
Approximation de la fonction échantillonnée

SUITE À L'ÉTUDE MENÉE AU CHAPITRE 2, l'acquisition des données ultrasonores tridimensionnelles peut être modélisée par l'échantillonnage d'une fonction $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ en un certain nombre de points $X_{ijk} : I_{ijk} = I(X_{ijk})$. L'exploitation des informations échographiques 3D équivaut alors à l'étude des certaines propriétés de la fonction I , propriétés choisies en fonction de leur pertinence pour établir le diagnostic.

Malheureusement I elle-même n'est pas accessible et seule une approximation \tilde{I} peut être obtenue à partir des échantillons. Plus la fonction calculée \tilde{I} sera « proche » de I , plus l'analyse des données pourra être précise. Le premier problème qui est l'objet de ce chapitre, consiste alors à exploiter au mieux les informations dont on dispose pour approcher la fonction I .

La question qui se pose est donc d'estimer la qualité de l'approximation i.e. savoir jusqu'à quelle résolution les données recueillies sont significatives. Mais pour exploiter l'information, il faut aussi pouvoir la manipuler simplement. La représentation de la fonction doit être compatible avec les contraintes algorithmiques. Compte tenu des exigences de rapidité, le choix des voxels avec une interpolation d'ordre 0 ou 1 s'impose. La fin du chapitre est consacrée aux différents algorithmes proposés dans la littérature pour obtenir la valeur de la fonction sur les voxels.

5.1 Qualité de l'approximation

Le problème de la description d'une fonction définie sur un ensemble non dénombrable à partir d'un nombre fini d'éléments est un problème complexe et nous nous limiterons à quelques considérations pratiques. En l'occurrence, la fonction reflète certaines propriétés physiques du milieu. Pour l'instant l'accent est mis sur la localisation spatiale et il nous importe ici de savoir quelle doit être la dimension d'une structure pour la détecter dans la fonction reconstruite \tilde{I} .

La fonction I est échantillonnée aux points X_{ijk} . Plus on a d'échantillons, mieux on connaît la fonction et plus on peut l'approcher de manière précise. Mais le nombre de points échantillonnés n'est pas le seul paramètre et leur position intervient de manière primordiale dans la qualité de l'approximation.

Théorème d'échantillonnage

Le théorème d'échantillonnage fournit une estimation de la précision de l'approximation. Pour reconstruire exactement une fonction numérique de variable réelle g dont le support fréquentiel est borné par r , il suffit d'échantillonner régulièrement avec un pas inférieur à $1/2r$. Il est donc nécessaire de connaître *a priori* le support fréquentiel de la fonction pour savoir quel pas d'échantillonnage adopter. Dans la pratique, un filtre passe-bas permet d'assurer cette hypothèse avant d'échantillonner la fonction.

Dans notre cas, le filtre passe-bas est réalisé par la fonction de transfert de l'échographe. Or la résolution varie suivant les directions axiale, latérale et transverse et suivant la profondeur sur la ligne de tir. Une borne du support fréquentiel est alors donnée par l'axe où la résolution de l'échographe est la meilleure (direction axiale). Mais le cadre fréquentiel n'est pas adapté à notre problème puisque, outre les résolutions variables, l'échantillonnage est non cartésien et irrégulier.

Echantillonnage irrégulier

En premier lieu, lorsque les images sont acquises avec une sonde courbe, l'échantillonnage est en forme d'éventail : très dense dans la zone proche de la sonde, il devient de plus en plus espacé à mesure que l'on s'en éloigne. Cette géométrie est en effet bien adaptée à l'acquisition de l'image échographique. Elle permet de sonder un grand volume alors que la zone de contact reste petite. De plus, la dynamique et le spectre des signaux diminuent avec la profondeur à cause de l'atténuation et de la dispersion de l'onde. Un échantillonnage fin en profondeur est donc moins utile.

Mis à part les mouvements linéaires, les balayages automatiques réalisent aussi des échantillonnages non cartésiens mais en général réguliers. La régularité peut alors permettre de se ramener, via une transformation connue, au cadre cartésien.

