
L'analyse du modèle de la digestion anaérobie avec inhibition

A présent, on tient compte de l'inhibition de la croissance des bactéries acétogènes par un excès d'hydrogène dans le système et de celle des bactéries méthanogènes hydrogénotrophes et acétoclastes par l'acétate. Cela se traduit, respectivement, par les hypothèses **(H5)**, **(H6)** et **(H7)**. De plus, on suppose que les fonctions $g_V(., .)$ et $g_H(., .)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^2 .

$$\begin{aligned} \text{(H5)} \quad & \forall V \geq 0 \text{ et } H \geq 0, g_V(0, H) = 0, g_V(V, 0) > 0, \frac{\partial g_V}{\partial V}(V, H) > 0, \\ & \frac{\partial g_V}{\partial H}(V, H) < 0 \text{ et } \lim_{H \rightarrow +\infty} g_V(V, H) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(H6)} \quad & \forall A > 0, g_A(0) = 0, \lim_{A \rightarrow +\infty} g_A(A) = 0, \exists A_{max} > 0 \text{ / } \frac{dg_A}{dA}(A) > 0 \text{ pour} \\ & 0 < A < A_{max} \text{ et } \frac{dg_A}{dA}(A) < 0 \text{ pour } A > A_{max}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(H7)} \quad & \forall H \geq 0 \text{ et } A \geq 0, g_H(0, A) = 0, g_H(H, 0) > 0, \frac{\partial g_H}{\partial H}(H, A) > 0, \frac{\partial g_H}{\partial A}(H, A) < 0, \\ & \lim_{H \rightarrow +\infty} g_H(H, A) = 0. \end{aligned}$$

Le modèle avec inhibition et hydrolyse enzymatique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dX_0}{dt} = D(X_{0in} - X_0) - k_{hyd}X_0 \\
 \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s}g_S(S)X_S + k_{hyd}X_0 \\
 \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D)X_S \\
 \frac{dV}{dt} = -DV + \gamma_{sv}g_S(S)X_S - \frac{1}{c_v}g_V(V, H)X_V \\
 \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V, H) - D)X_V \\
 \frac{dA}{dt} = -DA + \gamma_{sa}g_S(S)X_S + \gamma_{va}g_V(V, H)X_V - \frac{1}{c_a}g_A(A)X_A \\
 \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D)X_A \\
 \frac{dH}{dt} = -DH + \gamma_{sh}g_S(S)X_S + \gamma_{vh}g_V(V, H)X_V - \frac{1}{c_h}g_H(H, A)X_H \\
 \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H, A) - D)X_H.
 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Soient $\lambda_V(H)$ et $\lambda_H(A)$ les solutions respectives des équations $g_V(\lambda_V(H), H) = D$ et $g_H(\lambda_H(A), A) = D$. On note aussi par λ_A^i , $i = 1, 2$ les solutions de l'équation $g_A(A) = D$, quand elles existent, avec $\lambda_A^1 < \lambda_A^2$.

2.2.1 Analyse des équilibres

Comme dans la section 2.1, les trois premières équations du modèle (2.3) peuvent être découplées du reste du système. A l'équilibre, si $X_S = 0$ alors $V = A = H = 0$. Par suite, $X_V = X_A = X_H = 0$, $S = S_{in}^* := (\frac{k_0 k_{hyd}}{D + k_{hyd}})X_{0in} + S_{in}$ et $X_0 = X_0^* := (\frac{D}{D + k_{hyd}})X_{0in}$. Mais, si $X_S > 0$ alors $X_0 = X_0^*$, $S = S^* := \lambda_S$ et $X_S = X_S^* := c_s(S_{in}^* - \lambda_S)$. En remplaçant les variables X_0 , S et X_S par leurs valeurs à l'équilibre dans les six dernières équations du système (2.3), on se ramène à l'étude du système (2.4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = D(V^{(0)} - V) - \frac{1}{c_v} g_V(V, H) X_V \\ \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V, H) - D) X_V \\ \frac{dA}{dt} = D(A^{(0)} - A) + \gamma_{va} g_V(V, H) X_V - \frac{1}{c_a} g_A(A) X_A \\ \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D) X_A \\ \frac{dH}{dt} = D(H^{(0)} - H) + \gamma_{vh} g_V(V, H) X_V - \frac{1}{c_h} g_H(H, A) X_H \\ \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H, A) - D) X_H. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

avec $V^{(0)} = \gamma_{sv} X_S^*$, $A^{(0)} = \gamma_{sa} X_S^*$, $H^{(0)} = \gamma_{sh} X_S^*$.

On montre facilement que pour toute condition initiale positive, les solutions du système (2.4) sont positivement bornées, pour tout t positif.

Le sous-modèle (2.4) n'est autre que le système (9) de [34]. Il admet donc douze points d'équilibre dont deux équilibres strictement positifs, notés E_{11} et E_{12} , voir Tableau 2.5. (où on a noté $E_1 = \varepsilon_0$, $E_2 = \varepsilon_H$, $E_3 = \varepsilon_A^1$, $E_4 = \varepsilon_A^2$, $E_5 = \varepsilon_{AH}^1$, $E_6 = \varepsilon_{AH}^2$, $E_7 = \varepsilon_V$, $E_8 = \varepsilon_{VH}$, $E_9 = \varepsilon_{VA}^1$, $E_{10} = \varepsilon_{VA}^2$, $E_{11} = \varepsilon_*^1$ et $E_{12} = \varepsilon_*^2$).

Équilibre	V	X_V	A	X_A	H	X_H
E_1	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	$H^{(0)}$	0
E_2	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	λ_H^0	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H^0)$
E_3	$V^{(0)}$	0	λ_A^1	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A^1)$	$H^{(0)}$	0
E_4	$V^{(0)}$	0	λ_A^2	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A^2)$	$H^{(0)}$	0
E_5	$V^{(0)}$	0	λ_A^1	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A^1)$	λ_H^1	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H^1)$
E_6	$V^{(0)}$	0	λ_A^2	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A^2)$	λ_H^2	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H^2)$
E_7	\hat{V}	$c_v(V^{(0)} - \hat{V})$	$A_V^{(0)}$ $-\gamma_{va}\hat{V}$	0	$H_V^{(0)}$ $-\gamma_{vh}c_v\hat{V}$	0
E_8	\check{V}	$c_v(V^{(0)} - \check{V})$	$A_V^{(0)}$ $-\gamma_{va}c_v\check{V}$	0	\check{H}	$c_h(H_V^{(0)} - \check{H})$ $-\gamma_{vh}c_v\check{V}$
E_9	\hat{V}	$c_v(V^{(0)} - \hat{V})$	λ_A^1	$c_a(A_V^{(0)} - \lambda_A^1)$ $-\gamma_{va}c_v\hat{V}$	$H_V^{(0)}$ $-\gamma_{vh}c_v\hat{V}$	0
E_{10}	\hat{V}	$c_v(V^{(0)} - \hat{V})$	λ_A^2	$c_a(A_V^{(0)} - \lambda_A^2)$ $-\gamma_{va}c_v\hat{V}$	$H_V^{(0)}$ $-\gamma_{vh}c_v\hat{V}$	0
E_{11}	λ_V^1	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V^1)$	λ_A^1	$c_a(A^1 - \lambda_A^1)$	λ_H^1	$c_h(H^1 - \lambda_H^1)$
E_{12}	λ_V^2	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V^2)$	λ_A^2	$c_a(A^2 - \lambda_A^2)$	λ_H^2	$c_h(H^2 - \lambda_H^2)$

TABLE 2.5 – Les équilibres du modèle (2.4)

avec

- $\lambda_V^0 = \lambda_V(H^{(0)})$, $\lambda_H^0 = \lambda_H(A^{(0)})$,
- $\lambda_H^i = \lambda_H(\lambda_A^i)$, $\lambda_V^i = \lambda_V(\lambda_H^i)$ pour $i = 1, 2$,
- $A_V^{(0)} = A^{(0)} + \gamma_{va}c_v V^{(0)}$, $H_V^{(0)} = H^{(0)} + \gamma_{vh}c_v V^{(0)}$,
- $A^i = A_V^{(0)} - \gamma_{va}c_v \lambda_V^i$, $H^i = H_V^{(0)} - \gamma_{vh}c_v \lambda_V^i$ pour $i = 1, 2$,
- \hat{V} est solution de l'équation implicite $\hat{V} = \lambda_V(H^{(0)} + \gamma_{vh}c_v(V^{(0)} - \hat{V}))$,
- $\hat{H} = H_V^{(0)} - \gamma_{vh}c_v \hat{V}$, $\hat{A} = A_V^{(0)} - \gamma_{va}c_v \hat{V}$,
- $\check{H} = \lambda_H(A^{(0)} + \gamma_{va}c_v(V^{(0)} - \lambda_V(\check{H})))$, $\check{V} = \lambda_V(\check{H})$, et $\check{A} = A_V^{(0)} - \gamma_{va}c_v \check{V}$.

Les conditions d'existence ainsi que les conditions de stabilité locale (qui sont obtenues par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne et le critère de Routh-Hurwitz, voir section 4.1 de [34],) sont données par le Tableau 2.6 et le Tableau 2.7 :

L'équilibre	Conditions d'existence
E_1	toujours
E_2	$H^{(0)} > \lambda_H^0$
E_3	$A^{(0)} > \lambda_A^1$
E_4	$A^{(0)} > \lambda_A^2$
E_5	$A^{(0)} > \lambda_A^1$ et $H^{(0)} > \lambda_H^1$
E_6	$A^{(0)} > \lambda_A^2$ et $H^{(0)} > \lambda_H^2$
E_7	$V^{(0)} > \lambda_V^0$
E_8	$V^{(0)} > \lambda_V(\lambda_H^0)$ et $\check{H} < H_V^{(0)} - \gamma_{vh}c_v \check{V}$
E_9	$V^{(0)} > \lambda_V^0$ et $\hat{A} > \lambda_A^1$
E_{10}	$V^{(0)} > \lambda_V^0$ et $\hat{A} > \lambda_A^2$
E_{11}	$V^{(0)} > \lambda_V^1$, $A^1 > \lambda_A^1$ et $H^1 > \lambda_H^1$
E_{12}	$V^{(0)} > \lambda_V^2$, $A^2 > \lambda_A^2$ et $H^2 > \lambda_H^2$

TABLE 2.6 – Conditions d'existence des équilibres du modèle (2.4)

L'équilibre	Conditions de stabilité locale
E_1	$V^{(0)} < \lambda_V^0, (A^{(0)} < \lambda_A^1 \text{ ou } A^{(0)} > \lambda_A^2) \text{ et } H^{(0)} < \lambda_H^0$
E_2	$V^{(0)} < \lambda_V(\lambda_H^0), (A^{(0)} < \lambda_A^1 \text{ ou } A^{(0)} > \lambda_A^2)$
E_3	$V^{(0)} < \lambda_V^0 \text{ et } H^{(0)} < \lambda_H^1$
E_4	toujours instable
E_5	$V^{(0)} < \lambda_V^1$
E_6	toujours instable
E_7	$(\hat{A} < \lambda_A^1 \text{ ou } \hat{A} > \lambda_A^2) \text{ et } \hat{H} < \lambda_H(\hat{A})$
E_8	$\hat{A} < \lambda_A^1 \text{ ou } \hat{A} > \lambda_A^2$
E_9	$\hat{H} < \lambda_H^1$
E_{10}	toujours instable
E_{11}	lorsqu'il existe
E_{12}	toujours instable

TABLE 2.7 – Conditions de stabilité locale des équilibres du modèle (2.4).

