algébrique symbolique qui se développe depuis un siècle : elles ont vocation à être remplacées par des termes concrets.

> POSTULAT : qu'il soit permis de supposer qu'une lettre est équivalente à une seule lettre ou à plusieurs lettres conjointes ; ainsi $d$ est équivalent à $a$ et elles peuvent être substituées l'une à l'autre, ou bien $c$ est équivalent au terme

23. Erreur de langage qui enfreint les règles de la syntaxe.
24. Erreur de langage qui enfreint les règles de la morphologie.

*ab* (par exemple *homme* est identique à *animal rationnel*). Ce postulat s'entend sous réserve qu'aucune supposition contraire n'ait été faite antérieurement.

PROPOSITIONS VRAIES PAR SOI :

(1) *a est a . L'animal est animal.*

(2) *ab est a. L'animal rationnel est animal.*

(3) *a n'est pas non-a. L'animal n'est pas non-animal.*

(4) *non-a n'est pas a. Le non-animal n'est pas animal.*

(5) *Celui qui n'est pas a est non-a. Celui qui n'est pas animal est non-animal.*

(6) *Celui qui n'est pas non-a est a. Celui qui n'est pas non-animal est animal.*

Ces propositions permettent d'en déduire plusieurs autres.

INFÉRENCES VRAIES PAR SOI :

*a est b et b est c donc a est c. Dieu est sage, le sage est juste* donc *Dieu est juste.* On peut continuer cette chaîne davantage, par ex. : *Dieu est sage, le sage est juste, le juste est sévère,* donc *Dieu est sévère.*

PRINCIPES DU CALCUL :

(1) Tout ce qui a été conclu au moyen de lettres quelconques indéfinies doit pouvoir être conclu au moyen de n'importe quelles autres lettres respectant les même conditions.[...]

(2) La transposition des lettres dans un même terme ne change rien [...]

(3) La répétition de la même lettre dans un même terme est inutile [...]

(4) À partir d'un nombre quelconque de propositions on peut en former une seule en additionnant tous les sujets en un seul sujet et tous les prédicats en un seul prédicat ; *a est b, c est d* et *e est f* donne *ace* est *bdf* [...]

(5) À partir de n'importe quelle proposition dont le prédicat est composé de plusieurs termes on peut former plusieurs propositions qui ont toutes le même sujet que la proposition de départ mais qui ne conservent qu'une partie du prédicat ; *a est bcd* donc *a est b, a est c* et *a est d* [...]

Si *a est b* et *b est a*, alors *a* et *b* sont dits identiques [...]

On démontre facilement à partir de cette proposition que deux identiques peuvent partout se substituer l'un à l'autre *salva veritate* (Leibniz, 1998, pp. 96-97)

### 1.2.3 Synthèse pour le XVII^e^ siècle

Nous avons étudié deux systèmes logiques du XVII^e^ siècle, tous deux dans la continuité des développements au Moyen-Âge de la logique aristotélicienne. Nous y retrouvons deux positions courantes par rapport au formalisme : pour Descartes et les auteurs de la logique de Port-Royal, il ne sert à rien dans la découverte des vérités et en attachant trop d'importance à la forme, on se coupe du sens ; pour Leibniz il permet d'atteindre des vérités en permettant à l'esprit de se reposer sur la sécurité du calcul et d'être en prise directe avec les pensées sans l'intermédiaire des mots parfois ambigus. Ces deux positions se retrouvent en tension l'une par rapport à l'autre dans l'enseignement, par exemple dans l'enseignement de l'algèbre. D'une part la compétence algébrique ne se limite pas à savoir manipuler formellement les expressions, mais suppose également de savoir mettre en œuvre ces manipulations dans la résolution d'un problème. Mais d'autre part, une aisance dans la manipulation formelle des expressions nous amène à percevoir son intérêt lors d'une telle résolution.

