
Arbres binaires équilibrés et treillis de Tamari

Les arbres binaires de recherche sont des structures de données adaptées pour représenter des ensembles dynamiques totalement ordonnés (voir [AU94], [Knu98], [CLRS03]). Les algorithmes qui résolvent la plupart des questions sur les ensembles dynamiques, comme l'insertion, la suppression, ou la recherche d'un élément donné, consomment un temps linéaire en fonction de la hauteur de l'arbre binaire qui l'encode, et si cet arbre binaire est *équilibré*, ces opérations sont réalisables en temps logarithmique en fonction du cardinal de l'ensemble représenté. Rappelons qu'un arbre binaire est équilibré si pour chacun de ses nœuds x , les hauteurs du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de x diffèrent d'au plus un.

L'algorithmique des arbres binaires équilibrés repose essentiellement sur l'opération de *rotation* (la définition de cette opération est rappelée dans le paragraphe 1.3.3 du chapitre 1). Une insertion ou une suppression d'un élément dans un ensemble dynamique totalement ordonné modifie l'arbre binaire qui l'encode et peut dans certains cas le déséquilibrer. L'efficacité de ces algorithmes tient au fait, comme l'on montré Adelson-Velsky et Landis [AVL62], qu'un arbre binaire de recherche ainsi modifié demande au plus deux rotations pour se rééquilibrer, et ce, quelle que soit sa taille.

De manière surprenante, cette opération apparaît dans un contexte différent puisqu'elle permet de définir un ordre partiel sur l'ensemble des arbres binaires d'une taille fixée. Un arbre binaire T_0 est inférieur à un arbre binaire T_1 s'il est possible d'obtenir T_1 en appliquant une ou plusieurs rotations orientées dans T_0 . Cet ordre partiel, connu sous le nom d'*ordre de Tamari* [Tam62], [Sta99a], [Knu04], définit également une structure de treillis sur l'ensemble des arbres binaires d'une taille fixée (la définition précise du treillis de Tamari est rappelée dans le paragraphe 1.3.3 du chapitre 1).

Étant donné que d'un côté, l'équilibre d'un arbre binaire est maintenu par l'intermédiaire de rotations, et que d'un autre, les arbres binaires sont munis naturellement d'une structure d'ordre partiel induite précisément par les rotations, nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier la question de savoir si les arbres binaires équilibrés jouent un rôle particulier dans le treillis de Tamari. Notre objectif est de combiner ces deux points de vue sur l'opération de rotation : le premier étant algorithmique, et le second, combinatoire. Des expérimentations sur les premiers treillis de Tamari montrent que les intervalles $[T, T']$, où T et T' sont des arbres binaires équilibrés, sont uniquement constitués d'arbres binaires équilibrés. La démonstration de cette propriété est l'un des résultats principaux de ce chapitre. Comme conséquence, nous donnons une caractérisation de la forme de ces intervalles, et, en utilisant notre notion de grammaire synchrone introduite dans le chapitre 7, nous les dénombrons.

Une autre motivation de ce travail, plus algébrique, est justifiée par l'observation suivante. Le produit de deux éléments de la base fondamentale de l'algèbre de Hopf **PBT** de Loday-Ronco des arbres binaires [LR98], [HNT05] (voir aussi le paragraphe 5.1.3 du chapitre 5) peut s'interpréter comme un intervalle particulier du treillis de Tamari [LR02]. Ainsi, étant donné que l'ensemble des arbres binaires équilibrés est un sous-ensemble de l'ensemble des arbres binaires, et que, en vertu de l'expérimentation précédente, l'ensemble des arbres binaires équilibrés est clos par intervalle dans le treillis de Tamari, il semble naturel de construire une sous-algèbre de Hopf de **PBT** basée sur les arbres binaires équilibrés. Malheureusement, aucun résultat dans cette direction n'a été obtenu.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Nous commençons le paragraphe 8.1 par des rappels autour de la notion d'équilibre dans un arbre binaire. Nous établissons ensuite les outils en vue montrer que l'ensemble des arbres binaires équilibrés est clos par intervalle dans le treillis de Tamari. Nous introduisons ensuite dans le paragraphe 8.2 une notion de motif d'arbre binaire, que nous nommons *motif de déséquilibre*, ainsi qu'une notion d'évitement de motif. Une partition de l'ensemble des arbres binaires équilibrés en trois sous-ensembles suivant la position de leurs éléments dans le treillis de Tamari est proposée, et nous montrons ensuite que les éléments de ces ensembles peuvent être décrits comme les arbres binaires équilibrés qui évitent un certain ensemble de motifs de déséquilibre. Nous construisons également une grammaire synchrone qui engendre les éléments de l'un de ces trois ensembles et obtenons une équation fonctionnelle de point fixe pour la série génératrice qui dénombre ses éléments. Dans le paragraphe 8.3, nous regardons les intervalles d'arbres binaires équilibrés de plus près, et montrons qu'ils sont isomorphes, en tant que posets, à des hypercubes. De plus, en encodant les intervalles d'arbres binaires équilibrés par des structures arborescentes particulières, nous construisons une grammaire synchrone qui les engendre et obtenons par conséquent une équation fonctionnelle de point fixe pour la série génératrice des intervalles d'arbres binaires équilibrés. Nous procédons ensuite de même pour les intervalles maximaux d'arbres binaires équilibrés. Finalement, nous considérons dans le paragraphe 8.4 une généralisation des arbres binaires équilibrés et montrons entre autre que l'ensemble des arbres binaires équilibrés est le seul ensemble parmi cette généralisation qui soit à la fois clos par intervalle dans le treillis de Tamari et tel que l'ordre de Tamari réduit à ses éléments possède des intervalles non triviaux. Nous terminons en nous intéressant à trois autres familles d'arbres binaires qui sont closes par intervalle dans le treillis de Tamari, à savoir, les arbres binaires équilibrés en taille, les arbres binaires ayant une canopée fixée et les arbres binaires ayant un indice de Narayana fixé.

La plupart des résultats contenus dans ce chapitre ont été publiés dans [Gir10].

8.1 Clôture par intervalles des arbres binaires équilibrés

8.1.1 Arbres binaires équilibrés

Si T est un arbre binaire, $h(T)$ désigne sa *hauteur*, qui est la longueur du plus long chemin qui connecte sa racine à l'une de ses feuilles. Plus formellement,

$$h(T) := \begin{cases} 1 + \max\{h(L), h(R)\} & \text{si } T = L \wedge R, \\ 0 & \text{sinon } (T = \perp). \end{cases} \quad (8.1.1)$$

Par exemple, nous avons $h(\perp) = 0$, $h(\begin{smallmatrix} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \end{smallmatrix}) = 1$, et $h(\begin{smallmatrix} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{smallmatrix}) = 2$.

L'application d_T associe à chaque nœud x de T un élément de \mathbb{Z} , à savoir, sa *mesure de déséquilibre*, définie par

$$d_T(x) := h(R) - h(L), \quad (8.1.2)$$

où L (resp. R) est le sous-arbre gauche (resp. droit) de x . La figure 8.1 montre un exemple d'arbre binaire étiqueté par les mesures de déséquilibre de ses nœuds.

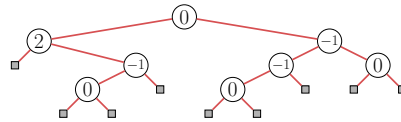


FIGURE 8.1 – Un arbre binaire étiqueté par les mesures de déséquilibre de chacun de ses nœuds.

Un nœud x est *équilibré* si

$$d_T(x) \in \{-1, 0, 1\}. \tag{8.1.3}$$

Les *arbres binaires équilibrés* forment un sous-ensemble de \mathcal{T} constitué des arbres binaires qui ont la propriété d’être équilibrés :

Définition 8.1.1. *Un arbre binaire est équilibré si tous ses nœuds sont équilibrés. La classe combinatoire des arbres binaires équilibrés est notée \mathcal{E} . La taille d’un arbre binaire équilibré est son nombre de nœuds.*

Les cardinaux des ensembles \mathcal{E}_n constituent la suite **A006265** de [Slo] qui commence par

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70, 184, 476, 872, 1553, 2720, 4288, 6312, 9004. \tag{8.1.4}$$

La figure 8.2 représente les éléments des ensembles \mathcal{E}_n pour $0 \leq n \leq 6$.

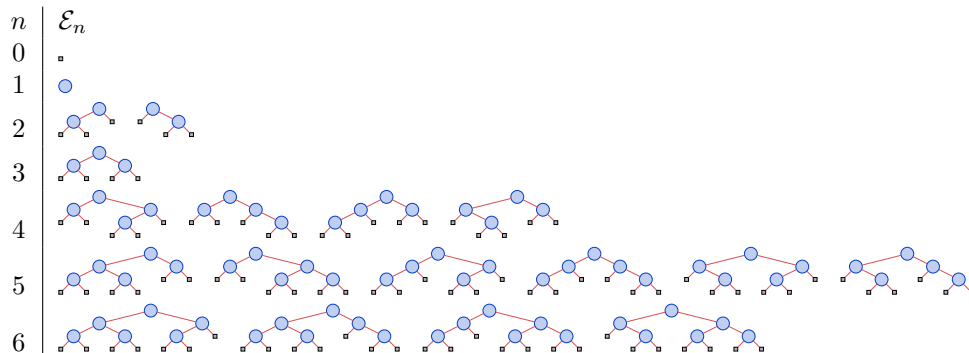


FIGURE 8.2 – Les arbres binaires équilibrés de taille inférieure à 6.

8.1.2 Rotations dans un arbre binaire équilibré

Commençons par nous intéresser aux modifications des mesures de déséquilibre des nœuds d’un arbre binaire équilibré de la forme $T_0 := (A \wedge B) \wedge C$ lorsqu’une rotation en sa racine lui est appliquée. Soit T_1 l’arbre binaire ainsi obtenu, y la racine de T_0 , et x le fils gauche de y dans T_0 (pour une illustration de cette situation, regarder la figure 1.4 du chapitre 1 en considérant que y est la racine de T_0 et x la racine de T_1). Remarquons en premier lieu que les mesures de déséquilibre des nœuds des sous-arbres A , B et C ne changent pas après cette rotation. En effet, seules les mesures de déséquilibre de x et de y sont éventuellement modifiées. Comme T_0 est équilibré, nous avons $d_{T_0}(x) \in \{-1, 0, 1\}$ et $d_{T_0}(y) \in \{-1, 0, 1\}$. Par conséquent, le couple $(d_{T_0}(x), d_{T_0}(y))$ peut prendre neuf valeurs différentes.

Voici la liste des mesures de déséquilibre de x et de y dans T_0 et T_1 , exprimée sous la forme $(d_{T_0}(x), d_{T_0}(y)) \longrightarrow (d_{T_1}(x), d_{T_1}(y))$:

$$\begin{array}{lll}
\text{(R1)} \quad (-1, -1) \longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}), & \text{(R4)} \quad (1, -1) \longrightarrow (2, \mathbf{0}), & \text{(R7)} \quad (-1, 1) \longrightarrow (3, 3), \\
\text{(R2)} \quad (0, -1) \longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{0}), & \text{(R5)} \quad (1, 0) \longrightarrow (3, \mathbf{1}), & \text{(R8)} \quad (0, 1) \longrightarrow (3, 2), \\
\text{(R3)} \quad (0, 0) \longrightarrow (2, \mathbf{1}), & \text{(R6)} \quad (-1, 0) \longrightarrow (2, 2), & \text{(R9)} \quad (1, 1) \longrightarrow (4, 2).
\end{array}$$

Il est maintenant naturel de classifier ces neuf cas de rotation en les divisant en trois groupes, suivant si les nœuds x et y restent équilibrés dans T_1 .

- Les cas (R1) et (R2), où x et y restent équilibrés sont nommées *rotations conservatrice d'équilibre* ;
- Les cas (R3), (R4) et (R5), où y reste équilibré mais pas x sont nommées *rotations partiellement déséquilibrantes* ;
- Les (R6), (R7), (R8), et (R9) où x et y sont tous deux déséquilibrés sont nommées *rotations totalement déséquilibrantes*.

Ces observations mènent aux propriétés suivantes.

Proposition 8.1.2. *Soient T_0 et T_1 deux arbres binaires équilibrés. Alors,*

$$T_0 \prec T_1 \quad \text{implique} \quad h(T_0) = h(T_1). \quad (8.1.5)$$

Démonstration. Comme T_0 et T_1 sont tous deux équilibrés, la rotation modifie un sous-arbre S_0 de T_0 tel que la mesure de déséquilibre de la racine y de S_0 et celle du fils gauche x de y vérifient (R1) ou (R2). Soit S_1 l'arbre binaire obtenu par la rotation en y dans S_0 . Par un simple calcul des hauteurs de S_0 et de S_1 , on trouve $h(S_0) = h(S_1)$. Ainsi, comme une rotation modifie localement un arbre binaire, nous avons bien $h(T_0) = h(T_1)$. \square

Lemme 8.1.3. *Soit T_0 un arbre binaire équilibré et T_1 un arbre binaire déséquilibré tel que $T_0 \prec T_1$. Alors, il existe un nœud z dans T_1 tel que $d_{T_1}(z) \geq 2$ et les sous-arbres gauches et droits de z sont équilibrés.*

Démonstration. Soit y le nœud de T_0 tel que $T_0 \prec_y T_1$ et x son fils gauche. Si cette rotation est partiellement déséquilibrante, alors (R3), (R4) ou (R5) est vérifié et le nœud $z := x$ de T_1 répond au lemme. Si cette rotation est totalement déséquilibrante, alors (R6), (R7), (R8) ou (R9) est vérifié, et le nœud $z := y$ de T_1 répond au lemme. \square

Lemme 8.1.4. *Soit T_0 un arbre binaire et y un de ses nœuds tel que tous les sous-arbres de T_0 à droite de y sont équilibrés. Alors, pour tout arbre binaire T_1 tel que $T_0 \prec_y T_1$, tout sous-arbre de T_1 à droite de y est équilibré.*

Démonstration. Étant donné que l'opération de rotation ne modifie pas l'ordre infixe des nœuds et par définition de la relation \rightsquigarrow , si un sous-arbre S de T_1 est à droite de y , alors S est également à droite de y dans T_0 . Par hypothèse, S est équilibré dans T_0 . Il le reste donc dans T_1 . \square

8.1.3 Un invariant de déséquilibre

Témoins de déséquilibre

Rappelons qu'un sous-arbre S d'un arbre binaire T est à *droite* d'un nœud x de T si x n'est pas un nœud de S et l'intégralité des nœuds de S apparaissent après x dans le parcours infixe de T .