2.2.2 Diagrammes opératoires

On suppose, dans cette section, que les fonctions de croissance avec inhibition $g_V(V, H)$ et $g_H(H, A)$ sont données par les fonctions de Beddington suivantes :

$$g_V(V, H) = \frac{m_v V}{k_v + V + \mu_h H} \quad \text{et} \quad g_H(H, A) = \frac{m_h H}{k_h + H + \mu_a A},$$

m_v, m_h et k_v, k_h sont, respectivement, les taux de croissance maximale et les constantes de demi-saturation, μ_h et μ_a sont des facteurs d'inhibition. Ces fonctions de croissance, utilisées par les biologistes, vérifient les hypothèses (H5) et (H7).

La fonction de croissance g_A est choisie de type Haldane :

$$g_A(A) = \frac{m_a A}{k_a + A + \frac{A^2}{k_I}},$$

k_I est le coefficient d'inhibition de la croissance des bactéries méthanogènes acétoclastes X_A par l'acétate. Lorsque la valeur de k_I est très grande, la fonction de croissance microbienne $g_A(\cdot)$ de type Haldane se comporte comme une fonction de type Monod. Cette fonction de croissance biologique $g_A(\cdot)$ vérifie l'hypothèse (H6). Pour le choix des fonctions de croissance et des valeurs des paramètres, on utilise le Tableau A1 de [34].

La fonction de croissance microbienne $g_V(\cdot, \cdot)$ est croissante en V et décroissante en H , voir Figure 2.7. La décroissance de la fonction de croissance microbienne $g_V(\cdot, \cdot)$ devient plus rapide en augmentant la valeur de μ_h , avec μ_h le facteur d'inhibition par l'hydrogène de la croissance des biomasses acétogènes X_V . De même, la fonction de croissance microbienne $g_H(\cdot, \cdot)$ est croissante en H et décroissante en A , voir Figure 2.8. La décroissance de la fonction de croissance microbienne $g_H(H, A)$ devient plus rapide en augmentant la valeur de μ_a , avec μ_a est le facteur d'inhibition par l'acétate A de la croissance des biomasses méthanogènes hydrogénotrophes X_H .

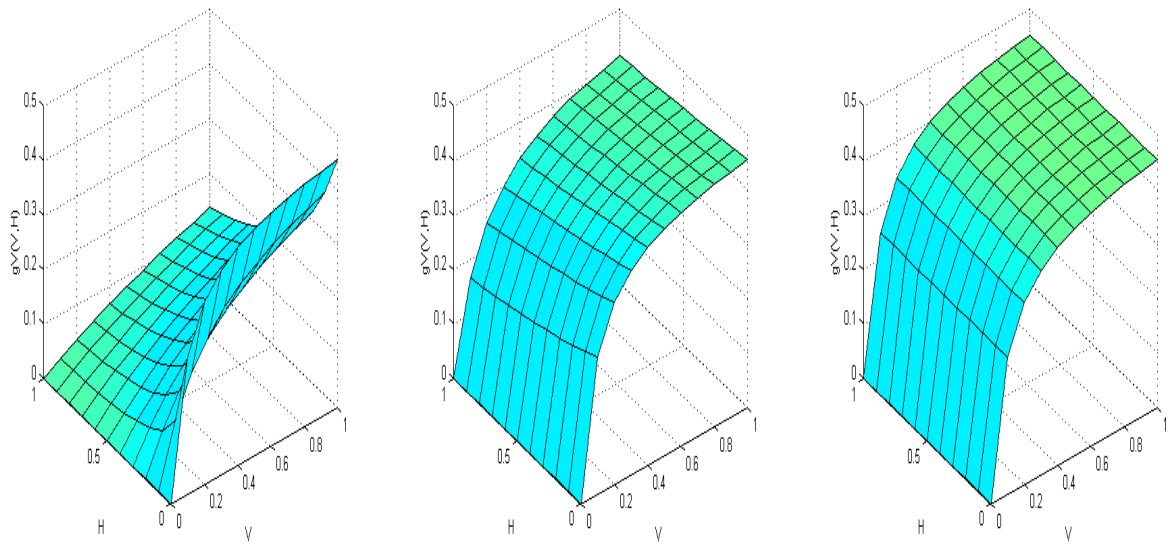


FIGURE 2.7 – La fonction de croissance avec inhibition $g_V(\cdot, \cdot)$, pour $\mu_h = 2.5$ à gauche, $\mu_h = 0.1$ au milieu et $\mu_h = 0$ à droite

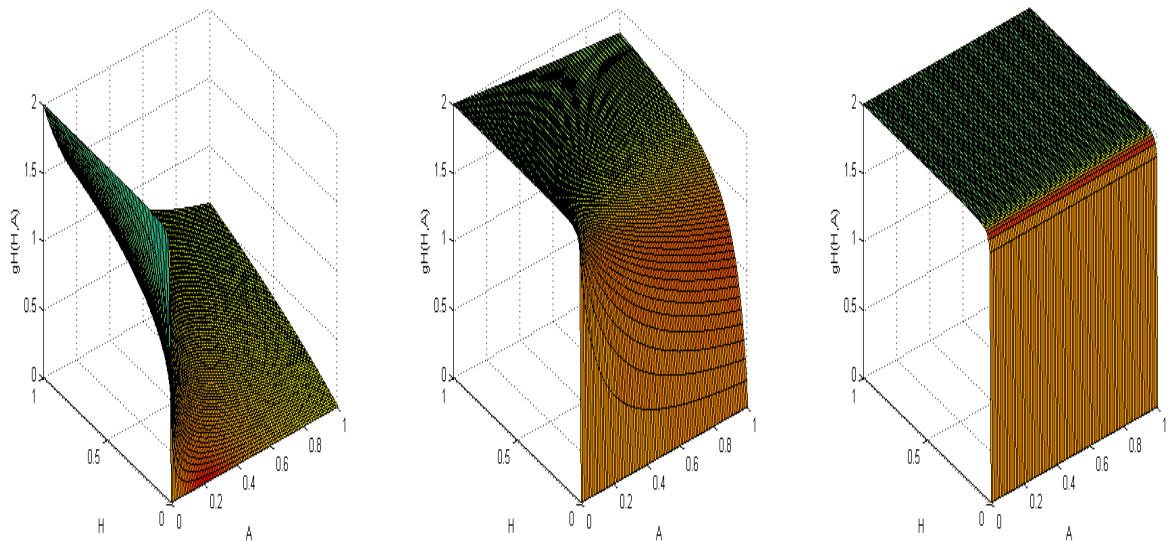


FIGURE 2.8 – La fonction de croissance avec inhibition $g_H(\cdot, \cdot)$, pour $\mu_a = 2.5$ à gauche, $\mu_a = 0.1$ au milieu et $\mu_a = 0$ à droite

La fonction de croissance g_S est choisie de type Monod et est donnée par :

$$g_S(S) = \frac{m_s S}{k_s + S},$$

voir Figure 2.9 à gauche. La fonction de croissance g_A est choisie de type Haldane et est donnée par :

$$g_A(A) = \frac{m_a A}{k_a + A + \frac{A^2}{k_I}},$$

voir Figures 2.9 à droite et 2.10. m_s, m_a et k_s, k_a sont, respectivement, les taux de croissance maximale et les constantes de demi-saturation.

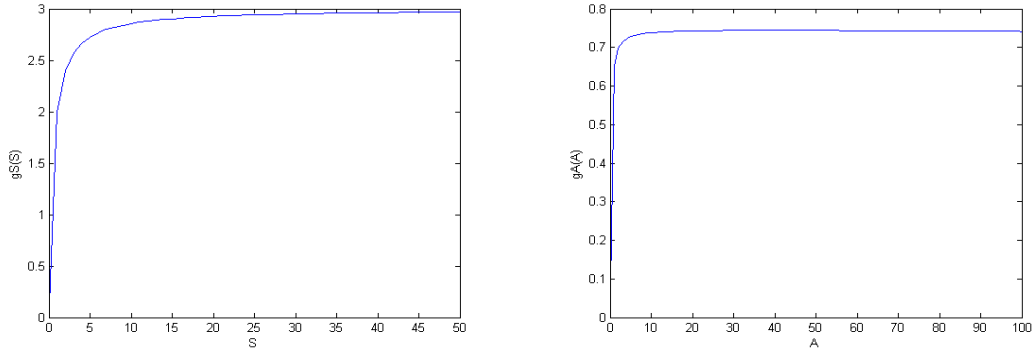


FIGURE 2.9 – La fonction de croissance g_S à gauche et la fonction de croissance avec inhibition g_A pour $k_I = 10000$ à droite

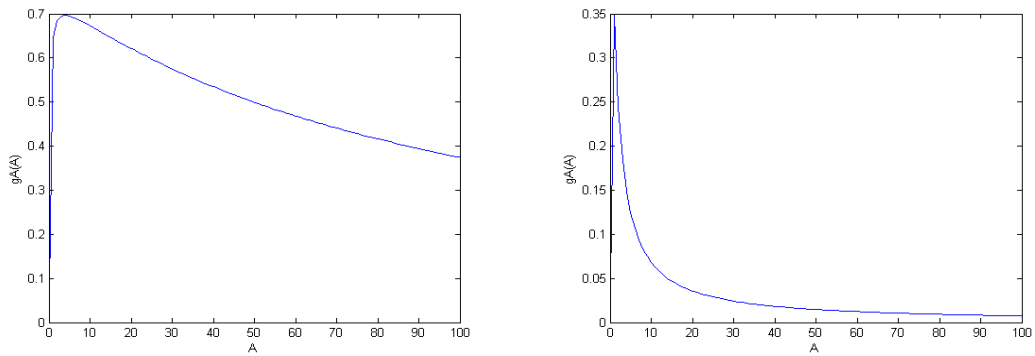


FIGURE 2.10 – La fonction de croissance avec inhibition g_A , pour $k_I = 100$ à gauche et $k_I = 1$ à droite

Les valeurs des paramètres biologiques utilisés sont celles du Tableau A1. de [34]. Les Figures 2.11, 2.12 et 2.13 présentent les diagrammes opératoires du système (2.3) avec inhibition, pour des valeurs de la matière organique à l'entrée $X_{0in} = 1$ et $X_{0in} = 10$.

