

Asymptotique des mesures de Gelfand

L'un des résultats marquants du chapitre précédent était la validité (à une translation près) du théorème central limite de Kerov dans le cadre des mesures de Schur-Weyl de paramètre $\alpha = 1/2$ (cf. le théorème 10.15). Partant, il est naturel de se demander s'il existe d'autres mesures sur les partitions qui présentent ce même comportement asymptotique. Dans ce chapitre, nous reprenons les résultats de l'article [Mé10a] et nous étudions une dernière famille intéressante de mesures sur les partitions associées à des représentations des groupes symétriques : les **mesures de Gelfand**. Il s'agit des mesures de probabilité définies par :

$$\mathbb{G}_n[\lambda \in \mathcal{Y}_n] = \frac{\dim \lambda}{\sum_{\mu \in \mathcal{Y}_n} \dim \mu}.$$

La fonction de partition $\sum_{\mu \in \mathcal{Y}_n} \dim \mu$ peut être interprétée combinatoirement comme le nombre d'involutions de taille n ; nous expliquerons ceci dans la section 11.1, et nous présenterons des représentations explicites des groupes \mathfrak{S}_n dont les mesures de Plancherel (au sens de la définition 3.2) sont ces mesures de Gelfand. La figure ci-dessous représente un diagramme de Young tiré sous la mesure de Plancherel de paramètre $n = 400$ (à gauche), et un diagramme de Young tiré sous la mesure de Gelfand de paramètre $n = 400$ (à droite) :

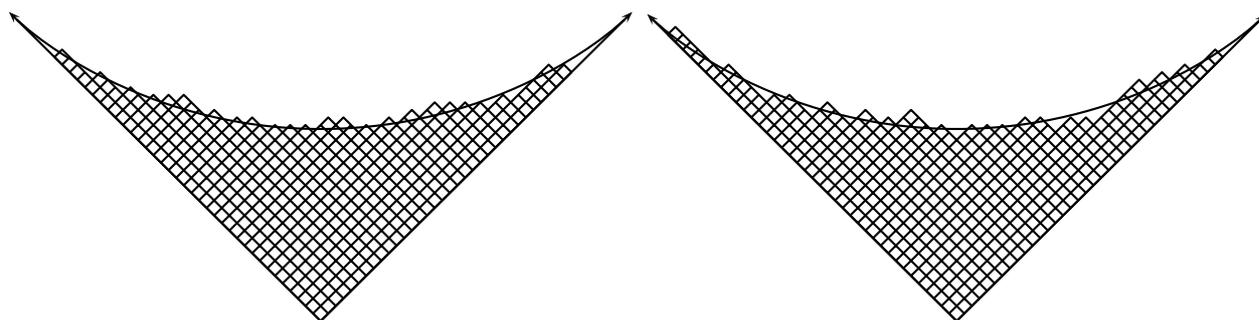


FIGURE 11.1 – Les mesures de Plancherel et de Gelfand ont la même asymptotique au premier ordre, mais les mesures de Gelfand ont des fluctuations différentes, et plus grandes.

Clairement, les formes limites semblent identiques, et nous donnerons dans la section 11.3 une preuve rigoureuse de ce fait, et une explication intuitive. En revanche, les fluctuations du diagramme par rapport à sa forme limite semblent plus grandes dans le cas des mesures de Gelfand que dans le cas des mesures de Plancherel — ce point est nettement moins clair sur

le dessin, et éventuellement difficile à constater à l'oeil nu¹; comme nous le verrons par la suite, c'est parce que les fluctuations sont seulement $\sqrt{2}$ fois plus grandes. De nouveau, nous donnerons une preuve rigoureuse de ces observations dans la section 11.3. Notons que les mesures de Gelfand, et plus généralement les β -mesures de Plancherel, ont déjà été étudiées dans [BR01]; en particulier, J. Baik et E. Rains ont établi un résultat analogue au théorème 5.1 pour la longueur de la plus longue ligne ou colonne d'une partition sous la mesure de Gelfand (il suffit de remplacer le GUE par le GOE dans l'énoncé du théorème). Ainsi, la vraie nouveauté dans notre travail est la détermination des fluctuations globales. Les raisonnements de ce chapitre seront sensiblement identiques à ceux effectués dans le chapitre précédent, mais ils mettront aussi en jeu l'expression asymptotique du nombre d'involutions de taille n (voir le paragraphe 11.2), et le degré de Kerov des observables de diagrammes. À un terme constant et un facteur multiplicatif $\sqrt{2}$ près, nous retrouverons le processus gaussien généralisé de Kerov; ainsi, ce processus semble jouer un rôle universel dans le contexte des modèles de partitions aléatoires issus de la théorie des représentations.

Modèles de Gelfand des groupes symétriques

Si G est un groupe fini, on appelle **modèle de Gelfand** de G une représentation de G dans laquelle toute représentation irréductible $\lambda \in \widehat{G}$ apparaît exactement une fois. Dans le cas des groupes symétriques, une description combinatoire d'une telle représentation a été proposée par Adin, Postnikov et Roichman dans [APR07]; la suite de cette section est consacrée à l'exposé de cette construction, qui a depuis été généralisée au cas des produits en couronne $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$ et des groupes de réflexions complexes $G(r, p, n)$ (voir [APR08, CF10]).

Si M est un modèle de Gelfand du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , alors sa dimension est nécessairement égale à $\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \dim \lambda$. Or :

Lemme 11.1 (Dimension d'un modèle de Gelfand du groupe symétrique). *Pour tout entier n , la quantité $\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \dim \lambda$ est aussi le nombre de permutations de \mathfrak{S}_n qui vérifient $\sigma^2 = \text{id}_{[1,n]}$, c'est-à-dire le nombre d'involutions de taille n .*

Démonstration. Notons \mathfrak{I}_n l'ensemble des involutions de taille n . Si σ est une involution, alors $\sigma = \sigma^{-1}$, donc la paire de tableaux standards $(P(\sigma), Q(\sigma) = P(\sigma^{-1}))$ attachée à σ par la correspondance RSK vérifie l'identité $P = Q$. Réciproquement, comme la correspondance RSK est une bijection, si $P = Q$, alors comme

$$\text{RSK}(\sigma) = (P, Q) \iff \text{RSK}(\sigma^{-1}) = (Q, P),$$

on a $\sigma = \sigma^{-1}$; ainsi, σ est une involution si et seulement si les deux tableaux standards qui lui sont associés sont identiques. Par suite, la correspondance RSK établit une bijection entre tableaux standards de taille n et involutions de taille n , et

$$\text{card } \mathfrak{I}_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \text{card } \text{Std}(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \dim \lambda.$$

□

1. Pour rendre apparent le phénomène, on peut colorier l'aire comprise entre le diagramme et sa forme limite; il est alors tout à fait clair que l'aire coloriée est plus grande dans le cas des mesures de Gelfand.

Compte tenu de cette identité, il est naturel de rechercher un modèle de Gelfand de \mathfrak{S}_n sous la forme d'une action de \mathfrak{S}_n sur l'espace $\mathbb{C}\mathfrak{I}_n$ des combinaisons linéaires formelles d'involutions de taille n . Si $v \in \mathfrak{I}_n$, notons B_v l'élément de base correspondant dans $\mathbb{C}\mathfrak{I}_n$. On rappelle que les **descentes** d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sont les indices $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tels que $\ell(\sigma s_i) < \ell(\sigma)$, où $s_i = (i, i+1)$ est l'une des transpositions élémentaires engendrant le groupe de Coxeter \mathfrak{S}_n . Nous noterons $D(\sigma)$ l'ensemble des descentes de σ . Alors :

Proposition 11.2 (Description combinatoire d'un modèle de Gelfand du groupe symétrique, [Mé10a]). Soit $\rho : \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}\mathfrak{I}_n)$ la représentation linéaire complexe définie par :

$$s_i \cdot B_v = \begin{cases} -B_v & \text{si } s_i v s_i = v \text{ et } i \in D(v), \\ B_{s_i v s_i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette représentation est bien définie, et constitue un modèle de Gelfand du groupe symétrique.

La preuve de la proposition est liée au fait suivant : pour tout groupe fini G , on peut calculer explicitement la somme de caractères irréductibles $\sum_{\lambda \in \widehat{G}} \zeta^\lambda(g)$, voir [Isa94, chapitre 4]. Dans le cas particulier où toutes les représentations de G sont réelles (ce qui est le cas pour tout groupe de Coxeter), on a ainsi :

$$\forall g \in G, \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \zeta^\lambda(g) = \text{card} \{h \in G \mid h^2 = g\}.$$

Or, la représentation décrite dans la proposition 11.2 a exactement ce caractère, voir [APR07] ; ceci démontre la proposition, et on retrouve au passage l'identité $I_n = \text{card } \mathfrak{I}_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \dim \lambda$ en évaluant la formule qui précède en $g = 1$.

