

État de l'art des modèles d'endommagement anisotrope

Dans le chapitre précédent, les grandes lignes du comportement ont été mises en lumière. Dans la mesure où ce comportement se rapproche de certains matériaux fragiles, nous nous appuyerons sur les travaux portant par exemple sur les bétons. Dans ce chapitre, le cadre général de la mécanique de l'endommagement est introduit. Une synthèse des modèles à endommagement anisotrope et effet unilatéral est réalisée. Cette synthèse conduit à ne choisir que certains de ces modèles pour des raisons de constance thermodynamique. Leur comparaison nous permettra de ne retenir qu'une seule des formulations.

2.1 Mécanique de l'endommagement

Comme cela a été montré dans le chapitre 1, le matériau présente des porosités, des fissures et se compose de différentes phases. Les porosités et les fissures sont des frontières de la matière. Leurs évolutions et notamment la propagation des fissures changent les conditions aux limites de la structure, tel que nous l'indique la mécanique de la rupture.

Puisque l'objectif de cet étude est de modéliser le comportement mécanique de ce matériau, différentes solutions nous sont offertes. Il est possible, par exemple, de modéliser les fissures, porosités et les interfaces à l'échelle des différents constituants, à la façon d'une structure. Cette solution serait relativement précise à la mesure de la connaissance de la structure réelle. L'autre possibilité s'appuie sur une représentation périodique de la microstructure du matériau. Par une technique d'homogénéisation, il est alors possible de déterminer un milieu homogène équivalent. Cette modélisation ne nécessite que peu de ressources numériques. Il est cependant difficile de choisir un volume élémentaire représentatif (VER) quand les phénomènes qu'il doit représenter évoluent (nucléation et coalescence de fissures, décohésion), compte tenu du

pré-endommagement supposé et de la très faible périodicité de la structure. Enfin, il est possible de modéliser le comportement du matériau par la mécanique des milieux continus. La continuité du milieu implique la définition de variables continues pour décrire le comportement de la structure du matériau. C'est à ces fins qu'a été introduit le concept de l'endommagement.

2.1.1 Endommagement et contrainte effective

Kachanov en 1958 [44] fut le premier à utiliser le concept d'endommagement pour expliquer la rupture par fluage dans les aciers. Il considéra une barre soumise à un effort de traction uniaxial constant et il affirma que, quoique la force restât la même, la contrainte augmentait car les microfissures réduisaient la surface résistante.

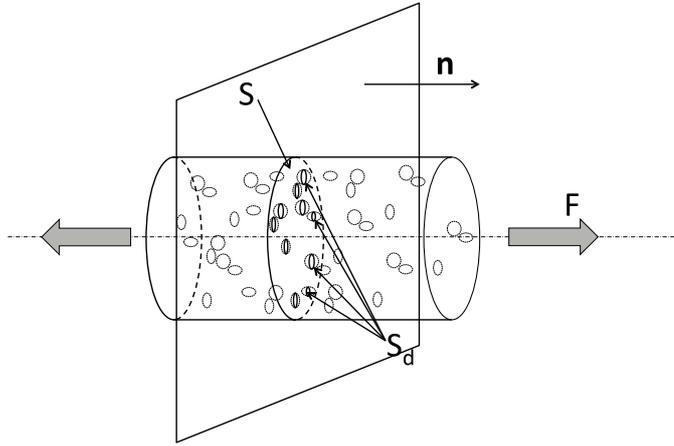


FIGURE 2.1 – Définition de la contrainte effective appliquée sur un VER [73].

En d'autres termes, si pour un corps endommagé, on choisit un VER autour d'un point P , d'abscisse \mathbf{e}_1 et un plan passant par ce point P , orienté par sa normale \mathbf{n} (figure 2.1), on définit :

- S l'aire de la surface d'intersection entre le plan et le VER ;
- $S_{d_{\mathbf{e}_1}}$ la somme des aires de toutes les microfissures et des micro-pores qui se trouvent dans le plan ;
- $d(P, \mathbf{n}, \mathbf{e}_1)$ la valeur de l'endommagement liée au point P dans la direction \mathbf{n} et à l'abscisse \mathbf{e}_1 :

$$d(P, \mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = \frac{\partial S_{d_{\mathbf{e}_1}}}{\partial S}. \quad (2.1)$$

Pour définir une variable continue $d_{P,\mathbf{n}}$ sur le VER il faut regarder sur tous les plans le long de l'abscisse \mathbf{e}_1 et considérer celui qui est le plus endommagé (théorie du maillon le plus faible) :

$$d_{P,\mathbf{n}} = \max_{\mathbf{e}_1} [d(P, \mathbf{n}, \mathbf{e}_1)] \quad (2.2)$$

Finalement on arrive à l'expression suivante :

$$d_{P,n} = \max_{e_1} \left[\frac{\partial S_{d_{e_1}}}{\partial S} \right] \quad (2.3)$$

La surface endommagée $S_{d_{e_1}}$ est une portion de la surface totale S et l'endommagement est la valeur maximale du rapport des deux surfaces. Ainsi de 2.3 on déduit que la valeur de la variable scalaire d est bornée entre 0 et 1 : $d = 0$ pour un VER sain et $d = 1$ pour un VER complètement endommagé. Cependant, dans la réalité, la rupture survient pour des valeurs de d inférieures à 1. Ceci suggère que le mécanisme de rupture est différent du mécanisme d'endommagement.

Pour introduire la notion de la contrainte effective prenons l'exemple d'une barre de section S soumise à une traction uniaxiale par une force F (figure 2.1). La contrainte nominale est :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2.4)$$

Si maintenant on considère l'aire résistante effective ($S - S_d$), on peut définir une nouvelle contrainte :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_d} = \frac{F}{S(1 - \frac{S_d}{S})} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (2.5)$$

La contrainte $\tilde{\sigma}$ est appelée « contrainte effective » correspondant au principe d'équivalence en déformation. Les différents principes d'équivalence sont présentés dans la partie suivante.

2.1.2 Principes d'équivalences

Pour prendre en compte l'endommagement dans la modélisation, nous devons choisir le type d'équivalence utilisé. En d'autres termes, la manière dont l'endommagement affecte les caractéristiques mécaniques du matériau que ce soit dans une formulation en rigidité ou en souplesse. Il existe trois types d'équivalences : une équivalence en déformation, en contrainte ou en énergie.

Ci-dessus dans ce document, on a utilisé le principe d'**équivalence en déformation** énoncé par Chaboche et Lemaître [23] qui affirment que : *Tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective.* En d'autres termes, l'**équivalence en déformation** définit la contrainte effective comme étant la contrainte qu'il faut appliquer à l'élément de volume vierge supposé homogène pour obtenir la même déformation ϵ que celle provoquée par la contrainte nominale σ appliquée à l'élément de volume endommagé (fig. 2.2).