Je rappelle les principaux traits de ces systèmes à retenir pour mon étude :

1. en ce qui concerne le travail sur le langage, en plus de ce qui était déjà présent dans les systèmes de l'Antiquité grecque :
   - la logique de Port-Royal propose une analyse très fine de diverses formulations du langage courant. On y retrouve les quatre types de propositions d'Aristote, mais aussi la notion de propositions composées des Stoïciens, et la notion de propositions « composées au niveau du sens », qui disent en fait deux choses (par exemple, « excepté le sage, tous les hommes sont vraiment fous » dit d'une part que le sage n'est pas fou, d'autre part que tous les hommes qui ne sont pas le sage sont fous). La logique est alors un outil pour dégager les structures fondamentales des diverses formes du discours.
   - Pour Leibniz, les ambiguïtés du langage ordinaire empêchent d'être sûr de la validité des raisonnements exprimés dans ce langage. Suivant l'exemple du symbolisme algébrique qui permet de raisonner sur les nombres à l'aide de calculs sur des signes, il voudrait établir un système de signes directement reliés aux pensées sans passer par les mots, et des règles de manipulation de ces signes permettant de réduire le raisonnement à un calcul. Il ébauche alors un processus d'« algébrisation » des propositions. Il désigne les concepts par des lettres minuscules, qui peuvent éventuellement être concaténées pour signifier l'attribution d'un qualificatif à un concept (si $a$ désigne *homme*, $b$ désigne *rationnel*, $ab$ désigne *homme rationnel*). Cependant, un attachement à la forme attributive de la proposition (*Sujet* est *Prédicat*) l'empêche de mener à bout cette mathématisation, ce que fera G. Boole quelques siècles plus tard. Les lettres qu'il utilise ont vocation à être remplacées par des concepts ou par une autre lettre. Il donne par ailleurs des règles syntaxiques de manipulations de ces lettres (par exemple, la répétition de la même lettre dans un même terme est inutile).

2. Sur le niveau de formalisation du langage et des raisonnements :
   - les auteurs de la logique de Port-Royal n'utilisent des lettres que pour désigner les quatre types de propositions. Aucun schéma de raisonnement n'est donné,

tous les syllogismes sont illustrés par des exemples dans lesquels interviennent des propositions concrètes. Ils affirment ainsi leur position anti-formaliste.

– Pour Leibniz au contraire la formalisation est la seule possibilité pour pouvoir garantir l'infaillibilité du raisonnement. Son œuvre est importante plus par la possibilité qu'il a entrevue d'une telle formalisation que par sa réalisation qui n'est pas vraiment aboutie.

Les idées et les tentatives de Leibniz ne sont pas vraiment reprises ni développées dans les années qui suivent. Quant à la logique aristotélicienne, la logique de Port-Royal en représente presque un aboutissement. Deux directions vont ensuite être prises : continuer à chercher une manière de présenter la logique classique qui permette un traitement de plus en plus mathématique, c'est notamment la voie que va suivre G. Boole, et continuer à chercher un système de signes permettant l'expression des propositions et des raisonnements, avec un nombre de règles de traitement de ces signes limité permettant d'assurer le contrôle de la validité, ce que va faire G. Frege.

## 1.3 La naissance de la logique mathématique : Boole et Frege

Dans la lignée des idées des algébristes anglais de son époque (réunis autour de C. Babbage et G. Peacock), George Boole (philosophe et mathématicien britannique, 1815-1864) veut mettre en place une algèbre nouvelle dans le cadre de la logique, c'est-à-dire exprimer la logique classique avec le symbolisme algébrique. Ses travaux se situent en cela dans la continuité des essais de Leibniz.

Gottlob Frege (philosophe et mathématicien allemand, 1848-1925) est traditionnellement considéré comme le père de la logique mathématique actuelle avec son œuvre *Begriffsschrift* (Idéographie). D'autres logiciens (B. Russell, G. Peano, K. Gödel, E. Zermelo, A. Fraenkel, A. Turing...) joueront bien sûr un rôle important dans le développement de cette nouvelle discipline qui traite le langage et les raisonnements comme des objets mathématiques.