Soient T un arbre binaire, x un nœud de T et y le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine x dans T . Nous qualifions x de *témoin de déséquilibre* si les trois conditions suivantes sont vérifiées (voir figure 8.3) :

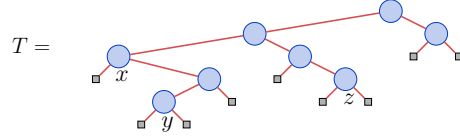


FIGURE 8.5 – Quelques exemples de mots des hauteurs dans l'arbre binaire T : $\text{mh}_T(x) = 221$, $\text{mh}_T(y) = 0021$ et $\text{mh}_T(z) = 01$.

Mots admissibles

Soit $\Theta : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ la règle de réécriture définie par

$$\Theta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) := \begin{cases} \max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} + 1 & \text{si } \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \{-1, 0, 1\}, \\ \max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.1.6)$$

Cette règle de réécriture est étendue aux mots de \mathbb{N}^* par $\Theta(u) := \Theta(u_1 \cdot u_2) \cdot u_3 \dots u_{|u|}$. Si $0 \leq i \leq |u| - 1$, nous notons $\Theta^i(u)$ l'application itérée de Θ définie par

$$\Theta^i(u) := \begin{cases} u & \text{si } i = 0, \\ \Theta(\Theta^{i-1}(u)) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.1.7)$$

Définition 8.1.5. *Un mot $u \in \mathbb{N}^*$ est admissible si $|u| \leq 1$ ou bien tout mot v de l'ensemble*

$$\{\Theta^i(u) : 0 \leq i \leq |u| - 2\} \quad (8.1.8)$$

vérifie $v_1 - 1 \leq v_2$. L'ensemble des mots admissibles est noté \mathcal{A} .

Pour tester si un mot u est admissible, il suffit de calculer itérativement les éléments de l'ensemble (8.1.8) suivant (8.1.7), et vérifier que chacun d'eux satisfait l'inégalité de la définition 8.1.5. Par exemple, en notant $\xrightarrow{\Theta}$ la règle de réécriture Θ , on s'aperçoit que $u := 00122$ est admissible. En effet,

$$00122 \xrightarrow{\Theta} 1122 \xrightarrow{\Theta} 222 \xrightarrow{\Theta} 32, \quad (8.1.9)$$

et $u_1 - 1 \leq u_2$ est respecté à chaque étape. Le mot 1234488 est également admissible :

$$01233778 \xrightarrow{\Theta} 2233778 \xrightarrow{\Theta} 333778 \xrightarrow{\Theta} 43778 \xrightarrow{\Theta} 5778 \xrightarrow{\Theta} 778 \xrightarrow{\Theta} 88. \quad (8.1.10)$$

D'un autre côté, 3444 n'est pas admissible puisque l'on a

$$3444 \xrightarrow{\Theta} 544 \xrightarrow{\Theta} 64, \quad (8.1.11)$$

et $6 - 1 \not\leq 4$.

Si u est un mot non vide, $\Omega(u)$ désigne la *hauteur* de u , qui est l'entier $\Theta^{|u|-1}(u)$. Nous avons ainsi par exemple $\Omega(00122) = 4$, $\Omega(01233778) = 9$ et $\Omega(3444) = 6$. Notons que nous pouvons déduire de la définition 8.1.5 qu'un mot $u \in \mathbb{N}^*$ de longueur supérieure à 2 est admissible si et seulement si pour toute écriture $u = v \cdot \mathbf{a} \cdot w$ où $v \in \mathbb{N}^+$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbb{N}^*$, on a $\Omega(v) - 1 \leq \mathbf{a}$.

Propriétés des mots admissibles

Établissons trois lemmes sur les mots admissibles qui vont être utilisés pour établir le théorème 8.1.13, résultat principal de ce paragraphe.

Lemme 8.1.6. *Si u est un mot admissible, alors, pour tout $i \in [|u| - 1]$, $u_i - 1 \leq u_{i+1}$.*

Démonstration. Supposons que u est de la forme $u = v \cdot u_i \cdot u_{i+1} \cdot w$ où $v, w \in \mathbb{N}^*$ et $u_i - 1 > u_{i+1}$. Comme Θ transforme tout mot $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{N}^2$ en une lettre $\mathbf{c} \in \mathbb{N}$ de valeur supérieure à \mathbf{a} et \mathbf{b} , nous avons $\Omega(v \cdot u_i) \geq u_i$. Ceci implique $\Omega(v \cdot u_i) - 1 > u_{i+1}$, et ainsi $u \notin \mathcal{A}$, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Lemme 8.1.7. *Tout préfixe et suffixe d'un mot admissible est admissible.*

Démonstration. Il est immédiat, par définition, que les préfixes d'un mot admissibles sont également admissibles.

Soient $u \in \mathcal{A}$ tel que $|u| \geq 2$ et w un suffixe non vide de u tel que $w \notin \mathcal{A}$. Par conséquent, w est de la forme $w = x \cdot \mathbf{a} \cdot y$ où $x \in \mathbb{N}^+$, $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega(x) - 1 > \mathbf{a}$. Le mot u est de la forme $u = v \cdot x \cdot \mathbf{a} \cdot y$ où $v \in \mathbb{N}^*$. Comme Θ transforme tout mot $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{N}^2$ en une lettre $\mathbf{c} \in \mathbb{N}$ de valeur supérieure à \mathbf{a} et \mathbf{b} , nous avons $\Omega(v \cdot x) \geq \Omega(x)$. Ceci implique $\Omega(v \cdot x) - 1 > \mathbf{a}$ et montre que $u \notin \mathcal{A}$, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Lemme 8.1.8. *Si $u \cdot v$ est un mot admissible tel que $|v| \geq 2$, le mot $u \cdot \Theta(v)$ est également admissible.*

Démonstration. Si u est vide, le lemme est immédiatement vrai. Supposons donc que u est non vide. Le mot $u \cdot v$ est de la forme $u \cdot v = u \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot w$ où $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathbf{c} := \Theta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \Omega(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Le mot $u \cdot \mathbf{c} \cdot w = u \cdot \Theta(v)$ est admissible dans le cas où les deux inégalités

$$\Omega(u) - 1 \leq \mathbf{c}, \quad (8.1.12)$$

et

$$\Omega(u \cdot \mathbf{c}) \leq \Omega(u \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (8.1.13)$$

sont établies. Comme $u \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot w \in \mathcal{A}$, nous avons $\Omega(u) - 1 \leq \mathbf{a}$, et comme $\mathbf{c} = \Theta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, nous avons $\mathbf{c} \geq \mathbf{a}$ et donc $\Omega(u) - 1 \leq \mathbf{c}$, ce qui montre (8.1.12). Posons à présent $\mathbf{d} := \Omega(u)$. Montrer (8.1.13) revient à montrer que $\Omega(\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}) \leq \Omega(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, ce qui est équivalent à $\Omega(\mathbf{d} \cdot \Omega(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})) \leq \Omega(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Cette relation est vraie dans le cas général pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d} \in \mathbb{N}$, ce qui implique $u \cdot \Theta(v) \in \mathcal{A}$. \square

Mots des hauteurs et mots admissibles

Montrons à présent deux lemmes qui mettent en évidence le lien entre les mots des hauteurs des nœuds d'un arbre binaire et les mots admissibles.

Lemme 8.1.9. *Soient T un arbre binaire équilibré, x un de ses nœuds et u le mot des hauteurs de x . Alors, u est admissible et $\Omega(u) \leq h(T)$.*

Démonstration. Nous procédons par induction structurelle sur l'ensemble des arbres binaires équilibrés. Le lemme est vrai pour l'unique élément T de \mathcal{E}_1 puisque, en notant x son unique nœud, nous avons $u = mh_T(x) = 0$, qui est un mot admissible et vérifie $0 = \Omega(u) \leq h(T) = 1$.

Supposons que T est de la forme $T = L \wedge R$. Si x est un nœud de R , nous avons $u = mh_T(x) = mh_R(x)$, et par hypothèse d'induction, $u \in \mathcal{A}$ et $\Omega(u) \leq h(R)$. Comme $h(R) < h(T)$, le lemme est vérifié.

Si x est un nœud de L , nous avons $u = mh_T(x) = mh_L(x) \cdot h(R)$. Comme T est équilibré, $h(R) - h(L) \in \{-1, 0, 1\}$, et par hypothèse d'induction, $\Omega(mh_L(x)) \leq h(L)$. Par conséquent, $\Omega(mh_L(x)) - 1 \leq h(R)$. De plus, et encore par hypothèse d'induction, $mh_L(x) \in \mathcal{A}$, et ainsi $u \in \mathcal{A}$. Finalement, comme $\Omega(u) \leq h(R) + 1 \leq h(T)$, le lemme est vérifié. \square

Lemme 8.1.10. *Soient T un arbre binaire et y un de ses nœuds tel que $\text{mh}_T(y)$ est admissible et tous les sous-arbres de la suite $(S_{y_1}, \dots, S_{y_\ell})$ sont équilibrés. Alors, pour tout nœud x à droite de y dans T , le mot $\text{mh}_T(x)$ est admissible.*

Démonstration. Si x est un ancêtre de y , puisqu'il est à droite de y , y est dans le sous-arbre gauche de x . Par conséquent, $\text{mh}_T(x)$ est un suffixe de $\text{mh}_T(y)$, et d'après le lemme 8.1.7, $\text{mh}_T(x) \in \mathcal{A}$.

Autrement, il existe un indice $i \in [\ell]$ tel que x est un nœud de $S_{y_i} =: S$. Le mot des hauteurs de y est par définition de la forme $\text{mh}_T(y) = u \cdot h(S) \cdot v$ où $u, v \in \mathbb{N}^*$. Par le lemme 8.1.9, comme S est par hypothèse équilibré, $\text{mh}_S(x) \in \mathcal{A}$. D'après le lemme 8.1.7, $h(S) \cdot v \in \mathcal{A}$, et puisque d'après le lemme 8.1.9, $\Omega(\text{mh}_S(x)) \leq h(S)$, le mot $\text{mh}_T(x) = \text{mh}_S(x) \cdot v$ est également admissible. \square

Validité de l'invariant de déséquilibre

Nous donnons et montrons ici le résultat principal de ce paragraphe. Nous nous appuyons sur les deux propositions suivantes pour montrer que l'invariant de déséquilibre que nous avons défini est valide. Ceci nous permettra ainsi de montrer qu'il est impossible de rééquilibrer par l'intermédiaire de rotations un arbre binaire obtenu en appliquant une rotation déséquilibrante dans un arbre binaire équilibré.

Proposition 8.1.11. *Soient T_0 un arbre binaire équilibré et T_1 un arbre binaire déséquilibré obtenu en appliquant une rotation déséquilibrante dans T_0 . Alors, il existe un nœud x de T_1 qui est un témoin de déséquilibre et vérifie la propriété de conservation.*

Démonstration. Soient r le nœud de T_0 tel que $T_0 \prec_r T_1$, q le fils gauche de r dans T_0 , $S_0 := (A \wedge B) \wedge C$ le sous-arbre de T_0 de racine r et $S_1 := A \wedge (B \wedge C)$ le sous-arbre de T_1 de racine q (voir la figure 8.6). Nous allons exhiber dans cette démonstration le nœud x requis. D'après

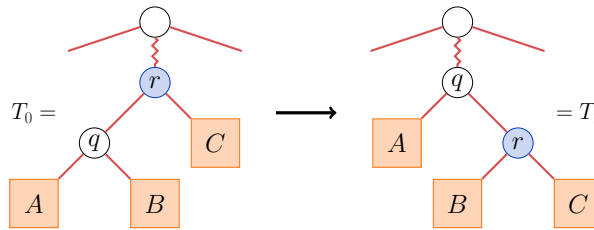


FIGURE 8.6 – Une rotation déséquilibrante en r est appliquée à l'arbre binaire équilibré T_0 .

le lemme 8.1.3, q ou r est déséquilibré dans T_1 et possède une mesure de déséquilibre positive. Nous avons par conséquent deux cas à examiner, suivant le type de la rotation déséquilibrante qui transforme T_0 en T_1 .

Cas 1. S'il s'agit d'une rotation partiellement déséquilibrante, posons $x := q$ et y le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine q dans T_1 . Puisque $d_{T_1}(x) \geq 2$, (TD1) est vérifié. De plus, comme T_0 est équilibré, par le lemme 8.1.4, les sous-arbres à droite de r sont équilibrés dans T_1 , et comme A et $B \wedge C$ sont équilibrés, (TD2) et (TD3) sont établis. Finalement, comme T_0 est équilibré, le lemme 8.1.9 montre que $\text{mh}_{T_0}(y) \in \mathcal{A}$. Nous avons

$$\text{mh}_{T_0}(y) = \text{mh}_A(y) \cdot h(B) \cdot h(C) \cdot v, \quad (8.1.14)$$

où $v \in \mathbb{N}^*$. De plus, nous avons

$$\text{mh}_{T_1}(y) = \text{mh}_A(y) \cdot h(B \wedge C) \cdot v = \text{mh}_A(y) \cdot \Theta(h(B) \cdot h(C)) \cdot v, \quad (8.1.15)$$

puisque $B \wedge C$ est équilibré. Ainsi, d'après le lemme 8.1.8, (PC) est satisfait.