Si on suppose maintenant que la contrainte dans le matériau sain équivalent est la même que dans le matériau réel, alors on emploie l'**équivalence en contrainte**

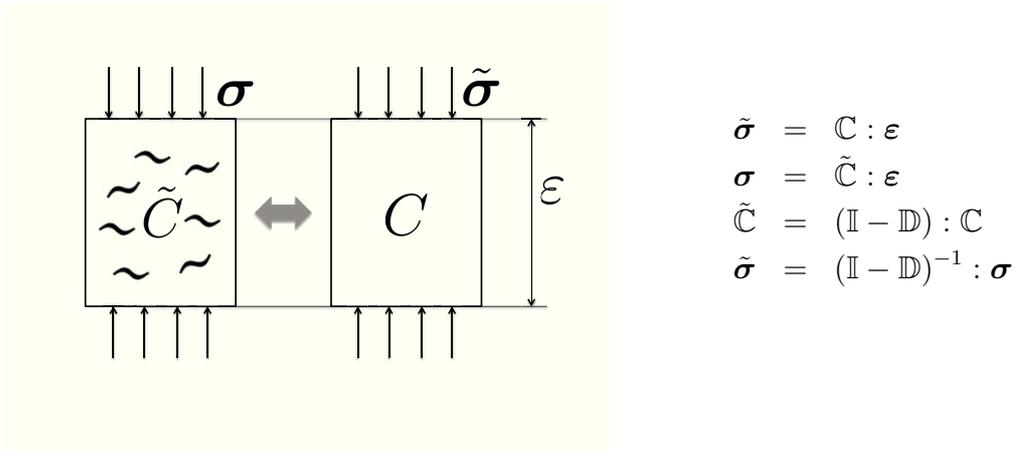


FIGURE 2.2 – Schématisation de l'équivalence en déformation.

[21] (fig. 2.3). Il s'ensuit que, pour exercer sur le matériau réel et sur le matériau sain la même contrainte, il faut appliquer à ce dernier la déformation $\tilde{\varepsilon}$.

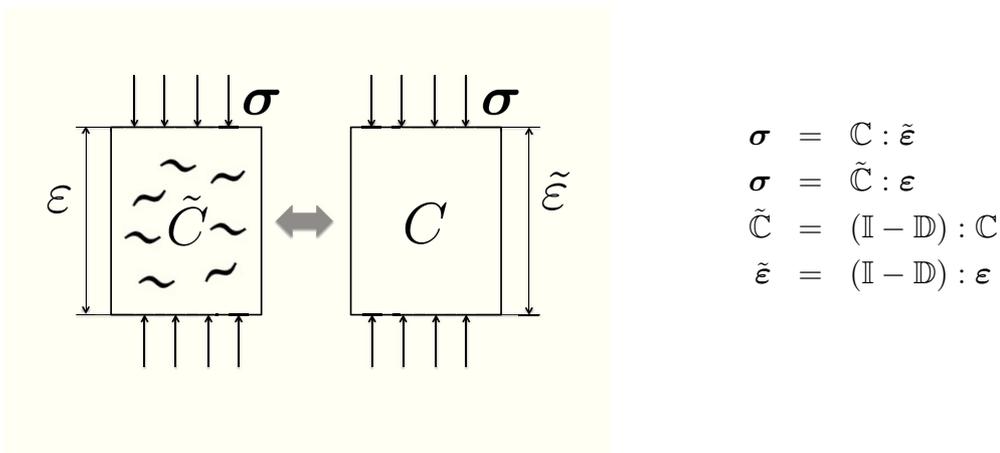


FIGURE 2.3 – Schématisation de l'équivalence en contrainte

L'équivalence en énergie définit la contrainte effective comme étant la contrainte qu'il faut appliquer à l'élément de volume vierge supposé homogène pour obtenir la même énergie que celle provoquée par la contrainte réelle appliquée à l'élément de volume endommagé (Cordebois et Sidoroff, [30]) (fig. 2.4)

Dans le cadre de cette étude, il a été choisi de faire une équivalence en déformation car, dans le cadre de l'intégration numérique, le pilotage est fait en déformation. Ce choix simplifie considérablement l'intégration.

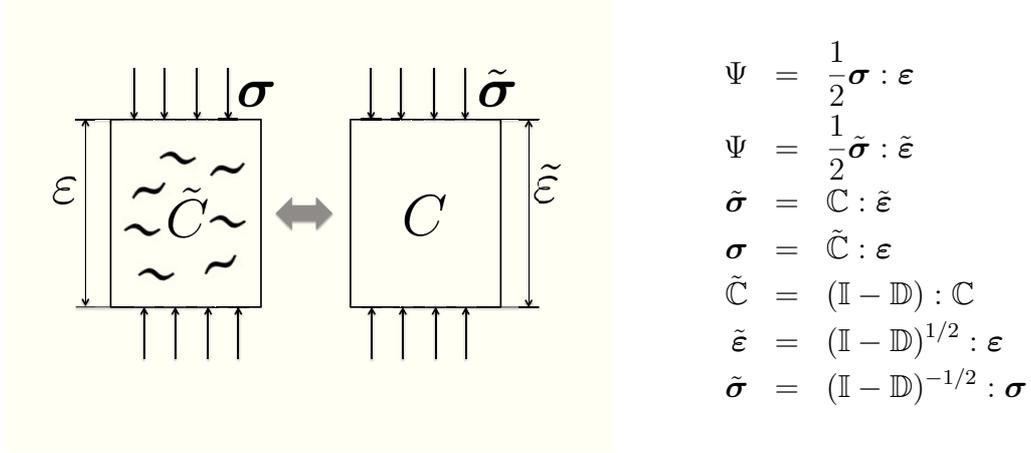


FIGURE 2.4 – Schématisation de l'équivalence en énergie

2.1.3 Cadre thermodynamique de l'endommagement

Le principe d'équivalence en déformation présenté précédemment sera l'élément clé pour introduire le cadre thermodynamique. La vision phénoménologique de l'endommagement néglige l'échelle microscopique, en affirmant la validité du principe de l'état local à l'échelle mésoscopique. Il s'agit de considérer l'énergie libre spécifique Ψ , qui joue le rôle de potentiel thermodynamique et qui est fonction convexe de toutes les variables d'état, observables et internes, et en particulier de l'endommagement.

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, d, V_k), \quad (2.6)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations, T est la température absolue, V_k désigne les autres variables internes comme par exemple les variables d'écrouissage. Si on fait l'hypothèse du découplage entre le dommage (supposé isotrope pour l'instant) et tous les autres effets représentés par les variables V_k , le potentiel 2.6 devient :

$$\Psi = \Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, T, d) + \Psi_P(\boldsymbol{\varepsilon}, T, V_k). \quad (2.7)$$

Enfin, si l'on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire isotherme, l'effet de la température sera négligé et l'expression de Ψ_d peut se réduire à :

$$\rho \Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, T, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (1 - d) \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.8)$$

dont on déduit la première loi d'état élastique du matériau endommagé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi_d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.9)$$

Par le principe d'équivalence en déformation détaillé dans la section 2.1.2, on déduit la relation suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - d} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.10)$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement est déduit de la dérivée de l'énergie libre par rapport à la variable de dommage d :

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi_d}{\partial d} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

On note $\Delta \Psi$ la densité d'énergie élastique associé à une variation de déformation et définie par :

$$\Delta \Psi = \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.12)$$

A contrainte constante, on montre que :

$$-Y = \frac{1}{2} \frac{\Delta \Psi}{\Delta d} \quad (2.13)$$

La variable $-Y$ peut être donc considérée comme le taux de restitution d'énergie élastique associé à une variation d'endommagement à contrainte constante, c'est à dire l'énergie restituée par perte de la raideur d'un milieu endommagé.