Les balayages libres sont par contre irréguliers puisque l'utilisateur manipule la sonde selon ses besoins. Or maintenir constante une vitesse de l'ordre de 1 cm/s est impossible. On pourrait demander à l'utilisateur de garder une vitesse quasiment constante mais imposer une telle contrainte rend l'acquisition des données moins confortable et limite les mouvements de balayages. Pourtant, un échantillonnage variable peut engendrer d'importantes variations de la qualité des données tridimensionnelles et il apparaît nécessaire de réguler le balayage.

Régulation du balayage

Le médecin peut réguler lui-même sa vitesse en passant plus lentement sur les zones intéressantes. L'échantillonnage est alors plus fin là où l'opérateur juge utile d'avoir une grande précision. Cependant il doit ajuster sa vitesse à la fréquence d'acquisition des images ultrasonores, qui varie suivant les réglages de l'échographe. De plus, la qualité des données est alors fortement dépendante de l'habileté de l'opérateur. Il est donc préférable que ce soit le système qui gère la régularité des acquisitions et fournisse des données de qualité standardisée.

S'il n'est pas intéressant de contraindre l'opérateur à réguler lui-même le mouvement de la sonde, la procédure d'acquisition des images par contre, peut être modifiée. En calculant le déplacement de la sonde en temps réel, on peut suivre sa position et au lieu d'acquérir des plans à intervalle de temps constants, acquérir des plans à peu près équidistants [13].

Nous avons mis en place cette méthode en essayant plusieurs mesures de la « distance » entre deux plans de coupe échographique. On définit tout d'abord sur chaque image, une zone utile délimitée par quatre points P_i , $0 \leq i < 4$. Après l'enregistrement du n^e plan, le système suit alors l'évolution d'une des distances :

$$d_1(t) = \sup_{0 \leq i < 4} \|P_i(t) - P_i^n\|, d_2(t) = \frac{1}{4} \sum_{0 \leq i < 4} \|P_i(t) - P_i^n\|$$

où les $P_i(t)$ et P_i^n sont les positions des extrémités de la zone utile respectivement sur l'image échographique en cours et sur la dernière image acquise. La $(n + 1)^e$ image est alors mémorisée lorsque la distance choisie est supérieur à un seuil donné.

Pour approcher le mieux possible I , le seuil doit être du même ordre de grandeur que la résolution des images échographiques. Malheureusement la précision de nos systèmes de repérage est également du même ordre de grandeur, voire même légèrement moins bonne (supérieure au millimètre). Le critère de sauvegarde d'une image relève donc plus d'une estimation de la distance que d'une réelle mesure. Les différentes distances essayées donnent d'ailleurs des résultats similaires. L'espacement des plans se révèle effectivement plus régulier et montre surtout son intérêt lorsqu'il y a peu de plans pour effectuer la reconstruction. Avec 128 plans de coupe, le gain n'est pas aussi évident.

Estimation de la précision

Pour évaluer la précision de l'approximation, on peut certes étendre le théorème d'échantillonnage pour des échantillonnages non réguliers [15] mais le choix du cadre fréquentiel n'est pas le mieux adapté à notre problème. On peut toutefois se faire une idée des ordres de grandeur mis en jeu. D'une façon générale, on définira pour une région $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$:

$$(5.1) \quad \rho_{\mathcal{V}} = 2 \sup_{M \in \mathcal{V}} \inf_{i,j,k} \|M - X_{i,j,k}\|$$

Si l'on modélise un détail en $M \in \mathcal{E}$ par une gaussienne :

$$I(P) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\|P - M\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

on peut définir 2σ comme dimension du détail.

Si le mouvement de la sonde n'est pas trop rapide, le déclenchement du balayage permet de limiter la distance d entre deux plans de coupe, où d est inférieur au millimètre. Le diamètre 2σ d'un détail de la fonction I doit donc être supérieur à $\sup(\rho, 2d)$ si l'on veut être sûr de le détecter dans les données 3D.