La **mesure de Gelfand** \mathbb{G}_n est la mesure de probabilité sur les partitions de taille n associée à la représentation de \mathfrak{S}_n décrite par la proposition 11.2 ; ainsi, $\mathbb{G}_n[\lambda] = \dim \lambda / I_n$, où I_n est le nombre d'involutions de taille n . C'est aussi la mesure image de la mesure uniforme sur \mathfrak{I}_n par la correspondance RSK. Comme d'habitude, on va s'intéresser à l'asymptotique des partitions sous ces mesures, en utilisant l'algèbre des observables de diagrammes pour mener une « technique de moments non commutatifs ». Si χ^λ est un caractère irréductible normalisé de \mathfrak{S}_n tiré aléatoirement suivant \mathbb{G}_n , alors pour toute permutation σ ,

$$\mathbb{G}_n[\chi^\lambda(\sigma)] = \frac{1}{I_n} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} (\dim \lambda) \chi^\lambda(\sigma) = \frac{1}{I_n} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \zeta^\lambda(\sigma) = \frac{\text{tr } \rho(\sigma)}{\text{tr } \rho(\text{id})} = \frac{\text{card} \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau^2 = \sigma\}}{\text{card} \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau^2 = \text{id}\}}.$$

Ceci va permettre de calculer facilement l'espérance des caractères centraux Σ_μ sous les mesures de Gelfand.

11.2 Décompte des involutions et des racines carrées dans le groupe symétrique

Soit $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots s^{m_s}$ une partition de taille n , et $\sigma_\mu \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de type cyclique μ . Compte tenu de ce qui précède, il est utile de savoir dénombrer le nombre de permutations τ telles que $\sigma_\mu = \tau^2$. Commençons par le cas où $\mu = 1^n$ et $\sigma_\mu = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, c'est-à-dire par l'énumération des involutions. Une permutation τ est une involution si et seulement

si c est un produit de transpositions à supports disjoints, donc si et seulement si elle est de type cyclique $1^{n-2k} 2^k$. Par suite :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{card } C_{1^{n-2k} 2^k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{z_{1^{n-2k} 2^k}} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k! n - 2k! 2^k}.$$

Dans le cas général, la permutation σ_μ n'a pas forcément de racines carrées. En effet, si τ est de type cyclique $1^{k_1} 2^{k_2} \dots s^{k_s}$, alors :

1. Le carré de tout cycle impair est un cycle impair de même longueur, donc les parts impaires $1^{k_1} 3^{k_3} 5^{k_5} \dots$ sont conservées par l'élevation au carré $\tau \mapsto \tau^2$.
2. Le carré de tout cycle pair de longueur $2l$ est un produit de deux l -cycles disjoints, donc les parts paires $2^{k_2} 4^{k_4} 6^{k_6} \dots$ deviennent $1^{2k_2} 2^{2k_4} 3^{2k_6} \dots$ par élévation au carré.

On conclut que le type cyclique de τ^2 est :

$$1^{k_1+2k_2} 2^{2k_4} 3^{k_3+2k_6} 4^{2k_8} \dots (2l+1)^{k_{2l+1}+2k_{4l+2}} (2l+2)^{2k_{4l+4}} \dots$$

Ainsi, σ_μ admet des racines carrées si et seulement si m_{2i} est pair pour tout entier pair $2i$. Dans ce cas, pour choisir une racine carrée de σ_μ , il faut :

1. Pour chaque entier impair i , choisir les entiers k_i et k_{2i} tels que $m_i = k_i + 2k_{2i}$. Puis, choisir un appariement partiel de $2k_{2i}$ des i -cycles de τ , et pour chaque paire (c_1, c_2) de cet appariement, choisir un $2i$ -cycle dont le carré est $c_1 c_2$; il y a à chaque fois i cycles de ce type.
2. Pour chaque entier pair $2i$, choisir simplement un appariement complet des m_{2i} -cycles de longueur $2i$ de τ , et pour chaque paire (c_1, c_2) de cet appariement, choisir un $4i$ -cycle dont le carré est $c_1 c_2$; il y a $2i$ cycles de ce type.

Le nombre d'appariements de $2k$ éléments parmi i est $\frac{i!}{k! i - 2k! 2^k}$; on en déduit la formule suivante pour le nombre de racines carrées d'une permutation dans \mathfrak{S}_n .

Proposition 11.3 (Nombre de racines carrées d'une permutation). *Si σ a pour type cyclique $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots s^{m_s}$, alors $\text{card } \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau^2 = \sigma\} = \prod_{i=1}^s f(i, m_i)$, avec :*

$$f(i, m) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est pair et } m \text{ est impair,} \\ \frac{m!}{m/2!} \left(\frac{i}{2}\right)^{m/2} & \text{si } i \text{ et } m \text{ sont pairs,} \\ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m-2k! k!} \left(\frac{i}{2}\right)^k & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Notons que $f(1, n)$ est bien le nombre d'involutions I_n pour tout entier n .

Exemple. Déterminons le nombre de racines carrées de $\sigma = (1)(2)(3)(4,5)(6,7)(8,9,10)$ dans \mathfrak{S}_{10} . Si $\tau^2 = \sigma$, alors les trois points fixes 1, 2, 3 de σ correspondent soit à une composante $(1)(2)(3)$ dans τ , soit à l'une des transpositions $(1,2)(3)$, $(1,3)(2)$ et $(1)(2,3)$; ceci donne $f(1,3) = 4$ choix possibles. Le produit de transpositions $(4,5)(6,7)$ provient de l'un des deux 4-cycles $(4,6,5,7)$ et $(4,7,5,6)$, d'où $f(2,2) = 2$ possibilités. Finalement, le 3-cycle $(8,9,10)$ dans σ provient nécessairement du 3-cycle $(8,10,9)$ dans τ , d'où $f(3,1) = 1$ possibilité. Ainsi, le nombre de racines carrées de σ dans \mathfrak{S}_{10} est

$$f(1,3) f(2,2) f(3,1) = 8.$$

Fixons alors un caractère central Σ_μ avec $|\mu| = k$, et un entier $n \geq k$. L'espérance du caractère central sous la mesure de Gelfand \mathbb{G}_n s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_n[\Sigma_\mu] &= n^{\downarrow|\mu|} \mathbb{G}_n[\chi^\lambda(\mu \sqcup 1^{n-|\mu|})] = n^{\downarrow|\mu|} \mathbb{G}_n[\chi^\lambda(1^{n-|\mu|+m_1} 2^{m_2} \dots s^{m_s})] \\ &= n^{\downarrow|\mu|} \frac{\text{card} \{ \tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau^2 = \sigma_\mu \}}{I_n} = n^{\downarrow|\mu|} \frac{I_{n-|\mu|+m_1}}{I_n} \left(\prod_{i=2}^s f(i, m_i) \right). \end{aligned}$$

Il est alors important de connaître un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini. Pour commencer, déterminons la série génératrice exponentielle des nombres I_n . Elle s'écrit :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n-2k!k!} z^{n-2k} \left(\frac{z^2}{2} \right)^k = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p!k!} z^p \left(\frac{z^2}{2} \right)^k = \exp \left(z + \frac{z^2}{2} \right).$$

En écrivant $n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \int_0^\infty e^{-t+n \log t} dt$ et en utilisant la méthode de Laplace, on peut démontrer le célèbre équivalent de Stirling

$$n! \simeq_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

D'autre part, étant donnée une série génératrice de rayon de convergence non nulle, il existe de nombreuses techniques analytiques donnant l'asymptotique des coefficients de la série, voir en particulier [FS09, chapitre 8] et [Wil06, chapitre 5]. Lorsque le rayon de convergence est infini, il convient d'utiliser la **méthode d'Hayman**, voir [Wil06, §5.4]. Nous la détaillons ci-après dans le cas où $G(z) = \exp(z + z^2/2)$, voir [FS09, chapitre 8, p. 559]. Pour tout rayon R , on peut retrouver $a_n = I_n/n!$ par la formule de Cauchy :

$$a_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} G(Re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(Re^{i\theta} + \frac{R^2}{2} e^{2i\theta} - ni\theta \right) d\theta.$$

Notons $f(\theta)$ la fonction dans l'intégrande. Le module $|f(\theta)|$ est égal à :

$$\exp \left(R \cos \theta + \frac{R^2}{2} \cos 2\theta \right) \leq \exp \left(R + \frac{R^2}{2} \right) = f(R).$$

Le module maximum vaut donc $m(R) = f(R)$, et $m(R)/R^n$ s'écrit :

$$\frac{m(R)}{R^n} = \exp \left(R + \frac{R^2}{2} - n \log R \right).$$

À n fixé, $m(R)$ est minimum lorsque $R + R^2 = n$, c'est-à-dire lorsque $R = \frac{\sqrt{1+4n}-1}{2} \simeq \sqrt{n}$. Dans ce qui suit, nous supposons que R a cette valeur. Le développement limité de $f(Re^{i\theta})$ autour de $\theta = 0$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} f(Re^{i\theta}) &= \exp \left(R + Ri\theta - \frac{R\theta^2}{2} + Ro(\theta^2) + \frac{R^2}{2} + R^2i\theta - R^2\theta^2 + R^2o(\theta^2) - ni\theta \right) \\ &= m(R) \exp \left(- \left(\frac{R}{2} + R^2 \right) (1 + o(1)) \theta^2 \right). \end{aligned}$$