On postule aussi l'existence d'un pseudo-potential de dissipation Φ qui est une forme convexe à valeur scalaire de toutes les variables flux, les variables observables et les variables internes qui interviennent comme paramètres :

$$\Phi = \Phi(\dot{d}, \dot{V}_k, q; \boldsymbol{\varepsilon}, d, V_k, T) \quad (2.14)$$

où q est le vecteur courant de chaleur, associé au gradient de température T pour les processus non-isothermes. Le potentiel de dissipation est utilisé pour vérifier si le modèle respecte le principe d'entropie qui impose que la dissipation intrinsèque soit positive. En effet, toujours sous la même hypothèse de découplage du potentiel et à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem on a :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_i}{T} \geq 0 \quad (2.15)$$

où s est l'enthalpie spécifique, $\dot{\Psi}$ le taux d'énergie libre qui a la forme suivante :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (2.16)$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire isotherme, le deuxième principe de la thermodynamique est respecté si :

$$-Y \dot{d} \geq 0 \quad (2.17)$$

$-Y$ étant une fonction quadratique de $\boldsymbol{\varepsilon}$, on en conclut que \dot{d} doit toujours être positif ou égal à zéro. Le potentiel de dissipation, qui est une fonction convexe, nous donne par transformation de Legendre-Fenchel partielle un autre potentiel dual équivalent Φ^* . Ce dernier nous permet d'exprimer \dot{d} en fonction de Y :

$$\dot{d} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial Y} \quad (2.18)$$

Vu que Φ^* est convexe à son tour, l'équation 2.17 est automatiquement vérifiée.

2.2 Consistance et critères de choix de modèle avec prise en compte de l'unilatéralité

Il est aujourd'hui admis que la perte de cohésion de la matière par microfissuration nécessite une méthodologie différente appelée « mécanique de l'endommagement ». Cette discipline, qui trouve ses fondements dans les travaux de Kachanov [44] et Rabotnov [73], a pris son essor à la fin des années soixante-dix dans un contexte phénoménologique. Les premières approches sont basées sur des variables scalaires pour rendre compte d'un endommagement isotrope (Chaboche et Lemaître [22], Mazars [65]). Krajcinovic et Fonseka [47] ont introduit des variables vectorielles pour décrire un endommagement anisotrope. Des problèmes de symétrie du tenseur de rigidité élastique ayant été décelés dans l'écriture de ces modèles, leur développement n'a pas été poursuivi. Pour résoudre ces difficultés, plusieurs auteurs comme Ladevèze [53], Chow et Wang [29], Chaboche et Maire [62], Murakami [66], Halm et Dragon [40] ont fait appel à des variables tensorielles d'ordre deux. Malgré les améliorations apportées, quelques incohérences subsistent comme le souligne les travaux de Chaboche [24], Welemane et Cormery [83], Challamel *et al.* [26] et Carol et Willam [19]. Ces travaux mettent en évidence les critères suivants pour une formulation thermodynamique consistante :

- le tenseur de rigidité doit conserver ses symétries majeures et mineures malgré l'introduction de l'unilatéralité [24],
- lors d'un cycle d'ouverture-refermeture de microfissures, l'énergie libre doit être non dissipative [19] si un frottement dissipatif n'est pas pris en compte,
- la réponse contrainte/déformation doit être continue [26] au passage ouvert/fermé des microfissures (unilatéralité),
- l'énergie libre doit être unique et conserve ainsi son caractère de potentiel [83].

Tout modèle doit à la fois répondre à ces critères et prédire le comportement complexe du matériau agrégataire étudié. Il existe plusieurs types d'approches : macroscopiques (approches discrètes ou modèles microplans) et microscopiques (modèles basés sur l'homogénéisation). Ces modèles seront étudiés, analysés et comparés dans la section 2.3. Mais tout d'abord intéressons nous aux inconsistances thermodynamiques existants pour quelques modèles à endommagement anisotrope. Ce travail permettra de dégager une méthode de choix des modèles et d'en éviter les écueils.

2.2.1 Modèle de Chaboche et Maire

Cette formulation est développée dans le cadre de la mécanique de l'endommagement avec une approche macroscopique. Le milieu endommagé est considéré continu et élastique [62]. La description détaillée de ce concept a été développée dans les travaux de Chaboche *et al.* [21] [23]. Dans ce modèle, le potentiel thermodynamique peut être exprimé en contrainte ou en déformation. Exprimer l'énergie en fonction de la contrainte est motivé principalement par la simplicité de l'identification des pa-

2.2. CONSISTANCE ET CRITÈRES DE CHOIX DE MODÈLE AVEC PRISE EN COMPTE DE L'UNILATÉRALITÉ

ramètres. Par contre, l'expression en déformation est plus facile à implémenter dans les codes de calcul par éléments finis. L'énergie libre de Helmholtz est exprimé en fonction du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ (variable observable) et d'un tenseur d'ordre 2 d'endommagement \mathbf{d} (variable interne). Le potentiel thermodynamique est de la forme suivante :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.19)$$

l'expression du tenseur de rigidité effectif $\tilde{\mathbb{C}}$ de [62] est de la forme suivante :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^0 - \Delta\tilde{\mathbb{C}} \quad \text{avec} \quad \Delta\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{D} : \mathbb{K}^0 \quad (2.20)$$

où $\Delta\tilde{\mathbb{C}}$ représente les variations du tenseur de rigidité. \mathbb{C}^0 est le tenseur d'élasticité isotrope du matériau sain. \mathbb{K}^0 est un tenseur d'élasticité d'ordre 4 intrinsèque au matériau (peut intégrer une anisotropie initiale). Si le matériau est considéré isotrope à l'état initial alors $\mathbb{K}^0 = \mathbb{C}^0$. Le tenseur d'endommagement peut être construit de plusieurs façons :

- à partir d'un tenseur d'ordre 4 noté \mathbb{D} ,
- à partir d'un tenseur \mathbf{d} d'ordre 2 avec lequel se construit le tenseur \mathbb{D} d'ordre 4 à partir de la formule suivante :

$$\mathbb{D} = (\alpha - \beta)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{d}) + \beta(\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{d}), \quad (2.21)$$

où α et β sont deux coefficients de pondération. Les produits tensoriels contractés sont expliqués dans le glossaire page 197,

- à partir des variables scalaires δ_i (variable scalaire liée à la direction du dommage \mathbf{n}_i) si l'endommagement possède des directions privilégiées :

$$\mathbf{d}_i = \delta_i(n_i \otimes n_i) \quad (2.22)$$

La loi d'état est déduite directement du potentiel thermodynamique à partir de (2.20) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.23)$$