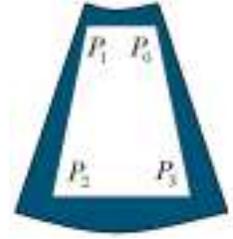


FIG. 5.1 – Définition des points P_i pour estimer la « distance » entre deux plans de coupe.

5.2 Choix d'une représentation de la fonction

La fonction I est connue uniquement aux points X_{ijk} . Le choix d'un cadre fonctionnel pour décrire l'approximation \tilde{I} dépend alors des propriétés que l'on veut exploiter. En l'occurrence, deux éléments sont à privilégier : la localisation de l'information et la rapidité des calculs. Pour localiser simplement l'information, il est naturel de choisir une base de fonctions à variable spatiale. Quant à la rapidité des calculs, elle conduit à choisir des fonctions dont l'expression est suffisamment simple. Dans la pratique, on

se limite donc à des fonctions polynomiales d'ordre 0 ou 1 voire plus rarement d'ordre 2.

Même sous ces conditions, les calculs sont cependant trop longs à mener car il y a plusieurs millions de points X_{ijk} échantillonnés dont la répartition spatiale n'est pas régulière. La plupart des systèmes d'échographie tridimensionnelle définissent donc la fonction \tilde{I} selon un maillage cartésien uniforme. La fonction est alors approchée dans une base de fonctions polynomiales restreintes sur un support fini et centrées sur les nœuds P_{uvw} du maillage :

$$(5.2) \quad \tilde{I}(M) = \sum_{u,v,w} \alpha_{uvw} f_{uvw}(M)$$

où $\alpha_{uvw} \in \mathbb{R}$ et f_{uvw} est une fonction polynomiale d'ordre 0 ou 1 centrée en P_{uvw} .

La première étape consiste à choisir le maillage adapté aux données. Ensuite, il faut calculer les valeurs α_{uvw} aux nœuds P_{uvw} du maillage à partir des valeurs I_{ijk} aux points X_{ijk} . Plusieurs algorithmes permettent de réaliser cette deuxième étape et nous les détaillons dans la section suivante.

5.2.1 Maillage

Le maillage est choisi cartésien uniforme pour des raisons de simplicité algorithmique. Il est donc nécessaire de définir un repère orthonormé affine associé $\mathcal{R}_m = (O_m, \mathbf{e}_{1m}, \mathbf{e}_{2m}, \mathbf{e}_{3m})$ ainsi qu'une résolution δ , qui est la distance entre deux nœuds consécutifs. Dans ce repère la position des nœuds P_{uvw} est $(u\delta, v\delta, w\delta)$.

Les choix du repère et du pas de reconstruction δ sont conditionnés par l'optimisation des performances i.e. le nombre de nœuds. Plus il y a de nœuds, plus les temps de calcul des algorithmes risquent d'être élevés. Donc le but est, connaissant la qualité possible de l'approximation, de réduire le volume cartésien.

Choix de la résolution

Compte tenu des directions privilégiées, la résolution de l'échographe peut être extrêmement variable en particulier lorsqu'on utilise une sonde courbe. Le pas du maillage δ est ici utilisé pour l'ensemble des données. S'il correspond à la résolution des zones les plus denses (de l'ordre de 0,2 mm pour les zones proches avec une sonde 3,5 MHz), il y a beaucoup plus de nœuds P_{uvw} que de points échantillonnés X_{ijk} , ce qui ralentit inévitablement les traitements ultérieurs. Si inversement, on choisit la résolution la moins fine, on aura plus de points X_{ijk} que de points P_{uvw} dans les zones proches. Par conséquent, il risque d'y avoir perte d'information.

Mais le choix du pas dépend aussi des besoins l'algorithme. Un pas important permettra ainsi de tenir compte de l'ensemble des points échantillonnés dans un voxel pour obtenir des informations plus fiables et plus homogènes. Inversement un pas beaucoup plus petit assurera la détection d'un maximum de détails.

Pour nos acquisitions, nous utilisons un pas variant entre 0,5 et 1 mm suivant la fréquence ultrasonore utilisée (3,5 ou 7 MHz) et suivant l'amplitude du mouvement de balayage.