Notons que la fonction $\varepsilon(\theta) = o(1)$ est une fonction de θ qui converge vers 0 uniformément en R : ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall R, |\theta| \leq \eta \Rightarrow |\varepsilon(\theta)| \leq \varepsilon.$$

En découpant l'intégrale en trois parties correspondant à des intervalles $[-\pi, -\eta]$, $[-\eta, \eta]$ et $[\eta, \pi]$, on voit donc que :

$$\left| a_n - \frac{m(R)}{2\pi R^n} \int_{-\eta}^{\eta} \exp\left(-\left(\frac{R}{2} + R^2\right)(1 + \varepsilon(\theta))\theta^2\right) d\theta \right| \leq C \frac{m(R)}{R^n} \exp\left(R \cos \eta + \frac{R^2}{2} \cos 2\eta\right) \\ \leq \frac{C}{R^n} \exp\left(-\left(\frac{R}{2} + R^2\right)\eta^2 + R^2\eta^2 \varepsilon(\eta)\right).$$

Prenons alors $\eta = n^{-1/3}$; notons que η tend vers zéro, mais $R\eta$ tend vers l'infini; on a aussi $R\eta^2$ qui tend vers zéro. Le majorant est alors plus petit que

$$\frac{C'}{R^n} \exp\left(-(R\eta)^2 + (R\eta)^2 \varepsilon(\eta)\right),$$

et l'intégrale restante est équivalente à

$$\frac{m(R)}{2\pi R^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{m(R)}{2\sqrt{\pi} R^{n+1}} = \frac{\exp\left(R + \frac{R^2}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} R^{n+1}}.$$

Ainsi, a_n est équivalent à $\frac{1}{2\sqrt{\pi} R^{n+1}} \exp\left(R + \frac{R^2}{2}\right)$, et comme $R = \frac{\sqrt{1+4n}-1}{2}$, on obtient :

$$a_n \simeq_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\exp(\sqrt{n} - 1/4)}{\sqrt{2\pi n}} \quad ; \quad I_n \simeq_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} \exp(\sqrt{n} - 1/4).$$

En injectant cet équivalent dans l'expression précédemment donnée pour $G_n[\Sigma_\mu]$, on conclut que :

Proposition 11.4 (Asymptotique des espérances des caractères centraux). *Lorsque n tend vers l'infini,*

$$G_n[\Sigma_\mu] \simeq \left(\prod_{i=2}^s f(i, m_i) \right) n^{\frac{|\mu| + m_1(\mu)}{2}}.$$

En effet, le terme $n^{\downarrow|\mu|}$ peut être remplacé par $n^{|\mu|}$, et

$$\frac{I_{n-k}}{I_n} \simeq \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k}{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{k}{2}} e^{\sqrt{n-k} - \sqrt{n}} \simeq \frac{1}{n^{\frac{k}{2}}}.$$

avec $k = |\mu| - m_1(\mu)$. Cette expression asymptotique va permettre d'appliquer notre méthode usuelle de moments; notons que pour toute observable de diagrammes $f \in \mathcal{O}$, on a $G_n[f] = O(n^{\deg_K(f)/2})$, car ceci est vrai sur la base linéaire des caractères centraux — rappelons que le degré de Kerov des observables est défini par $\deg_K(\Sigma_\mu) = |\mu| + m_1(\mu)$ pour toute partition μ . Comme le degré de Kerov est toujours inférieur au poids des observables, on a aussi $G_n[f] = O(n^{\text{wt}(f)/2})$ pour toute observable f .

11.3 Asymptotique des caractères centraux et des formes des diagrammes

La proposition 11.4 permettra d'établir la convergence des formes des diagrammes sous les mesures de Gelfand vers la courbe Ω du théorème 3.3. D'autre part, elle permet de déterminer

la distribution asymptotique précise des caractères centraux des cycles Σ_k . Sous les mesures de Plancherel, rappelons qu'on a asymptotiquement

$$\forall k \geq 2, \frac{\Sigma_k(\lambda)}{n^{k/2}} \simeq \sqrt{k} \zeta_k,$$

où les ζ_k sont des gaussiennes indépendantes centrées de variance 1. Le théorème suivant est l'analogie de ce résultat pour les mesures de Gelfand :

Théorème 11.5 (Distribution asymptotique des caractères centraux des cycles sous les mesures de Gelfand, [Mé10a]). *Sous les mesures de Gelfand, le vecteur des caractères centraux renormalisés $(\Sigma_k(\lambda)/n^{k/2})_{k \geq 2}$ converge en lois fini-dimensionnelles vers un vecteur gaussien $(\sqrt{2k} \zeta_k + e_k)_{k \geq 2}$, où les ζ_k sont des gaussiennes standards indépendantes, et e_k vaut 0 si k est pair, et 1 si k est impair. Ainsi,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_k(\lambda)}{n^{k/2}} \simeq \mathcal{N}(e_k, 2k).$$

Lemme 11.6 (Degré de Kerov et produits de caractères centraux). *Si k et l sont deux entiers distincts plus grands que 2, alors $\Sigma_{k,l}$ est la composante de plus haut degré de Kerov de $\Sigma_k \Sigma_l$. D'autre part, si $k \geq 2$ et $m \geq 1$, alors la composante de plus haut degré de Kerov de $(\Sigma_k)^m$ est*

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m-2p! p!} \left(\frac{k}{2}\right)^p \Sigma_{1^{kp} k^{m-2p}}.$$

Démonstration. La première partie du lemme est démontrée dans [IO02, proposition 4.13] ; la seconde partie est essentiellement équivalente aux propositions 4.11, 4.12, 6.2 et 6.3 du même article, et peut être démontrée de manière purement combinatoire en utilisant l'algèbre des permutations partielles. Pour commencer, remarquons que le degré de Kerov défini sur $\mathcal{O} \simeq \mathcal{A}_\infty$ peut être relevé à l'algèbre \mathcal{B}_∞ des permutations partielles en posant :

$$\deg_K(\sigma, S) = \text{card}(\text{Fix}(\sigma) \cap S) + \text{card } S.$$

Cette définition fournit bien une filtration d'algèbre sur \mathcal{B}_∞ , car

$$\begin{aligned} \deg_K((\sigma, S)(\tau, T)) &= \deg_K(\sigma\tau, S \cup T) \\ &= \{\text{card}(\text{Fix}(\sigma\tau) \cap (S \cup T)) - \text{card } S \cap T\} + \text{card } S + \text{card } T, \end{aligned}$$

et le terme entre crochets est plus petit que $\text{card}(\text{Fix}(\sigma) \cap S) + \text{card}(\text{Fix}(\tau) \cap T)$. En effet, si $x \in S \cap T$ vérifie $\sigma\tau(x) = x$, alors :

1. L'élément x peut être dans $S \setminus T$, mais dans ce cas $\tau(x) = x$, donc $\sigma(x) = x$, et ainsi $x \in \text{Fix}(\sigma) \cap S$.
2. De même, x peut être dans $T \setminus S$, et dans ce cas il est aussi dans $\text{Fix}(\tau) \cap T$.
3. Enfin, si les deux hypothèses précédentes ne sont pas vérifiées, alors x appartient à $S \cap T$.

On conclut que $\text{card}(\text{Fix}(\sigma\tau) \cap (S \cup T)) \leq \text{card}(\text{Fix}(\sigma) \cap S) + \text{card}(\text{Fix}(\tau) \cap T) + \text{card}(S \cap T)$, de sorte que $\deg_K((\sigma, S)(\tau, T)) \leq \deg_K(\sigma, S) + \deg_K(\tau, T)$. En tant qu'élément de l'algèbre des permutations partielles,

$$(\Sigma_k)^m = \sum (c_1, S_1)(c_2, S_2) \cdots (c_m, S_m)$$

où la somme est prise sur les m -tuples de k -arrangements (a_{i1}, \dots, a_{ik}) donnant un cycle $c_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik})$ et un support $S_i = \{a_{i1}, \dots, a_{ik}\}$. Comme $\deg_K(\Sigma_k) = k$, $\deg_K((\Sigma_k)^m) \leq km$, et

cette inégalité est une égalité, car km est le degré de Kerov d'un produit $(c_1, S_1) \cdots (c_m, S_m)$ de k -cycles disjoints. Ceci étant, déterminons tous les produits qui ont ce degré maximal. Si $\deg_K((c_1, S_1) \cdots (c_m, S_m)) = km$, alors comme le degré de Kerov est une filtration d'algèbre, ceci impose :

$$\begin{aligned} \deg_K((c_1, S_1)(c_2, S_2)) &= 2k \\ \deg_K((c_1, S_1)(c_2, S_2)(c_3, S_3)) &= 3k \\ &\vdots \\ \deg_K((c_1, S_1)(c_2, S_2) \cdots (c_i, S_i)) &= ik \\ &\vdots \end{aligned}$$