Cas 2. S'il s'agit d'une rotation totalement déséquilibrante, posons $x := r$ et y le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine r dans T_1 . Puisque $d_{T_1}(x) \geq 2$, (TD1) est vérifié. De plus, comme T_0 est équilibré, par le lemme 8.1.4, les sous-arbres à droite de r sont équilibrés dans T_1 , et comme B est équilibré, (TD2) et (TD3) sont établis. Finalement, comme T_0 est équilibré, le lemme 8.1.9 montre que $\text{mh}_{T_0}(y) \in \mathcal{A}$. Nous avons

$$\text{mh}_{T_0}(y) = \text{mh}_B(y) \cdot \text{h}(C) \cdot v, \tag{8.1.16}$$

où $v \in \mathbb{N}^*$. De plus, nous avons

$$\text{mh}_{T_1}(y) = \text{mh}_B(y) \cdot \text{h}(C) \cdot v, \tag{8.1.17}$$

et ainsi, $\text{mh}_{T_1}(y) = \text{mh}_{T_0}(y)$, de sorte que (PC) est satisfait.

Il existe donc, dans tous les cas, un nœud x dans T_1 qui est un témoin de déséquilibre et qui satisfait la propriété de conservation. \square

Proposition 8.1.12. Soient T_1 un arbre binaire et x un nœud de T_1 qui est un témoin de déséquilibre. Si x satisfait la propriété de conservation, alors, pour tout arbre binaire T_2 obtenu en appliquant une rotation dans T_1 , il existe un nœud x' de T_2 qui est un témoin de déséquilibre et satisfait la propriété de conservation.

Démonstration. Soient y le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine x dans T_1 , r le nœud de T_1 tel que $T_1 \prec_r T_2$ et q le fils gauche de r dans T_1 . Nous allons exhiber, pour toute position de r par rapport à y dans T_1 , le nœud x' de T_2 requis. Si nécessaire, nous allons aussi exhiber le nœud y' de T_2 qui est le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine x' .

Cas 1. Si r est à gauche de y , la rotation en r ne modifie aucun des sous-arbres à droite de y . Donc, $x' := x$ est un témoin de déséquilibre qui satisfait la propriété de conservation dans T_2 .

Cas 2. Si r et q sont tous les deux ancêtres de y dans T_1 , posons C le sous-arbre droit de r et B le sous-arbre droit de q dans T_1 . Dans ce cas, T_2 est obtenu à partir de T_1 en remplaçant les sous-arbres B et C par $B \wedge C$ comme le montre la figure 8.7. Nous avons à présent trois

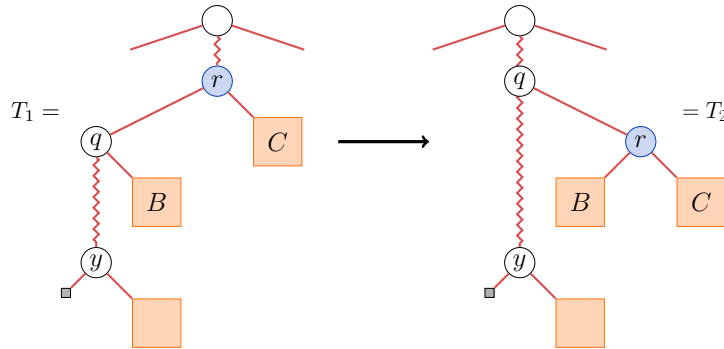


FIGURE 8.7 – Le deuxième cas : r est un ancêtre y et r est à droite de y .

possibilités suivant si $B \wedge C$ est équilibré et r est un ancêtre de x dans T_1 .

Cas 2.1. Si $B \wedge C$ est déséquilibré, on pose $x' := r$ et y' le nœud le plus à gauche de $B \wedge C$. Nous avons

$$\text{mh}_{T_1}(y) = u \cdot \text{h}(B) \cdot \text{h}(C) \cdot v, \tag{8.1.18}$$

où $u, v \in \mathbb{N}^*$. Comme x satisfait la propriété de conservation dans T_1 , $\text{mh}_{T_1}(y) \in \mathcal{A}$. Ainsi, d'après le lemme 8.1.6, nous avons $\text{h}(B) - 1 \leq \text{h}(C)$ de sorte que $d_{T_2}(x') \geq 2$ et (TD1) est

vérifié. De plus, comme B est équilibré, et par le lemme 8.1.4, tous les sous-arbres à droite de x' sont également équilibrés dans T_2 , et ainsi (TD2) et (TD3) sont établis. Finalement, par le lemme 8.1.10, $\text{mh}_{T_1}(y') \in \mathcal{A}$, et comme $\text{mh}_{T_2}(y') = \text{mh}_{T_1}(y')$, (PC) est vérifié.

Cas 2.2. Si $B \wedge C$ est équilibré et r est un ancêtre de x dans T_1 , posons $x' := x$ et $y' := y$. Nous avons clairement $d_{T_2}(x') \geq 2$, de sorte que (TD1) est vérifié. De plus, comme le sous-arbre gauche de x' dans T_2 reste équilibré car il n'est pas modifié par la rotation, comme $B \wedge C$ est équilibré et comme d'après le lemme 8.1.4, les sous-arbres à droite de r sont équilibrés dans T_2 , (TD2) et (TD3) sont établis. Finalement, puisque x satisfait la propriété de conservation dans T_1 , $\text{mh}_{T_1}(y) \in \mathcal{A}$ et nous avons

$$\text{mh}_{T_1}(y) = u \cdot h(B) \cdot h(C) \cdot v, \quad (8.1.19)$$

où $u, v \in \mathbb{N}^*$. De plus,

$$\text{mh}_{T_2}(y') = u \cdot h(B \wedge C) \cdot v = u \cdot \Theta(h(B) \cdot h(C)) \cdot v, \quad (8.1.20)$$

puisque $B \wedge C$ est équilibré. Et donc, par le lemme 8.1.8, $\text{mh}_{T_2}(y') \in \mathcal{A}$, de sorte que (PC) est satisfait.

Cas 2.3. Si $B \wedge C$ est équilibré et r est un descendant de x dans T_1 , nous avons deux possibilités suivant si q est équilibré dans T_2 . S'il l'est, posons $x' := x$. D'après la proposition 8.1.2, le sous-arbre gauche de x' reste équilibré dans T_2 et $d_{T_2}(x') \geq 2$. Ainsi, (TD1) et (TD2) sont vérifiés. De plus, par le lemme 8.1.4, tous les sous-arbres à droite de x' restent équilibrés dans T_2 , de sorte que (TD3) est établi. Autrement, si q n'est pas équilibré, posons $x' := q$. Comme le sous-arbre gauche de x est équilibré dans T_1 , d'après le lemme 8.1.3, $d_{T_2}(x') \geq 2$ et (TD1) est vérifié. De plus, q appartient au sous-arbre gauche de x dans T_1 qui est équilibré, et par conséquent, le sous-arbre gauche de q est équilibré dans T_2 , ce qui montre (TD2). Puisque $B \wedge C$ est équilibré et par le lemme 8.1.4, (TD3) est vérifié. Posons maintenant pour ces deux cas y' le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine x' dans T_2 . Le mot $\text{mh}_{T_2}(y')$ satisfait exactement les mêmes conditions que dans le Cas 2.1., de sorte que (PC) est également satisfait.

Cas 3. Si le sous-arbre $S_1 := (A \wedge B) \wedge C$ de racine r dans T_1 est à droite de y , posons $S_2 := A \wedge (B \wedge C)$ le sous-arbre de racine s dans T_2 (voir la figure 8.8). Nous avons maintenant

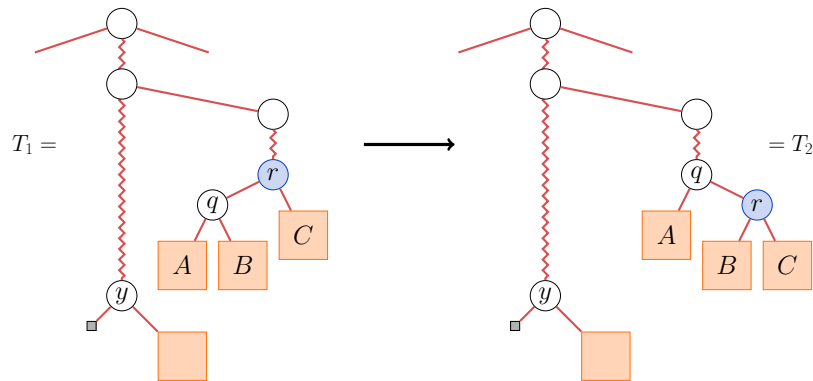


FIGURE 8.8 – Le troisième cas : r est à droite de y et n'est pas son ancêtre dans T_1 .

deux cas à explorer suivant si S_2 est équilibré.

Cas 3.1. Si S_2 est équilibré, par la proposition 8.1.2, $h(S_2) = h(S_1)$ et en posant $x' := x$ et $y' := y$, nous avons $d_{T_2}(x') = d_{T_1}(x)$ de sorte que (TD1) est vérifié. De plus, le sous-arbre gauche de x' reste équilibré, et par le lemme 8.1.4, les sous-arbres à droite de x' dans T_2 le restent aussi. Ainsi, les sous-arbres à droite de y' sont équilibrés dans T_2 , ce qui implique (TD2) et (TD3). Finalement, x' satisfait (PC) dans T_2 puisque $\text{mh}_{T_2}(y') = \text{mh}_{T_1}(y)$.

Cas 3.2. Si S_2 n'est pas équilibré, par la proposition 8.1.11, il existe un nœud x' de S_2 qui est un témoin de déséquilibre et satisfaisant la propriété de conservation, localement dans S_2 . Par conséquent, x' vérifie (TD1) et (TD2) dans T_2 . Il vérifie aussi (TD3) dans T_2 puisque par le lemme 8.1.4, les sous-arbres à droite de r restent équilibrés dans T_2 . Il reste à montrer que x' satisfait la propriété de conservation dans T_2 . On pose y' le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine x' dans T_2 . D'après la proposition 8.1.11, $w := \text{mh}_{S_2}(y') \in \mathcal{A}$, et par le lemme 8.1.9, w vérifie $\Omega(w) \leq h(S_1)$. Par hypothèse, $\text{mh}_{T_1}(y) \in \mathcal{A}$ et nous avons

$$\text{mh}_{T_1}(y) = u \cdot h(S_1) \cdot v, \quad (8.1.21)$$

où $u, v \in \mathbb{N}^*$. De plus, comme

$$\text{mh}_{T_2}(y') = w \cdot v, \quad (8.1.22)$$

nous avons $\text{mh}_{T_2}(y') \in \mathcal{A}$, ce qui établit (PC).

Il existe donc, dans tous les cas, un nœud x' dans T_2 qui est un témoin de déséquilibre et qui satisfait la propriété de conservation. \square

Théorème 8.1.13. *Soient T et T' deux arbres binaires équilibrés tels que $T \leq_T T'$. Alors, l'intervalle $[T, T']$ contient uniquement des arbres binaires équilibrés. En d'autres termes, tous les éléments supérieurs à un arbre binaire obtenu par une rotation déséquilibrante à partir d'un arbre binaire équilibré sont déséquilibrés.*

Démonstration. Soit T_0 un arbre binaire équilibré et T_1 un arbre binaire déséquilibré tel que $T_0 < T_1$. Par la proposition 8.1.11, il existe dans T_1 un témoin de déséquilibre x qui satisfait la propriété de conservation. La proposition 8.1.12 montre que tout arbre binaire T_2 tel que $T_1 \leq_T T_2$ est déséquilibré puisqu'il existe un nœud x' dans T_2 qui est un témoin de déséquilibre et qui satisfait la propriété de conservation. Par conséquent, la notion d'invariant de déséquilibre est valide, ce qui implique que l'ensemble des arbres binaires équilibrés est clos par intervalle dans le treillis de Tamari. \square

8.2 Motifs de déséquilibre et arbres binaires équilibrés

Dans cette partie, nous proposons un raffinement de l'ensemble des arbres binaires équilibrés en fonction de leur position dans le treillis de Tamari. Dans cette optique, nous définissons trois types d'arbres binaires équilibrés : les arbres binaires *maximaux*, *intérieurs* et *mixtes*. Il s'avère que les éléments de ces familles peuvent se décrire en termes de motifs d'arbres binaires évités ou forcés.

La notion de *motif*, pour décrire des ensembles de permutations (voir par exemple [BS00], ainsi que les références données en [Wil02]) ou de langages de mots (voir par exemple [Bur98]) est fondamentale. En effet, cette notion couplée avec un concept d'*évitement*, permet de décrire des ensembles d'objets. Les objets d'un tel ensemble sont simplement ceux qui ont la propriété commune d'éviter simultanément une collection de motifs donnés.

Plusieurs notions différentes de motifs d'arbre binaire et d'évitement ont été définies récemment — par exemple en [Lod05] et [Row10]. Nous proposons dans cette partie une nouvelle définition de motif d'arbre binaire qui se base sur les mesures de déséquilibre. Nous montrons que les arbres binaires équilibrés maximaux, intérieurs et mixtes admettent une caractérisation en termes de nos motifs d'arbre binaire. Ceci fait, nous construisons une grammaire synchrone (voir le chapitre 7) qui engendre les arbres binaires équilibrés maximaux et nous permet d'obtenir une équation fonctionnelle de point fixe pour les dénombrer.