Pour assurer la continuité de la réponse contrainte/déformation, Chaboche et Maire [62] préfèrent introduire les effets d'ouverture/fermeture de fissures (effet unilatéral) directement sur le tenseur d'élasticité \mathbb{C}^0 , donc définir un nouveau tenseur d'effectivité $\Delta\mathbb{C}^{eff}$:

$$\Delta\mathbb{C}^{eff} = \Delta\tilde{\mathbb{C}} - \Delta\tilde{\mathbb{C}}^- \quad (2.24)$$

avec :

$$\Delta\tilde{\mathbb{C}}^- = H(-\varepsilon_n)(\mathbb{P}_n : \Delta\tilde{\mathbb{C}} : \mathbb{P}_n) \quad (2.25)$$

avec $H(x)$ est la fonction de Heaviside définie dans le glossaire page 197, \mathbb{P}_n un tenseur de projection et ε_n une projection du tenseur de déformation ε dans la direction \mathbf{n} . Ils sont donnés par les formules suivantes :

$$\mathbb{P}_n = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad , \quad \varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \quad (2.26)$$

le potentiel thermodynamique devient donc :

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \mathbb{C}^{eff} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.27)$$

Avant d'exposer les inconsistances mathématiques et thermodynamiques de ce modèle (sections 2.2.3 et 2.2.4), présentons le modèle de Halm et Dragon qui souffre lui aussi des mêmes problèmes.

2.2.2 Modèle de Halm et Dragon

Cette approche proposée par Halm et Dragon [40] rend compte des phénomènes d'activation/désactivation de l'endommagement. Le mécanisme dissipatif est décrit par une unique variable interne d'endommagement tensorielle du second ordre \mathbf{d} rendant compte de l'amplitude et de l'orientation des dommages [74]. Le tenseur \mathbf{d} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 d_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i, \quad (2.28)$$

où d_i et \mathbf{v}_i représentent respectivement les valeurs propres et vecteurs propres du tenseur \mathbf{d} . En d'autres termes, toute configuration d'endommagement est équivalente à trois systèmes orthogonaux de microfissures parallèles. L'énergie devant rester une fonction isotrope de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de \mathbf{d} , deux tenseurs symétriques d'ordre 2, on montre qu'il existe 10 invariants (J. P. Boehler [16]) :

$$\begin{aligned} & tr(\boldsymbol{\varepsilon}), (tr \boldsymbol{\varepsilon})^2, (tr \boldsymbol{\varepsilon})^3, tr(\mathbf{d}), (tr \mathbf{d})^2, (tr \mathbf{d})^3 \\ & tr(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{d}), tr(\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{d}), tr(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{d}^2), tr(\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{d}^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'autre part, l'énergie libre est choisie quadratique en $\boldsymbol{\varepsilon}$ et linéaire en \mathbf{d} . L'invariant $tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d})$ est choisi pour introduire les effets résiduels de l'endommagement. Pour ces raisons, le potentiel thermodynamique Ψ proposé par Halm et Dragon [40] est défini sous cette forme :

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = & \frac{\lambda}{2} (tr(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 + \mu tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + g tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) + \alpha tr(\boldsymbol{\varepsilon}) tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) + 2\beta tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) \\ & - (\alpha + 2\beta) \boldsymbol{\varepsilon} : \left[\sum_{i=1}^3 H(-\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i) d_i \mathbf{v}_i^{\otimes 4} \right] : \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.2. CONSISTANCE ET CRITÈRES DE CHOIX DE MODÈLE AVEC PRISE EN COMPTE DE L'UNILATÉRALITÉ

avec $\mathbf{v}_i^{\otimes 4} = \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i$. La première loi d'état est déduite de la dérivation de l'énergie par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + g\mathbf{d} + \alpha [\text{tr } (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d})\mathbf{1} + \text{tr } (\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{d}] + 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &\quad - 2(\alpha + 2\beta) \left[\sum_{i=1}^3 H(-\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i) d_i (\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \right], \end{aligned} \quad (2.31)$$

où g est une constante caractérisant les effets résiduels dus aux dommages, et α et β sont deux coefficients qui gèrent le degré d'anisotropie de la dégradation des propriétés élastiques. Le modèle de Halm et Dragon [40] s'appuie sur la décomposition spectrale du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour rendre compte de l'effet unilatéral de l'endommagement. En effet, l'opérateur tensoriel d'ordre quatre $d_i \mathbf{v}_i^{\otimes 4}$ permet d'annuler la contribution du système équivalent de microfissures de normale \mathbf{v}_i sur la dégradation de la rigidité du matériau dans cette direction lorsque $\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i \leq 0$.

2.2.3 La perte du caractère potentiel de l'énergie libre

Dans la formulation (2.27) proposée par Chaboche et Maire [62], le triplet (v_1, v_2, v_3) est une base de tenseur d'endommagement \mathbf{d} . Weleman et Cormery [31] montrent dans un exemple simple que l'énergie libre n'est plus uniquement définie. Soit un état $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$ où la déformation est uniaxiale $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ avec $\varepsilon_1 < 0$ et l'endommagement \mathbf{d} est un tenseur d'ordre 2 isotrope tel que $\mathbf{d} = d_0 \mathbf{1}$. Le milieu est supposé isotrope lorsque tous les dommages sont actifs, le tenseur de rigidité $\tilde{\mathbb{C}}$ est donc isotrope de la forme :

$$\tilde{\mathbb{C}} = (\lambda_0 + a)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (\mu_0 + b)\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1}, \quad (2.32)$$

où a et b sont deux fonctions scalaires de \mathbf{d} . Munis du résultat 2.32, les vecteurs propres du tenseur \mathbf{d} peuvent être déterminés afin d'évaluer l'énergie $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$. Le tenseur \mathbf{d} étant sphérique, toute base orthonormée de l'espace est base principale. Si le triplet (v_1, v_2, v_3) est assimilé à la base de l'espace physique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, l'énergie libre s'exprime sous cette forme :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} [\lambda_0 + 2\mu_0 - \eta(a + 2b)] \varepsilon_1^2 \quad (2.33)$$

η est un paramètre matériau (compris entre 0 et 1) caractérisant le degré de récupération du module élastique. Si la base principale $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ retenue est maintenant $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ définie par :

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{t}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (2.34)$$

cette même énergie prend alors la valeur :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2}[\lambda_0 + 2\mu_0 - \frac{\eta}{2}(a + 2b)]\varepsilon_1^2 \quad (2.35)$$

Ce changement de base montre que pour chaque configuration donnée d'endommagement et de déformation, cela peut aboutir à plusieurs valeurs d'énergie libre. Cette énergie libre perd son caractère de potentiel thermodynamique. Si le triplet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ correspond à une base principale du tenseur des déformations, c'est le tenseur de rigidité qui peut ne pas être unique, aboutissant à un matériau aux propriétés physiques différentes pour un même état de déformation et d'endommagement.

La même analyse critique peut être faite pour les approches utilisant une décomposition spectrale du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$. Une analyse critique de Carol et Willam [19] et Challamel *et al.* [26] sur d'autres modélisations souligne d'autres effets néfastes engendrés par de telles décompositions. On cite la dissipation anormale et l'aspect non-conservatif de l'énergie au passage ouvert/fermé des microfissures (effet unilatéral). Pour conclure, l'introduction de l'effet unilatéral doit se faire à l'échelle de la microfissure et par rapport à des directions fixées au préalable. Plusieurs possibilités seront détaillées au chapitre 4.