Orientation du volume numérique

Le choix de l'orientation du maillage favorise les trois directions orthogonales associées au repère \mathcal{R}_m . Compte tenu des résolutions variables de l'échographe, le balayage

est généralement réalisé dans la direction orthogonale aux plans de coupe. Le choix d'un repère \mathcal{R}_m dont les axes sont proches des directions privilégiées de l'échographe permet de prendre en compte les diverses résolutions dans les algorithmes. Ainsi, on définit l'axe e_{1m} comme la moyenne des directions transverses, les axes e_{2m} et e_{3m} correspondant alors approximativement aux directions axiale et latérale.

Pour un pas δ donné, le nombre de nœuds du maillage varie également en fonction de l'orientation du repère. L'ensemble des nœuds est inclus dans un parallélépipède rectangle qui doit contenir l'ensemble de la zone explorée. Le balayage n'étant pas régulier, cette zone n'a pas généralement de forme spatiale précise *a priori*. Il est possible de choisir alors l'orientation qui minimisera le volume du parallélépipède englobant la zone (fig. 5.2). Mais si la direction de balayage est proche de la direction transverse, le choix que nous avons fait est proche de l'optimal.



FIG. 5.2 – Exemple de balayage « vu de dessus ». Suivant l'orientation du maillage, le volume reconstruit sera plus ou moins important.

5.3 Algorithmes

A partir des valeurs I_{ijk} aux points X_{ijk} , le problème est donc d'estimer les valeurs des coefficients α_{uvw} pour obtenir la meilleure approximation \tilde{I} de I :

$$(5.3) \quad \tilde{I}(M) = \sum_{uvw} \alpha_{uvw} f\left(\frac{1}{\delta}(M - P_{uvw})\right)$$

où f est la restriction d'une fonction polynomiale d'ordre 0 ou 1. La difficulté consiste à trouver un critère d'évaluation de la qualité de l'approximation.

Critères du choix

Ne connaissant pas la fonction I , le critère ne peut se baser que sur les valeurs I_{ijk} . Une interpolation de I est obtenue si l'on satisfait $\tilde{I}(X_{ijk}) = I_{ijk}$ pour toutes les valeurs i, j, k . Mais l'équation 5.3 ne permet d'atteindre qu'un sous-espace très restreint de fonctions. Le choix peut alors être basé sur le critère des moindres carrés ; on choisit alors les paramètres α_{uvw} qui minimisent χ^2 :

$$\chi^2 = \sum \|I_{ijk} - \tilde{I}(X_{ijk})\|^2$$

Sans hypothèses particulières sur I ni cadre fonctionnel précis, il est difficile d'évaluer la qualité de l'approximation sur l'ensemble de mesure nul, constitué par les X_{ijk} . De plus, l'étude réalisée au chapitre 2 montre que vouloir chercher une approximation mathématiquement rigoureuse est illusoire étant données les nombreuses incertitudes sur les données et la modélisation grossière de la physique ultrasonore. Il est alors courant d'ajouter dans les contraintes une minimisation des variations de la fonction [65] mais cela augmente généralement la complexité des calculs.

Or le temps de calcul est déterminant dans le choix de l'algorithme. L'objectif est d'utiliser l'outil en routine au même titre que l'échographie classique. Le temps alloué pour le calcul est de l'ordre de quelques secondes et en tout cas, moins d'une minute. Or le nombre de données à manipuler est de plusieurs millions.

Les algorithmes ont donc été développés de manière à satisfaire ces contraintes plutôt qu'à optimiser l'approximation dans un cadre mathématique précis. L'idée est de donner aux valeurs α_{uvw} une estimation de $I(P_{uvw})$, obtenue par interpolation des valeurs échantillonnées I_{ijk} qui sont dans un voisinage immédiat de P_{uvw} .

Reconstruction des images bidimensionnelles

Avant de considérer le problème en trois dimensions, il se pose déjà pour la conversion entre les données recueillies dans le plan de coupe et la trame cartésienne de l'écran d'affichage. Avec une sonde linéaire, les points échantillonnés sont répartis suivant une grille cartésienne. Il est alors aisé d'utiliser l'interpolation d'ordre 0 (on affecte la valeur du point échantillonné le plus proche) ou l'interpolation bilinéaire.