8.2.1 Occurrences et motifs de déséquilibre

Définition 8.2.1. *Un motif de déséquilibre est un arbre binaire non vide sans feuilles et étiqueté sur \mathbb{Z} .*

Soit T un arbre binaire. On note T^d l'arbre binaire étiqueté de forme T dont les nœuds sont étiquetés par leur mesure de déséquilibre. Nous disons que T admet une *occurrence* d'un motif de déséquilibre p si une composante connexe de T^d est de même forme et possède les mêmes étiquettes que p . Par exemple, pour l'arbre binaire

$$T := \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \quad \square \quad \square \end{array}, \quad (8.2.1)$$

nous avons

$$T^d = \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \quad \square \quad \square \end{array}, \quad (8.2.2)$$

ce qui montre que T admet au moins une occurrence des motifs de déséquilibre suivants :

$$\circ, \circ, \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \end{array}. \quad (8.2.3)$$

Maintenant, étant donné un ensemble P de motifs de déséquilibre, nous pouvons nous intéresser à l'ensemble des arbres binaires qui *évitent* P , *i.e.*, les arbres binaires qui n'admettent aucune occurrence d'éléments de P . Par exemple, l'ensemble

$$\left\{ \circ : i \notin \{-1, 0, 1\} \right\} \quad (8.2.4)$$

décrit l'ensemble des arbres binaires équilibrés, l'ensemble

$$\left\{ \circ : i \neq 0 \right\} \quad (8.2.5)$$

décrit l'ensemble des arbres binaires parfaits, et l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \end{array} : i, j \in \mathbb{Z} \right\} \quad (8.2.6)$$

décrit l'ensemble des peignes droits.

Il existe un lien entre les grammaires synchrones et les motifs de déséquilibre puisque, comme nous l'avons illustré dans le paragraphe 7.3.3 du chapitre 7, ces dernières permettent d'engendrer des arbres à bourgeons tout en contrôlant les mesures de déséquilibre de ses nœuds. Par conséquent, les grammaires synchrones permettent d'engendrer des arbres binaires qui évitent certains motifs de déséquilibre. Cette remarque est utilisée dans ce qui suit pour dénombrer les arbres équilibrés maximaux.

8.2.2 Arbres équilibrés maximaux, intérieurs et mixtes

Arbres binaires équilibrés maximaux

Commençons par décrire un ensemble d'arbres binaires équilibrés et sa contrepartie dont les éléments se trouvent, approximativement parlant, aux extrémités du treillis de Tamari restreint aux arbres binaires équilibrés.

Définition 8.2.2. *Un arbre binaire équilibré T_0 (resp. T_1) est maximal (resp. minimal) si, pour tout arbre binaire T_1 (resp. T_0) tel que $T_0 \prec T_1$, T_1 (resp. T_0) est déséquilibré. L'ensemble des arbres binaires équilibrés maximaux (resp. minimaux) est noté \mathcal{E}^{\max} (resp. \mathcal{E}^{\min}).*

D'après le théorème 8.1.13, si T_0 (resp. T_1) est un arbre binaire équilibré maximal (resp. minimal), il n'existe aucun arbre binaire équilibré T_1 (resp. T_0) tel que $T_0 \leq_T T_1$. Les arbres binaires maximaux (resp. minimaux) sont ainsi les éléments maximaux (resp. minimaux) du treillis de Tamari restreint aux arbres binaires équilibrés.

Proposition 8.2.3. *Un arbre binaire équilibré T est maximal si et seulement si il évite l'ensemble de motifs de déséquilibre*

$$P_{\max} := \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{-1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{0} \end{array} \right\}. \quad (8.2.7)$$

De même, un arbre binaire équilibré T est minimal si et seulement si il évite l'ensemble de motifs de déséquilibre

$$P_{\min} := \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{0} \end{array} \right\}. \quad (8.2.8)$$

Démonstration. Supposons que T est maximal. Alors, pour tout arbre binaire T_1 tel que $T \prec T_1$, T_1 est déséquilibré. Il est donc impossible de réaliser une rotation conservatrice d'équilibre dans T et, en regardant les différentes rotations possibles dans un arbre équilibré étudiées dans le paragraphe 8.1.2, il apparaît que T évite P_{\max} .

Réciproquement, supposons que T est un arbre binaire équilibré qui évite P_{\max} . Alors, pour tout arbre binaire T_1 tel que $T \prec T_1$, T_1 est déséquilibré puisque pour tout nœud y ayant un fils gauche x dans T , les mesures de déséquilibre de x et de y satisfont l'un des sept cas (R3)–(R9) du paragraphe 8.1.2. Ainsi, toute rotation dans T est déséquilibrante, ce qui implique que T est maximal.

La seconde partie de la proposition se prouve de manière analogue, en considérant les rotations gauches plutôt que les rotations droites. \square

Proposition 8.2.4. *La série génératrice dénombrant les arbres binaires équilibrés maximaux suivant le nombre de feuilles des arbres est $\mathcal{S}_{\max}(x, 0, 0)$ où*

$$\mathcal{S}_{\max}(x, y, z) = x + \mathcal{S}_{\max}(x^2 + xy + yz, x, xy). \quad (8.2.9)$$

Démonstration. Pour obtenir cette équation fonctionnelle de point fixe, considérons la grammaire synchrone $S_{\max} := (\{x, y, z\}, \textcircled{x}, R)$ où R contient les règles de substitution

$$x \mapsto \begin{array}{c} \textcircled{0} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{x} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{y} \quad \textcircled{x} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{z} \quad \textcircled{y} \end{array}, \quad (8.2.10)$$

$$y \mapsto \textcircled{x}, \quad (8.2.11)$$

$$z \mapsto \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{y} \quad \textcircled{x} \end{array}. \quad (8.2.12)$$

Nous pouvons employer la même méthode que celle utilisée dans la démonstration de la proposition 7.3.1 pour montrer que les arbres à bourgeons engendrés par S_{\max} qui ne contiennent que des bourgeons de type x ont leurs nœuds étiquetés par leurs mesures de déséquilibre. Par

conséquent, en identifiant dans ces arbres les bourgeons de type x avec des feuilles, S_{\max} engendre des arbres binaires équilibrés maximaux. En effet, par la proposition 8.2.3, les arbres engendrés doivent éviter les deux motifs de P_{\max} . Pour ce faire, il est nécessaire de contrôler la croissance des bourgeons de type x lorsqu'ils sont substitués par l'arbre à bourgeons D dont la racine possède une mesure de déséquilibre de -1 . En effet, si le fils gauche de la racine de D est substitué par un nœud ayant -1 ou 0 comme mesure de déséquilibre, un des deux motifs n'est pas évité. L'idée est donc de forcer la mesure de déséquilibre de ce nœud à être à 1 , ce qui est précisément le rôle des bourgeons de type z . Le rôle des bourgeons de type y est d'induire un délai sur la croissance de la branche qui le contient de sorte à pouvoir créer des nœuds ayant -1 ou 1 comme mesure de déséquilibre. De plus, nous pouvons montrer par induction structurale sur l'ensemble des arbres binaires équilibrés maximaux que S_{\max} permet d'engendrer tout arbre maximal.

En posant $y \leq_B z \leq_B x$, S_{\max} vérifie les hypothèses du lemme 7.1.9 et est par conséquent localement finie. Cette grammaire synchrone est aussi non ambiguë car elle satisfait les hypothèses du lemme 7.1.11. Toutes les racines des arbres à bourgeons apparaissant dans les règles de substitution de R sont en effets deux à deux différentes à cause de leur étiquetage.

Finalement, comme S_{\max} est localement finie et non ambiguë, par la proposition 7.2.3, nous obtenons l'équation fonctionnelle de point fixe annoncée et la série génératrice est obtenue par la spécialisation $y := 0$ et $z := 0$ dans le but d'ignorer les arbres à bourgeons qui contiennent des bourgeons du type y ou z . \square

L'équation fonctionnelle de point fixe de la proposition 8.2.4 permet de calculer les premières valeurs du nombre d'arbres binaires équilibrés maximaux par taille :

$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 22, 38, 60, 89, 128, 183, 256, 353, 512, 805, 1336, 2221, \\ 3594, 5665, 8774, 13433, 20359, 30550, 45437, 67086, 98491, 144492, 213876. \quad (8.2.13)$$

Arbres binaires équilibrés intérieurs

Décrivons maintenant un ensemble d'arbres binaires équilibrés et sa contrepartie dont les éléments sont, approximativement parlant, au cœur du treillis de Tamari restreint aux arbres binaires équilibrés.

Définition 8.2.5. *Un arbre binaire équilibré T_0 (resp. T_1) est intérieur droit (resp. intérieur gauche) si tout arbre binaire T_1 (resp. T_0) tel que $T_0 \prec T_1$ est équilibré. L'ensemble des arbres binaires équilibrés intérieurs droits (resp. intérieurs gauches) est noté $\mathcal{E}^{\text{intd}}$ (resp. $\mathcal{E}^{\text{intg}}$).*

Proposition 8.2.6. *Un arbre binaire équilibré T est intérieur droit si et seulement si il évite l'ensemble de motifs de déséquilibre*

$$P_{\text{intd}} := \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{0} \\ \textcircled{-1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{-1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{0} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \textcircled{1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{0} \\ \textcircled{1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{array} \right\}. \quad (8.2.14)$$

De même, un arbre binaire équilibré T est intérieur gauche si et seulement si il évite l'ensemble de motifs de déséquilibre

$$P_{\text{intg}} := \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{0} \\ \textcircled{1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \textcircled{1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \textcircled{0} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{-1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{0} \\ \textcircled{-1} \end{array}, \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \textcircled{-1} \end{array} \right\}. \quad (8.2.15)$$

Démonstration. Supposons que T est intérieur droit. Alors, pour tout arbre binaire T_1 tel que $T \prec T_1$, T_1 est équilibré. Par conséquent, seules des rotations conservatrices d'équilibre peuvent être réalisées dans T et donc, pour tout nœud y ayant un fils gauche x dans T , les mesures de

déséquilibre de x et de y vérifient (R1) ou (R2) du paragraphe 8.1.2. Ainsi, T évite les sept motifs de P_{intd} .

Réciproquement, supposons que T est un arbre binaire équilibré évitant les motifs de P_{intd} . Ainsi, pour tout nœud y de T qui possède un fils gauche x , les mesures de déséquilibre de x et y vérifient (R1) ou (R2) du paragraphe 8.1.2. Ainsi, la rotation en y donne un arbre binaire équilibré, ce qui implique que T est intérieur droit.

La seconde partie de la proposition se prouve de manière analogue, en considérant les rotations gauches plutôt que les rotations droites. \square

Les arbres binaires équilibrés intérieurs droits peuvent se dénombrer facilement suivant leur hauteur. En effet,

Proposition 8.2.7. *Le nombre a_h d'arbres binaires équilibrés intérieurs droits de hauteur h est*

$$a_h = \begin{cases} 1 & \text{si } h \in \{0, 1, 3\}, \\ 2 & \text{si } h = 2, \\ a_{h-1}a_{h-2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.2.16)$$

Démonstration. La proposition est vraie pour $0 \leq h \leq 3$ comme le montre une énumération exhaustive des possibilités.

Observons en premier lieu que si $T := L \wedge R$ est un arbre binaire équilibré intérieur droit de hauteur $h \geq 3$, alors L et R sont aussi intérieurs droits et la mesure de déséquilibre de la racine de T est -1 . En effet, si L ou R n'est pas intérieur droit, d'après la proposition 8.2.6, L ou R admettrait une occurrence d'un motif de P_{rint} et par conséquent, T aussi. De plus, si la mesure de déséquilibre de T n'est pas -1 , comme T est équilibré et que $h(T) \geq 3$, son sous-arbre gauche L serait non vide et T admettrait une occurrence d'un motif de P_{rint} .

Montrons finalement que pour tout entier $h \geq 4$ et tous arbres intérieurs droits L et R tels que $h(L) = h-1$ et $h(R) = h-2$, l'arbre binaire $T := L \wedge R$ est intérieur droit. Comme $h(L) \geq 3$, suivant ce que nous venons de montrer, la mesure de déséquilibre de la racine x de L est -1 . La mesure de déséquilibre de la racine y de T est également -1 , et ainsi, x et y ne forment pas un motif de P_{rint} dans T . De plus, la racine de R et le y de T ne forment pas non plus un motif de P_{rint} . Par conséquent, T est intérieur. Ceci termine la démonstration de (8.2.16). \square

Les premières valeurs de $(a_h)_{h \geq 0}$ sont

$$1, 1, 2, 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, 8192, 2097152, 17179869184. \quad (8.2.17)$$

Si l'on ne considère pas les trois premières valeurs, cette dernière est la suite **A000301** de [Slo]. De plus, nous avons $a_h = 2^{f_{h-3}}$ pour tout $h \geq 3$, où f_i est le i^{e} nombre de Fibonacci, défini par $f_i := i$ si $i \in \{0, 1\}$ et $f_i := f_{i-1} + f_{i-2}$ sinon.

Rappelons que l'ensemble des *arbres binaires de Fibonacci* [Knu98] est formé des éléments de la suite $(T_i)_{i \geq 0}$ où $T_0 := T_1 := \perp$ et $T_{i+2} := T_{i+1} \wedge T_i$. Une simple induction structurelle sur l'ensemble des arbres binaires de Fibonacci permet de montrer que ces arbres sont également des arbres binaires équilibrés intérieurs droits.

Arbres binaires équilibrés mixtes

Caractérisons finalement les arbres binaires équilibrés qui ne sont ni maximaux (resp. minimaux) et ni intérieurs droits (resp. gauches).

Définition 8.2.8. *Un arbre binaire équilibré T_0 est mixte droit (resp. mixte gauche) s'il existe un arbre binaire équilibré T_1 et un arbre binaire déséquilibré T'_1 tel que $T_0 \prec T_1$ et $T_0 \prec T'_1$ (resp. $T_1 \prec T_0$ et $T'_1 \prec T_0$). L'ensemble des arbres binaires équilibrés mixtes droits (resp. mixtes gauches) est noté $\mathcal{E}^{\text{mixd}}$ (resp. $\mathcal{E}^{\text{mixg}}$).*

Proposition 8.2.9. *Un arbre binaire équilibré T est mixte droit (resp. mixte gauche) si et seulement si il admet au moins un occurrence du motif de déséquilibre de P_{\max} (resp. P_{\min}) et au moins une occurrence du motif de déséquilibre de P_{intd} (resp. P_{intg}).*

Démonstration. Supposons que T est mixte droit. Par définition, il est possible de réaliser une rotation conservatrice d'équilibre dans T . Il existe ainsi deux nœuds x et y dans T qui satisfont (R1) ou (R2) du paragraphe 8.1.2 et forment une occurrence d'un motif de P_{\max} . De plus, encore par définition, il est possible de réaliser une rotation déséquilibrante dans T . Il existe ainsi deux nœuds x' et y' dans T qui vérifient un des sept cas (R3)–(R9) du paragraphe 8.1.2 et forment une occurrence d'un motif de P_{intd} .