Considérons les deux premiers termes (c_1, S_1) et (c_2, S_2) . On a montré que :

$$\begin{aligned} 2k = \deg_K((c_1, S_1)(c_2, S_2)) &= \{ \text{card}((\text{Fix}(c_1c_2) \cap (S_1 \cup S_2)) - \text{card } S_1 \cap S_2) \} + \text{card } S_1 + \text{card } S_2 \\ &= 2k + \{ \text{card}((\text{Fix}(c_1c_2) \cap (S_1 \cup S_2)) - \text{card } S_1 \cap S_2) \}. \end{aligned}$$

On a donc $\text{card}(\text{Fix}(c_1c_2) \cap (S_1 \cup S_2)) = \text{card } S_1 \cap S_2$, et ceci impose que tout point de l'intersection $S_1 \cap S_2$ soit un point fixe de c_1c_2 . Soit u l'exposant de c_1c_2 , de sorte que $(c_1c_2)^u = \text{id}$. On raisonne par l'absurde en supposant que S_1 et S_2 ont une intersection non vide, mais sont deux parties de cardinal k qui ne sont pas égales. Notons alors $c_1 = (a_1, \dots, a_k)$ et $c_2 = (b_1, \dots, b_k)$; par hypothèse, l'un des b_j est dans S_2 , mais pas dans S_1 . On itère c_1c_2 sur cet élément. Si b_{j+1} n'est pas dans S_1 , alors $c_1c_2(b_j) = c_1(b_{j+1}) = b_{j+1}$, et on peut recommencer avec b_{j+1}, b_{j+2} , etc. On construit ainsi une chaîne $b_j, b_{j+1}, \dots, b_{j-1}$ dont tous les éléments sont dans $S_2 \setminus S_1$, et vérifient donc $c_1c_2(b_p) = b_{p+1}$. Comme $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, il doit exister un b_j qui est dans $S_1 \cap S_2$. Alors, $a_i = c_1(b_j)$ est un certain $(c_1c_2)^s(b_j)$, et est dans S_1 . Il ne peut pas être dans $S_1 \cap S_2$: sinon, ce serait un point fixe de c_1c_2 , et tous les $(c_1c_2)^t(a_i)$ seraient égaux à a_i , en particulier $(c_1c_2)^{u-s}(a_i) = (c_1c_2)^u(b_j) = b_j$. Ceci est absurde car b_j n'est pas dans S_1 . Ainsi, $a_i \in S_1 \setminus S_2$, et en continuant à itérer c_1c_2 , on obtient a_{i+1}, a_{i+2} , etc. jusqu'à un élément a_I qui est dans S_1 et dans S_2 (voir la figure 11.2). Cet élément a_I est un certain $(c_1c_2)^{s'}(b_j)$, et est un point fixe de c_1c_2 . Alors, en prenant $a_I = (c_1c_2)^{t'}(a_I)$ avec $t' = u - s'$, on retrouve b_j , ce qui est absurde car b_j n'est pas dans $S_1 \cap S_2$.

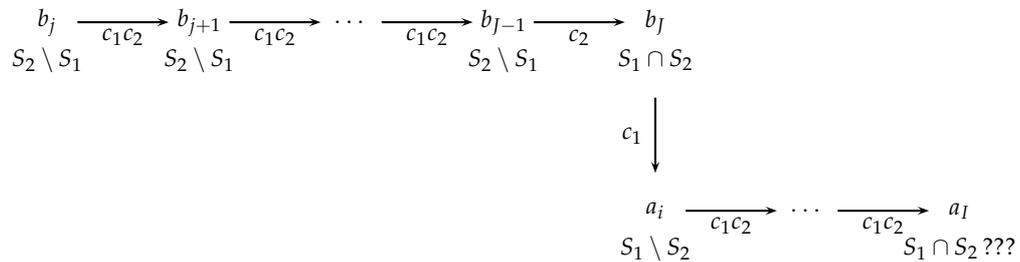


FIGURE 11.2 – Si $S_1 \neq S_2$ et $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, alors l'identité $\deg_K((c_1, S_1)(c_2, S_2)) = 2k$ fournit une contradiction. Les produits de k -cycles de degré de Kerov maximal $2k$ sont donc ceux pour lesquels les supports sont disjoints ou identiques.

Ainsi, si $(c_1, S_1)(c_2, S_2)$ a pour degré de Kerov $2k$, alors soit les cycles sont disjoints, soit $S_1 = S_2$. Dans ce cas, le nombre de points fixes de c_1c_2 doit être égal à k , et ceci impose $c_1 = c_2^{-1}$. Ainsi, c_2 doit être soit disjoint de c_1 , soit égal à c_1^{-1} . Pour les mêmes raisons, c_3 doit être soit disjoint de c_1 et de c_2 , soit égal à l'inverse d'un de ces cycles, en supposant dans ce

cas qu'on n'a pas déjà $c_2 = c_1^{-1}$. Par récurrence sur m , on conclut qu'un cycle c_i mis en jeu dans un produit de degré de Kerov km est soit disjoint de tous les autres cycles, soit apparié avec un (et exactement un) autre cycle dont il est l'inverse. Le type cyclique d'un produit de degré de Kerov km est donc toujours de la forme $1^{kp} k^{m-2p}$, où p est le nombre de paires de cycles inverses l'un de l'autre. L'entier p étant fixé, il y aura un facteur

$$\frac{m!}{m - 2p! p! 2^p}$$

devant le terme $\Sigma_{1^{kp} k^{m-2p}}$ correspondant au nombre d'appariements partiels avec p paires; et aussi un facteur k^p , car étant donné un arrangement (a_{i1}, \dots, a_{ik}) donnant un cycle c_i , il y a exactement k arrangements distincts (a_{j1}, \dots, a_{jk}) correspondant au cycle inverse (les k permutations cycliques d'une écriture du cycle inverse). On conclut que le terme de plus haut degré de Kerov de $(\Sigma_k)^m$ est bien

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m - 2p! p!} \left(\frac{k}{2}\right)^p \Sigma_{1^{kp} k^{m-2p}}.$$

□

Exemple. $(\Sigma_4)^4 = \Sigma_{4^4} + 24 \Sigma_{1^4 4^2} + 48 \Sigma_{1^8} + (\text{termes de degré strictement inférieur à 16}).$

Preuve du théorème 11.5, première partie. Soit k un entier pair, et m un entier impair. Alors, le terme $\Sigma_{1^{kp} k^{m-2p}}$ mis en jeu dans le développement de $(\Sigma_k)^m$ a une espérance nulle sous la mesure de Gelfand, car $m - 2p$ est impair, et les permutations qui ont ce type cyclique n'ont donc pas de racines carrées. Par conséquent, $\mathbb{G}_n[(\Sigma_k)^m]$ est dans ce cas égale à l'espérance d'une observable de degré de Kerov inférieur à $km - 1$, donc :

$$\mathbb{G}_n \left[\left(\frac{\Sigma_k}{n^{k/2}} \right)^m \right] = \frac{O(n^{km-1/2})}{n^{km/2}} = O(n^{-1/2}) \rightarrow 0.$$

Supposons maintenant k et m pairs. Alors, les espérances des termes de degré de Kerov inférieur à $km - 1$ sont négligeables dans l'asymptotique de $\mathbb{G}_n \left[\left(\frac{\Sigma_k}{n^{k/2}} \right)^m \right]$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_n \left[\left(\frac{\Sigma_k}{n^{k/2}} \right)^m \right] &\simeq \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m - 2p! p!} \left(\frac{k}{2}\right)^p \mathbb{G}_n \left[\frac{\Sigma_{1^{kp} k^{m-2p}}}{n^{km/2}} \right] = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m - 2p! p!} \left(\frac{k}{2}\right)^p f(k, m - 2p) \\ &\simeq \left(\frac{k}{2}\right)^{m/2} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m/2 - p! p!} = k^{m/2} \frac{m!}{m/2!} = (2k)^{m/2} (m - 1!!). \end{aligned}$$

Mais on a vu dans le chapitre 5 que les doubles factorielles étaient justement les moments pairs d'une variable gaussienne standard centrée, les moments impairs étant pour leur part nuls. Comme les variables gaussiennes sont caractérisées par leurs moments, on conclut à la convergence en loi

$$\frac{\Sigma_k}{n^{k/2}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 2k)$$

sous les mesures de Gelfand. Le cas où k est impair peut être traité de façon tout à fait similaire. Pour les mêmes raisons que précédemment, on peut négliger les termes qui ne sont

pas de degré de Kerov maximal dans l'asymptotique des moments de Σ_k , et ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_n \left[\left(\frac{\Sigma_k}{n^{k/2}} \right)^m \right] &\simeq \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m-2p! p!} \left(\frac{k}{2} \right)^p \mathbb{G}_n \left[\frac{\Sigma_{1^{kp} k^{m-2p}}}{n^{km/2}} \right] = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m-2p! p!} \left(\frac{k}{2} \right)^p f(k, m-2p) \\ &\simeq \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{m-2p}{2} \rfloor} \frac{m!}{p! q! m-2(p+q)!} \left(\frac{k}{2} \right)^{p+q} = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m-2r!} \left(\frac{k}{2} \right)^r \left(\sum_{p+q=r} \frac{1}{p! q!} \right) \\ &\simeq \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{m!}{m-2r! r!} k^r. \end{aligned}$$