Le but de l'œuvre logique de Frege est différent de ce que nous avons déjà pu rencontrer. En effet, ce sont essentiellement les besoins des mathématiques qui l'amènent à développer son système, qu'il n'érige pas en théorie générale du raisonnement. Il veut, en mathématiques, assurer la sécurité du raisonnement et estime que les ambiguïtés du langage ordinaire le rendent inadéquat pour ce but, car il ne peut empêcher que quoi que ce soit d'intuitif ne s'insère de manière inaperçue. Il faut alors constituer un système de signes pour le raisonnement mathématique dont « le premier objectif est donc de nous fournir le critère le plus sûr de la validité d'une chaîne d'inférences et de nous permettre de remonter jusqu'à la source de tout ce qui y restait implicite » (G. Frege, cité dans Blanché, 1970,

p. 311). Ici le formalisme garantit la rigueur et la rigueur en mathématiques doit être absolue. Il n'est plus seulement question dans son système logique de décrire le langage mais bien de fournir un langage.

Boole et de Frege ne visent pas le même but lorsqu'ils élaborent leurs systèmes respectifs. Frege s'en explique dans *Sur le but de l'idéographie* :

> Mais le reproche qui m'est adressé ignore que mon but fut autre que celui de Boole. Je n'ai pas voulu donner en formules une logique abstraite, mais donner l'expression d'un contenu au moyen de signes écrits, et d'une manière plus précise et plus claire au regard que cela n'est possible au moyen des mots. (Frege, 1971, pp. 70-71)

### 1.3.1 *Les lois de la pensée* de George Boole

*Des extraits de Les lois de la pensée se trouvent en annexe D, page 487.*

G. Boole expose pour la première fois en 1847 son approche algébrique de la logique dans un petit essai intitulé *Analyse mathématique de la logique*. Mais cet ouvrage suit encore l'ordre traditionnel d'exposition de la logique classique, aristotélicienne. Puis dans *Les lois de la pensée*, publié en 1854, il inverse l'ordre de présentation en établissant « d'emblée une "théorie générale du raisonnement déductif" sur des principes fondamentaux, mathématiques dans leur forme, et dont Boole estime qu'ils constituent les lois mêmes du langage et de l'entendement humains. » (Souleymane Bachir Diane, dans l'introduction à Boole, 1992, p. 14), et en montrant ensuite la puissance de ce système en procédant à un examen de la logique classique à la lumière de celui-ci.

De même que Leibniz développe son système au moment où l'apparition des symboles fait faire de grands progrès à l'algèbre, Boole développe le sien en même temps que ses contemporains algébristes anglais fondent l'« algèbre symbolique », où l'on se contente de calculer sur les signes, sans tenir compte de leur signification qui peut varier dans diverses interprétations. Leur démarche s'appuie sur une relation forte entre travail heuristique et explicitation formelle en algèbre, qu'illustre par exemple le « principe des formes équivalentes » de Peacock :

> (A) : N'importe quelle forme qui est algébriquement équivalente à une autre lorsqu'elle est exprimée en symboles généraux continue à être équivalente quel que soit ce que ces symboles désignent.
>
> (B) : Proposition réciproque : Toute forme équivalente qui est mise en évidence dans l'algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente lorsque les symboles sont généraux dans leur nature ainsi que dans leur forme. (Peacock, *A report*

*on a recent progress and actual state of certain branches of analysis*, 1833, p. 194, cité dans Le Mignot, 2011, pp. 3-4)

Le propos de Peacock montre que l'articulation entre la syntaxe et la sémantique reste au coeur du travail mathématique. Mais le but de Boole dépasse le cadre des mathématiques, ainsi qu'il l'expose dès le début de *Les lois de la pensée* (d'autres extraits du premier chapitre *Nature et but de l'ouvrage* se trouvent en annexe page 489) :

> Le but de ce traité est d'étudier les lois fondamentales de l'esprit par lesquelles s'effectue le raisonnement ; de les exprimer dans le langage symbolique d'un calcul, puis, sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode ; de faire de cette méthode elle-même la base d'une méthode générale que l'on puisse appliquer à la théorie mathématique des Probabilités ; et enfin, de dégager des différents éléments de vérité qui seront apparus au cours de ces enquêtes, des conjectures probables concernant la nature et la constitution de l'esprit humain. (Boole, 1992, p. 21)

Ainsi, G. Boole constitue une logique qui s'applique à un domaine plus large que les mathématiques. En cela il est dans la continuité de la logique aristotélicienne, et revendique fortement le caractère mathématique de son approche. Il propose une entreprise nouvelle que nous pourrions qualifier de « mathématisation de la logique », qu'il base sur la proposition suivante :