Notons qu'on ne peut déterminer, dans ce cas, l'expression analytique des courbes délimitant les régions de stabilité des équilibres puisque les seuils de rentabilité sont les zéros de fonctions implicites et ne peuvent être déterminés explicitement. Les diagrammes sont donc obtenus par simulation du système pour plusieurs conditions initiales et les régions de stabilité sont dessinées point par point.

Pour les valeurs des paramètres de [34], les équilibres E_3 , E_7 et E_9 sont instables.

Pour la valeur de la concentration de $X_{0in} = 0$, on retrouve les diagrammes opératoires de [34], voir Figures 5-8 de [34]. Dans la figure 2.12, on prend $X_{0in} = 10$ et on suppose que les facteurs d'inhibition μ_a et μ_h sont nuls et que k_I prend une très grande valeur ($k_I = 100$). On voit alors que les régions de stabilité pour de petites valeurs de S_{in} ont la même allure que celles trouvées pour le modèle sans inhibition. L'inhibition dans ce cas n'a pas d'effet sur le système. Par contre, pour des valeurs de S_{in} entre 0 et 150, une nouvelle région de stabilité apparaît, celle de l'équilibre de l'extinction des bactéries méthanogènes acétoclastes E_8 . Il y a aussi apparition de régions de bistabilité : une première région où l'équilibre de E_8 et l'équilibre de coexistence E_{11} sont stables (la région en bleu-ciel) et une seconde région où l'équilibre E_5 (extinction des bactéries acétogènes) et E_2 (extinction des bactéries méthanogènes acétoclastes et des bactéries acétogènes) sont stables, (la région en mauve), voir Figure 2.11 et Figure 2.12 à droite.

Dans la figure 2.13, le facteur k_I est petit et les facteurs d'inhibition sont non nuls ($\mu_a = \mu_h = 1$). Il y a apparition d'une autre région de bistabilité, où E_{11} et E_2 sont stables (la région en gris).

En augmentant, la valeur de la matière organique sous forme particulaire, X_{0in} , de 1 à 10 la région de stabilité de l'équilibre E_5 (la région en rose) et la région de bistabilité de E_5 et de E_2 (la région en mauve) disparaissent. Par contre, la région de stabilité de l'équilibre de coexistence E_{11} (la région en noir) et la région de bistabilité de E_{11} et de E_2 (la région en gris) augmentent de taille, voir Figure 2.13 à droite.

En augmentant la valeur de la concentration X_{0in} , on remarque que les régions de stabilité, dans le plan (D, S_{in}) , translatent vers le bas et que la taille de certaines régions augmentent tandis que d'autres disparaissent. Chaque région correspond soit à un seul équilibre stable soit à un cas de bistabilité.

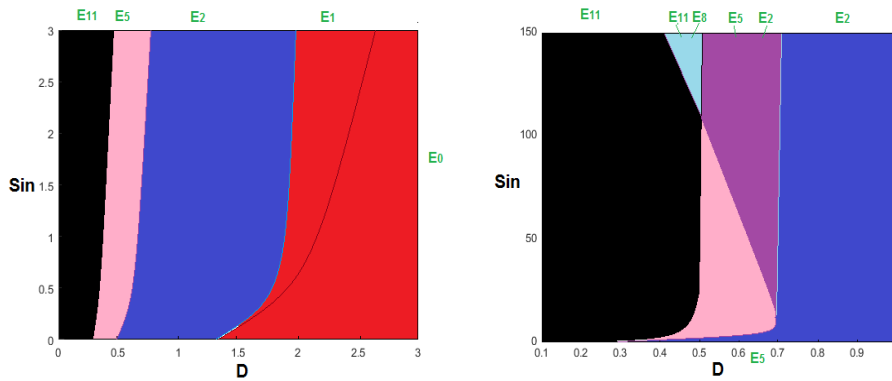


FIGURE 2.11 – Diagramme opératoire du système (2.3) pour $X_{0in} = 1$, avec $\mu_a = \mu_h = 0$ et $k_I = 100$

Cette étude montre que l'inhibition a un impact sur la stabilité des équilibres et qu'en ajoutant l'étape d'hydrolyse, les régions de stabilité changent de taille avec apparition de nouvelles régions de stabilité et de bistabilité. Pour maintenir un réacteur en bon fonctionnement (pas de lessivage de biomasses), il faut choisir X_{0in} , S_{in} et D dans la région de stabilité de l'équilibre de coexistence E_{11} et non pas dans les régions de bistabilité.

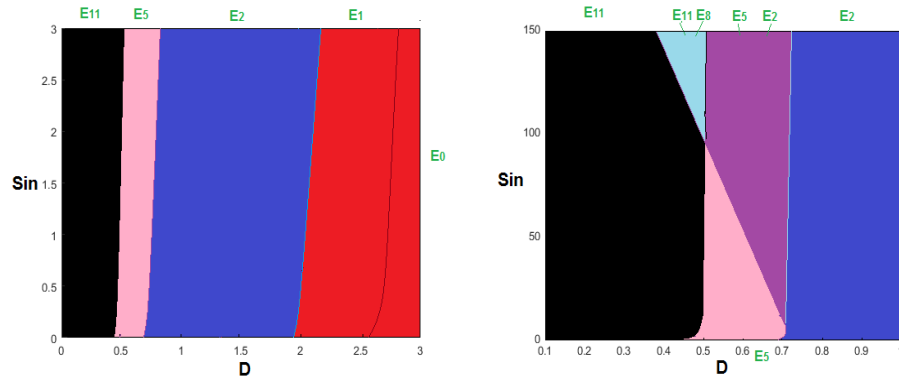


FIGURE 2.12 – Diagramme opératoire du système (2.3) pour $X_{0in} = 10$, avec $\mu_a = \mu_h = 0$ et $k_I = 100$

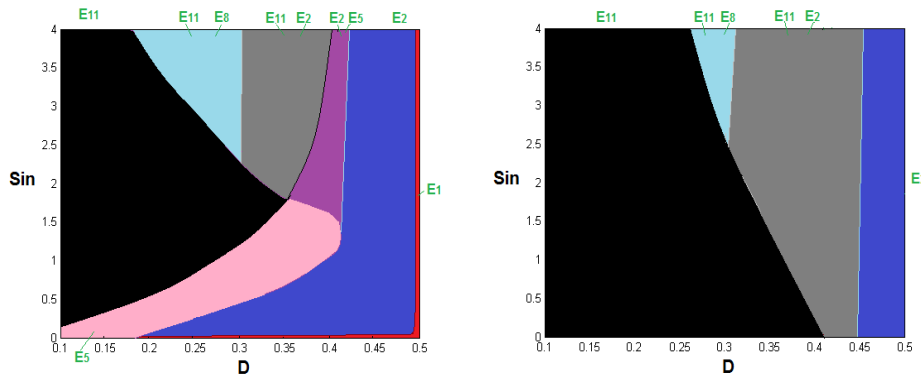


FIGURE 2.13 – Diagramme opératoire du système (2.3) pour $X_{0in} = 1$ à gauche et $X_{0in} = 10$ à droite, avec $\mu_a = \mu_h = k_I = 1$

2.3 Le taux de biogaz produit pour les modèles avec hydrolyse sans compartiment microbien hydrolytique

A partir de l'analyse des équilibres du modèle, nous déterminons le taux du méthane et de l'hydrogène produits en chaque équilibre et nous identifions la voie qui donne une production maximale. L'étude est faite, dans la section 2.3.1, pour le modèle sans inhibition. Nous déterminons le taux de biogaz du modèle avec inhibition dans la section 2.3.2.

2.3.1 Le taux de biogaz produit pour le modèle sans inhibition

2.3.1.1 Taux de méthane produit

Le schéma réactionnel du modèle complet de la digestion anaérobie (en ajoutant l'étape d'hydrolyse) montre que le méthane (CH_4) provient, d'une part, de l'acide acétique (A) provenant lui-même du substrat soluble (S) ou de l'AGV (V) et qu'il provient, d'autre part, de l'hydrogène (H) et du dioxyde de carbone (CO_2), provenant du substrat soluble ou de l'AGV. Le taux de méthane produit est donné par la formule suivante :

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A(A|_{A=A^*})X_{A|X_A=X_A^*} + \alpha_2 g_H(H|_{H=H^*})X_{H|X_H=X_H^*}$$

avec $\alpha_1 = \frac{1-c_a}{c_a}$ et $\alpha_2 = \frac{1-c_h}{c_h}$ et où les transferts gaz-liquide sont supposés être beaucoup plus rapides que les autres phénomènes.

Remarquons que d'après le schéma réactionnel de la Figure 1.4, le méthane CH_4 est produit par les bactéries acétogènes X_A ou par les bactéries méthanogènes hydrogénotrophes X_H . Pour avoir un maximum de méthane produit, il faut choisir $X_A \neq 0$ et $X_H \neq 0$. Les équilibres où les concentrations des biomasses X_A et X_H sont non nulles sont E_* et E_{AH} . Donc, le taux de méthane produit peut être maximal soit à l'équilibre E_{AH} ou à l'équilibre positif E_* .