2.2.4 La perte de symétrie due à l'introduction de l'effet unilatéral

Pour une formulation thermodynamique consistante, le caractère conservatif de l'énergie libre (existence du potentiel thermodynamique) est équivalent à la symétrie du tenseur Hessien de l'énergie libre. Or, si l'ouverture/fermeture des fissures est décrite à partir des valeurs propres du tenseur des déformations dans le tenseur d'endommagement, cette conservation n'est pas systématique. En effet, dans ce cas, Challamel *et al.* [26] montrent qu'elle n'est assurée que lorsque les directions principales des tenseurs d'endommagement et de déformation coïncident. De manière plus générale, les surfaces de charge d'endommagement doivent être continues et au moins convexes dans leur espace de définition respectif afin de garantir l'indépendance des variables d'état par rapport au chemin de chargement. De plus, la réponse contrainte-déformation doit être continue au passage ouvert-fermé des microfissures et cette transition ne doit pas générer de dissipation artificielle. Or, nombre de modèles utilisent les déformations principales positives comme force motrice de la microfissuration des matériaux quasi-fragiles. Malheureusement, une formulation du potentiel thermodynamique à partir des parties respectivement positive et négative du tenseur des déformations aboutit souvent à une dissipation artificielle indésirable [19], indépendamment du respect ou non de la loi de normalité au potentiel de dissipation lors de la formulation des lois d'évolution. Une approche différente [83] met

en évidence, pour un état donné, la perte de l'unicité de l'énergie libre pour de telles formulations et donc leur incapacité à générer un potentiel. Enfin, le modèle n'est pas conservatif si la rigidité initiale est corrigée par un terme tensoriel couplant la partie positive de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ ou de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}^+$ au tenseur d'endommagement d ou $(1 - d)^{-1/2}$ ([38] [57]). Il faut donc utiliser avec précaution les décompositions des tenseurs pour décrire correctement l'effet unilatéral.

Les travaux de Cormery et Weleman [32], de Challamel *et al.* [27], de Bazant et Gambarova [9], de Bazant *et al.* [8], Carol *et al.* [18], Zhu [87] et Bargellini *et al.* [4] ont remédié à ces inconsistances thermodynamiques en travaillant dans la base directionnelle des microfissures. Ces modèles sont essentiellement de trois natures :

- phénoménologiques à l'échelle macroscopique [18] [51],
- phénoménologiques à l'échelle de la microstructure alliés à une méthode de changement d'échelle [89],
- phénoménologiques à l'échelle macroscopique, mais en s'appuyant sur les conclusions de l'approche précédente [4] [36].

Tous ces modèles contournent les problèmes de formulation en prenant en compte l'effet d'ouverture-fermeture des microfissures suivant des directions préétablies, et en sommant ensuite la contribution de chaque effet de fissuration sur la rigidité initiale. Nombre de ces modèles ont en commun de supposer une non interaction entre systèmes de micro-fissures d'orientations différentes.

La mise au point d'un modèle d'endommagement anisotrope pour des matériaux quasi-fragiles permettant de décrire l'effet unilatéral se doit de répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la formulation à retenir parmi les approches thermodynamiquement satisfaisantes ?
- Quelles forces pilotent réellement la formation, le développement des microfissures ?
- Comment accéder à ces forces et en déduire les lois d'évolutions ?

Nous proposons dans la section suivante de répondre à la première de ces questions. On présentera tout d'abord une synthèse d'une sélection de différents modèles qui seront ensuite reformulés dans la base tensorielle de Walpole plus facilement interprétable au sens de la mécanique que la base courante de Kunin. Les modèles seront ensuite comparés, en dehors de tout effet unilatéral, soit sous un angle analytique, soit en interprétant l'effet du dommage sur la réponse d'un matériau endommagé suivant une unique direction.

2.3 Modèles d'endommagement anisotrope retenus

Dans le cadre de ces modèles, on considère que les micro-fissures peuvent être regroupées en systèmes de micro-fissures. Chaque système est caractérisé par une

direction \mathbf{n} et une densité de micro-fissures (fig. 2.5). La distribution homogène et aléatoire induit, pour une famille de micro-fissures, un comportement orthotrope de révolution. Le comportement macroscopique du matériau initialement isotrope est alors altéré par la somme des contributions de chaque système de micro-fissures.

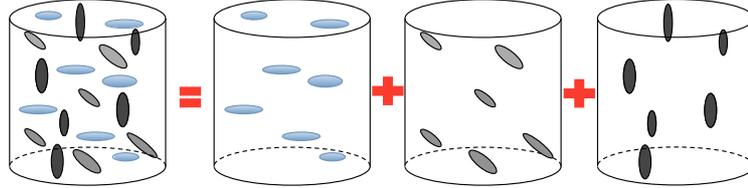


FIGURE 2.5 – Additivité des effets des familles de micro-fissures parallèles

Dans ce qui suit, seront présentés les modèles de Bargellini *et al.*, les modèles microplans, les modèles micromécaniques et le modèle de Dienes.

2.3.1 Approche discrète de Bargellini, Halm et Dragon

L'approche discrète considère un ensemble de directions \mathbf{n}_i , $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^3$ représentant la normale du i^{eme} système de microfissures compris dans un angle solide ϕ [4]. Les tenseurs directionnels $\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ sont associés à des variables internes scalaires ρ_i^{Dis} représentant les densités des fissures pour chaque direction \mathbf{n}_i . L'approche discrète se place dans le cadre macroscopique des matériaux standards ; les variables tensorielles d'endommagement, du modèle Halm et Dragon [40], sont simplement remplacées par des couples densité-tenseur de direction $(\rho_i^{Dis}, \mathbf{N}_i)$ [3]. Pour N systèmes de microfissures, l'expression du tenseur de rigidité \mathbb{C}^{ed} est déduite de la dérivée seconde de l'énergie libre par rapport à la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et se met sous la forme d'une somme de contributions directionnelles :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed}(\rho_i^{Dis}, \mathbf{N}_i) &= (k - \frac{2}{3}\mu) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} \\ &- \sum_{i=1}^N \rho_i^{Dis} \{ \alpha [2 \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1}] + 2\beta [\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \underline{\otimes} \mathbf{1}] \\ &+ (3\alpha + 4\beta) H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \} \end{aligned} \quad (2.36)$$

où k et μ sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement du matériau. Les deux modules α et β gèrent la pondération de l'endommagement. α multiplie une partie isotrope et une partie directionnelle alors que β ne multiplie que des tenseurs purement directionnels et accentue le degré d'anisotropie. $H(x)$ est la fonction d'Heaviside permettant de gérer l'effet d'ouverture-fermeture des microfissures en fonction de la nature du chargement défini dans le glossaire page 197. Sous l'hypothèse de non interaction des micro-fissures, l'influence de plusieurs systèmes

de microfissures est la somme des contributions de chaque système. Le fait d'expliciter des directions fixes de microfissures offre la possibilité de formuler des conditions d'ouverture-refermeture dépendantes de leur orientation et permet d'éviter la décomposition spectrale du tenseur de déformations. Ainsi, les effets de fermeture sont traités direction par direction.