> Proposition I
>
> Toutes les opérations du langage en tant qu'instrument du raisonnement se peuvent conduire dans un système de signes composé des éléments suivants :
>
> (1) Des symboles littéraux tels que $x$, $y$, etc. représentant les choses en tant qu'objets de nos conceptions.
>
> (2) Des signes d'opération tels que $+, -, \times$, qui traduisent les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou séparées de manière à former de nouvelles conceptions comprenant les mêmes éléments.
>
> (3) Le signe d'identité $=$.
>
> et ces symboles logiques voient leur usage soumis à des lois déterminées, qui en partie s'accordent et en partie ne s'accordent pas avec les lois des symboles correspondants dans la science de l'algèbre. (Boole, 1992, p. 45)

**(a) Sur les propositions** Dans le système de Boole, le remplacement de la copule « est » par le signe d'égalité est une nouveauté qui induit une symétrie entre sujet et prédicat [25]. Ainsi, plutôt que d'opérer sur les concepts comme le faisait Leibniz, Boole

25. Quelques années avant Boole, certains logiciens avaient introduit la quantification du prédicat, classant alors les propositions en huit catégories et non plus quatre, ce qui avait eu pour effet d'introduire plus de symétrie entre sujet et prédicat et de ramener la proposition à une équation. Cela simplifie les règles de conversion, mais complique la syllogistique.

opère sur les classes qui sont les extensions de ces concepts : la proposition « tous les hommes sont mortels » n'est plus vue comme l'attribution du concept *mortel* au concept *homme* pris universellement, mais comme l'inclusion de la classe *homme* dans la classe *mortel*, ou plutôt l'égalité entre la classe *homme* et une partie de la classe *mortel*.

Dans le langage courant, les *choses* évoquées dans la proposition I (voir ci-dessus), les opérations mentales sur ces choses, les relations entre ces choses sont exprimées par des mots. Boole propose d'y substituer des signes algébriques répondant à certaines lois correspondant à des caractéristiques évidentes de ce que représentent ces mots. Ainsi (voir également en annexe page 490) :

– les lettres de l'alphabet représentent des classes d'individus. Par exemple $x$ représente la classe des moutons, $y$ représente la classe des choses blanches ;
– la concaténation, ou le symbole de multiplication, représente le fait d'appliquer plusieurs caractérisations, par exemple $xy$ représente la classe des moutons blancs et on a bien sûr $xy = yx$. Une autre loi fondamentale est $x^2 = x$ (on retrouve une règle leibnitzienne : la répétition d'une même lettre est inutile. En comparant les deux formulations de ce même principe, on voit le pas franchi par Boole : introduire de véritables opérations sur les lettres).
– l'addition est interprétée par la réunion d'éléments disjoints, la soustraction comme la différence ensembliste et on a, entre autres, les lois $x + y = y + x$, $z(x + y) = zx + zy$.

Boole associe les deux conjonctions « et », « ou » du langage courant au signe $+$, ayant noté qu'elles sont employées l'une et l'autre pour signifier la réunion : le « et » est employé quand il s'agit de réunir les éléments d'une classe, le « ou » est employé quand il s'agit de réunir les caractérisations (dualité que nous voyons quand nous disons d'une part que dans $A \cup B$ il y a les éléments de $A$ et les éléments de $B$, d'autre part qu'appartenir à $A \cup B$ est équivalent à appartenir à $A$ ou à $B$). Il fait pour ce signe $+$ le choix du « ou » exclusif, ou plutôt de ne donner du sens à l'expression $x + y$ que quand les classes $x$ et $y$ sont disjointes. Il donne cependant plus loin l'expression du « ou » inclusif :

> A mon avis, prises dans leur sens le plus rigoureux, les conjonctions « et » et « ou » ont réellement le pouvoir de séparation ou d'exclusion en question ; l'expression « Tous les $x$'s sont ou $y$'s ou $z$'s », rigoureusement interprétée, signifie « Tous les $x$'s sont soit $y$'s mais pas $z$'s, soit $z$'s mais pas $y$'s ». Mais on doit, en même temps, admettre que le *jus et norma loquendi* semble plutôt pencher en faveur de l'interprétation contraire. L'expression « $y$'s ou $z$'s » est généralement comprise comme incluant les choses qui sont $y$'s et $z$'s en même temps, ainsi que celles qui ont l'une des propriétés mais pas l'autre. Si l'on se souvient cependant que le symbole $+$ possède véritablement le pouvoir de séparation dont nous avons discuté, on devra diviser tout énoncé disjonctif qui pourrait se représenter en des parties réellement séparées dans l'esprit, puis réunir leurs expressions respectives par le symbole $+$.