Pour les sondes courbes, les mêmes méthodes sont applicables dans l'espace cartésien en considérant que les points sont répartis de manière irrégulière. Il est cependant beaucoup plus intéressant de tirer parti de la répartition en éventail. Dans un système de coordonnées polaires (ρ, θ) , la répartition des points est [32]: $X_{ij} = (\rho_0 + i\delta\rho, \theta_0 + j\delta\theta)$. L'interpolation en coordonnées polaires [62] est alors beaucoup plus rapide.

Estimation de $I(P_{uvw})$

D'une façon générale, la valeur $I(P_{uvw})$ est estimée en pondérant les valeurs des points échantillonnés par des coefficients donnés. Si l'on nomme M_1, \dots, M_n les points échantillonnés et G_i les fonctions de pondération, on a :

$$(5.4) \quad I(P_{u,v,w}) \approx \frac{\sum_{i=1}^n G_i(M_i, P_{uvw}) I(M_i)}{\sum_{i=1}^n G_i(M_i, P_{uvw})}$$

L'une des méthodes les plus connues est la méthode de Shepard [46, 54], où l'on prend $G_i(M_i, P) = G(M_i, P) = 1/\|M_i - P\|$:

$$(5.5) \quad I(P_{uvw}) \approx \frac{\sum_{i=1}^n \frac{I(M_i)}{\|M_i - P_{uvw}\|^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\|M_i - P_{uvw}\|^2}}$$

Dans la pratique, il serait beaucoup trop long de sommer sur l'ensemble des points (il y en a plusieurs millions). Les fonctions de pondération $G_i(M_i, P)$ sont donc à support fini ou au minimum décroissantes lorsque la distance $\|P - M_i\|$ augmente. Cela correspond à la réalité physique, à savoir qu'un point éloigné influence moins la valeur de l'échantillon en P .

Le choix du voisinage d'influence est difficile car les points ne sont pas répartis régulièrement. L'usage d'un voisinage basé sur la distance du nœud P_{uvw} aux échantillons X_{ijk} est lourd en temps de calcul car il demande de parcourir un grand nombre de points et de calculer la distance $\|X_{ijk} - P_{uvw}\|$ pour savoir si le point intervient ou non dans le calcul.

Si la répartition des points X_{ijk} n'est pas régulière, elle est tout de même structurée puisqu'elle résulte de l'acquisition de plusieurs plans de coupe. Cette structure peut alors aider à réduire le voisinage d'influence à seulement quelques points rapidement déterminés. Les deux méthodes ci-dessous utilisent précisément la structure des données acquises avec comme fonction de pondération des fonctions linéaires suivant les axes du maillage.

Direction privilégiée [13, 45]

La résolution transverse de l'échographe est inférieure aux résolutions latérales et axiales. On considère alors que les plans de coupe sont échantillonnés précisément et

que la fonction I est connue sur ces plans. Une interpolation unidimensionnelle suivant la direction normale permet ensuite de déterminer les valeurs en dehors des plans.

Soient la droite $D_{v,w}$ passant par le point $P_{0,v,w}$ et de direction e_{1m} , v et w étant fixés. Le repère \mathcal{R}_m associé au maillage est défini de sorte que le vecteur e_{1m} soit proche des directions transverses. La droite coupe alors les plans échographiques Π_k aux points $M_{v,w}^k = D_{v,w} \cap \Pi_k$. Dans chaque plan, les valeurs $I(M_{v,w}^k)$ sont approchées par les méthodes bidimensionnelles classiques. Il reste donc à « remplir » entre les plans. La valeur des points $P_{u,v,w}$, $0 \leq u < u_{\max}$ est obtenue par interpolation entre les points d'intersection $M_{v,w}^k$ suivant la direction e_1 . L'interpolation est donc unidimensionnelle fig 5.3 et l'on peut utiliser des algorithmes classiques : interpolation linéaire, spline, etc.