Réciproquement, si T admet à la fois une occurrence des motifs de P_{\max} et de P_{intd} , en regardant les neuf cas de rotation dans un arbre binaire équilibré étudiés dans le paragraphe 8.1.2, nous remarquons qu'il est possible de réaliser à la fois une rotation conservatrice d'équilibre et une rotation déséquilibrante dans T . Par conséquent T est mixte droit.

La seconde partie de la proposition se prouve de manière analogue, en considérant les rotations gauches plutôt que les rotations droites. \square

Notons que pour tout $n \geq 3$, l'ensemble \mathcal{E}_n admet les décompositions en unions disjointes

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{\max} \uplus \mathcal{E}_n^{\text{intd}} \uplus \mathcal{E}_n^{\text{mixd}} = \mathcal{E}_n^{\min} \uplus \mathcal{E}_n^{\text{intg}} \uplus \mathcal{E}_n^{\text{mixg}}. \quad (8.2.18)$$

En effet, par définition, \mathcal{E}_n^{\max} et $\mathcal{E}_n^{\text{mixd}}$ sont disjoints, ainsi que $\mathcal{E}_n^{\text{intd}}$ et $\mathcal{E}_n^{\text{mixd}}$. Si T est un élément de $\mathcal{E}_n^{\max} \cap \mathcal{E}_n^{\text{intd}}$, T est le plus grand élément de \mathbb{T}_n et il s'agit donc d'un peigne droit. Comme T est équilibré, il possède nécessairement moins de trois nœuds, ce qui implique $n \leq 3$. Il est finalement évident que tout arbre binaire équilibré est soit maximal, soit intérieur droit, soit mixte droit.

8.3 Forme des intervalles d'arbres binaires équilibrés

Dans le paragraphe 8.1, nous avons établi le fait que les intervalles du treillis de Tamari de la forme $[T, T']$ contiennent uniquement des arbres binaires équilibrés si T et T' le sont. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons de plus près aux intervalles de ce type. Il s'avère que ces intervalles ont une forme particulière dans le treillis de Tamari puisqu'ils ont, comme il est possible de l'observer dans des petits cas, la forme d'hypercubes. Après avoir démontré cette observation, nous utilisons les outils élaborés dans le chapitre 7 pour construire deux grammaires synchrones dont l'une engendre des structures arborescentes qui se trouvent être en bijection avec les intervalles d'arbres binaires équilibrés et l'autre, en bijection avec les intervalles maximaux d'arbres binaires équilibrés. Nous obtenons par ce biais deux équations fonctionnelles de point fixe pour les séries génératrices du nombre d'intervalles pour l'une, et d'intervalles maximaux pour l'autre, d'arbres binaires équilibrés.

8.3.1 Intervalles d'arbres binaires équilibrés et hypercubes

Lemme 8.3.1. *Soient T_0 et T_1 deux arbres binaires équilibrés tels que $T_0 \leq_{\mathbb{T}} T_1$ et y un nœud de T_0 . Alors,*

- (i) *si la rotation en y dans T_0 est déséquilibrante, la rotation en y dans T_1 , si elle est possible, est également déséquilibrante ;*
- (ii) *si y n'a pas de fils gauche dans T_0 , y n'a pas de fils gauche dans T_1 .*

Démonstration. (i) : si la rotation en y dans T_0 est déséquilibrante, alors les mesures de déséquilibre de y et de son fils gauche x satisfont les cas (R1) ou (R2) du paragraphe 8.1.2. Par conséquent, pour modifier ces mesures de déséquilibre, il faut nécessairement modifier les hauteurs des sous-arbres de x et de y par des rotations. D'après la proposition 8.1.2, ces rotations

déséquilibreraient l'arbre binaire obtenu. De plus, par le théorème 8.1.13, il serait impossible de le rééquilibrer par l'intermédiaire de rotations. Ceci montre donc que si y possède un fils gauche dans T_1 , toute rotation en y est déséquilibrante.

(ii) : ce point est immédiatement impliqué par la définition de l'opération de rotation et par le fait que l'application d'une rotation dans un arbre binaire ne modifie pas l'ordre infixé sur ses nœuds. \square

Le lemme 8.3.1 montre donc que pour tous arbres binaires équilibrés T_0 et T_1 tels que $T_0 \leq_T T_1$, et tout nœud y de T_0 , une rotation en y ne peut pas être conservatrice d'équilibre dans T_1 si elle ne l'est pas déjà dans T_0 .

Lemme 8.3.2. *Soient T_0 et T_1 deux arbres binaires équilibrés et y un nœud de T_0 tel que $T_0 \prec_y T_1$. Alors, en notant x le fils gauche de y dans T_0 , pour tout arbre binaire équilibré T_2 tel que $T_1 \leq_T T_2$, toute rotation en x et en y dans T_2 est déséquilibrante.*

Démonstration. Puisque T_1 est obtenu par une rotation en y dans T_0 , nous avons deux cas à considérer suivant les mesures de déséquilibre de x et de y dans T_0 . Si $d_{T_0}(x) = d_{T_0}(y) = -1$, alors $d_{T_1}(x) = d_{T_1}(y) = 1$ et toute rotation en x ou en y est déséquilibrante dans T_1 . Ainsi, par le lemme 8.3.1, toute rotation en x ou en y est déséquilibrante dans T_2 . Si $d_{T_0}(x) = 0$ et $d_{T_0}(y) = 1$, alors $d_{T_1}(x) = 1$ et $d_{T_1}(y) = 0$. Pour la même raison que dans le cas précédent, toute rotation en x ou en y est déséquilibrante dans T_2 . \square

Rappelons qu'un *hypercube* de dimension k peut être vu comme un poset dont les éléments sont les sous-ensembles d'un ensemble $\{e_1, \dots, e_k\}$, et la relation d'ordre, l'inclusion ensembliste. On note \mathbb{H}_k l'hypercube de dimension k .

La forme des intervalles d'arbres binaires équilibrés est élucidée par le théorème suivant.

Théorème 8.3.3. *Soient T_0 et T_1 deux arbres binaires équilibrés tels que $T_0 \leq_T T_1$. Alors, le poset $([T_0, T_1], \leq_T)$ est isomorphe à l'hypercube \mathbb{H}_k , où k est le nombre de rotations requises pour obtenir T_1 à partir de T_0 .*

Démonstration. Remarquons en premier lieu que d'après le théorème 8.1.13, l'intervalle $I := [T_0, T_1]$ contient uniquement des arbres binaires équilibrés. Par conséquent, les relations de couverture de I correspondent à rotations conservatrices d'équilibre.

Soit R l'ensemble des nœuds y de T_0 tels qu'une rotation en y est nécessaire pour obtenir T_1 à partir de T_0 . Par le lemme 8.3.2, R est bien défini — il ne s'agit pas d'un multi-ensemble — et si $y \in R$ alors, en notant x le fils gauche de y dans T_0 , nous avons $x \notin R$. Ceci implique que T_1 peut être obtenu à partir de T_0 en réalisant une suite arbitraire de rotations en chacun des nœuds de R .

Définissons maintenant une bijection entre I et l'ensemble des sous-ensembles de R . Soit $T \in I$. Par définition, il est possible d'obtenir T à partir de T_0 en réalisant une certaine suite s_0 de rotations depuis T_0 . Soit R_0 l'ensemble des nœuds qui apparaissent dans s_0 . Il est de plus possible d'obtenir T_1 à partir de T en réalisant une certaine suite s_1 de rotations depuis T . Soit R_1 l'ensemble des nœuds qui apparaissent dans s_1 . Par le lemme 8.3.1, nous avons $R = R_0 \uplus R_1$, et ainsi $R_0 \subset R$. L'ensemble R_0 caractérise T . Inversement, pour tout sous-ensemble $R_0 \subseteq R$, nous pouvons construire un unique arbre binaire $T \in I$. En effet, T est obtenu en réalisant dans T_0 une suite arbitraire de rotations en chacun des nœuds de R_0 . Ceci est bien défini, par définition de R .

Nous venons ainsi de montrer que I est isomorphe à \mathbb{H}_k où k est le nombre de rotations nécessaires pour obtenir T_1 à partir de T_0 . \square

Les premiers sous-posets du treillis de Tamari restreint aux arbres binaires équilibrés sont représentés par la figure 8.9.

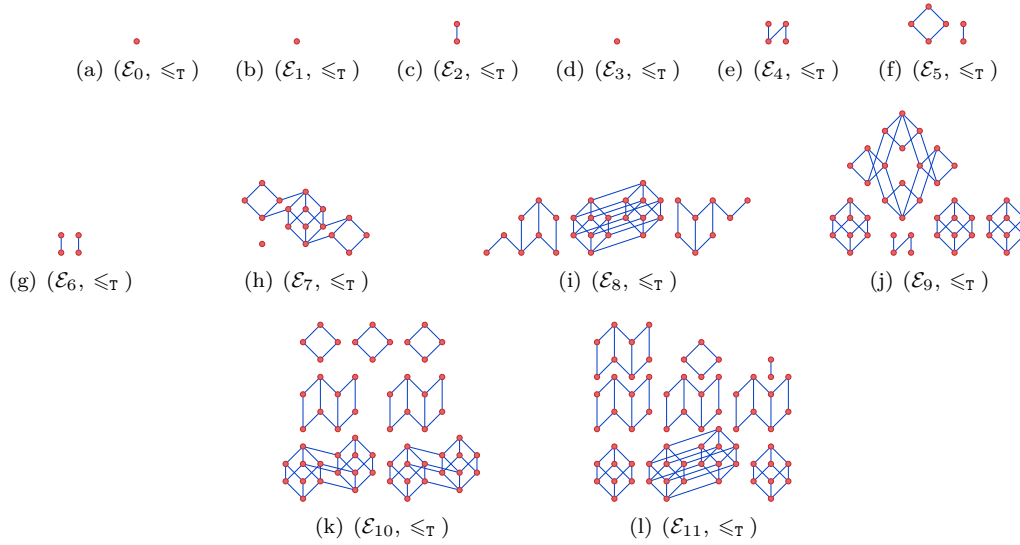


FIGURE 8.9 – Les diagrammes de Hasse des douze premiers sous-posets du treillis de Tamari restreint aux arbres binaires équilibrés.

8.3.2 Énumération des intervalles d’arbres binaires équilibrés

Proposition 8.3.4. *La série génératrice dénombrant les intervalles d’arbres binaires équilibrés dans le treillis de Tamari suivant le nombre de feuilles des arbres qui les constituent est $S_{ie}(x, 0, 0)$ où*

$$S_{ie}(x, y, z) = x + S_{ie}(x^2 + 2xy + yz, x, x^2 + xy). \tag{8.3.1}$$

Démonstration. Soit $I := [T_0, T_1]$ un intervalle d’arbres binaires équilibrés et R l’ensemble des nœuds y de T_0 tels qu’une rotation en y est nécessaire pour obtenir T_1 à partir de T_0 . La démonstration du théorème 8.3.3 montre que R est bien défini et aussi que I est entièrement déterminé par T_0 dans lequel les nœuds de R sont marqués.

Dans le but d’engendrer ces objets, nous considérons une grammaire synchrone qui engendre des arbres à bourgeons dont les nœuds sont de deux sortes : des nœuds non marqués, représentés par \circ , et des nœuds marqués, représentés par \square . Soit la grammaire synchrone $S_{ie} := (\{x, y, z\}, \langle x \rangle, L)$ où L contient les règles de substitution

$$x \mapsto \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \quad \circ \end{array}, \tag{8.3.2}$$

$$y \mapsto \langle x \rangle, \tag{8.3.3}$$

$$z \mapsto \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \quad \circ \end{array}. \tag{8.3.4}$$

Nous pouvons employer la même méthode que celle utilisée dans la démonstration de la proposition 7.3.1 pour montrer que les arbres à bourgeons engendrés par S_{ie} qui ne contiennent que des bourgeons de type x ont leurs nœuds étiquetés par leurs mesures de déséquilibre. Par conséquent, en identifiant dans ces arbres les bourgeons de type x avec des feuilles, S_{ie} engendre des arbres binaires équilibrés tels que tout nœud r ayant -1 comme mesure de déséquilibre

peut être marqué à condition que son fils gauche ait -1 ou 0 comme mesure de déséquilibre — rappelons que de cette façon une rotation en r est conservatrice d'équilibre. En effet, si un bourgeon de type x est substitué par un nœud marqué, ce nœud marqué possède un bourgeon de type z en tant que fils gauche et tout bourgeon de type z ne peut être substitué que par un nœud non marqué de mesure de déséquilibre -1 ou 0 . Le rôle des bourgeons de type y est d'induire un délai sur la croissance de la branche qui le contient de sorte à pouvoir créer des nœuds ayant -1 ou 1 comme mesure de déséquilibre.

En posant $y \leq_B z \leq_B x$, S_{ie} vérifie les hypothèses du lemme 7.1.9 et est donc localement finie. Cette grammaire synchrone est également non ambiguë puisqu'elle satisfait les hypothèses du lemme 7.1.11. En effet, les racines des arbres à bourgeons qui apparaissent dans les membres droits des règles de substitution de L sont deux à deux différentes à cause de leur étiquetage et de leur marquage.