> Ainsi, conformément à la signification supposée, l'expression « les choses qui sont ou des $x$'s ou des $y$'s » aura deux équivalents symboliques. Si nous voulons dire « les choses qui sont des $x$'s mais pas des $y$'s, ou des $y$'s mais pas des $x$'s », nous aurons l'expression
>
> $$x(1-y)+y(1-x)\,;$$
>
> le symbole $x$ représentant les $x$'s et $y$ les $y$'s. Si, en revanche, nous voulons dire « les choses qui sont, soit des $x$'s, soit, sinon, des $y$'s », nous aurons l'expression
>
> $$x+y(1-x).$$
>
> Cette expression suppose que puisse être admise l'existence de choses qui sont des $x$'s et des $y$'s en même temps. On pourrait la traduire plus complètement sous la forme
>
> $$xy+x(1-y)+y(1-x)\,;$$
>
> mais cette expression, une fois additionnés ses deux premiers termes, ne fait que reproduire la précédente. (Boole, 1992, pp. 70-71)

Une autre innovation importante de Boole est l'introduction de la classe vide et de la classe universelle. Les seuls symboles numériques qui satisfont l'équation $x^2 = x$ sont 0 et 1. Boole cherche alors la signification logique de ces symboles et pour que soient respectées les lois formelles $0y = 0$ et $1y = y$, il les interprète respectivement par la classe « Rien » et « l'Univers ». S'en suit la proposition suivante :

Proposition III

> *Si $x$ représente une classe quelconque de choses, alors $1-x$ représente la classe contraire ou complémentaire, c'est-à-dire la classe qui contient toutes les choses qui ne sont pas contenues dans la classe $x$.* (Boole, 1992, p. 64)

Une fois établi ce nouveau système de signes, avec lesquels on a pu exprimer les propositions « élémentaires » de la logique classique, Boole montre comment utiliser son système pour exprimer les propositions complexes et pour en dégager une « méthode générale d'analyse déductive ». Il divise pour cela les propositions en deux catégories : les « Propositions Primaires » ou « Concrètes », qui expriment une relation entre des *choses*, et les « Propositions Secondaires » ou « Abstraites », qui expriment une relation entre *propositions*.

Il donne la règle suivante pour l'expression des propositions primaires :

> RÈGLE GÉNÉRALE POUR L'EXPRESSION SYMBOLIQUE DES PROPOSITIONS PRIMAIRES
>
> *1°) Si la proposition est affirmative, former l'expression du sujet et du prédicat. Si l'un d'eux est particulier, lui préfixer le symbole indéfini $v$, et égaler les expressions ainsi obtenues.*
>
> *2°) Si la proposition est négative, exprimer d'abord sa signification véritable en préfixant la particule de négation au prédicat, puis procéder comme dans le cas précédent.*
>
> Un ou deux exemples supplémentaires constitueront une illustration suffisante.
>
> EX : « Aucun homme n'est dans une situation élevée sans être l'objet de regards envieux ».
>
> Soit $y$ qui représente « hommes », $x$ « être dans une situation élevée », $z$ « ne pas être l'objet de regards envieux ». L'expression de la classe définie comme « être dans une situation élevée » et « ne pas être l'objet de regards envieux » est $xz$ [26]. Donc la classe contraire, c'est-à-dire celle qui ne correspond pas à cette description, sera représentée par $1 - xz$ [27], et c'est à cette classe que tous les hommes sont rapportés. Nous avons donc [28]
>
> $$y = v(1 - xz)$$
>
> Si la proposition ainsi traduite avait été mise sous la forme équivalente « les hommes dans une situation élevée sont l'objet de regards envieux », son expression eût été la suivante :
>
> $$yx = v(1 - z)$$
>
> L'on verra plus tard que cette expression est réellement équivalente à la précédente, avec l'hypothèse particulière que $v$ est un symbole de classe indéfinie. (Boole, 1992, pp. 77-78)