La fonction génératrice correspondant à ces moments limites est donnée par :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{1}{m-2r! r!} k^r z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{1}{m-2r! r!} (kz^2)^r z^{m-2r} = \exp(z + kz^2),$$

et c'est donc la fonction génératrice $\mathbb{E}[e^{zX}]$ d'une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(1, 2k)$. Ainsi, on a la convergence en loi

$$\frac{\Sigma_k}{n^{k/2}} \rightarrow \mathcal{N}(1, 2k)$$

sous les mesures de Gelfand, et on a établi la convergence (pour le moment non jointe) de chaque caractère central renormalisé vers une variable gaussienne. \square

Pour démontrer l'indépendance asymptotique des caractères centraux renormalisés, on doit de nouveau utiliser la théorie des cumulants d'observables. Ainsi, nous allons montrer l'annulation asymptotique des cumulants d'ordre plus grand que 3 :

Lemme 11.7 (Convergence jointe des caractères centraux renormalisés).

$$\forall r \geq 3, \forall l_1, \dots, l_r \geq 2, k \left(\frac{\Sigma_{l_1}}{n^{l_1/2}}, \frac{\Sigma_{l_2}}{n^{l_2/2}}, \dots, \frac{\Sigma_{l_r}}{n^{l_r/2}} \right) = o(1).$$

Comme les Σ_{l_i} sont de degré de Kerov l_i , on sait déjà que l'expression précédente est un $O(1)$. En effet :

$$k(\Sigma_{l_1}, \dots, \Sigma_{l_r}) = \sum_{\pi \in \Omega(\llbracket 1, r \rrbracket)} \mu(\pi) \prod_{\pi_j \in \pi} \mathbb{E} \left[\prod_{i \in \pi_j} \Sigma_{l_i} \right] = \sum_{\pi \in \Omega(\llbracket 1, r \rrbracket)} \prod_{\pi_j \in \pi} O \left(n^{\frac{\sum_{i \in \pi_j} l_i}{2}} \right) = O \left(n^{\frac{l_1 + \dots + l_r}{2}} \right).$$

On doit donc seulement gagner un ordre de grandeur. Rappelons que le cumulants standard peut être exprimé en fonction des cumulants disjoints et des cumulants identité :

$$k(\Sigma_{l_1}, \dots, \Sigma_{l_r}) = \sum_{\pi \in \Omega(\llbracket 1, r \rrbracket)} k^\bullet \left(k^{\text{id}}(\Sigma_{l_i \in \pi_1}), \dots, k^{\text{id}}(\Sigma_{l_i \in \pi_s}) \right).$$

Lemme 11.8 (Degré de Kerov d'un cumulants identité de caractère centraux). Soient l_1, \dots, l_t des entiers plus grands que 2. Si ces entiers ne sont pas tous égaux, alors :

$$\deg_{\mathbb{K}} \left(k^{\text{id}}(\Sigma_{l_1}, \dots, \Sigma_{l_t}) \right) \leq l_1 + \dots + l_t - 1.$$

Si ces entiers sont tous égaux et si $t \geq 3$, alors

$$\deg_{\mathbb{K}} \left(k^{\text{id}}(\Sigma_l, \dots, \Sigma_l) \right) \leq tl - 1.$$

Démonstration. Le lemme 8.12 donne une description explicite des produits de cycles intervenant dans le cumulatif identité :

$$k^{\text{id}}(\Sigma_{l_1}, \dots, \Sigma_{l_t}) = \sum_{\substack{\forall j, A_j \in \mathcal{A}(l_j) \\ \pi(A_1, \dots, A_t) = \{\llbracket 1, t \rrbracket\}}} C(A_1) C(A_2) \cdots C(A_t).$$

où $\mathcal{A}(l_j)$ est l'ensemble des l_j -arrangements d'entiers, et où la restriction $\pi(A_1, \dots, A_t) = \{\llbracket 1, t \rrbracket\}$ impose que ces arrangements « se recouvrent les uns les autres ». Dans le premier cas, comme les l_i ne sont pas tous égaux, quitte à les permuter, on peut trouver un entier $u < t$ tels que les l_1, \dots, l_u soient identiques, et distincts de tous les l_{u+1}, \dots, l_t . Considérons alors un produit de cycles $C(A_1) \cdots C(A_t)$ apparaissant dans la somme. Si le produit partiel $C(A_1) \cdots C(A_u)$ n'est pas de degré de Kerov maximal $l_1 + \cdots + l_u = u l_1$, alors comme le degré de Kerov est une filtration sur l'algèbre des permutations partielles, on a bien

$$\deg_{\text{K}}(C(A_1) \cdots C(A_t)) \leq l_1 + \cdots + l_t - 1.$$

Dans le cas contraire, d'après le lemme 11.6, le type cyclique du produit partiel des u premiers cycles est forcément un $l_1^{u-2k} 1^{l_1 k}$. D'autre part, il existe un indice $v \in \llbracket u+1, t \rrbracket$ tel que le cycle $C(A_v)$ ait son support intersectant le support S du produit des u premiers cycles ; prenons le premier d'entre eux. Notons que la longueur l_v n'intervient pas dans le type type cyclique $l_1^{u-2k} 1^{l_1 k}$. Or, d'après la première partie du lemme 11.6, si deux permutations partielles ont des types cycliques sans parts communes, alors soit elles ont des supports disjoints, soit leur produit est de degré de Kerov strictement inférieur à la somme des degré de Kerov. Comme les supports s'intersectent, on conclut que le produit partiel $C(A_1) \cdots C(A_v)$ est de degré de Kerov inférieur à $l_1 + \cdots + l_v - 1$, et en rajoutant les derniers cycles, on obtient :

$$\deg_{\text{K}}(C(A_1) \cdots C(A_t)) \leq l_1 + \cdots + l_t - 1.$$

Tous les produits de cycles intervenant dans la somme vérifient donc bien l'inégalité annoncée.

Dans le second cas, considérant de même un produit de l -cycles $C(A_1) \cdots C(A_t)$ apparaissant dans la somme, comme $t \geq 3$, il y a forcément un arrangement A_i qui intersecte deux autres arrangements A_{j_1} et A_{j_2} . En effet, la condition de recouvrement des arrangements impose que le graphe de la relation $i \sim j \iff A_i \cap A_j \neq \emptyset$ soit connexe, donc ait plus de $t-1$ arêtes. Alors, la somme des valences des sommets $1, 2, \dots, t$ est plus grande que $2(t-1) > t$ pour $t \geq 3$, ce qui impose qu'un sommet ait une valence supérieure à 2. Ainsi, fixons trois entiers i, j_1, j_2 tels que $A_i \cap A_{j_1} \neq \emptyset$ et $A_i \cap A_{j_2} \neq \emptyset$; on ne perd pas de généralité en supposant que $i < j_1 < j_2$, et que si $u \in \llbracket i+1, j_1-1 \rrbracket \cup \llbracket j_1+1, j_2-1 \rrbracket$, alors $A_i \cap A_u = \emptyset$ et $A_{j_1} \cap A_u = \emptyset$. Dans ces conditions, on peut permuter les cycles et regrouper le facteur

$$c(A_i) c(A_{j_1}) c(A_{j_2}),$$

et il suffit de montrer que ce facteur est de degré inférieur à $3l-1$. Si le produit $c(A_i) c(A_j)$ est de degré de Kerov inférieur à $2l-1$, c'est évident. Sinon, comme $A_i \cap A_{j_1} \neq \emptyset$, la condition $\deg_{\text{K}}(c(A_i) c(A_{j_1})) = 2l$ impose que les deux premiers cycles soient inverses l'un de l'autre, et le produit $c(A_i) c(A_{j_1})$ est l'identité sur le support de A_i . Mais dans ce cas, comme $A_i \cap A_{j_2} \neq \emptyset$, notant $t \geq 1$ le cardinal de cette intersection, le produit $c(A_i) c(A_{j_1}) c(A_{j_2})$ est un l -cycle sur un support de taille $2l-t$, donc a un degré de Kerov égal à $(2l-t) + (l-t) = 3l-2t < 3l$. \square

Lemme 11.9 (Formule d'inversion de Möbius pour les partitions d'ensembles). Soit F une fonction sur les couples d'entiers strictement positifs, et $(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, s, \dots, s)$ une suite de r entiers avec $r_1 \geq 1$ entiers 1, $r_2 \geq 1$ entiers 2, etc. Si $\pi \in \Omega(\llbracket 1, r \rrbracket)$ est une partition d'ensemble de parts $\pi_1 \sqcup \pi_2 \sqcup \dots \sqcup \pi_{\ell(\pi)}$, on note r_{ij} le nombre d'entiers i tombant dans π_j ; en particulier, $|\pi_j| = \sum_{i=1}^s r_{ij}$ et $r_i = \sum_{j=1}^{\ell(\pi)} r_{ij}$. Supposons $s \geq 2$. Alors,

$$S(r_1, \dots, r_s) = \sum_{\pi \in \Omega(\llbracket 1, r \rrbracket)} (-1)^{\ell(\pi)-1} (\ell(\pi) - 1)! \prod_{j=1}^{\ell(\pi)} \prod_{r_{ij} \geq 1} F(i, r_{ij}) = 0.$$