On peut vérifier ce résultat en calculant le taux de méthane produit, pour chaque équilibre, voir Tableau 2.8. On rappelle que $\bar{A} = A^{(0)} + \gamma_{va}c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$ et $\bar{H} = H^{(0)} + \gamma_{vh}c_v(V^{(0)} -$

Équilibre	Q_{CH_4}
E_l, E_0 et E_V	0
E_H	$\alpha_2 c_h D(H^{(0)} - \lambda_H)$
E_A	$\alpha_1 c_a D(A^{(0)} - \lambda_A)$
E_{AH}	$\alpha_1 c_a D(A^{(0)} - \lambda_A) + \alpha_2 c_h D(H^{(0)} - \lambda_H)$
E_{VH}	$\alpha_2 c_h D(\bar{H} - \lambda_H)$
E_{VA}	$\alpha_1 c_a D(\bar{A} - \lambda_A)$
E_*	$\alpha_1 c_a D(\bar{A} - \lambda_A) + \alpha_2 c_h D(\bar{H} - \lambda_H)$

TABLE 2.8 – Taux de méthane produit en chaque équilibre du modèle (2.1) sans inhibition, dans le cas où $r_0 = k_{hyd}X_0$.

λ_V).

Rappelons aussi que E_H existe si $H^{(0)} > \lambda_H$ et que E_A existe si $A^{(0)} > \lambda_A$. Sous ces deux conditions, E_{AH} existe et le taux de méthane Q_{CH_4} à l'équilibre E_{AH} est plus grand que celui à l'équilibre E_A et à l'équilibre E_H .

De même, E_{VH} existe si $\bar{H} > \lambda_H$ et $V^{(0)} > \lambda_V$ et E_{VA} existe si $\bar{A} > \lambda_A$ et $V^{(0)} > \lambda_V$. On déduit que, si E_* existe alors le taux de méthane Q_{CH_4} à l'équilibre E_* est plus grand que celui à l'équilibre E_{VA} et à l'équilibre E_{VH} . Donc, le taux de méthane produit est maximal soit à l'équilibre E_{AH} ou à l'équilibre positif E_* .

Si $V^{(0)} > \lambda_V$, alors $\bar{A} > A^{(0)}$ et $\bar{H} > H^{(0)}$. Dans ce cas, E_* existe et est stable et le taux de méthane produit, pour le modèle sans inhibition (2.1), est maximal pour l'équilibre E_* . Dans ce cas, toutes les biomasses coexistent et le flux de méthane est donné dans la figure 2.14.

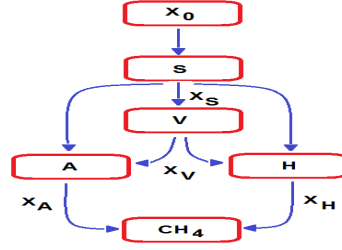


FIGURE 2.14 – Le flux de méthane dans le cas $V^{(0)} > \lambda_V$

Maintenant, si $V^{(0)} < \lambda_V$ alors $\bar{A} < A^{(0)}$ et $\bar{H} < H^{(0)}$. Dans ce cas, E_{AH} existe et est stable et le taux de méthane produit, pour le modèle sans inhibition (2.1), est maximal à l'équilibre E_{AH} . Dans ce cas, les biomasses X_S, X_A et X_H coexistent mais $X_V = 0$ et le flux de méthane est donné dans la figure 2.15.

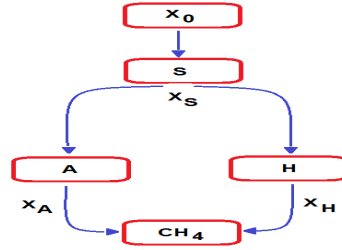


FIGURE 2.15 – Le flux de méthane dans le cas $V^{(0)} < \lambda_V$

On représente, dans les Figures 2.16 et 2.17, le taux maximal du méthane produit en fonction de la dilution D . On varie le substrat sous forme particulière X_{0in} et le substrat sous forme soluble S_{in} de telle manière à maintenir la somme $X_{0in} + S_{in}$ constante. Les valeurs des paramètres sont celles du Tableau A1. de [34].

Pour $l = S, V, A$ et H , on prend les fonctions de croissance g_l sous la forme $g_l(l) = \frac{m_l l}{k_l + l}$, λ_l est donc la solution de l'équation $g_l(\lambda_l) = D$. On a donc :

$$\lambda_S = \frac{Dk_s}{m_s - D}, \quad \lambda_V = \frac{Dk_v}{m_v - D}, \quad \lambda_A = \frac{Dk_a}{m_a - D}, \quad \text{et} \quad \lambda_H = \frac{Dk_h}{m_h - D}$$

avec $0 < D < \min(m_s, m_v, m_a, m_h)$.

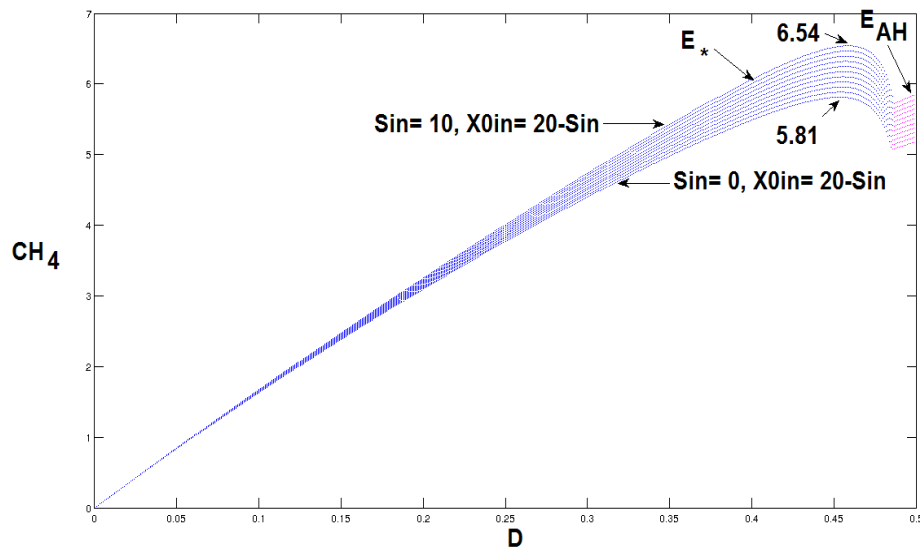


FIGURE 2.16 – La variation du taux de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 20$: Les courbes bleues représentent les taux de méthane dans le cas où $V^{(0)} > \lambda_V$ et les courbes roses les taux de méthane dans le cas où $V^{(0)} < \lambda_V$, selon les valeurs de X_{0in} et de S_{in} .

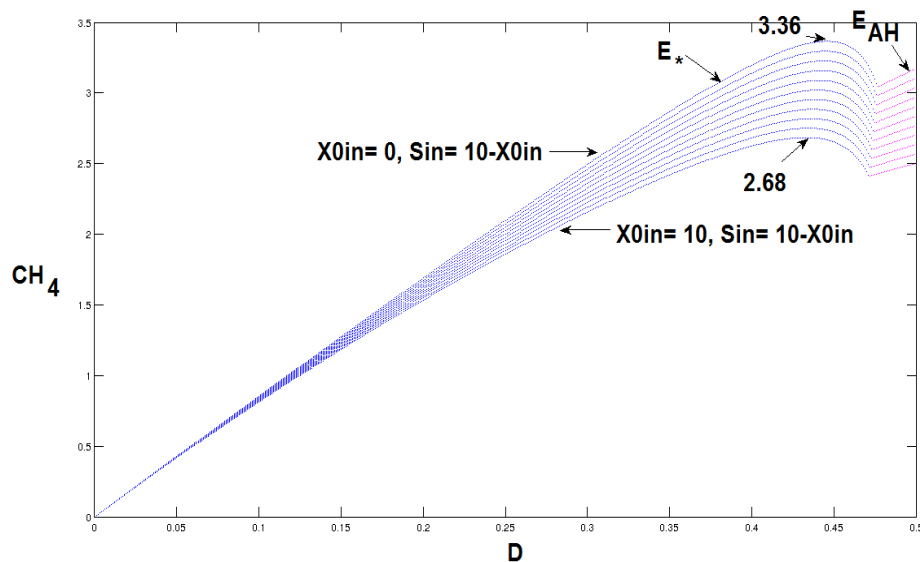


FIGURE 2.17 – La variation du taux de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$: Les courbes bleues représentent les taux de méthane dans le cas où $V^{(0)} > \lambda_V$ et les courbes roses les taux de méthane dans le cas où $V^{(0)} < \lambda_V$, selon les valeurs de X_{0in} et de S_{in} .

Dans la mesure où il existe un rendement de conversion du substrat solide en substrat soluble, selon que la matière organique se trouve sous l'une ou l'autre forme, la production de méthane diffère. Les Figures 2.16 et 2.17 montrent que pour une même valeur de $S_{in} + X_{0in}$, on produit plus de méthane en augmentant la concentration S_{in} du substrat sous forme soluble qu'en augmentant la concentration X_{0in} du substrat sous forme particulaire à l'entrée.

Remarque : Si les valeurs des concentrations à l'entrée S_{in} et X_{0in} sont plus élevées alors la courbe du biogaz en fonction de D garde la même concavité et le maximum s'approche de $D = \min(m_s, m_v, m_a, m_h)$. Mais, si ces concentrations sont assez faibles alors le maximum s'approche de $D = 0$. Voir Figure 2.18.

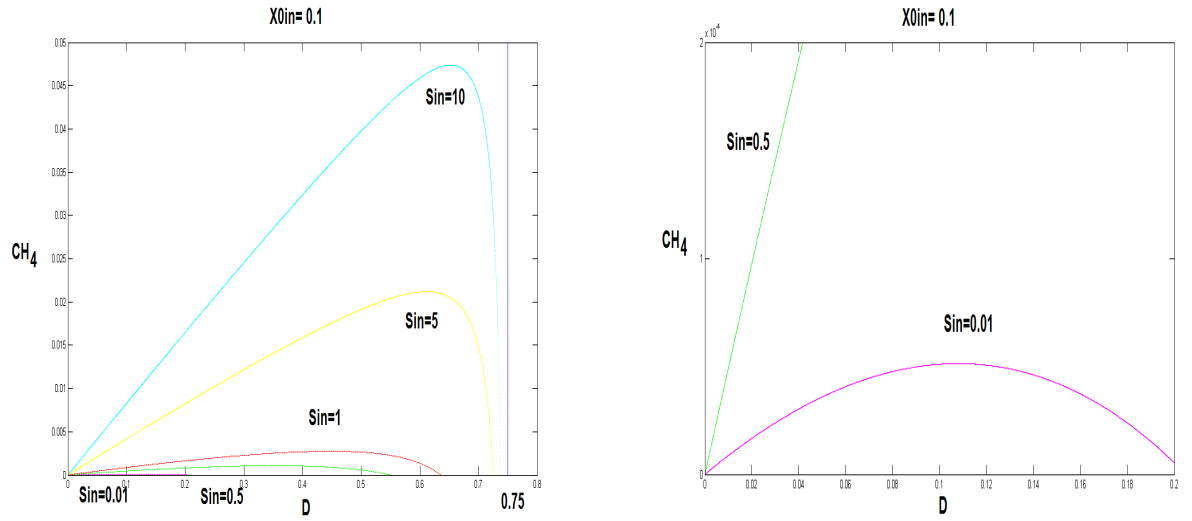


FIGURE 2.18 – La courbe du méthane CH_4 suivant les concentrations à l'entrée S_{in} et X_{0in} , la figure à droite est un agrandissement du bas de la figure à gauche.