Finalement, comme S_{ie} est localement finie et non ambiguë, par la proposition 7.2.3, nous obtenons l'équation fonctionnelle de point fixe annoncée et la série génératrice est obtenue par la spécialisation $y := 0$ et $z := 0$ dans le but d'ignorer les arbres à bourgeons qui contiennent des bourgeons du type y ou z . \square

L'équation fonctionnelle de point fixe de la proposition 8.3.4 permet de calculer les premières valeurs du nombre d'intervalles d'arbres équilibrés dans le treillis de Tamari :

$$1, 1, 3, 1, 7, 12, 6, 52, 119, 137, 195, 231, 1019, 3503, 6593, 12616, 26178, 43500, \\ 64157, 94688, 232560, 817757, 2233757, 5179734, 11676838, 24867480. \quad (8.3.5)$$

Un intervalle $[T_0, T_1]$ est dit *maximal* si T_0 est un arbre binaire équilibré minimal et T_1 est un arbre binaire équilibré maximal.

Proposition 8.3.5. *La série génératrice dénombrant les intervalles maximaux d'arbres binaires équilibrés dans le treillis de Tamari suivant le nombre de feuilles des arbres qui les constituent est $\mathcal{S}_{iem}(x, 0, 0, 0)$ où*

$$\mathcal{S}_{iem}(x, y, z, t) = x + \mathcal{S}_{iem}(x^2 + 2yt + yz, x, x^2 + xy, yt + yz). \quad (8.3.6)$$

Démonstration. Soit $I := [T_0, T_1]$ un intervalle maximal d'arbres binaires équilibrés. Par le même argument que celui qui a été utilisé dans la démonstration de la proposition 8.3.4, il apparaît que I peut être encodé par l'arbre T_0 couplé à l'ensemble R des nœuds y de T_0 tels qu'une rotation en y est nécessaire pour obtenir T_1 à partir de T_0 . Nous allons donc encoder I par un arbre à bourgeons de la même forme que T_0 et qui est constitué de nœuds non marqués, représentés par \circ , et de nœuds marqués, représentés par \square . Cette fois-ci, comme I est maximal, T_0 est minimal et l'arbre à bourgeons représentant I correspond à un arbre minimal. De plus, comme T_1 est maximal, il est impossible de réaliser une rotation conservatrice d'équilibre dans T_1 . Ceci implique qu'un nœud y de l'arbre à bourgeons qui encode I est marqué si et seulement si son fils gauche x n'est pas marqué et une rotation en y est conservatrice d'équilibre.

Nous utilisons la grammaire synchrone $S_{iem} := (\{x, y, z, u, v\}, \circ, L)$ dans le but d'engendrer

ces objets, où L contient les règles de substitution

$$x \mapsto \begin{array}{c} (-1) \\ \diagup \quad \diagdown \\ v \quad y \end{array} + \begin{array}{c} (0) \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad x \end{array} + \begin{array}{c} (1) \\ \diagup \quad \diagdown \\ y \quad u \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ z \quad y \end{array}, \quad (8.3.7)$$

$$y \mapsto \begin{array}{c} (x) \end{array}, \quad (8.3.8)$$

$$z \mapsto \begin{array}{c} (-1) \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad y \end{array} + \begin{array}{c} (0) \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad x \end{array}, \quad (8.3.9)$$

$$u \mapsto \begin{array}{c} (-1) \\ \diagup \quad \diagdown \\ v \quad y \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ z \quad y \end{array}, \quad (8.3.10)$$

$$v \mapsto \begin{array}{c} (1) \\ \diagup \quad \diagdown \\ y \quad u \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ z \quad y \end{array}. \quad (8.3.11)$$

Le même méthode que celle employée dans la démonstration de la proposition 7.3.1 permet de montrer que les arbres à bourgeons engendrés par S_{iem} qui ne contiennent que des bourgeons de type x ont leurs nœuds étiquetés par leurs mesures de déséquilibre. Par conséquent, en identifiant dans ces arbres les bourgeons de type x avec des feuilles, S_{iem} engendre des arbres binaires équilibrés minimaux qui sont marqués de manière maximale. En effet, d'après la proposition 8.2.3, les arbres engendrés doivent éviter les deux motifs de P_{min} . Pour ce faire, il est nécessaire de contrôler la croissance des bourgeons de type x lorsqu'ils sont substitués par l'arbre à bourgeons D dont la racine possède une mesure de déséquilibre de 1. En effet, si le fils droit de la racine de D est substitué par un nœud ayant 0 ou 1 comme mesure de déséquilibre, un des deux motifs n'est pas évité. L'idée est de forcer la mesure de déséquilibre de ce nœud à être à -1 , qui est précisément le rôle des bourgeons de type u . De plus, si un bourgeon de type x est substitué par un nœud a non marqué et étiqueté par -1 , dans le but d'engendrer un arbre marqué de manière maximale, le fils gauche de a doit être marqué, ou bien étiqueté par 1 — dans ce cas, une rotation en a est déséquilibrante. C'est le rôle des bourgeons de type v . Les bourgeons de type z apparaissent dans les règles de substitution uniquement en tant que fils gauches d'un nœud marqué a et sont substitués exclusivement par des nœuds ayant -1 ou 0 comme mesure de déséquilibre, qui sont les seules autorisées puisque la rotation en a est conservatrice d'équilibre. Le rôle des bourgeons de type y est d'induire un délai sur la croissance de la branche qui le contient de sorte à pouvoir créer des nœuds ayant -1 ou 1 comme mesure de déséquilibre.

En posant $y \leq_B v \leq_B u \leq_B z \leq_B x$, S_{iem} satisfait les hypothèses du lemme 7.1.9, ce qui montre qu'elle est localement finie. Cette grammaire synchrone est de plus non ambiguë puisqu'elle vérifie les hypothèses du lemme 7.1.11. Les racines de chacun des arbres à bourgeons des règles de substitution de L sont en effet différentes à cause de leur étiquettes ou de leur marquage.

D'après la proposition 7.2.3, l'équation fonctionnelle de point fixe associée à S_{iem} est

$$F(x, y, z, u, v) = x + F(x^2 + yu + yv + yz, x, x^2 + xy, yv + yz, yu + yz), \quad (8.3.12)$$

et, comme les variables u et v jouent le même rôle, nous obtenons l'équation fonctionnelle annoncée. La série génératrice est finalement obtenue par la spécialisation $y := 0$, $z := 0$ et $t := 0$ dans le but d'ignorer les arbres à bourgeons qui contiennent des bourgeons du type y , z , u , ou v . \square

L'équation fonctionnelle de point fixe de la proposition 8.3.5 permet de calculer les premières

valeurs du nombre d'intervalles maximaux d'arbres équilibrés dans le treillis de Tamari :

$$1, 1, 1, 1, 3, 2, 2, 6, 9, 15, 15, 17, 41, 77, 125, 178, 252, 376, 531, 740, 1192, 2179, 4273, \\ 7738, 13012, 20776, 32389, 49841, 75457, 113011, 168888, 252881, 379348. \quad (8.3.13)$$

Un raffinement de \mathcal{S}_{iem} permet de prendre en compte les dimensions des hypercubes isomorphes aux intervalles maximaux d'arbres équilibrés dénombrés. D'après le théorème 8.3.3, la dimension de l'hypercube isomorphe à un intervalle $I := [T, T']$ correspond au nombre de rotations nécessaires pour transformer T en T' . D'après la démonstration de la proposition 8.3.5, cette quantité correspond au nombre de nœuds marqués dans l'arbre à bourgeons qui encode I . Il suffit donc de tenir compte des règles de substitution qui engendrent un nœud marqué. Nous utilisons pour cela un paramètre ξ , et obtenons l'équation fonctionnelle de point fixe

$$\mathcal{S}_{\text{iem}}(x, y, z, t, \xi) = x + \mathcal{S}_{\text{iem}}(x^2 + 2yt + yz\xi, x, x^2 + xy, yt + yz\xi, \xi). \quad (8.3.14)$$

Les premiers coefficients de x^i dans $P := \mathcal{S}_{\text{iem}}(x, 0, 0, 0, \xi)$ sont

$$[x^1] P = 1, \quad (8.3.15) \quad [x^8] P = 1 + 4\xi^2 + \xi^3, \quad (8.3.22)$$

$$[x^2] P = 1, \quad (8.3.16) \quad [x^9] P = 4\xi + 4\xi^2 + \xi^4, \quad (8.3.23)$$

$$[x^3] P = \xi, \quad (8.3.17) \quad [x^{10}] P = 3\xi + 9\xi^2 + 3\xi^3, \quad (8.3.24)$$

$$[x^4] P = 1, \quad (8.3.18) \quad [x^{11}] P = 9\xi^2 + 6\xi^3, \quad (8.3.25)$$

$$[x^5] P = 3\xi, \quad (8.3.19) \quad [x^{12}] P = \xi + 13\xi^2 + 2\xi^3 + \xi^4, \quad (8.3.26)$$

$$[x^6] P = \xi + \xi^2, \quad (8.3.20) \quad [x^{13}] P = 6\xi + 4\xi^2 + 16\xi^3 + 15\xi^4, \quad (8.3.27)$$

$$[x^7] P = 2\xi, \quad (8.3.21) \quad [x^{14}] P = 2\xi + 18\xi^2 + 31\xi^3 + 12\xi^4 + 14\xi^5, \quad (8.3.28)$$

Ainsi par exemple, le coefficient de x^{12} de $\mathcal{S}_{\text{iem}}(x, 0, 0, 0, \xi)$ renseigne sur le fait que dans le poset $(\mathcal{E}_{11}, \leq_{\text{T}})$, il y a exactement un hypercube maximal de dimension 1, treize hypercubes maximaux de dimension 2, deux hypercubes maximaux de dimension 3 et un hypercube maximal de dimension 4 (voir la figure 8.9).

Notons d'ailleurs que la proposition 8.1.2 implique que les arbres binaires d'une même composante connexe des posets $(\mathcal{E}_n, \leq_{\text{T}})$ sont de même hauteur. La réciproque est en revanche fautive : il existe deux composantes connexes dans $(\mathcal{E}_5, \leq_{\text{T}})$ et tous les éléments de \mathcal{E}_5 sont de même hauteur.

8.4 Autres familles d'arbres binaires closes par intervalle

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à d'autres ensembles d'arbres binaires clos par intervalle dans le treillis de Tamari. Nous commençons par considérer une généralisation des arbres binaires équilibrés, où les mesures de déséquilibre autorisées ne sont pas seulement -1 , 0 et 1 mais dans un ensemble fixé. Nous regardons ensuite les arbres binaires équilibrés en nombre de nœuds, puis les arbres binaires ayant une canopée fixée, pour terminer avec les arbres binaires ayant un indice de Narayana fixé.

8.4.1 Arbres binaires équilibrés généralisés

Définitions

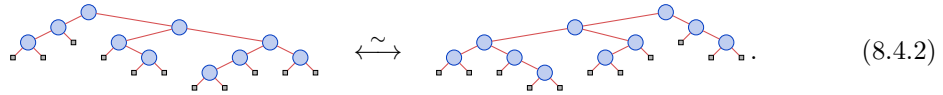
Soit V un sous-ensemble de \mathbb{Z} . Un arbre binaire T est V -équilibré si pour chacun de ses nœuds x , $d_T(x) \in V$. On note \mathcal{E}^V la classe combinatoire de ces arbres, où la *taille* est le nombre de nœuds. Remarquons que l'ensemble des arbres binaires équilibrés est $\mathcal{E}^{[-1,1]}$. Il est évident

que $\mathcal{E}^V \neq \emptyset$ implique $0 \in V$ puisqu'un arbre binaire possède obligatoirement au moins un nœud avec des sous-arbres gauches et droits vides. Dans le cas contraire \mathcal{E}^V serait vide. Une question naturelle à propos des arbres binaires V -équilibrés est de déterminer les ensembles V pour lesquels \mathcal{E}^V est clos par intervalle dans le treillis de Tamari.

Soit T un arbre binaire. L'application $\sim: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est définie comme suit. L'arbre binaire T^\sim est obtenu en échangeant les sous-arbres gauches et droits de chacun des nœuds de T . Plus formellement,

$$T^\sim := \begin{cases} R^\sim \wedge L^\sim & \text{si } T = L \wedge R, \\ \perp & \text{sinon } (T = \perp). \end{cases} \quad (8.4.1)$$

par exemple,



Si V est un sous-ensemble de \mathbb{Z} , notons également par V^\sim l'ensemble $\{-v : v \in V\}$.