2.3.2 Modèles microplans

L'origine de ces modèles date de 1938 (Taylor [78]). Ils ont été appliqués tout d'abord à la plasticité des métaux (Batdorf et Budianski [5]). Depuis, ils ont été appliqués aux matériaux fragiles (béton, céramique, roches, glaces,...). A titre d'exemple dans ce domaine, on peut citer les travaux de Bazant *et al.* [11] [10] [12] [13], de Carol *et al.* [17] [19] et de Ramm *et al.* [50] [59].

Ces modèles microplans considèrent que chaque direction de l'angle solide, considérée fixe, caractérise un microplan avec son comportement associé (figure 2.6). Les déformations globales sont alors projetées sur chaque microplan. A cette étape, il existe plusieurs types de formulations. On se concentrera sur l'étude des deux plus récentes à savoir les approches VDT (Volumique, Déviatorique et Tangentielle) et VD (Volumique et Déviatorique). Une loi de comportement dans le plan permet ensuite de définir l'état de contrainte associée à ces déformations projetées. La contrainte globale est construite avec le principe des travaux virtuels, à partir des contraintes sur chaque microplan, au travers d'une intégrale sur tout l'angle solide. Dans ce rapport, l'angle solide est discrétisé en 42 secteurs angulaires équirépartis, garantissant a minima la capacité à décrire l'isotropie.

Ces approches se basent sur l'hypothèse de l'existence des potentiels d'énergie libre définis au niveau de chaque micro-plan, dont l'intégrale angulaire correspond à l'énergie libre globale, soit :

$$\Psi^{glo} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi^{loc}(\mathbf{t}_{\varepsilon}, q) d\Omega \quad (2.37)$$

où le vecteur déformation $\mathbf{t}_{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$ et q est une variable dissipative. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est définie par la dérivée de l'énergie libre globale Ψ^{glo} par rapport au tenseur des déformations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{glo}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{glo}]}{\partial \Psi^{loc}} \cdot \frac{\partial \Psi^{loc}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.38)$$

Carol, Kuhl et Steinmann [18] proposent de décomposer le tenseur de déformation global en une partie volumique ε_V , déviatorique ε_D avec ou sans partie tangentielle ε_T (figure 2.7). Ce calcul sera détaillé pour chacun des modèles.

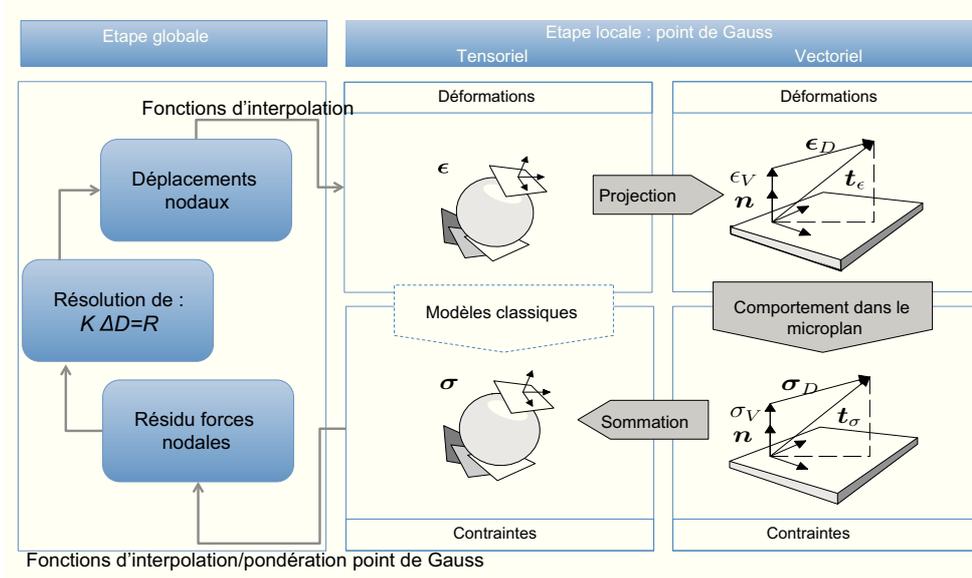


FIGURE 2.6 – Principe des modèles microplan

2.3.2.1 Formulation V-D-T

Bazant et Prat [6] ont présenté cette approche pour réussir à simuler la réponse du béton sous un essai de compression. Cette formulation est basée sur la décomposition du tenseur de déformation suivant une direction \mathbf{n} en une partie tangentielle et une partie normale. Cette dernière est décomposée à son tour en une partie volumique et déviatorique.

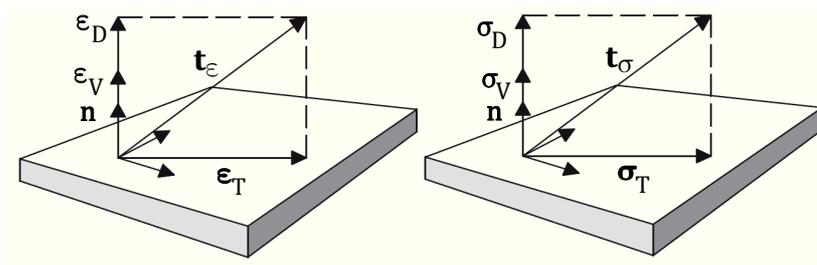


FIGURE 2.7 – Modèle à composantes volumique, déviatorique et tangentielle (V-D-T)[18]

$$\epsilon_V = \mathbf{V} : \epsilon \quad , \quad \epsilon_D = \mathbf{D} : \epsilon \quad , \quad \vec{\epsilon}_T = \mathbf{T} : \epsilon \quad (2.39)$$

avec :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{D} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (2.40)$$

Les équations 2.38 et 2.37 permettent de définir la contrainte globale à partir des contraintes au niveau des microplans. On peut remarquer que les opérateurs qui permettent de « remonter » à cette contrainte globale sont les mêmes que ceux utilisés lors de la « descente » de la déformation au niveau du microplan :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \{\sigma_V \cdot \mathbf{V} + \sigma_D \cdot \mathbf{D} + \sigma_T \cdot \mathbf{T}\} d\Omega \quad (2.41)$$

avec les lois d'état, formulées au niveau du microplan, suivantes définissant les contraintes :

$$\sigma_V := \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{loc}]}{\partial \varepsilon_V} \quad , \quad \sigma_D := \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{loc}]}{\partial \varepsilon_D} \quad , \quad \sigma_T := \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{loc}]}{\partial \varepsilon_T} \quad (2.42)$$

Les modules de compressibilité volumique, de cisaillement déviatorique et de cisaillement tangentiel sont respectivement dénommés k_V , μ_D et μ_T . Ils sont liés aux modules élastiques usuels k (module de compressibilité) et μ (module de cisaillement) par les relations suivantes :

$$k_V = 3k \quad (a), \quad \frac{2}{5}\mu_D^{VDT} + \frac{3}{5}\mu_T = 2\mu \quad (b) \quad (2.43)$$