Exemple. Supposons $r = 4$. On a alors 15 partitions d'ensemble : $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\} \sqcup \{4\}$, $\{1, 2, 4\} \sqcup \{3\}$, $\{1, 3, 4\} \sqcup \{2\}$, $\{2, 3, 4\} \sqcup \{1\}$, $\{1, 2\} \sqcup \{3, 4\}$, $\{1, 3\} \sqcup \{2, 4\}$, $\{1, 4\} \sqcup \{2, 3\}$, $\{1, 2\} \sqcup \{3\} \sqcup \{4\}$, $\{1, 3\} \sqcup \{2\} \sqcup \{4\}$, $\{1, 4\} \sqcup \{2\} \sqcup \{3\}$, $\{2, 3\} \sqcup \{1\} \sqcup \{4\}$, $\{2, 4\} \sqcup \{1\} \sqcup \{3\}$, $\{3, 4\} \sqcup \{1\} \sqcup \{2\}$ et $\{1\} \sqcup \{2\} \sqcup \{3\} \sqcup \{4\}$. Si $s = 2$ et si la suite est $(1, 1, 2, 2)$, alors la somme correspondante $S(2, 2)$ s'écrit

$$\begin{aligned} & F(1, 2) F(2, 2) - F(1, 2) F(2, 1)^2 - F(1, 2) F(2, 1)^2 - F(1, 1)^2 F(2, 2) - F(1, 1)^2 F(2, 2) \\ & - F(1, 2) F(2, 2) - F(1, 1)^2 F(2, 1)^2 - F(1, 1)^2 F(2, 1)^2 + 2 F(1, 2) F(2, 1)^2 + 2 F(1, 1)^2 F(2, 1)^2 \\ & + 2 F(1, 1)^2 F(2, 1)^2 + 2 F(1, 1)^2 F(2, 1)^2 + 2 F(1, 1)^2 F(2, 1)^2 + 2 F(1, 1)^2 F(2, 2) - 6 F(1, 1)^2 F(2, 1)^2 \end{aligned}$$

ce qui donne bien 0.

Démonstration. La preuve suivante est due à M. Sage². On raisonne par récurrence sur les r_i . Si $r_i = 1$ pour tout i , alors le multi-ensemble considéré est simplement $\{1, 2, \dots, r\}$, et la somme $S(r_1, \dots, r_s) = S(1, \dots, 1)$ s'écrit :

$$S(1^r) = \sum_{\pi \in \Omega_r} \mu(\pi, \llbracket 1, r \rrbracket) \prod_{j=1}^{\ell(\pi)} \prod_{r_{ij} \geq 1} F(i, r_{ij}) = \left(\sum_{\pi \in \Omega_r} \mu(\pi, \llbracket 1, r \rrbracket) \right) \left(\prod_{i=1}^r F(i, 1) \right) = 0$$

car $r \geq 2$, et la somme ci-dessus est le produit de convolution

$$\zeta * \mu(\sqcup_{i=1}^r \{i\}, \llbracket 1, r \rrbracket) = \delta(\sqcup_{i=1}^r \{i\}, \llbracket 1, r \rrbracket)$$

dans l'algèbre d'incidence du treillis $\Omega(\llbracket 1, r \rrbracket)$, donc vaut 0 car $r \geq 2$ et $\sqcup_{i=1}^r \{i\} \neq \llbracket 1, r \rrbracket$ dans $\Omega(\llbracket 1, r \rrbracket)$ — on renvoie à la section 13.1 pour des précisions sur les fonctions de Möbius, les algèbres d'incidence d'ensembles ordonnés et les notations employées ici.

Supposons maintenant que l'un des entiers $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ apparaît plus d'une fois; à permutation près, on peut supposer que c'est $i = 1$, et on notera donc $r_1 + 1$ le nombre d'occurrences de cet entier, et $r + 1 = (r_1 + 1) + r_2 + \dots + r_s$ le cardinal total de l'ensemble. Par hypothèse de récurrence, étant données des variables indépendantes $(X_{i,q})_{i,q \geq 1}$, le polynôme

$$\sum_{\pi \in \Omega_r} \mu(\pi, \llbracket 1, r \rrbracket) \prod_{j=1}^{\ell(\pi)} \prod_{r_{ij} \geq 1} X_{i,r_{ij}}$$

est formellement nul. Si π est une partition d'ensemble, notons $v_{i,q}(\pi)$ le nombre de parts de π qui contiennent exactement q symboles i ; alors, par hypothèse de récurrence,

$$P((X_{i,q})_{i,q \geq 1}, r_1, \dots, r_s) = \sum_{\pi \in \Omega_r} \mu(\pi) \prod_{i=1}^s \prod_{q \geq 1} X_{i,q}^{v_{i,q}(\pi)} = 0$$

2. « Entre minuit et une heure du matin... »

en tant que polynôme, avec $\mu(\pi) = \mu(\pi, \llbracket 1, r \rrbracket) = (-1)^{\ell(\pi)-1} (\ell(\pi) - 1)!$. Ceci étant, une partition π dans Ω_{r+1} du multi-ensemble $(1^{r_1+1}, 2^{r_2}, \dots, s^{r_s})$ peut être obtenue à partir d'une partition π' du multi-ensemble $(1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots, s^{r_s})$ soit en rajoutant 1 à l'une des parts déjà existante de π' , soit en mettant 1 tout seul dans une nouvelle part.

1. Dans le premier cas, la fonction de Möbius $\mu(\pi)$ reste égale à $\mu(\pi')$, et le poids $\omega(\pi') = \prod_{j=1}^{\ell(\pi)} \prod_{r_{ij} \geq 1} F(i, r_{ij})$ est multiplié par un facteur $F(1, a_j + 1) / F(1, a_j)$, où a_j est le nombre de 1 dans la part π_j de π' à laquelle on adjoint le 1.
2. Dans le second cas, la fonction de Möbius $\mu(\pi)$ vaut $-\ell(\pi') \mu(\pi')$, et le poids $\omega(\pi)$ est égal à $F(1, 1) \times \omega(\pi')$.

Par conséquent, la somme S vérifie la relation de récurrence

$$S(r_1 + 1, \dots, r_s) = \sum_{\pi' \in \Omega_r} \sum_{j=1}^{\ell(\pi')} \frac{F(1, a_j + 1)}{F(1, a_j)} \mu(\pi') \omega(\pi') - \sum_{\pi' \in \Omega_r} F(1, 1) \ell(\pi') \mu(\pi') \omega(\pi').$$

La première partie s'écrit aussi

$$\sum_{q \geq 1} \sum_{\pi' \in \Omega_r} \frac{F(1, q + 1)}{F(1, q)} v_{1,q}(\pi') \mu(\pi') \omega(\pi') = \sum_{q \geq 1} F(1, q + 1) \left. \frac{\partial P(r_1, \dots, r_s)}{\partial X_{1,q}} \right|_{(X_{i,q})_{i,q \geq 1} = (F(i,q))_{i,q \geq 1}} = 0$$

car le polynôme est par hypothèse de récurrence formellement nul. De même, la seconde partie est proportionnelle à :

$$\sum_{q \geq 1} \sum_{\pi' \in \Omega_r} v_{1,q}(\pi') \mu(\pi') \omega(\pi') = \sum_{q \geq 1} F(1, q) \left. \frac{\partial P(r_1, \dots, r_s)}{\partial X_{1,q}} \right|_{(X_{i,q})_{i,q \geq 1} = (F(i,q))_{i,q \geq 1}} = 0.$$

On conclut que $S(r_1 + 1, \dots, r_s) = 0$ est encore nulle. \square

Démonstration du lemme 11.7. Compte tenu de la convergence simple (non jointe) vers des gaussiennes, le cas où tous les l_i sont identiques est déjà traité; on peut donc supposer que certains des l_i sont distincts. Nous noterons d'autre part $L = l_1 + \dots + l_r$. Comme le produit disjoint \bullet des observables est compatible avec le degré de Kerov, dans la décomposition du cumulants standard $k(\Sigma_{l_1}, \dots, \Sigma_{l_r})$ en cumulants disjoints, si pour une partition d'ensembles π l'un des cumulants identité est de degré de Kerov strictement inférieur à la somme des l_i , $i \in \pi_j$, alors le cumulants disjoint correspondant

$$k_\pi = k^\bullet \left(k^{\text{id}}(\Sigma_{l_i \in \pi_1}), \dots, k^{\text{id}}(\Sigma_{l_i \in \pi_s}) \right)$$

est un $O(n^{(L-1)/2})$. D'après la première partie du lemme 11.8, il reste donc à traiter le cas des cumulants disjoints k_π , où π est une partition d'ensembles telle que pour tous indices i_1 et i_2 dans la même part de π , $l_{i_1} = l_{i_2}$. Autrement dit, on doit évaluer des cumulants disjoints du type :

$$k^\bullet \left(k^{\text{id}}(\Sigma_{m_1}, \dots, \Sigma_{m_1}), \dots, k^{\text{id}}(\Sigma_{m_s}, \dots, \Sigma_{m_s}) \right).$$