Une symétrie

Lemme 8.4.1. *Soient T_0 et T_1 deux arbres binaires tels que $T_0 \leq_T T_1$. Alors, $T_1^\sim \leq_T T_0^\sim$.*

Démonstration. Supposons $S_0 \prec S_1$ où $S_0 = (A \wedge B) \wedge C$ et $S_1 = A \wedge (B \wedge C)$. Par conséquent, $S_1^\sim = (C^\sim \wedge B^\sim) \wedge A^\sim$ et $S_0^\sim = C^\sim \wedge (B^\sim \wedge A^\sim)$. Ainsi, $S_1^\sim \prec S_0^\sim$, et le résultat suit du fait que \leq_T est la clôture réflexive et transitive de \prec (voir la définition 1.3.2 du chapitre 1). \square

Lemme 8.4.2. *Pour tout $V \subseteq \mathbb{Z}$, l'application \sim définit une bijection entre les ensembles \mathcal{E}^V et \mathcal{E}^{V^\sim} .*

Démonstration. Il est immédiat, d'après sa définition, que \sim est une involution. Il reste donc à montrer que si $T \in \mathcal{E}^V$, alors $T^\sim \in \mathcal{E}^{V^\sim}$. Soit x un nœud de T et L (resp. R) le sous-arbre gauche (resp. droit) de x . Nous avons $v := d_T(x) = h(R) - h(L) \in V$. Dans T^\sim , on a

$$d_{T^\sim}(x) = h(L^\sim) - h(R^\sim) = h(L) - h(R) = -v \in V^\sim. \quad (8.4.3)$$

Ainsi, $T^\sim \in \mathcal{E}^{V^\sim}$. \square

Proposition 8.4.3. *Pour tout $V \subseteq \mathbb{Z}$, l'ensemble \mathcal{E}^V est clos par intervalle dans le treillis de Tamari si et seulement si l'ensemble \mathcal{E}^{V^\sim} l'est également.*

Démonstration. Supposons que \mathcal{E}^{V^\sim} est clos par intervalle dans le treillis de Tamari. Par l'absurde, supposons qu'il existe $T_0, T_2 \in \mathcal{E}^V$ et $T_1 \notin \mathcal{E}^V$ tels que $T_0 \leq_T T_1 \leq_T T_2$. D'après le lemme 8.4.1, nous avons $T_2^\sim \leq_T T_1^\sim \leq_T T_0^\sim$, et d'après le lemme 8.4.2, $T_0^\sim, T_2^\sim \in \mathcal{E}^{V^\sim}$ et $T_1^\sim \notin \mathcal{E}^{V^\sim}$. Ceci implique que \mathcal{E}^{V^\sim} n'est pas clos par intervalle dans le treillis de Tamari, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. \square

Arbres binaires $\{0, 1\}$ -équilibrés

En utilisant les méthodes développées dans le chapitre 7, nous obtenons l'équation fonctionnelle de point fixe

$$\mathcal{S}_{01}(x, y) = x + \mathcal{S}_{01}(x^2 + xy, x), \quad (8.4.4)$$

qui permet de dénombrer les arbres binaires $\{0, 1\}$ -équilibrés suivant leur nombre de feuilles. La série génératrice de ces arbres est la spécialisation $\mathcal{S}_{01}(x, 0)$. Ses premiers coefficients sont

$$1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 26, 42, 66, 97, 134, 180, 241, 321, 424, 564, 774, 1111. \quad (8.4.5)$$

Proposition 8.4.4. *L'ensemble des arbres binaires $\{0, 1\}$ -équilibrés est clos par intervalle dans le treillis de Tamari.*

Démonstration. Soit $T_0 \in \mathcal{E}^{\{0,1\}}$. Comme T_0 est constitué uniquement de nœuds ayant 0 ou 1 comme mesure de déséquilibre, il n'est possible de réaliser dans T_0 que des rotations du type (R3), (R5), (R8), ou (R9) définies dans le paragraphe 8.1.2. Puisque ces rotations sont déséquilibrantes, tout arbre binaire T_1 tel que $T_0 \prec T_1$ est déséquilibré, et ainsi, $T_1 \notin \mathcal{E}^{\{0,1\}}$. Par le théorème 8.1.13, tout arbre binaire T_2 tel que $T_1 \leq_T T_2$ est déséquilibré, et donc à plus forte raison, $T_2 \notin \mathcal{E}^{\{0,1\}}$. Par conséquent, $\mathcal{E}^{\{0,1\}}$ est clos par intervalle dans le treillis de Tamari. \square

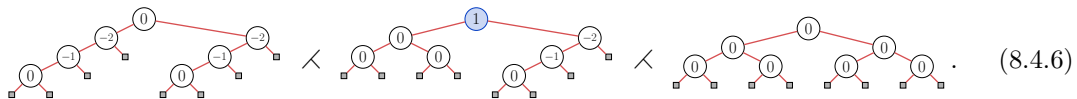
La démonstration de la proposition 8.4.4 montre également que que l'application d'une rotation dans un arbre binaire $\{0, 1\}$ -équilibré produit un arbre non $\{0, 1\}$ -équilibré. Ceci implique que tout couple d'éléments de $\mathcal{E}^{\{0,1\}}$ est incomparable.

Des expérimentations suggèrent également que pour tout $\beta \in \mathbb{Z}$, tout couple d'éléments de $\mathcal{E}^{\{0,\beta\}}$ est incomparable. Les ensembles $\mathcal{E}^{\{0,\beta\}}$ semblent ainsi clos par intervalle dans le treillis de Tamari, mais nous n'avons pas démontré cette propriété.

Arbres binaires $[-\alpha, \beta]$ -équilibrés

Lemme 8.4.5. *Pour tout $\alpha \geq 2$, les ensembles $\mathcal{E}^{[-\alpha,0]}$ et $\mathcal{E}^{[-\infty,0]}$ ne sont pas clos par intervalle dans le treillis de Tamari.*

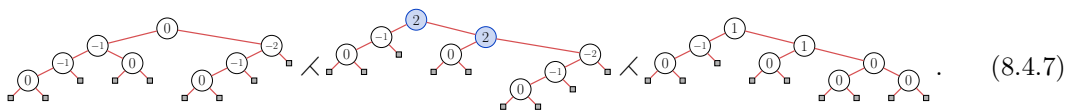
Démonstration. Il suffit d'exhiber une chaîne de la forme $T_0 \prec T_1 \prec T_2$ où $T_0, T_2 \in \mathcal{E}^{[-\alpha,0]} \cap \mathcal{E}^{[-\infty,0]}$ et $T_1 \notin \mathcal{E}^{[-\alpha,0]} \cup \mathcal{E}^{[-\infty,0]}$. La chaîne suivante, où les nœuds sont étiquetés par leurs mesures de déséquilibre, répond à ces conditions :



\square

Lemme 8.4.6. *Pour tout $\alpha \geq 2$, les ensembles $\mathcal{E}^{[-\alpha,1]}$ et $\mathcal{E}^{[-\infty,1]}$ ne sont pas clos par intervalle dans le treillis de Tamari.*

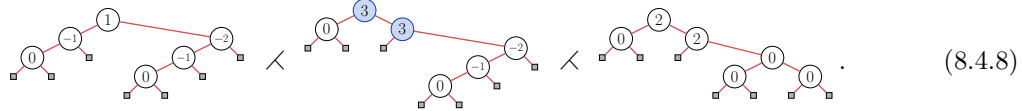
Démonstration. Il suffit d'exhiber une chaîne de la forme $T_0 \prec T_1 \prec T_2$ où $T_0, T_2 \in \mathcal{E}^{[-\alpha,1]} \cap \mathcal{E}^{[-\infty,1]}$ et $T_1 \notin \mathcal{E}^{[-\alpha,1]} \cup \mathcal{E}^{[-\infty,1]}$. La chaîne suivante, où les nœuds sont étiquetés par leurs mesures de déséquilibre, répond à ces conditions :



\square

Lemme 8.4.7. *Pour tout $\alpha \geq 2$, les ensembles $\mathcal{E}^{[-\alpha,2]}$ et $\mathcal{E}^{[-\infty,2]}$ ne sont pas clos par intervalle dans le treillis de Tamari.*

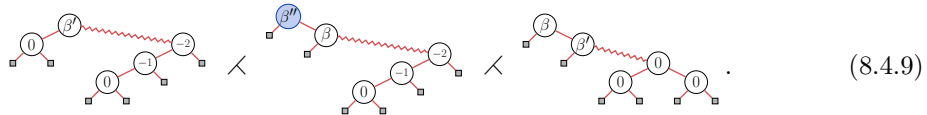
Démonstration. Il suffit d'exhiber une chaîne de la forme $T_0 \prec T_1 \prec T_2$ où $T_0, T_2 \in \mathcal{E}^{[-\alpha, 2]} \cap \mathcal{E}^{[-\infty, 2]}$ et $T_1 \notin \mathcal{E}^{[-\alpha, 2]} \cup \mathcal{E}^{[-\infty, 2]}$. La chaîne suivante, où les nœuds sont étiquetés par leurs mesures de déséquilibre, répond à ces conditions :



□

Lemme 8.4.8. Pour tous $\alpha \geq 2$ et $\beta \geq 3$, les ensembles $\mathcal{E}^{[-\alpha, \beta]}$ et $\mathcal{E}^{[-\infty, \beta]}$ ne sont pas clos par intervalle dans le treillis de Tamari.

Démonstration. Il suffit d'exhiber une chaîne de la forme $T_0 \prec T_1 \prec T_2$ où $T_0, T_2 \in \mathcal{E}^{[-\alpha, \beta]} \cap \mathcal{E}^{[-\infty, \beta]}$ et $T_1 \notin \mathcal{E}^{[-\alpha, \beta]} \cup \mathcal{E}^{[-\infty, \beta]}$. En posant $\beta' := \beta - 1$ et $\beta'' := \beta + 1$, la chaîne générique suivante, où leurs nœuds sont étiquetés par leurs mesures de déséquilibre et où les arêtes dessinées par représentent un peigne droit de taille $\beta - 3$, répond à ces conditions :



□

Théorème 8.4.9. Soit V un intervalle de \mathbb{Z} contenant 0. L'ensemble \mathcal{E}^V est clos par intervalle dans le treillis de Tamari si et seulement si $V \in \{\{0\}, \{-1, 0\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \mathbb{Z}\}$.

Démonstration. Comme $\mathcal{E}^{\{0\}}$ contient uniquement des arbres binaires parfaits, et qu'il existe au plus un tel élément par ensemble \mathcal{T}_n , $\mathcal{E}^{\{0\}}$ est clos par intervalle. De plus, d'après la proposition 8.4.4, $\mathcal{E}^{\{0, 1\}}$ est clos par intervalle et par la proposition 8.4.3, $\mathcal{E}^{\{-1, 0\}}$ l'est aussi. D'après le théorème 8.1.13, $\mathcal{E}^{\{-1, 0, 1\}}$ est clos par intervalle. Finalement, comme $\mathcal{E}^{\mathbb{Z}} = \mathcal{T}$, $\mathcal{E}^{\mathbb{Z}}$ est bien entendu clos par intervalle.

Si V est un intervalle de \mathbb{Z} contenant 0 et qui ne rentre pas dans les cas considérés jusqu'à présent, alors V ou V^\sim vérifie nécessairement les hypothèses des Lemmes 8.4.5, 8.4.6, 8.4.7, ou 8.4.8. Ainsi, par la proposition 8.4.3, \mathcal{E}^V n'est pas clos par intervalle. □

Le théorème 8.4.9 souligne le rôle particulier des arbres binaires équilibrés dans le treillis de Tamari. En effet, l'intervalle $V := [-1, 1]$ de \mathbb{Z} est le seul intervalle différent de \mathbb{Z} où \mathcal{E}^V est clos par intervalle dans le treillis de Tamari et tel que le sous-poset du treillis de Tamari restreint aux éléments de \mathcal{E}^V contient des intervalles non triviaux (voir à ce propos le théorème 8.3.3 et la figure 8.9).

8.4.2 Arbres binaires équilibrés en nombre de nœuds

Rappelons que la taille $|T|$ d'un arbre binaire T est le nombre de nœuds dont il est constitué. Définissons l'application dt_T qui associe à chaque nœud x de T un élément de \mathbb{Z} , sa *mesure de déséquilibre en taille*, définie par

$$\text{dt}_T(x) := |R| - |L|, \quad (8.4.10)$$

où L (resp. R) est le sous-arbre gauche (resp. droit) de x . Un nœud x est *équilibré en taille* si

$$\text{dt}_T(x) \in \{-1, 0, 1\}. \quad (8.4.11)$$

Un arbre binaire est *équilibré en taille* si tous ses nœuds sont équilibrés en taille.

La suite $(w_n)_{n \geq 0}$, où w_n est le nombre d'arbres binaires de taille n équilibrés en taille, vérifie la relation de récurrence suivante :

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{0, 1\}, \\ 2w_k w_{k-1} & \text{si } n = 2k, \\ w_k^2 & \text{sinon, où } n = 2k + 1. \end{cases} \quad (8.4.12)$$

C'est la suite **A110316** de [Slo] et ses premiers termes sont

$$1, 1, 2, 1, 4, 4, 4, 1, 8, 16, 32, 16, 32, 16, 8, 1, 16, 64, 256, 256, 1024, 1024. \quad (8.4.13)$$

Lemme 8.4.10. *Soit T un arbre binaire non vide équilibré en taille. Alors, la hauteur et la taille de T vérifient la relation suivante :*

$$h(T) = \lfloor \log_2(|T|) \rfloor + 1. \quad (8.4.14)$$

Démonstration. Nous procédons par induction structurelle sur l'ensemble des arbres binaires non vides équilibrés en taille. Le lemme est vrai pour l'arbre binaire à un nœud. Supposons maintenant que (8.4.14) est satisfait pour deux arbres binaires équilibrés en taille L et R tels que $T := L \wedge R$ est équilibré en taille. Nous avons deux cas à considérer, suivant si L et R sont de même taille. Si $|L| = |R|$, posons $k := |L|$. Nous avons

$$\lfloor \log_2(|T|) \rfloor + 1 = \lfloor \log_2(2k + 1) \rfloor + 1 \quad (8.4.15)$$

$$= \lfloor \log_2(2) + \log_2(k + 1/2) \rfloor + 1 \quad (8.4.16)$$

$$= \lfloor \log_2(k + 1/2) \rfloor + 2 \quad (8.4.17)$$

$$= \lfloor \log_2(k) \rfloor + 2 \quad (8.4.18)$$

$$= h(L) + 1 \quad (8.4.19)$$

$$= h(R) + 1 \quad (8.4.20)$$

$$= h(T). \quad (8.4.21)$$

L'égalité entre (8.4.17) et (8.4.18) provient du fait que k est un entier. L'égalité entre (8.4.18) et (8.4.19) suit par hypothèse d'induction.

Si $|L| \neq |R|$, supposons sans perte de généralité que $|L| = |R| + 1$ et posons $k := |L|$. Un calcul analogue au précédent implique (8.4.14). \square

Dorénavant, pour distinguer la notion d'équilibrage classique de celle d'équilibrage en taille, nous dirons qu'un arbre binaire est *équilibré en hauteur* s'il est équilibré au sens de la définition 8.1.1.