Dans une perspective didactique, il y a une différence essentielle entre les deux exemples de « traduction » donnés par Boole. En effet, dans le premier cas, la formulation du langage courant est une formulation complexe, dont la structure logique n'est pas congruente avec la formulation symbolique, le travail de formalisation ne peut ainsi pas se faire en appliquant des procédures mécaniques. Dans le deuxième cas, il y a congruence. Par ailleurs, Boole suggère que la vérification de l'équivalence entre ces deux formulations se fera facilement par un calcul sur les expressions symboliques, la symbolisation apportant alors un éclaircissement de ce qui se passe dans le langage courant. Mais l'on peut supposer que celui qui est capable de produire l'expression symbolique correspondant au premier

26. $xz$ représente alors « être dans une situation élevée sans être l'objet de regards envieux ».
27. Boole applique ici la deuxième règle, puisque nous sommes dans le cas d'une proposition négative.
28. Boole applique ensuite la première règle, ici le prédicat est particulier, « aucun $x$ n'est $y$ » étant entendu comme « tous les $x$ sont quelques non$y$ ».

énoncé, qui est particulièrement complexe, est également capable de voir qu'il est équivalent au deuxième énoncé, sans passer par la symbolisation. C'est la délicate question de la participation de la formalisation à la compréhension qui est posée ici.

**(b) Sur les raisonnements** Boole continue ensuite en exposant les manipulations symboliques possibles à l'intérieur de son système formel. Ce sont ces manipulations qui tiennent lieu de raisonnement et Boole rappelle à quelles conditions ces manipulations peuvent correspondre à un raisonnement valide :

> Les conditions d'un raisonnement valide, mené au moyen de symboles, sont les suivantes :
>
> 1°) Qu'une interprétation fixée soit assignée aux symboles employés pour exprimer les données ; et que les lois de combinaison de ces symboles soient correctement déterminées à partir de cette interprétation.
>
> 2°) Que les procédures formelles de résolution ou de démonstration soient constamment menées en conformité avec les lois ainsi déterminées, sans tenir compte de la question de l'interprétabilité des résultats partiels obtenus.
>
> 3°) Que le résultat final soit formellement interprétable et qu'il soit effectivement interprété conformément au système d'interprétation employé dans l'expression des données. (Boole, 1992, p. 82)

Dans une conférence au Collège de France, *Ainsi naissent et meurent les langages formels*, A. Moktefi représente l'application du système de Boole par le schéma suivant :

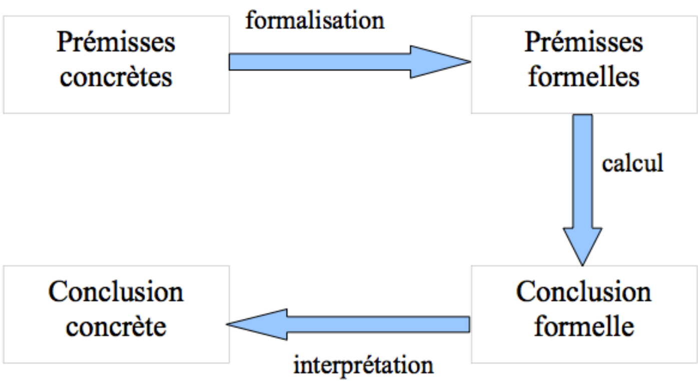


FIGURE 1.4 – Fonctionnement du système logique de G. Boole

Nous retrouvons ici l'importance de la dialectique entre syntaxe et sémantique, entre le travail dans le système formel et l'interprétation des signes. Le formalisme sert à garantir la validité, à « alléger » le raisonnement en le réduisant à un calcul, mais les règles sont bien fondées sur le sens de certaines procédures mentales effectives de raisonnement. Ainsi il n'y a pas de supériorité de l'intuition sur le formalisme, comme pouvaient le défendre