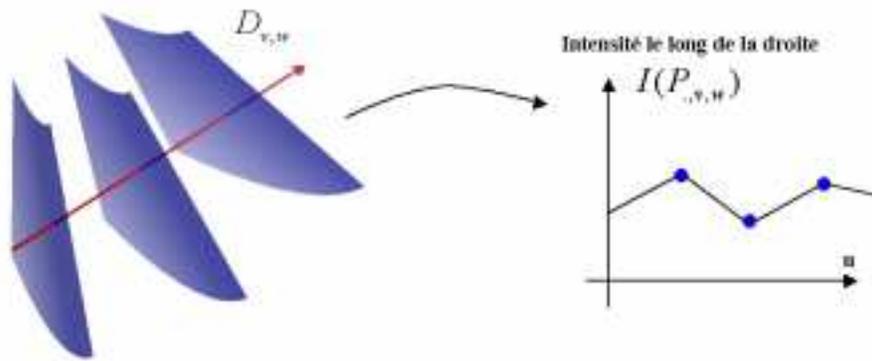


FIG. 5.3 – Interpolation suivant la direction e_{1m} . On détermine l'intensité aux points d'intersection de $D_{v,w}$ et des plans de coupe. Les intensités sont ensuite interpolées le long de la droite.

Cette méthode est particulièrement rapide et bien adaptée aux mouvements de balayages simples. La droite $D_{v,w}$ doit en effet couper les plans échographiques et les points d'intersection $M_{v,w}^k$ doivent être à l'intérieur de la zone échantillonnée du plan Π_k . Il importe donc que les plans de coupe soient à peu près alignés suivant la direction transverse.

Si l'on s'intéresse à une structure en particulier, l'algorithme peut être adapté pour suivre la direction de la structure [33, 60]. Il faut cependant pouvoir la détecter au préalable dans les images. Ainsi dans [31] interpole-t-on en suivant le chemin de la veine fémorale après segmentation manuelle dans chaque plan échographique.

Interpolation plus proches voisins [13]

L'idée est d'approcher $I(P_{uvw})$ par la valeur I_{ijk} du point échantillonné X_{ijk} le plus proche. Au lieu de passer en revue tous les points X_{ijk} , on cherche d'abord les deux plans les plus proches qui encadrent le point P_{uvw} : Π_{k_1} et Π_{k_2} . On détermine ensuite les projections orthogonales P_{k_1} et P_{k_2} de P_{uvw} sur Π_{k_1} et Π_{k_2} (fig 5.4).

Si l'espace entre deux plans consécutifs est suffisamment réduit, on peut estimer $I(P_{uvw})$ par la valeur du point échantillonné le plus proche sur le plan le plus proche. Dans le cas contraire, les valeurs $I(P_{k_i})$ sont déterminées de manière classique dans chaque plan Π_{k_i} . On interpole alors la valeur cherchée $I(P_{u,v,w})$ en pondérant par les distances entre le point et ses projections : $\|P_{u,v,w} - P_{k_i}\|$.

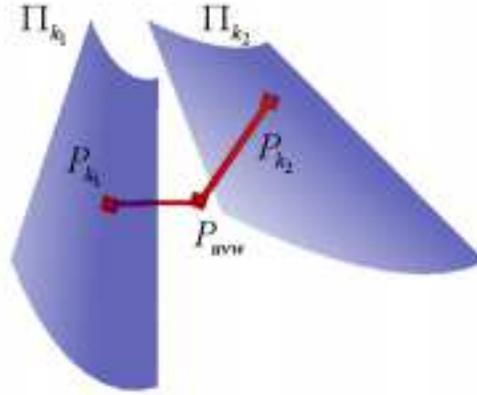


FIG. 5.4 – Interpolation par les plus proches voisins : le point P_{uvw} est projeté sur les deux plans les plus proches Π_{k_1} et Π_{k_2} . La valeur en P_{uvw} est alors calculée en fonction des valeurs en P_{k_1} et P_{k_2} .