Ensuite, si l'un des cumulants identité $k^{\text{id}}(\Sigma_{m_j}, \dots, \Sigma_{m_j})$ contient n_j termes avec $n_j \geq 3$, alors la seconde partie du lemme 11.8 s'applique, et k_π est donc de nouveau un $O(n^{(L-1)/2})$. On peut donc encore restreindre l'ensemble des partitions d'ensembles à étudier, et supposer que

tous les n_j valent 1 ou 2. Bien sûr, si $n_j = 1$, alors $k^{\text{id}}(\Sigma_{m_j}) = \Sigma_{m_j}$. D'autre part, d'après la seconde partie du lemme 11.6, le terme de degré de Kerov maximal $2m_j$ dans $k^{\text{id}}(\Sigma_{m_j}, \Sigma_{m_j})$ est $m_j \Sigma_{1^{m_j}}$; et on peut bien sûr négliger les autres termes. Au final, le cumulants de l'énoncé que l'on souhaite évaluer est à un $O(n^{(L-1)/2})$ près égal à une somme de cumulants disjoints du type

$$k^\bullet(\Sigma_{m_1}, \dots, \Sigma_{m_u}, \Sigma_{1^{m_{u+1}}}, \dots, \Sigma_{1^{m_{u+v}}}),$$

avec $m_1 + \dots + m_u + 2(m_{u+1} + \dots + m_{u+v}) = L$. Alors, le lemme 11.9 montre que ces cumulants disjoints sont encore des $O(n^{(L-1)/2})$. En effet, réordonnons les caractères centraux dans un tel cumulants disjoints pour l'écrire sous la forme :

$$k^\bullet \left(\underbrace{\Sigma_2, \dots, \Sigma_2}_{r_1 \text{ termes}}, \underbrace{\Sigma_{s+1}, \dots, \Sigma_{s+1}}_{r_s \text{ termes}}, \underbrace{\Sigma_{1^2}, \dots, \Sigma_{1^2}}_{r_{s+1} \text{ termes}}, \underbrace{\Sigma_{1^{t+1}}, \dots, \Sigma_{1^{t+1}}}_{r_{s+t} \text{ termes}} \right).$$

On a $2r_1 + \dots + (s+1)r_s + 2(2r_{s+1} + \dots + (t+1)r_{s+t}) = L$; d'autre part, l'hypothèse faite au début de la preuve du lemme garantit que $s+t \geq 2$. Notons alors F la fonction définie par :

$$F(i, r) = \begin{cases} f(i+1, r) n^{\frac{(i+1)r}{2}} & \text{si } i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \\ n^{(i+1-s)r} & \text{si } i \in \llbracket s+1, s+t \rrbracket. \end{cases}$$

Alors, compte tenu de l'expression des espérances $G_n[\Sigma_\mu]$ donnée par la proposition 11.4, et en utilisant la formule de Möbius

$$k(X_1, \dots, X_r) = \sum_{\pi \in \Omega(\llbracket 1, r \rrbracket)} (-1)^{\ell(\pi)-1} (\ell(\pi) - 1)! \prod_{\pi_j \in \pi} \mathbb{E} \left[\prod_{i \in \pi_j} X_j \right],$$

on voit que le cumulants disjoints a pour terme de degré $L/2$ en n

$$\sum_{\pi \in \Omega(\llbracket 1, s+t \rrbracket)} (-1)^{\ell(\pi)-1} (\ell(\pi) - 1)! \prod_{j=1}^{\ell(\pi)} \prod_{r_{ij} \geq 1} F(i, r_{ij}),$$

étant entendu que par rapport à la formule exacte la différence est de degré inférieur en n . Le lemme 11.9 montre que ce coefficient est nul; ainsi, le terme de plus haut degré en n est d'ordre inférieur, ce qui achève la preuve. \square

Preuve du théorème 11.5, seconde partie. D'après le lemme 11.7, les caractères centraux renormalisés convergent conjointement vers un vecteur gaussien; il suffit dès lors de montrer que les covariances tendent vers 0, c'est-à-dire que

$$\frac{G_n[\Sigma_k \Sigma_l] - G_n[\Sigma_k] G_n[\Sigma_l]}{n^{\frac{k+l}{2}}} \rightarrow 0$$

si $k \neq l$. Mais dans la preuve du lemme 11.7, l'hypothèse $r \geq 3$ a seulement servi dans le cas exclus tout au début, c'est-à-dire lorsque tous les l_i étaient identiques. Ici, $k \neq l$, donc la preuve s'adapte et on a bien convergence des covariances vers zéro, et indépendance asymptotique. \square

Le théorème 11.5 décrit le comportement asymptotique des observables décomposées dans la base algébrique des caractères centraux ; en changeant de base comme dans la section 10.2, nous allons maintenant en déduire l'asymptotique des formes λ^* des diagrammes de Young renormalisés. Pour commencer, établissons l'équivalent du théorème 3.3 pour les mesures de Gelfand :

Théorème 11.10 (Formes limites des diagrammes sous les mesures de Gelfand, [LS77, Mé10a]). *Le diagramme continu Ω est la forme limite des diagrammes de Young tirés suivant les mesures de Gelfand : pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{G}_n[\|\lambda^* - \Omega\|_\infty \geq \varepsilon]$ tend vers 0.*

Démonstration. Comme dans le chapitre 3, on montre que les cumulants libres convergent en probabilité :

$$\forall j \geq 2, R_j(\lambda^*) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 2$, on écrit $R_{k+1} = \Sigma_k + h$ avec $\text{wt}(h) \leq k$. Alors,

$$R_{k+1}(\lambda^*) = n^{-\frac{k+1}{2}} R_{k+1}(\lambda) = n^{-\frac{k+1}{2}} \Sigma_k(\lambda) + n^{-\frac{k+1}{2}} h(\lambda).$$

Pour tout observable de diagrammes f , $\mathbb{G}_n[f] = O(n^{\text{wt}(f)/2})$, donc le second terme vérifie

$$\mathbb{G}_n \left[\left(n^{-\frac{k+1}{2}} h(\lambda) \right)^2 \right] = n^{-(k+1)} \mathbb{G}_n [h(\lambda)^2] = O(n^{-1}) \rightarrow 0$$

et converge en probabilité vers 0. D'autre part, pour les caractères centraux $\Sigma_{k \geq 2}$, $(\Sigma_k)^2$ est de degré de Kerov $2k$, donc en utilisant l'estimation plus précise des espérances d'observables données par le degré de Kerov, on voit que

$$\mathbb{G}_n \left[\left(n^{-\frac{k+1}{2}} \Sigma_k(\lambda) \right)^2 \right] = O(n^{-1}) \rightarrow 0.$$

Ainsi, le premier terme converge aussi en probabilité vers 0, donc R_{k+1} converge bien vers 0 si $k \geq 2$. D'autre part, $R_2(\lambda^*) = \Sigma_1(\lambda^*) = 1$ pour tout diagramme de Young, donc $R_2(\lambda^*)$ converge bien en probabilité vers la constante 1. Le même argument que pour les mesures de Plancherel — c'est-à-dire, le contenu de la proposition 2.5 — permet de conclure quant à la convergence uniforme en probabilité des diagrammes renormalisés vers Ω . \square

De nouveau, on a en réalité convergence en probabilité au sens ultra-fort, c'est-à-dire qu'en plus de la convergence uniforme en probabilité, les bornes $a(\lambda^*)$ et $b(\lambda^*)$ des supports des diagrammes renormalisés convergent en probabilité vers les bornes $a(\Omega) = -2$ et $b(\Omega) = 2$. De façon équivalente, la longueur $\ell_{-,n}$ d'un plus long sous-mot décroissant, et la longueur $\ell_{+,n}$ d'un plus long sous-mot croissant dans une involution de taille n tirée au hasard uniformément vérifient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{-,n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{+,n}}{\sqrt{n}} = 2$$

les limites s'entendant en probabilité. Ce point est démontré dans l'article [BR01], et la distribution asymptotique de $\ell_{-,n} - 2\sqrt{n}$ et $\ell_{+,n} - 2\sqrt{n}$ y est décrite par un résultat analogue au théorème 5.1, et mettant de nouveau en jeu les équations de Painlevé II. Notons que si l'on interprète une involution par un appariement partiel des entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors ce résultat se traduit par des estimations sur les nombres de croisements et d'imbrications d'appariements aléatoires, voir [CDD⁺05].