2.3.1.2 Taux d'hydrogène produit

Le schéma réactionnel du modèle complet de la digestion anaérobie (en ajoutant l'étape d'hydrolyse) montre que l'hydrogène (H) provient, d'une part, du substrat soluble (S) et d'autre part, des AGV (V).

Le taux d'hydrogène produit est donné par la formule suivante :

$$Q_{H2} = \alpha_3 g_S (S_{|S=S^*}) X_{S|X_S=X_S^*} + \alpha_4 g_V (V_{|V=V^*}) X_{V|X_V=X_V^*}$$

avec $\alpha_3 = \frac{1-c_s}{c_s}$ et $\alpha_4 = \frac{1-c_v}{c_v}$.

Le tableau 2.9 donne le taux d'hydrogène produit en chaque équilibre.

Équilibre	Q_{H_2}
E_l	0
E_0, E_H, E_A et E_{AH}	$\alpha_3 DX_S^*$
E_V, E_{VH}, E_{VA} et E_*	$\alpha_3 DX_S^* + \alpha_4 Dc_v(V^{(0)} - \lambda_V)$

TABLE 2.9 – Taux d’hydrogène produit en chaque équilibre du modèle (2.1) sans inhibition, dans le cas où $r_0 = k_{hyd}X_0$.

On peut déduire donc que :

- 1) Si $V^{(0)} > \lambda_V$ alors le taux d’hydrogène produit par le modèle sans inhibition est maximal à l’un des équilibres E_V, E_{VH}, E_{VA} ou E_* , dès qu’ils existent et sont stables.
 - Si $\bar{A} < \lambda_A$ et $\bar{H} < \lambda_H$ alors le taux d’hydrogène est maximal en E_V .
 - Si $\bar{H} > \lambda_H$ et $\bar{A} < \lambda_A$ alors le taux d’hydrogène est maximal en E_{VH} .
 - Si $\bar{A} > \lambda_A$ et $\bar{H} < \lambda_H$ alors le taux d’hydrogène est maximal en E_{VA} .
 - Si $\bar{A} > \lambda_A$ et $\bar{H} > \lambda_H$ alors le taux d’hydrogène est maximal en E_* .

Notons que d’après le schéma réactionnel de la Figure 1.1, si $X_H = 0$ alors H s’accumule dans le milieu. Ceci est vérifié par les équilibres E_V et E_{VA} . Dans ce cas $V^{(0)} > \lambda_V$ et $\bar{H} < \lambda_H$, les biomasses X_S et X_V coexistent mais $X_H = 0$ et le flux d’hydrogène est donné dans la figure 2.19.

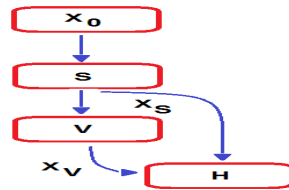


FIGURE 2.19 – Le flux d’hydrogène dans le cas $V^{(0)} > \lambda_V$ et $\bar{H} < \lambda_H$

- 2) Si $V^{(0)} < \lambda_V$ alors le maximum de taux d’hydrogène est donné par E_0, E_H, E_A ou E_{AH} :
 - Si $A^{(0)} < \lambda_A$, $H^{(0)} < \lambda_H$ et $S_{in}^* > \lambda_S$ alors le taux d’hydrogène est maximal en E_0 .
 - Si $A^{(0)} < \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$ alors le taux d’hydrogène est maximal en E_H .
 - Si $H^{(0)} < \lambda_H$ et $A^{(0)} > \lambda_A$ alors le taux d’hydrogène est maximal en E_A .
 - Si $A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$ alors le taux d’hydrogène est maximal en E_{AH} .
 Dans le cas $V^{(0)} < \lambda_V$ et $H^{(0)} < \lambda_H$, les biomasses X_H et X_V sont nulles pour l’équilibre E_A et E_0 et le flux d’hydrogène est donné dans la figure 2.20.

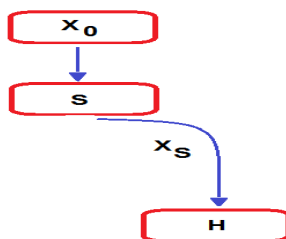


FIGURE 2.20 – Le flux d’hydrogène dans le cas $V^{(0)} < \lambda_V$ et $H^{(0)} < \lambda_H$

Le taux maximal d’hydrogène produit est représenté dans les figures 2.21 et 2.22.

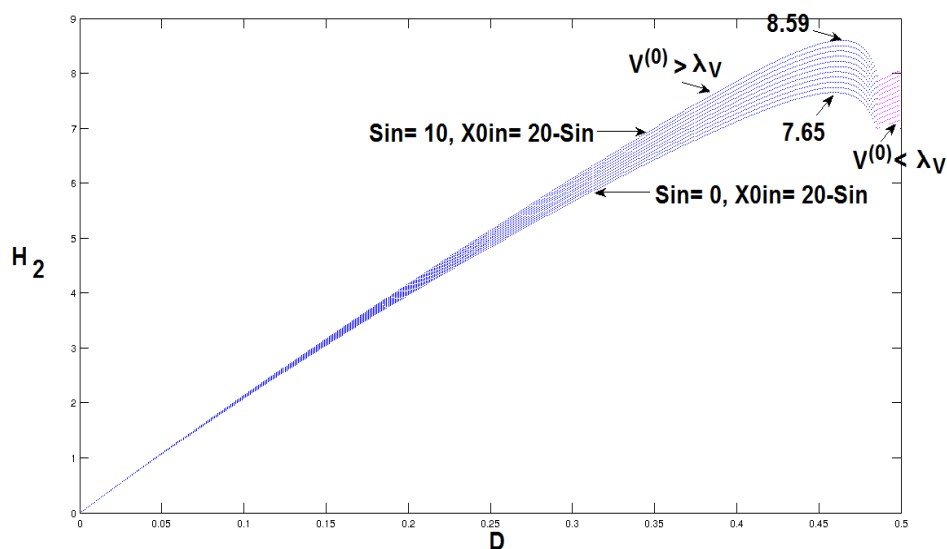


FIGURE 2.21 – La variation du taux d’hydrogène pour $X_{0in} + S_{in} = 20$ et $0 \leq S_{in} \leq 10$

Ici aussi, la production de l’hydrogène diffère, selon que la matière organique se trouve sous la forme soluble ou particulaire. On voit dans les Figures 2.21 et 2.22 qu’en maintenant la somme $X_{0in} + S_{in}$ constante, le taux d’hydrogène est d’autant plus élevé que la concentration S_{in} est plus grande.

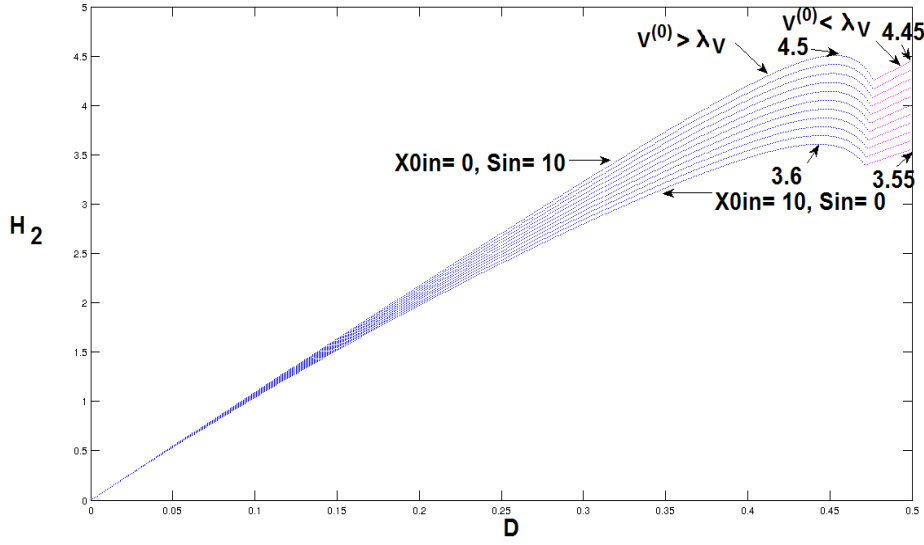


FIGURE 2.22 – La variation du taux d’hydrogène pour $S_{in} + X_{0in} = 10$ et $0 \leq X_{0in} \leq 10$

Remarque :

Pour les équilibres tels que $X_V^* = 0$, le taux d’hydrogène est $Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^*$ avec $X_S^* = c_s(S_{in}^* - \lambda_S)$ et $\lambda_S = \frac{Dk_s}{m_s - D}$. D’où

$$Q_{H_2} := Q_{H_2}(D) = \alpha_3 D c_s S_{in}^* - \frac{\alpha_3 D^2 c_s k_s}{m_s - D}.$$

En dérivant par rapport à D , on obtient

$$Q'_{H_2}(D) = \alpha_3 c_s S_{in}^* + \frac{\alpha_3 D^2 c_s k_s}{(m_s - D)^2} - \frac{2\alpha_3 D c_s k_s}{(m_s - D)^2}.$$

Par suite, $Q'_{H_2}(D) = 0$ est équivalent à

$$(S_{in}^* + k_s)\alpha_3 c_s D^2 - 2m_s \alpha_3 c_s (S_{in}^* + k_s)D + m_s^2 \alpha_3 c_s S_{in}^* = 0.$$