Proposition 8.4.11. *L'ensemble des arbres binaires équilibrés en taille est un sous-ensemble de l'ensemble des arbres équilibrés en hauteur.*

Démonstration. Nous procédons par induction structurelle sur l'ensemble des arbres binaires équilibrés en taille pour montrer qu'un arbre binaire équilibré en taille est aussi équilibré en hauteur. Cette propriété est vraie pour l'arbre vide et l'arbre binaire de taille un. Supposons maintenant que cette propriété est vraie pour deux arbres binaires équilibrés en taille L et R tels que $T := L \wedge R$ est équilibré en taille. D'après le lemme 8.4.10, nous avons

$$h(R) - h(L) = \lfloor \log_2(|R|) \rfloor - \lfloor \log_2(|L|) \rfloor, \quad (8.4.22)$$

et puisque T est équilibré en taille, nous avons $||R| - |L|| \leq 1$, de sorte que $|h(R) - h(L)| \leq 1$. Par hypothèse d'induction, L et R sont équilibrés en hauteur, montrant que T l'est aussi. \square

Proposition 8.4.12. *Soient T_0 et T_1 deux arbres binaires équilibrés en taille tels que $T_0 \leq_{\mathcal{T}} T_1$. Alors, l'intervalle $[T_0, T_1]$ du treillis de Tamari contient uniquement des arbres binaires équilibrés en taille.*

Démonstration. Montrons que toute rotation réalisée dans un arbre binaire T augmente les mesures de déséquilibre en taille de chacun de ses nœuds. Soit y un nœud de T et x son fils gauche. Soit $(A \wedge B) \wedge C$ le sous-arbre de T de racine y et T' l'arbre binaire obtenu par la rotation en y dans T . Nous avons dans T et T' les mesures de déséquilibre en taille suivantes :

$$\begin{cases} dt_T(x) = |B| - |A|, \\ dt_T(y) = |C| - |B| - |A| - 1, \end{cases} \quad (8.4.23)$$

et

$$\begin{cases} dt_{T'}(x) = |B| + |C| + 1 - |A|, \\ dt_{T'}(y) = |C| - |B|, \end{cases} \quad (8.4.24)$$

montrant $dt_{T'}(x) > dt_T(x)$ et $dt_{T'}(y) > dt_T(y)$. Notons en outre que la rotation ne modifie par les mesures de déséquilibre en taille des autres nœuds de T .

Ceci montre que l'ensemble des arbres binaires équilibrés en taille est clos par intervalle dans le treillis de Tamari. En effet, en partant d'un arbre binaire T équilibré en taille et en réalisant une rotation produisant un arbre T' déséquilibré en taille, il existe un nœud z de T' vérifiant $dt_{T'}(z) \geq 2$ et il est impossible de décrémenter cette valeur par des rotations. Ainsi, tout arbre binaire supérieur à T' pour l'ordre de Tamari n'est pas équilibré en taille. \square

La démonstration de la proposition 8.4.12 montre également que pour tout $k \geq 0$, les ensembles des *arbres binaires k -équilibrés en taille* — qui sont les ensembles qui contiennent les arbres binaires T tels que tout nœud x de T vérifie $|dt_T(x)| \leq k$ — sont clos par intervalle dans le treillis de Tamari.

Étant donné que d'après la proposition 8.4.11, tout arbre binaire équilibré en taille est aussi équilibré en hauteur, d'après la proposition 8.4.12 et le théorème 8.3.3, les intervalles d'arbres binaires équilibrés en taille sont isomorphes à des hypercubes. Cependant, les ensembles d'arbres binaires équilibrés en taille possèdent une propriété supplémentaire :

Proposition 8.4.13. *Le sous-poset du treillis de Tamari restreint aux arbres binaires équilibrés en taille est gradué.*

Démonstration. Caractérisons les rotations qui conservent l'équilibre en taille. Soient $T_0 := (A \wedge B) \wedge C$ et $T_1 := A \wedge (B \wedge C)$ deux arbres binaires équilibrés en taille tels que $T_0 \prec_y T_1$ où y est la racine de T_0 . Notons x le fils gauche de y dans T_0 . Cette rotation ne peut pas conserver l'équilibre en taille si $dt_{T_0}(x) = 1$ ou $dt_{T_0}(y) = 1$ puisque, d'après la démonstration de la proposition 8.4.12, les mesures de déséquilibre en taille de x et de y augmentent strictement après la rotation. Voici la liste des mesures de déséquilibre en taille de x et de y dans T_0 et T_1 , exprimées sous la forme $(dt_{T_0}(x), dt_{T_0}(y)) \longrightarrow (dt_{T_1}(x), dt_{T_1}(y))$:

$$\begin{aligned} \text{(R'1)} \quad (-1, -1) &\longrightarrow (2|A| - 1, |A|), & \text{(R'3)} \quad (-1, 0) &\longrightarrow (2|A|, |A| + 1), \\ \text{(R'2)} \quad (0, -1) &\longrightarrow (2|A| + 1, |A|), & \text{(R'4)} \quad (0, 0) &\longrightarrow (2|A| + 2, |A| + 1). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi quatre cas de rotations à explorer.

Cas 1. En ce qui concerne (R'1), on a forcément $|A| = 1$. En effet, si $|A| \geq 2$, y ne serait pas équilibré en taille dans T_1 et si $|A| = 0$, comme $dt_{T_0}(x) = -1$, ceci impliquerait $|B| = -1$, ce qui

est absurde. Et donc, comme $|A| = 1$, on a $|B| = 0$ et $|C| = 1$, et le seul couple d'arbres binaires (T_0, T_1) qui convient est

$$T_0 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \square \quad \square \end{array} \prec_y \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \square \quad \square \end{array} = T_1. \quad (8.4.25)$$

Cas 2. Dans le cas (R'2), $|A| = 0$ est forcé. En effet, si $|A| \geq 1$, x ne serait pas équilibré en taille dans T_1 . Par conséquent, comme $|A| = 0$, on a $|B| = 0$ et $|C| = 0$. Le seul couple (S_0, S_1) d'arbres binaires qui convient est

$$S_0 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \square \quad \square \end{array} \prec_y \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \square \quad \square \end{array} = S_1. \quad (8.4.26)$$

Cas 3. Dans le cas (R'3), $|A| = 0$ est forcé. Ceci implique $|B| = -1$, ce qui est absurde. Par conséquent, (R'3) ne correspond pas à une rotation qui conserve l'équilibre en taille.

Cas 4. En ce qui concerne (R'4), x vérifie $dt_{T_1}(x) \geq 2$, et (R'4) ne correspond donc pas à une rotation qui conserve l'équilibre en taille.

Il existe donc deux types de rotations qui conservent l'équilibre en taille. Ce sont celles représentées en (8.4.25) et (8.4.26).

Étant donné que chaque rotation de l'un de ces deux types supprime exactement un sous-arbre de la forme S_0 et ajoute exactement un sous-arbre de la forme S_1 , nous pouvons définir une application $\kappa : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ où $\kappa(T)$ est le nombre de sous-arbres de la forme S_1 que contient T . Ainsi, puisque par la proposition 8.4.12, les relations de couverture dans le treillis de Tamari restreint aux arbres binaires équilibrés en taille sont uniquement des rotations qui conservent l'équilibre en taille, la statistique κ est une fonction de graduation dans ce poset, ce qui montre qu'il est gradué. \square

8.4.3 Arbres binaires ayant une canopée fixée

Pour tout mot u sur l'alphabet $\{0, 1\}$, nous notons \mathcal{C}_u l'ensemble des *arbres binaires à canopée fixée à u* , c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_u := \{T \in \mathcal{T} : \text{cnp}(T) = u\}. \quad (8.4.27)$$

Proposition 8.4.14. *Pour tout $u \in \{0, 1\}^*$, l'ensemble \mathcal{C}_u est clos par intervalle dans le treillis de Tamari.*

Démonstration. Commençons par montrer que \mathcal{C}_u est clos par intervalle dans le treillis de Tamari. Soit T_0 un arbre binaire et y l'un de ses nœuds. Soit $(A \wedge B) \wedge C$ le sous-arbre de T_0 de racine y et T_1 l'arbre binaire obtenu depuis T_0 par une rotation en y . Indépendamment de A et C , si B est non vide, on a $\text{cnp}(T_0) = \text{cnp}(T_1)$. Si B est vide, alors B est une feuille, et son orientation change de la droite vers la gauche. Par conséquent, $\text{cnp}(T_1)$ est plus grand pour l'ordre lexicographique que $\text{cnp}(T_0)$, ce qui montre que \mathcal{C}_u est clos par intervalle.

Donnons maintenant un argument de dénombrement pour montrer que \mathcal{C}_u est aussi un intervalle du treillis de Tamari. Soit T un maximum de \mathcal{C}_u . Toute rotation en T modifie donc sa canopée, et par conséquent, pour tout nœud y qui possède un fils gauche x dans T , x n'a pas de fils droit. L'ensemble de ces maximums, noté \mathcal{M} est caractérisé par la spécification régulière suivante (voir [FS09] pour une introduction générale sur les spécifications régulières) :

$$\mathcal{M} = \mathcal{L} \times \{\bullet\} \times \mathcal{M} + \{\perp\}, \quad (8.4.28)$$

où \mathcal{L} est l'ensemble des peignes gauches. L'ensemble des maximums admet donc la série génératrice $M(t)$, qui dénombre les éléments de \mathcal{M} suivant leur nombre de nœuds vérifiant

$$M(t) = \frac{1-t}{1-2t} = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} t^n. \quad (8.4.29)$$

De plus, pour tout $n \geq 1$ il y a exactement 2^{n-1} ensembles \mathcal{C}_u où $|u| = n - 1$, et il y a le même nombre de ces arbres maximaux. Ceci implique qu'il existe exactement un maximum dans \mathcal{C}_u , qui est donc son plus grand élément. Le même raisonnement montre également qu'il existe exactement un plus petit élément dans chaque ensemble \mathcal{C}_u , ce qui implique le résultat. \square

Le résultat établi par la proposition 8.4.14 est déjà connu [LR02]. Seule la démonstration que nous proposons est originale.

8.4.4 Arbres binaires ayant un indice de Narayana fixé

L'indice de Narayana $\text{nar}(T)$ d'un arbre binaire T est le nombre de ses nœuds qui possèdent un fils droit non vide. Chaque ensemble d'arbres binaires de taille \mathcal{T}_n peut ainsi être partitionné en sous-ensembles $\text{Nar}(n, k) := \{T \in \mathcal{T}_n : \text{nar}(T) = k\}$ pour $0 \leq k \leq n - 1$ d'arbres binaires ayant un indice de Narayana fixé. Les nombres de Narayana [Nar55] dénombrent ces ensembles selon les deux paramètres n et k (voir la suite A001263 de [Slo]). Les premières valeurs sont

n	# Nar(n, k) pour $k = 0, \dots, n-1$							
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	6	6	1				
5	1	10	20	10	1			
6	1	15	50	50	15	1		
7	1	21	105	175	105	21	1	
8	1	28	196	490	490	196	28	1

Proposition 8.4.15. *Pour tous arbres binaires T et T' tels que $\text{nar}(T) = \text{nar}(T')$ et $T \leq_T T'$, l'intervalle $[T, T']$ du treillis de Tamari contient uniquement des éléments T'' qui vérifient $\text{nar}(T'') = \text{nar}(T) = \text{nar}(T')$.*

Démonstration. Soient T_0 et T_1 deux arbres binaires tels que $T_0 \prec_y T_1$ où y est un nœud de T_0 et $(A \wedge B) \wedge C$ le sous-arbre de T_0 de racine y . Indépendamment de A et de C , si B est non vide, T_0 et T_1 possèdent le même nombre de nœuds qui ont un fils droit non vide. Si B est vide, le nombre de fils droits est incrémenté dans T_1 . Par conséquent, dans toute chaîne $T_0 \leq_T T_1 \leq_T \dots \leq_T T_\ell$, nous avons $\text{nar}(T_0) \leq \text{nar}(T_1) \leq \dots \leq \text{nar}(T_\ell)$. Ceci montre que l'ensemble des arbres binaires qui possèdent un indice de Narayana fixé est clos par intervalle dans le treillis de Tamari. \square

Proposition 8.4.16. *Pour tous $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n - 1$, l'ensemble $\text{Nar}(n, k)$ est une union disjointe des ensembles \mathcal{C}_u où $|u| = n - 1$ et u contient k occurrences de 1.*

Démonstration. Il est suffisant de montrer que pour tout arbre binaire T de canopée u , le nombre de 1 dans u est $\text{nar}(u)$. Montrons cette propriété par induction structurelle sur l'ensemble des arbres binaires. Si T est l'arbre vide, la propriété est clairement vraie. Supposons maintenant $T := L \wedge R$, et posons $v := \text{cnp}(L)$ et $w := \text{cnp}(R)$. Nous avons quatre cas à examiner suivant si L et R sont vides.

Cas 1. Si L et R sont vides, T est l'arbre binaire de taille un et la propriété est vérifiée.

Cas 2. Si L et R sont tous deux non vides, alors $\text{cnp}(T) = v \cdot 0 \cdot 1 \cdot w$. Puisque $\text{nar}(T) = \text{nar}(L) + \text{nar}(R) + 1$, par hypothèse d'induction, la propriété est vraie.

Cas 3. Si L est vide mais pas R , alors $\text{cnp}(T) = 1 \cdot w$. Puisque $\text{nar}(T) = \text{nar}(R) + 1$, par hypothèse d'induction, la propriété est vérifiée.

Cas 4. Si R est vide mais L , alors $\text{cnp}(T) = v \cdot 0$. Puisque $\text{nar}(T) = \text{nar}(L)$, par hypothèse d'induction, la propriété est satisfaite. \square

Corollaire 8.4.17. *Pour tous $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n - 1$, l'ensemble $\text{Nar}(n, k)$ est une union disjointe d'intervalles du treillis de Tamari de la forme $[T, T']$ où T (resp. T') est un élément minimal (resp. maximal) de $\text{Nar}(n, k)$.*

Démonstration. D'après la proposition 8.4.16, $\text{Nar}(n, k)$ est union disjointe d'ensembles \mathcal{C}_u , et d'après la proposition 8.4.14, ces ensembles sont des intervalles du treillis de Tamari. Le résultat s'ensuit de la proposition 8.4.15 qui montre que les plus grands éléments des \mathcal{C}_u sont les maximum de $\text{Nar}(n, k)$. \square