Avec cette formulation, les constantes élastiques de cisaillement associées à chaque microplan ne sont pas déterminées de manière unique à partir du module de cisaillement μ . Wu [85] propose de s'affranchir de la relation 2.43 (b) en utilisant un coefficient de pondération entre le module de cisaillement déviatorique et tangentiel. Leukart [59] propose d'égaliser ces deux modules dans sa formulation V-D. La loi de comportement est définie au niveau du microplan, avec des variables d'endommagement agissant sur ces trois modules. Le tenseur de rigidité endommagé s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^{ed} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \{k_V(1-d_V)\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mu_D^{VDT}(1-d_D)\mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mu_T(1-d_T)\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}\} d\Omega, \quad (2.44)$$

où d_V , d_D , d_T sont respectivement les variables d'endommagement volumique, déviatorique et tangentielle. En remplaçant les tenseurs de projection par leur expressions (équation 2.40), on obtient l'écriture du tenseur de rigidité dans la base de Kunin :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} = & \left(k - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \left(d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right. \\ & \left. + d_D \mu_D^{VDT} \left[\frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{3} (\mathbf{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}) + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \right. \\ & \left. + d_T \mu_T \left[\frac{1}{2} (\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N} + \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{1}) - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.45)$$

L'intégrale peut être discrétisée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}^{ed} = & \left(k - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1} - \sum_{i=1}^N 3 w_i \left(d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right. \\
 & + d_D^i \mu_D^{VDT} \left[\frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{3} (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i) + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \right] \\
 & \left. + d_T^i \mu_T \left[\frac{1}{2} (\mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \overline{\otimes} \mathbf{1}) - \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \right] \right) \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

où w_i est un scalaire de pondération angulaire. Notons que l'endommagement volumique isotrope d_V dans ce modèle ne dépendant que d'une donnée globale et est donc indépendant des directions.

2.3.2.2 Formulation V-D

Elle consiste à décomposer le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ en une partie volumique et déviatorique (figure 2.8) [59].

$$\boldsymbol{\varepsilon}_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_D = \mathbf{Dev} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.47)$$

avec :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{Dev} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I}^{dev} \quad , \quad \mathbf{Dev}^T = \mathbb{I}^{dev} \cdot \mathbf{n} \quad (2.48)$$

où \mathbb{I}^{dev} est la partie déviatorique du tenseur identité d'ordre 4.

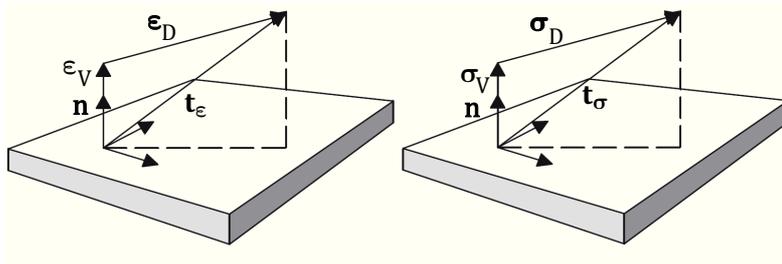


FIGURE 2.8 – Modèle à composante volumique et déviatorique (V-D) [59]

Les équations 2.38 et 2.37 permettent à nouveau de définir la contrainte globale à partir des contraintes au niveau des microplans :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{V} \cdot \frac{\partial[\Psi^{loc}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_V} + \mathbf{Dev}^T \cdot \frac{\partial[\Psi^{loc}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_D} \right\} d\Omega. \quad (2.49)$$

La loi de comportement est à nouveau définie au niveau du microplan, avec des variables d'endommagement agissant sur les deux modules et le tenseur de rigidité endommagé s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^{ed} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \{k_V(1 - d_V)\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2\mu_D^{VD}(1 - d_{Dev})\mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev}\} d\Omega, \quad (2.50)$$

les modules élastiques au niveau du microplan k_V et μ_{Dev} étant déterminés de manière unique en fonction des modules élastiques usuels par les relations suivantes :

$$k_V = 3k \quad , \quad \mu_D^{VD} = \mu. \quad (2.51)$$

La prise en considération des expressions des tenseurs \mathbf{V} et \mathbf{Dev} dans la base de Kunin conduit au tenseur de rigidité endommagé, fonction des variables d'endommagement d_V , d_{Dev} suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} &= (k - \frac{2}{3}\mu) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \left[d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + d_{Dev} 2\mu \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{2}(\mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N}) - \frac{1}{3}(\mathbf{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}) + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} &= (k - \frac{2}{3}\mu) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \sum_{i=1}^N 3w_i \left[d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + d_D^{VD} 2\mu \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{2}(\mathbf{N}_i \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N}_i) - \frac{1}{3}(\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i) + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

avec $\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$.

2.3.3 Modèles micromécaniques : schéma dilué

Les modèles micromécaniques permettent au moyen d'un changement d'échelle (localisation et homogénéisation) de prendre en considération la microstructure via le choix d'un VER ainsi que le comportement local des constituants. Ainsi, le principe des modèles micromécaniques consiste à déduire le comportement homogène équivalent au moyen d'un changement d'échelle. Les trois étapes principales sont : (1) l'étape de représentation qui consiste à décrire un VER du matériau à l'échelle microscopique, (2) l'étape de localisation qui établit les relations définissant les grandeurs à l'échelle microscopique en fonction des grandeurs macroscopiques et (3) l'étape d'homogénéisation qui détermine les grandeurs macroscopiques en recourant à une opération de moyenne (la plus simple étant la macro-homogénéité de Hill). Derrière cet aspect déductif du comportement macroscopique sont tout de même sous-jacentes deux difficultés : la première réside dans une « bonne » description de la géométrie de la structure à l'échelle du VER, la seconde concerne la connaissance des propriétés locales des matériaux constitutifs. Zhu [88] propose plusieurs modèles anisotropes induits, dont un basé plus particulièrement sur l'estimation

d'Eshelby supposant la non interaction des microfissures. Ce schéma d'homogénéisation a été retenu en raison de sa simplicité. Une autre estimation, basée sur le schéma de Mori-Tanaka, prend en compte les interactions entre les fissures, au sein d'un même système de microfissures. En plus des interactions des microfissures, le schéma de Ponte-Castaneda et Willis [20] prend en compte la distribution spatiale de ces deniers. Pour l'estimation d'Eshelby, le potentiel d'énergie libre à l'échelle macroscopique est de la forme suivante :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \rho^{Esh}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{hom}(\rho^{Esh}, \mathbf{n}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.54)$$

où ρ^{Esh} représente la densité d'un système de microfissures parallèles, ayant la même direction et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la déformation à l'échelle macroscopique.