Donc, on peut déterminer le taux de dilution qui maximise le taux d’hydrogène produit en résolvant cette équation de second degré. Le discriminant $\Delta = 4m_s^2 \alpha_3^2 c_s^2 k_s (k_s + S_{in}^*) > 0$ et les racines sont :

$$D_1 = m_s \left(1 - \sqrt{\frac{k_s}{k_s + S_{in}^*}}\right) > 0 \quad \text{et} \quad D_2 = m_s \left(1 + \sqrt{\frac{k_s}{k_s + S_{in}^*}}\right) > 0.$$

On remarque que $D_1 < m_s$, $D_2 > m_s$ et $D = m_s$ est une asymptote verticale de Q_{H_2} . Donc, pour $D \in [0, m_s[$, le maximum d’hydrogène est donné pour $D = D_1$ et pour $D \in [0, D_1[$, Q_{H_2} est croissante, et pour $D \in]D_1, m_s[$, Q_{H_2} est décroissante. Le taux maximal d’hydrogène est atteint en une valeur entre 0 et m_s . On peut déduire la position du maximum, selon les cas suivants :

- Si S_{in}^* est proche de 0 alors $(\frac{k_s}{k_s+S_{in}^*})$ est proche de 1. Par suite, D_1 est proche de 0.
- Si S_{in}^* prend des valeurs importantes alors $(\frac{k_s}{k_s+S_{in}^*})$ est proche de 0. Par suite, D_1 est proche de m_s .
- Si $S_{in}^* = 3k_s$ alors $(\frac{k_s}{k_s+S_{in}^*})$ est égal à $\frac{1}{4}$. Par suite, $D_1 = \frac{m_s}{2}$.

Le taux maximal d'hydrogène, atteint en $D = D_1$ est

$$Q_{H_2}(D_1) = \alpha_3 D_1 c_s S_{in}^* - \frac{\alpha_3 D_1^2 c_s k_s}{m_s - D_1},$$

avec

$$D_1 = m_s \left(1 - \sqrt{\frac{k_s}{k_s + S_{in}^*}}\right).$$

2.3.2 Le taux de biogaz produit pour le modèle avec inhibition

2.3.2.1 Taux de méthane produit

Le schéma réactionnel du modèle complet de la digestion anaérobie prenant en compte l'étape d'hydrolyse montre que : d'une part, une forte concentration de l'acétate peut inhiber la croissance des bactéries méthanogènes hydrogénotrophes X_H . D'autre part, une forte concentration d'hydrogène peut inhiber la croissance des bactéries acétogènes X_V .

Le taux de méthane produit en un équilibre E est donné par la formule suivante :

$$Q_{CH_4}(E) = \alpha_1 g_A(A|_{A=A^*})X_{A|X_A=X_A^*} + \alpha_2 g_H(H|_{H=H^*}, A|_{A=A^*})X_{H|X_H=X_H^*}$$

On calcule pour chaque équilibre le taux de biogaz produit, voir Tableau 2.10.

Équilibre	Q_{CH_4}
E_1 et E_7	0
E_2	$\alpha_2 c_h D (H^{(0)} - \lambda_H^0)$
E_3	$\alpha_1 c_a D (A^{(0)} - \lambda_A^1)$
E_4	$\alpha_1 c_a D (A^{(0)} - \lambda_A^2)$
E_5	$\alpha_1 c_a D (A^{(0)} - \lambda_A^1) + \alpha_2 c_h D (H^{(0)} - \lambda_H^1)$
E_6	$\alpha_1 c_a D (A^{(0)} - \lambda_A^2) + \alpha_2 c_h D (H^{(0)} - \lambda_H^2)$
E_8	$\alpha_2 D c_h (H_V^{(0)} - \check{H} - \gamma_{vh} c_v \check{V})$
E_9	$\alpha_1 D c_a (A_V^{(0)} - \lambda_A^1 - \gamma_{va} c_v \hat{V})$
E_{10}	$\alpha_1 D c_a (A_V^{(0)} - \lambda_A^2 - \gamma_{va} c_v \hat{V})$
E_{11}	$\alpha_1 D c_a (A^1 - \lambda_A^1) + \alpha_2 D c_h (H^1 - \lambda_H^1)$
E_{12}	$\alpha_1 D c_a (A^2 - \lambda_A^2) + \alpha_2 D c_h (H^2 - \lambda_H^2)$

TABLE 2.10 – Taux de méthane produit pour chaque équilibre du modèle (2.4) avec hydrolyse enzymatique et inhibition.

Les seuils de rentabilité λ_A^1, λ_A^2 sont définis, pour $D < \frac{m_a}{1+2\sqrt{\frac{k_a}{k_I}}}$ par :

$$\lambda_A^1 = \frac{(m_a - D) - \sqrt{(D - m_a)^2 - 4D^2 \frac{k_a}{k_I}}}{\frac{2D}{k_I}}, \quad \lambda_A^2 = \frac{(m_a - D) + \sqrt{(D - m_a)^2 - 4D^2 \frac{k_a}{k_I}}}{\frac{2D}{k_I}}.$$

$\lambda_H^1, \lambda_H^2, \lambda_V^1$ et λ_V^2 sont donnés par :

$$\lambda_H^1 = \frac{D(k_h + \mu_a \lambda_A^1)}{m_h - D}, \quad \lambda_H^2 = \frac{D(k_h + \mu_a \lambda_A^2)}{m_h - D}, \quad \text{pour } D < \min\left(m_h, \frac{m_a}{1 + 2\sqrt{\frac{k_a}{k_I}}}\right),$$

$$\lambda_V^1 = \frac{D(k_v + \mu_h \lambda_H^1)}{m_v - D}, \quad \lambda_V^2 = \frac{D(k_v + \mu_h \lambda_H^2)}{m_v - D}, \quad \text{pour } D < \min\left(m_v, m_h, \frac{m_a}{1 + 2\sqrt{\frac{k_a}{k_I}}}\right).$$

Notons que si $X_A = 0$ alors l'acétate A s'accumule dans le milieu. Par suite, la croissance des bactéries méthanogènes hydrogénéotrophes X_H sera aussi inhibée, ce qui inhibe la production du méthane. Maintenant, si $X_H = 0$ alors l'hydrogène s'accumule dans le milieu, ce qui inhibe la croissance des bactéries acétogènes X_V . Par suite, la production de l'acétate A et de l'hydrogène H diminue et aussi celle du méthane.

Les équilibres où les biomasses $X_A \neq 0$ et $X_H \neq 0$ sont E_5, E_6, E_{11} et E_{12} . Comme $Q_{CH_4}(E_5) > Q_{CH_4}(E_6)$ et $Q_{CH_4}(E_{11}) > Q_{CH_4}(E_{12})$ alors le taux maximal du méthane produit est donné soit par l'équilibre E_5 soit par l'équilibre E_{11} .

Dans le cas $A^{(0)} > \max(\lambda_A^1, A^1)$ et $H^{(0)} > \max(\lambda_H^1, H^1)$, le taux maximal du méthane produit est donné par l'équilibre E_5 . Dans ce cas, les biomasses X_S, X_H et X_A coexistent et X_V est lessivée et le flux de méthane est donné dans la figure 2.15.

Dans le cas $A^1 > \max(\lambda_A^1, A^{(0)})$ et $H^1 > \max(\lambda_H^1, H^{(0)})$, le taux maximal du méthane produit est donné par l'équilibre E_{11} . Dans ce cas, toutes les biomasses coexistent et le flux de méthane est donné dans la figure 2.14.

Comme $\lambda_A^1 < \lambda_A^2$, le taux du méthane produit par l'équilibre E_3 est plus grand que le taux de méthane produit par l'équilibre E_4 . Si $A^{(0)} > \lambda_A^1, H^{(0)} < \lambda_H^1$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$ alors le taux maximal du méthane produit est donné par l'équilibre E_3 . Dans ce cas, les bactéries méthanogènes hydrogénéotrophes X_H et les bactéries acétogènes X_V sont lessivées et les bactéries méthanogènes acétoclastes X_A existent et le flux de méthane est donné dans la figure 2.23

Pour les simulations suivantes, on prend $\mu_h = \mu_a = 1, k_I = 100, k_0 = 1$ et $k_{hyd} = 2$. On représente donc le taux du méthane produit, pour $D < \min\left(m_s, m_h, \frac{m_a}{1+2\sqrt{\frac{k_a}{k_I}}}\right)$, voir Figures 2.24, 2.25 et 2.26. On fait varier X_{0in} entre 0 et 10 tout en maintenant la somme $X_{0in} + S_{in} = 10$. Le taux de méthane est plus élevé quand la concentration du substrat sous forme soluble S_{in} est plus importante.

Dans la figure 2.26, on a toujours $S_{in} + X_{0in} = 10, 0 \leq X_{0in} \leq 10$, et $0 \leq D \leq 0.7$. En prenant d'autres valeurs de paramètres, par exemple celles de [35] : $k_I = 10, \mu_h = 1$ et $\mu_a = 5$, on trace le taux du méthane produit pour $0 \leq X_{0in} \leq 10$ et $S_{in} = 10 - X_{0in}$, voir Figure 2.27 et Figure 2.28.