Il n'y a pas ici de contrainte particulière sur le positionnement des plans échographiques. Cette méthode peut ainsi permettre de construire de façon incrémentale un volume en remplissant au fur et à mesure les valeurs des points compris entre les deux derniers plans acquis. Dans ce cas si une zone est balayée plusieurs fois, il arrive que la valeur $I(P_{u,v,w})$ en un point ait déjà été calculée. On peut alors combiner cette valeur et la nouvelle valeur pour diminuer le bruit [64].

Moyenne sur un voxel

Compte tenu des contraintes de rapidité et des limites de précision, il est fréquent de choisir comme voisinage non pas une boule mais le voxel $V(P)$ centré sur le point P_{uvw} :

$$(5.6) \quad \tilde{I}(P) = \frac{\sum_{M_i \in V(P)} I(M_i)}{\sum_{M_i \in V(P)} 1} = \langle I(M_i) \rangle_{M_i \in V(P)}$$

où la fonction $G_i = 1$. On affecte donc au point P_{uvw} , la moyenne des valeurs $I(X_{ijk})$ échantillonnées dans le voxel centré en P .

La taille δ du voxel intervient alors de façon essentielle. Pour une reconstruction précise, δ est faible ; mais dans ce cas, il risque d'y avoir de nombreux points P_{uvw} pour lesquels on ne peut affecter de valeur (fig. 5.5).

Il faut alors une deuxième étape pour affecter une valeur aux points indéterminés. On peut utiliser une méthode d'interpolation linéaire dans la direction transverse [35] (cf. interpolation linéaire) ou encore affecter une valeur moyenne calculée à partir des voxels voisins dont on connaît déjà la valeur [53].

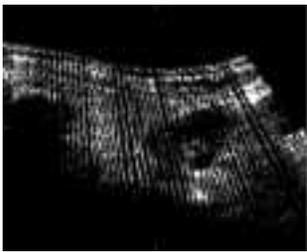


FIG. 5.5 – Lorsque le pas de reconstruction est trop petit, certains voxels sont « vides ». Ils sont alors visibles sur le plan de coupe.

Gaussienne tronquée

On peut aussi utiliser une gaussienne pour la fonction de pondération G_i sur les points échantillonnés situés à une distance inférieure à ρ :

$$(5.7) \quad G_i(M_i, P) = G(M_i, P) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\|M_i - P\|^2}{2\sigma^2}\right) \text{Rect}_\rho(P - M_i)$$

où :

$$\text{Rect}_\rho(P - M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|P - M_i\| < \rho \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La gaussienne possède en effet des propriétés de localisation à la fois spatiale et fréquentielle bien déterminées. Il faut ici déterminer deux paramètres : la largeur de la gaussienne σ et la taille du support ρ . Plus la valeur de σ est grande, plus on augmente le lissage des données. Plus ρ est grand, plus l'approximation de la gaussienne est exacte, mais on augmente également le temps de calcul. L'étude de [56] conduit aux valeurs ρ σ telles que :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \rho = 3.3\sigma + .5$$

où h est la résolution de l'image ultrasonore.

L'intérêt principal de la gaussienne est de réaliser un lissage variable en fixant des écarts types différents $\sigma_a, \sigma_l, \sigma_t$ suivant les directions des plans ultrasonores pour tenir compte des résolutions axiale, latérale et transverse [56] :

$$(5.8) \quad G_i(M_i, P) = \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r_a^2(i)}{2\sigma_a^2}\right) \text{Rect}_{\rho_{\text{axiale}}}(r_a(i)) \times \\ \frac{1}{\sigma_l\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r_l^2(i)}{2\sigma_l^2}\right) \text{Rect}_{\rho_l}(r_l(i)) \times \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r_t^2(i)}{2\sigma_t^2}\right) \text{Rect}_{\rho_t}(r_t(i))$$

où les directions axiales, latérales et transversales $\vec{v}_a, \vec{v}_l, \vec{v}_t$ dépendent du plan de coupe auquel le point appartient :

$$r_a(i) = \langle \overrightarrow{PM_i}, \vec{v}_a(i) \rangle \quad r_l(i) = \langle \overrightarrow{PM_i}, \vec{v}_l(i) \rangle \quad r_t(i) = \langle \overrightarrow{PM_i}, \vec{v}_t(i) \rangle$$

Il est alors nécessaire de simplifier le modèle et d'utiliser un noyau gaussien pré-calculé pour accélérer l'algorithme. Si l'on n'effectue pas ces simplifications, les directions changent pour chaque ligne de tir ultrasonore lorsque l'on utilise une sonde courbe. De plus les valeurs de σ et ρ doivent alors varier en fonction de la position des points sur l'image puisque la résolution varie. Les temps de calcul augmentent alors nettement.