La correspondance des formes limites pour les mesures de Plancherel et les mesures de Gelfand n'est en réalité pas très étonnante, à condition d'utiliser la méthode originale de preuve du théorème de Logan-Shepp-Kerov-Vershik, c'est-à-dire celle de l'article [LS77]. Ainsi, en utilisant la formule des crochets, Logan et Shepp ont construit une fonctionnelle énergie I sur les diagrammes de Young continus telle que, pour λ partition de taille n , $(\dim \lambda)^2$ ait un comportement asymptotique grossièrement équivalent à $\exp(-nI(\lambda^*))$. Or, la courbe Ω est l'unique diagramme continu qui maximise I . Par conséquent, il est intuitivement évident que la mesure de Plancherel charge surtout les diagrammes qui sont proches de cette courbe (à renormalisation près). Cet argument variationnel peut être rendu rigoureux, voir [LS77]. Maintenant, si l'on remplace $(\dim \lambda)^2$ par $\dim \lambda$, on peut clairement utiliser le même type d'argument, en divisant simplement l'énergie par 2. En réalité, on pourrait adapter la preuve au cas plus général des β -mesures de Plancherel, qui sont les mesures définies par :

$$M_n^\beta[\lambda] = \frac{(\dim \lambda)^\beta}{\sum_{\mu \in \mathcal{D}_n} (\dim \mu)^\beta}, \quad \beta > 0.$$

Notons qu'on retrouve les mesures de Plancherel pour $\beta = 2$, et les mesures de Gelfand pour $\beta = 1$. Ces β -mesures sont les analogues pour les partitions des β -ensembles, qui sont les distributions ponctuelles de densité

$$d\mathbb{P}[x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{Z_{n,\beta}} |\Delta(x_1, \dots, x_n)|^\beta e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i)^2} dx_1 \cdots dx_n,$$

voir par exemple [DE02]. En particulier, on conjecture que la correspondance de Baik-Deift-Johansson s'étende à ces β -ensembles : ainsi, la déviation de la plus grande valeur d'un point d'un β -ensemble par rapport à la valeur $2\sqrt{n}$ est probablement équivalente en loi (après renormalisation) à la déviation de la plus grande part d'une partition sous la β -mesure de Plancherel par rapport à la valeur $2\sqrt{n}$ (on sait que c'est le cas lorsque $\beta = 1, 2$).

Ceci étant, revenons à notre étude asymptotique des mesures de Gelfand, et introduisons comme dans la section 10.2 la déviation $\Delta_\lambda(s) = \lambda^*(s) - \Omega(s)$, et les polynômes de Chebyshev de seconde espèce $u_k(X)$, avec la condition de normalisation

$$u_k(2 \cos \theta) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta}.$$

On note W_k la variable aléatoire $\frac{\sum_k}{n^{k/2}}$; pour $k \geq 2$, elle converge vers une gaussienne $\mathcal{N}(e_k, 2k)$. Le lemme suivant est l'exact analogue du lemme 10.13 pour les mesures de Gelfand :

Lemme 11.11 (Développement gaussien des moments de la déviation d'un diagramme). *Le k -ième moment de la déviation*

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \int_{\mathbb{R}} s^k (\lambda^*(s) - \Omega(s)) ds.$$

est égal à $\sqrt{n} \frac{\tilde{p}_{k+2}(\lambda^*) - \tilde{p}_{k+2}(\Omega)}{(k+1)(k+2)}$, et c'est aussi

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{k!}{k+1-j!j!} W_{k+1-2j},$$

plus une variable aléatoire qui tend en probabilité vers 0 sous les mesures de Gelfand.

Démonstration. La première partie du lemme a déjà été démontrée à la fin du chapitre 3 ; on renvoie sinon à [IO02, proposition 7.2]. Rappelons que les moments entrelacés du diagramme continu Ω sont :

$$\tilde{p}_{2k}(\Omega) = \binom{2k}{k} \quad ; \quad \tilde{p}_{2k+1}(\Omega) = 0$$

voir la proposition 10.6. D'autre part, il existe un résultat analogue au lemme 10.10 pour le degré de Kerov :

$$\tilde{p}_k = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor} \frac{k \downarrow j+1}{j!} \Sigma_{k-1-2j} (\Sigma_1)^j + \begin{cases} \binom{k}{k/2} (\Sigma_1)^{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

plus une observable de degré de Kerov inférieur à $k-2$, voir [IO02, proposition 7.3]. Par conséquent,

$$\frac{\tilde{p}_{k+2}(\lambda^*)}{(k+1)(k+2)} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{k!}{k+1-j!j!} \frac{\Sigma_{k+1-2j}(\lambda)}{n^{\frac{k+2-2j}{2}}} + \begin{cases} \binom{k+2}{(k+2)/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{if } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

plus $n^{-\frac{k+2}{2}}$ fois une observable de degré de Kerov au plus k . En soustrayant $\tilde{p}_{k+2}(\Omega)$, on se débarrasse du second terme à droite, et en multipliant par \sqrt{n} , on obtient finalement

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{k!}{k+1-j!j!} W_{k+1-2j}$$

plus $n^{-\frac{k+1}{2}}$ fois une observable de degré de Kerov plus petit que k , donc d'ordre de grandeur au plus $n^{\frac{k}{2}}$. Ce terme résiduel est donc négligeable à l'infini, et le lemme est établi. \square

Lemme 11.12 (Polynômes de Chebyshev de second espèce et déviation d'un diagramme).
Pour tout entier k , l'observable

$$Y_k = \frac{\sqrt{n}}{2} \int u_k(s) \Delta_\lambda(s) ds$$

est égale à $\frac{W_{k+1}}{k+1}$, plus une observable qui sous les mesures de Gelfand tend en probabilité vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration. On rappelle que le développement explicite du polynôme $u_k(X)$ est

$$u_k(X) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^m \binom{k-m}{m} X^{k-2m}.$$

Par conséquent, si Θ_k désigne l'observable du lemme précédent, alors

$$Y_k = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^m \binom{k-m}{m} \Theta_{k-2m} \quad ; \quad \Theta_k \simeq \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k+1}{j} X_{k+1-2j}.$$

Les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 10.14 montrent que ces relations sont essentiellement inverses l'une de l'autre, et ainsi, $Y_k \simeq \frac{W_{k+1}}{k+1}$, qui est asymptotiquement une gaussienne (pas forcément centrée). \square

Théorème 11.13 (Déviation des diagrammes par rapport à leur forme limite sous les mesures de Gelfand, [Mé10a]). Soit $(\xi_k)_{k \geq 2}$ une famille de variables gaussiennes indépendantes, centrées et toutes de variance 1. Sous les mesures de Gelfand et au sens des distributions tempérées sur l'intervalle $[-2, 2]$, le processus $\sqrt{n} \Delta_\lambda(s)$ converge en loi vers le processus gaussien généralisé

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4-s^2}}{\pi} + \sqrt{2} \Delta(s) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4-s^2}}{\pi} + \sqrt{2} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{k}} \sin(k\theta) \right),$$

avec $s = 2 \cos \theta$. À une fonction déterministe près, le processus gaussien de Kerov (multiplié par $\sqrt{2}$) décrit donc encore les fluctuations des diagrammes par rapport à leur forme limite.

Démonstration. Si f est une fonction de $\mathcal{C}^\infty([-2, 2])$, on peut la développer dans la base orthogonale de $\mathcal{L}^2([-2, 2], m_\Omega)$ constituée par les polynômes de Chebyshev. Ainsi,

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{-2}^2 f(s) u_k(s) \frac{\sqrt{4-s^2}}{2\pi} ds \right) u_k(s).$$

La fonctionnelle linéaire de la fonction f associée à la déviation renormalisée $\frac{\sqrt{n}}{2} \Delta_\lambda(s)$ s'écrit donc asymptotiquement

$$\int_{-2}^2 f(s) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_{k+1}}{k+1} u_k(s) \frac{\sqrt{4-s^2}}{2\pi} \right) ds,$$

et ainsi, en tant que distribution, $\sqrt{n} \Delta_\lambda(s)$ converge faiblement vers le processus gaussien généralisé

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}(e_{k+1}, 2(k+1))}{k+1} u_k(s) \sqrt{4-s^2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mathcal{N}(e_k, 2k)}{k} \sin(k\theta),$$

avec $s = 2 \cos \theta$ et $\theta \in [0, \pi]$. Décomposons les variables $\mathcal{N}(e_k, 2k)$ sous la forme $e_k + \sqrt{2k} \zeta_k$ avec les ζ_k comme dans l'énoncé du théorème. Alors, le processus limite est somme des deux contributions :

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} = \frac{1}{2} - \frac{2 \sin \theta}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4-s^2}}{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta_k}{\sqrt{k}} \sin(k\theta) \right) = \sqrt{2} \Delta(s),$$

où l'on reconnaît dans le second terme le processus $\Delta(s)$ des théorèmes 3.4 et 10.15. \square

Ainsi, le processus gaussien de Kerov décrit les fluctuations des formes des diagrammes dans au moins deux autres cadres que celui des mesures de Plancherel : le cadre des mesures de Schur-Weyl et le cadre des mesures de Gelfand. On peut raisonnablement conjecturer que pour tout paramètre β , les fluctuations des formes des diagrammes de Young tirés aléatoirement selon les β -mesures de Plancherel sont encore décrites par un multiple³ de ce processus, plus éventuellement une fonction déterministe. L'idéal serait de disposer de théorèmes universels pour les partitions semblables à ce que l'on connaît pour les modèles de matrices aléatoires (voir en particulier [LP09]); d'après les deux chapitres de cette partie, il semble qu'on puisse établir un théorème central limite semblable à celui de Kerov dès que les caractères centraux cycliques renormalisés convergent conjointement vers un vecteur gaussien.

3. On peut conjecturer que le facteur multiplicatif est $\sqrt{\frac{2}{\beta}}$.