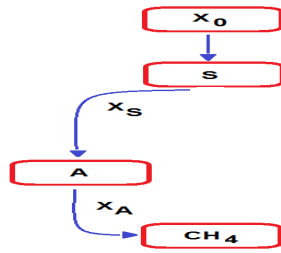


FIGURE 2.23 – Le flux de méthane dans le cas $A^{(0)} > \lambda_A^1$ et $H^{(0)} < \lambda_H^1$

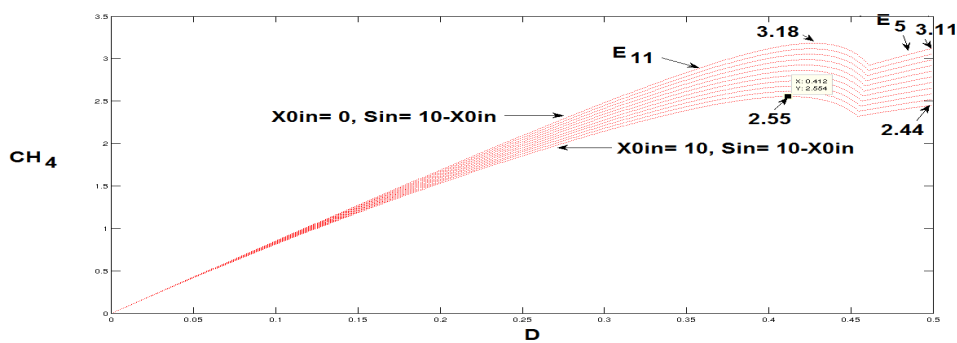


FIGURE 2.24 – La variation du taux maximal du méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$, $0 \leq X_{0in} \leq 10$ et $0 \leq D \leq 0.5$

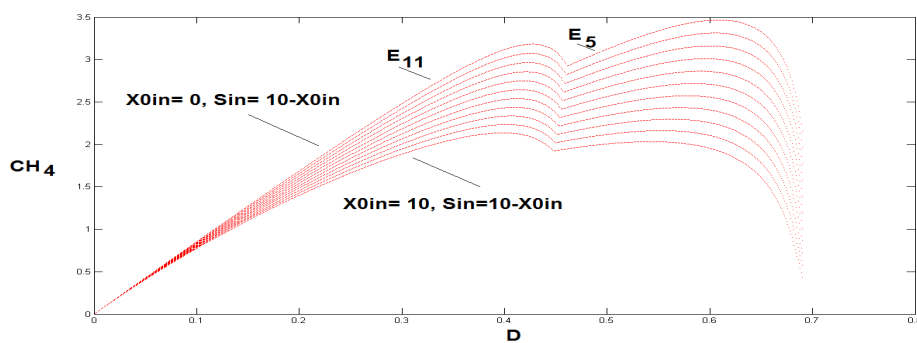


FIGURE 2.25 – La variation du taux maximal de méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$, $0 \leq X_{0in} \leq 10$ et $0 \leq D \leq 0.7$

Dans les Figures 2.27 et 2.28, le taux de méthane produit par l'équilibre E_{11} est un maximum global si $S_{in} < 4$, c'est un maximum local si $4 \leq S_{in}$. A l'équilibre E_5 , c'est un maximum global si $4 \leq S_{in}$.

Avec nouveau jeu de paramètres, le taux maximal de biogaz est toujours donné par l'un des équilibres E_{11} ou E_5 . Lorsque, les paramètres μ_a et/ou μ_h augmentent et k_I diminue, l'inhibition augmente et on produit moins de méthane, voir Figure 2.25 et 2.28. Dans

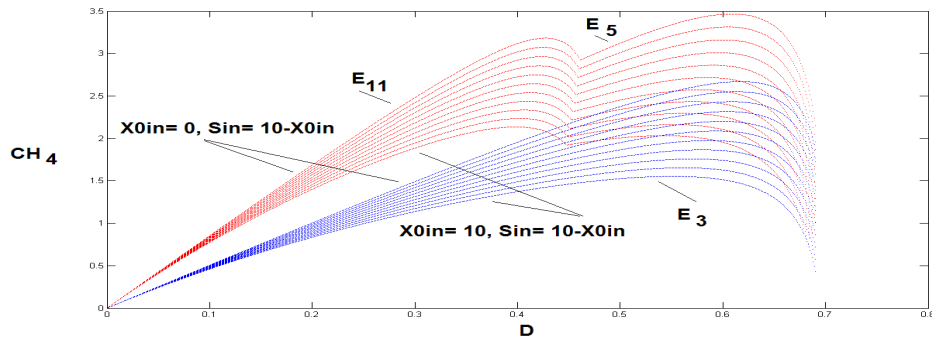


FIGURE 2.26 – La variation du taux maximal du méthane aux équilibres E_3 , E_5 et E_{11}

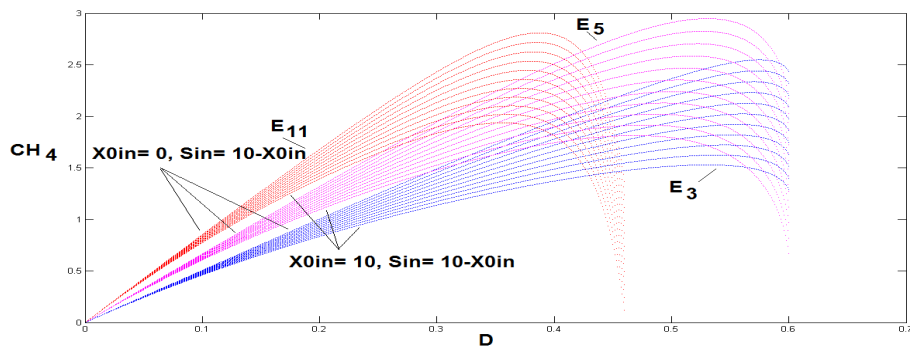


FIGURE 2.27 – La variation du taux de méthane pour $k_I = 10$, $\mu_h = 1$ et $\mu_a = 5$.

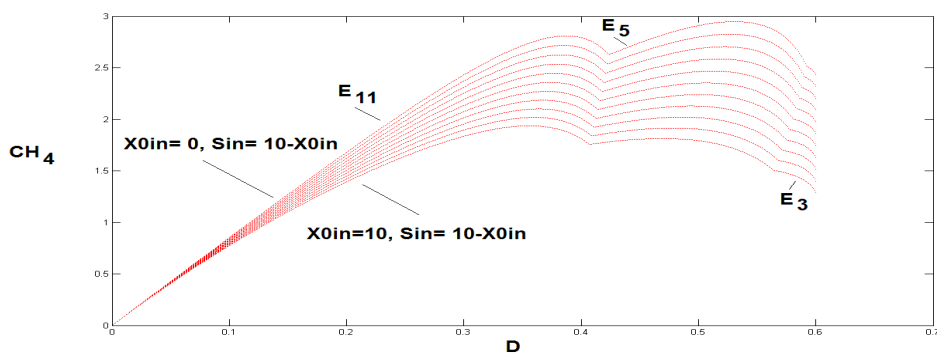


FIGURE 2.28 – La variation du taux maximal du méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 10$, $0 \leq X_{0in} \leq 10$, $0 \leq D \leq 0.6$

la Figure 2.25, on peut voir que le taux maximal de biogaz est de 3.5 mais dans la Figure 2.28, ce taux ne dépasse pas 3.

Pour $k_I = 10$, $\mu_h = 1$ et $\mu_a = 5$, on trace le méthane produit pour $X_{0in} = 0$ et $S_{in} = 5$, voir Figure 2.29. La Figure 2.30 présente le taux de méthane produit pour $S_{in} + X_{0in} = 5$ et $0 \leq X_{0in} \leq 5$.

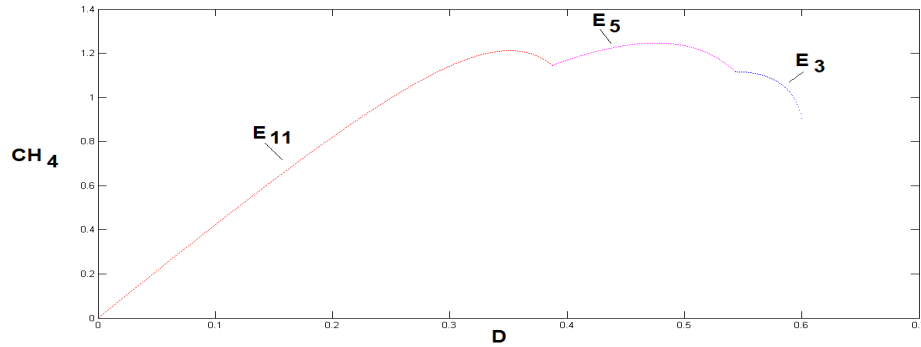


FIGURE 2.29 – Le taux maximal de méthane pour $S_{in} = 5$, $X_{0in} = 0$ et $0 \leq D \leq 0.6$ aux équilibres E_3 , E_5 et E_{11} .

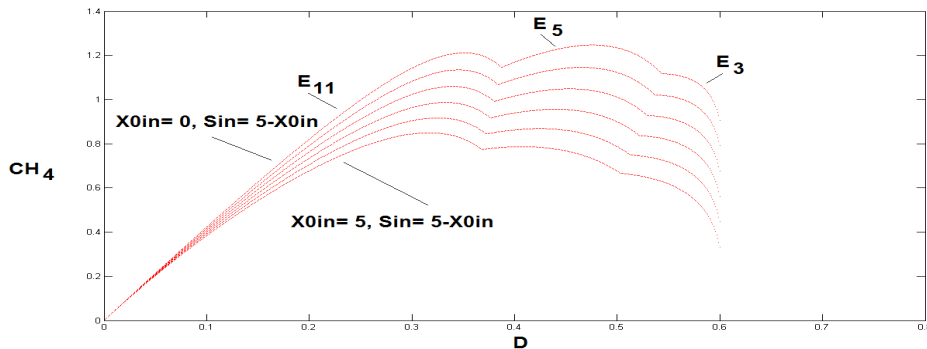


FIGURE 2.30 – La variation du taux maximal du méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 5$, $0 \leq X_{0in} \leq 5$, $0 \leq D \leq 0.6$.

La Figure 2.29 montre que, pour $0 \leq D \leq 0.6$ le maximum global du taux de méthane est donné par l'équilibre E_5 . Ce résultat est analogue à celui trouvé dans [35]. Mais, comme dans [35], voir Figure 5 (c), on tient compte des termes de mortalité des biomasses, le taux de biogaz produit est légèrement inférieur à celui illustré dans la Figure 2.29.

En tenant compte de l'étape d'hydrolyse de la matière particulaire pour $k_0 = 1$ et $k_{hyd} = 1$, et en augmentant la somme de $X_{0in} + S_{in}$ de 5 à 10, Voir Figure 2.30 et Figure 2.28, on remarque que le taux de biogaz produit est plus important que dans la Figure 2.28 (il peut atteindre le double). Donc, l'augmentation du substrat solide X_{0in} à l'entrée, pour la constante d'hydrolyse $k_{hyd} = 1$, favorise bien l'augmentation du taux de biogaz produit.

Maintenant, si on augmente le coefficient d'inhibition k_I , le taux de méthane produit est donnée par les Figures 2.31 et 2.32, où on prend $k_I = 100$, $\mu_h = 1$, $\mu_a = 1$, $S_{in} + X_{0in} = 5$

et $0 \leq X_{0in} \leq 5$.