Comparaison

A titre d'exemple, nous avons effectué des reconstructions sur un volume de données acquies avec 64 images échographiques. Le volume contient environ 2,5 Mo de données.

L'interpolation linéaire suivant une direction est la plus rapide. La moyenne sur un voxel suivie d'une interpolation linéaire fournit des images légèrement moins bruitées

TAB. 5.1 – Temps de calcul des différents algorithmes pour un volume de 2,5 Mo

Méthode	Linéaire	Plus proche voisin	Moyennage	Gaussienne
Temps	10 s	1 min	20 s	20 min

dans un temps comparable. Mais dès que l'écart entre deux plans échographiques est important, la qualité des données diminue fortement.

L'interpolation gaussienne peut conserver la qualité des données même si les plans sont éloignés. Dans ce cas, il faut en effet pallier l'absence de données par des hypothèses plus fortes sur la fonction. Dans [65], on utilise des fonctions radiales qui sont adaptées localement pour améliorer la qualité des images quand les écarts sont importants. Mais la durée du calcul augmente avec la complexité des algorithmes et se mesure en heures.

Le problème posé ici est d'estimer les valeurs α_{uvw} dans des temps compatibles avec une exploitation en routine. On voit qu'augmenter la complexité des algorithmes pour pallier à un sous-échantillonnage dans une région, entraîne une augmentation rédhibitoire du temps de calcul. Compte tenu du coût des mémoires, il est donc plus utile actuellement d'améliorer la finesse de l'échantillonnage (i.e. utiliser plus de plans échographiques) que la complexité des algorithmes.

Dans le cas de balayages automatiques, il est envisageable de ne pas effectuer cette étape et d'adapter tous les algorithmes à la géométrie particulière de l'acquisition. Par contre pour les balayages libres, le coût de l'adaptation des algorithmes à la géométrie des points échantillonnés (géométrie qui change à chaque acquisition) serait trop élevé. D'autant plus que, vu les erreurs de localisation (cf. chapitre 2), garder un tel niveau de précision est illusoire.

Certains algorithmes de visualisation ou d'extraction de surfaces peuvent aussi se passer de cette étape de reconstruction en n'effectuant que des traitements dans chaque plan. Cette approche est cependant souvent motivée par des raisons de coûts algorithmiques et d'économie d'espace mémoire, raisons qui sont aujourd'hui de moins en moins valables.

5.4 Conclusion

L'étude des données ultrasonores 3D revient à l'étude de la fonction I qui est connue uniquement par ses valeurs aux points échantillonnés X_{ijk} . Pour faciliter le calcul d'une fonction approchée \tilde{I} , il est avantageux de la représenter sous forme de voxels. \tilde{I} est alors définie sur un maillage P_{uvw} cartésien uniforme de pas δ :

$$\tilde{I}(M) = \sum_{uvw} \alpha_{uvw} f\left(\frac{1}{\delta}(M - P_{uvw})\right), \forall M \in \mathcal{E}$$

où la fonction f est la restriction d'une fonction polynômiale d'ordre 0 ou 1 dont le support est inclus dans le domaine $[-\delta; \delta]^3$. Les coefficients α_{uvw} peuvent être calculés par l'un des algorithmes présenté dans ce chapitre.

Il est donc à présent possible de calculer rapidement la valeur de \tilde{I} en n'importe quel point du volume échantillonné. Des algorithmes, que ce soit pour le traitement ou

la visualisation, peuvent alors être optimisés pour l'étude et l'exploitation de \tilde{I} et donc des données échographiques 3D.