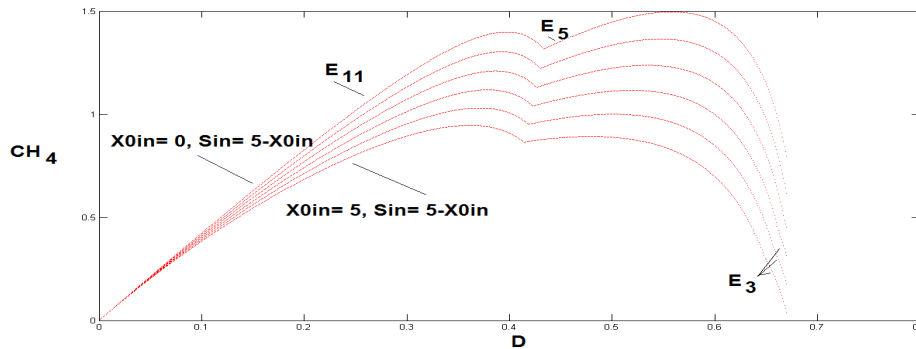


FIGURE 2.31 – La variation du taux maximal du méthane pour $S_{in} + X_{0in} = 5$, $0 \leq X_{0in} \leq 5$ et $0 \leq D \leq 0.7$

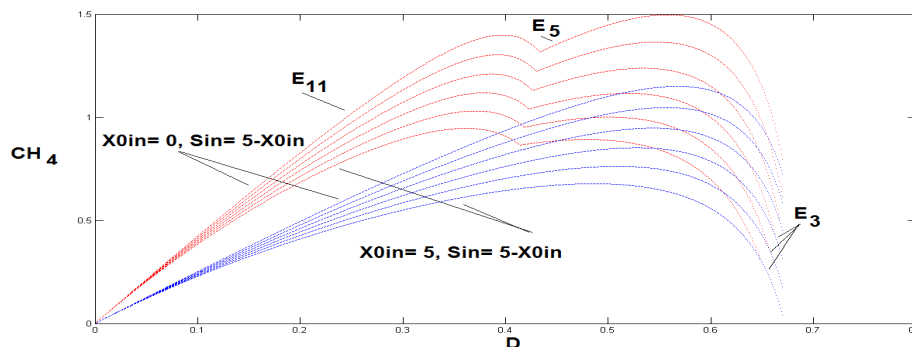


FIGURE 2.32 – La variation du taux maximal du méthane aux équilibres E_3 , E_5 et E_{11} pour $k_I = 100$.

La Figure 2.31 montre aussi que le taux maximal de biogaz est atteint soit à l'équilibre E_{11} soit à l'équilibre E_5 . En diminuant les valeurs de μ_a et de μ_h et en augmentant la valeur de k_I , l'inhibition devient plus faible, et le taux de biogaz augmente, (comparer le taux maximal de la Figure 2.31 et celui de la Figure 2.32).

2.3.2.2 Taux d'hydrogène produit

La figure 1.4 montre que l'hydrogène provient des acides gras volatiles (V) et du substrat simple (S). Une forte concentration de l'acétate peut inhiber la croissance des bactéries méthanogènes hydrogénotrophes X_H .

Le taux d'hydrogène produit est donné par la formule suivante :

$$Q_{H_2} = \alpha_3 g_S(S_{|S=S^*})X_{S|X_S=X_S^*} + \alpha_4 g_V(V_{|V=V^*}, H_{|H=H^*})X_{V|X_V=X_V^*}$$

On calcule pour chaque équilibre, le taux d'hydrogène produit :

Équilibre	Q_{H_2}
E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 et E_6	$\alpha_3 DX_S^*$
E_7, E_9 et E_{10}	$\alpha_3 DX_S^* + \alpha_4 Dc_v(V^{(0)} - \hat{V})$
E_8	$\alpha_3 DX_S^* + \alpha_4 Dc_v(V^{(0)} - \check{V})$
E_{11}	$\alpha_3 DX_S^* + \alpha_4 Dc_v(V^{(0)} - \lambda_V^1)$
E_{12}	$\alpha_3 DX_S^* + \alpha_4 Dc_v(V^{(0)} - \lambda_V^2)$

TABLE 2.11 – Taux d'hydrogène produit pour chaque équilibre du modèle (2.4) avec hydrolyse enzymatique et inhibition.

Si $X_A = 0$ alors l'acétate A s'accumule dans le milieu. Par suite, la croissance des bactéries méthanogènes hydrogénotrophes X_H sera inhibée, ce qui augmentera la quantité de l'hydrogène H_2 . Si $X_H = 0$ alors l'hydrogène H_2 s'accumule dans le milieu. Les équilibres où la biomasse $X_A = 0$ sont E_2 et E_8 et les équilibres où $X_H = 0$ sont E_1, E_3, E_4 , et E_7, E_9, E_{10} .

Dans le cas $V^{(0)} < \hat{V}$, $V^{(0)} < \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$, le taux maximal d'hydrogène produit est donné par l'un des équilibres E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 et E_6 , lorsqu'ils existent. Dans ce cas, d'un côté, si X_H et X_V sont nulles alors le taux maximal d'hydrogène est donnée par E_1, E_3 ou E_4 et le flux de l'hydrogène est donné dans la figure 2.20. D'un autre côté, si $X_H \neq 0$ et $X_V = 0$ alors le taux maximal d'hydrogène est donné par E_2 et le flux de l'hydrogène est donné dans la figure 2.33.

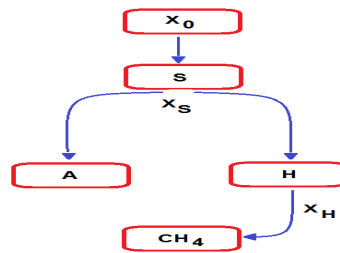


FIGURE 2.33 – Le flux d'hydrogène dans le cas $V^{(0)} < \hat{V}$, $V^{(0)} < \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$

Dans le cas $V^{(0)} > \hat{V}$, $V^{(0)} < \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$, le taux maximal d'hydrogène produit est donné par l'un des équilibres E_7, E_9 ou E_{10} , lorsqu'ils existent. Dans ce cas, lorsque $X_H = 0$ et $X_V \neq 0$ le flux d'hydrogène est donné dans la figure 2.19.

Dans le cas $V^{(0)} < \hat{V}$, $V^{(0)} > \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$, le taux maximal d'hydrogène produit est donné par l'équilibre E_8 . Dans ce cas, lorsque $X_A = 0$, $X_H \neq 0$ et $X_V \neq 0$, le flux d'hydrogène est donné dans la figure 2.34.

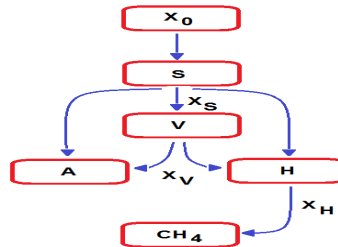


FIGURE 2.34 – Le flux d'hydrogène dans le cas $V^{(0)} < \hat{V}$, $V^{(0)} > \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$

Pour $V^{(0)} < \hat{V}$, $V^{(0)} < \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$, le taux d'hydrogène $Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^*$ est représenté dans la Figure 2.35. Ici aussi, on varie X_{0in} entre 0 et 10 avec $X_{0in} + S_{in} = 10$.

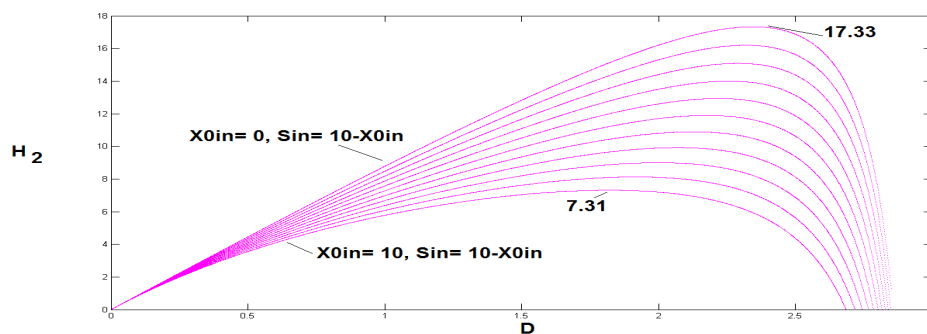


FIGURE 2.35 – La variation du taux d'hydrogène pour $V^{(0)} < \hat{V}$, $V^{(0)} < \check{V}$ et $V^{(0)} < \lambda_V^1$ et $S_{in} + X_{0in} = 10$.

Comme pour le méthane, dans la mesure où il existe un rendement de conversion du substrat solide en substrat soluble, selon que la matière organique se trouve sous l'une ou l'autre forme, la production de l'hydrogène diffère. La quantité d'hydrogène est plus élevée quand l'hydrogène est produit du substrat sous forme soluble S_{in} que du substrat sous forme particulaire X_{0in} .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un modèle de chémostat avec dégradation enzymatique du substrat sous forme particulaire. Nous avons étudié un modèle à quatre étapes et nous avons établi les conditions d'existence et le comportement asymptotique local et global des points d'équilibre pour les modèles avec et sans inhibition. Prendre en compte

l'inhibition dans le modèle influe sur la stabilité des équilibres. De plus, nous avons déterminé le taux de biogaz pour chaque équilibre pour les deux modèles et nous avons illustré le taux maximal de biogaz produit. Pour des concentrations des substrats particulaire et soluble à l'entrée fixées, selon les conditions initiales, on peut converger vers un équilibre où on a un taux maximum de biogaz ou un équilibre où ce taux s'annule. On peut varier les taux de dilution pour éviter les régions de bistabilité. D'autre part, on a montré que la valeur des paramètres influe sur le taux de biogaz produit. De même, l'augmentation des concentrations des deux substrats à l'entrée pour un modèle avec hydrolyse et sans mortalité des biomasses favorise bien l'augmentation du biogaz produit. Le modèle sans inhibition produit plus de biogaz que le modèle avec inhibition. Pour des concentrations à l'entrée fixées, il existe un taux de dilution qui maximise le taux de méthane. Pour ce taux, la concentration des bactéries méthanogènes acétoclastes augmente et celle de l'acétate deviennent assez faibles, ce qui affaiblit l'inhibition des bactéries méthanogènes hydrogénotrophes qui sont les producteurs de méthane. Pour l'hydrogène produit, il existe un taux de dilution qui maximise le taux d'hydrogène, pour des concentrations des bactéries méthanogènes hydrogénotrophes très faibles.