Pour un schéma dilué et donc une faible concentration de microfissures (chaque famille de microfissures présente une normale \mathbf{n} et une densité ρ^{Esh}), Zhu [88] arrive au tenseur de rigidité :

$$\mathbb{C}_{Esh}^{hom}(\rho, \mathbf{n}) = \mathbb{C}^{el} - \frac{4}{3} \pi \rho^{Esh} \mathbb{C} : \mathbb{T}(\mathbf{n}) \quad (2.55)$$

avec \mathbb{C}^{el} la rigidité initiale du solide. Deux cas se présentent :

– Cas de la fissure ouverte :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{n}) &= \frac{4(1-\nu)}{\pi} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2-\nu} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{1}] - \frac{\nu}{2-\nu} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

– Cas de la fissure fermée :

$$\mathbb{T}'(\mathbf{n}) = \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} - 2 \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}] \quad (2.57)$$

Le tenseur de rigidité homogénéisé est le tenseur de rigidité du matériau sein affaibli par N systèmes de microfissures de directions \mathbf{n}_i et de densité ρ_i^{Esh}

$$\mathbb{C}_{Esh}^{hom}(\rho, \mathbf{n}) = \mathbb{C}^{el} : \left[I - \frac{4}{3} \pi \sum_{i=1}^N \rho_i^{Esh} \mathbb{T}_i(\mathbf{n}_i) \right] \quad (2.58)$$

Les approches micromécaniques permettent également de connaître la force associée à une densité de micro-fissures ρ_i^{Esh} et ce pour chaque réseau de microfissures directement à partir de l'énergie libre, elle-même formulée à partir du comportement homogénéisé. Outre la base physique qu'elles procurent au modèle, ces approches offrent également la possibilité de prendre en considération de façon explicite des couplages entre différents mécanismes de déformation, ainsi que l'ouverture et la fermeture des fissures. Par contre, la complexité inhérente à la technique d'homogénéisation rend difficile l'intégration d'autres comportements comme la viscosité ou la plasticité en raison de la difficulté d'accéder à l'opérateur de localisation.

2.3.4 Modèle de Dienes

Le modèle proposé par Dienes [35] [36] a pour objectif de modéliser le comportement d'une classe d'explosifs pressés soumis à une grande variété de sollicitations tant quasi-statiques que dynamiques. Le principe du modèle est fondé sur l'hypothèse d'une décomposition additive du taux de déformation, chaque taux étant associé à un mécanisme (élasticité, plasticité, ouverture de fissures, frottement des lèvres, croissance des fissures et coalescence). Ce modèle intégrant de nombreux mécanismes, seule la partie relative au comportement hypoélastique endommagée est analysée ici. À l'inverse des modèles précédents, celui de Dienes est formulé en vitesse.

Le principe de ce modèle consiste à ajouter à la souplesse élastique du matériau sein notée \mathbb{S} , une souplesse associée aux microfissures ouvertes et une associée aux microfissures fermées, notées respectivement \mathbb{S}^o et \mathbb{S}^c , et ce pour un nombre discret de directions fixes. La première (\mathbb{S}^o) dégrade à la fois la rigidité normale à la fissure et la rigidité de cisaillement hors plan de fissure, alors que la seconde (\mathbb{S}^c) ne dégrade que les propriétés de cisaillement donnant ainsi un caractère unilatéral au modèle. La souplesse totale du matériau fissuré \mathbb{S}^{ed} est donnée par :

$$\mathbb{S}^{ed} = \mathbb{S} + \mathbb{S}^o + \mathbb{S}^c \quad (2.59)$$

Le tenseur de souplesse endommagé est la somme des souplesses associées au matériau sain, aux microfissures ouvertes et aux microfissures fermées :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{ed} &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2\mu} \right) \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ &+ \frac{8}{3\mu} \frac{1-\nu}{2-\nu} \sum_{i=1}^N [\mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1} - \nu \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i] F^o w_i \\ &+ \frac{8}{3\mu} \frac{1-\nu}{2-\nu} \sum_{i=1}^N [\mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1} - 2\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i] F^s w_i \end{aligned} \quad (2.60)$$

où ν est le coefficient de contraction et F^o désigne la densité de micro-fissures ouvertes et F^s fermées. Notons que le modèle peut être formulé en rigidité sans difficultés majeures. C'est ce que nous proposons dans la section 2.4.2.

2.4 Comparaison analytique des modèles dans la base de Walpole

Le mécanisme principal d'endommagement des matériaux quasi-fragiles est supposé lié à la micro-fissuration. On considère dans ce travail chaque famille de microfissures indépendante des autres (figure 2.5). Chaque système de microfissures est caractérisé par une direction \mathbf{n} et une densité ou un niveau de dommage. Le caractère aléatoire de la répartition des fissures au sein de la même famille implique

que la dégradation qui lui est associée soit de type orthotrope de révolution. On considère que le comportement global endommagé d'un matériau est la somme des dégradations associées à chaque système des microfissures sous l'hypothèse de non interaction des microfissures.

Dans cette section on introduira la base de Walpole permettant une comparaison des modèles choisis. Un tableau résumera cette comparaison de point de vue des effets.

2.4.1 Base de Walpole

Afin de comparer ces modèles d'endommagement anisotropes, il est pertinent de les réécrire dans une base commune dont chaque élément est physiquement compréhensible et permet d'isoler les mécanismes de leurs effets. Pour ce faire, nous utilisons la base de Walpole [82].

La base de Walpole décompose un tenseur isotrope transverse du quatrième ordre en une somme de tenseurs élémentaires du même ordre. De plus, elle permet d'effectuer les opérations de produit doublement contracté et d'inversion des tenseurs d'ordre 4 de manière analytique et simple. Les tenseurs de projection de cette base s'écrivent en fonction de $\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ et $\mathbf{a} = \mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad , \quad \mathbb{E}_2 = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad , \quad \mathbb{E}_3 = \mathbf{a} \overline{\otimes} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad (2.61)$$

$$\mathbb{E}_4 = \mathbf{N} \overline{\otimes} \mathbf{a} + \mathbf{a} \overline{\otimes} \mathbf{N} \quad , \quad \mathbb{E}_5 = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a} \quad , \quad \mathbb{E}_6 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{N} \quad (2.62)$$

$\mathbf{1}$ est le tenseur identité d'ordre 2 (glossaire 197). À titre d'exemple, la base de Walpole est exprimée en notation de Voigt pour une direction $\mathbf{n} = [1 \ 0 \ 0]$ en annexe A. Il est facile de vérifier que si p et q sont deux indices variant de 1 à 4 alors :

$$\mathbb{E}_p : \mathbb{E}_q = \mathbb{E}_q \text{ si } p = q, \quad \mathbb{E}_p : \mathbb{E}_q = 0 \text{ si } p \neq q, \quad (2.63)$$

et que

$$\mathbb{E}_4 : \mathbb{I}_V = \mathbb{I}_V : \mathbb{E}_4 = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbb{E}_4 : \mathbb{I}_D = \mathbb{I}_D : \mathbb{E}_4 = \mathbb{E}_4 \quad (2.64)$$

où \mathbb{I}_V et \mathbb{I}_D sont respectivement la partie volumique et déviatorique de l'identité d'ordre 4 (glossaire 197). On propose ci-dessous une matrice de passage reliant la base de Kunin [52] utilisée classiquement pour l'élaboration des modèles précédents et celle de Walpole :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{N} \\ \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{N} + \mathbf{N} \overline{\otimes} \mathbf{1}) \\ \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_2 \\ \mathbb{E}_3 \\ \mathbb{E}_4 \\ \mathbb{E}_5 \\ \mathbb{E}_6 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

2.4. COMPARAISON ANALYTIQUE DES MODÈLES DANS LA BASE DE
WALPOLE

D'autre part, tout tenseur \mathbb{L} d'ordre quatre isotrope transverse s'écrit comme une combinaison linéaire des six tenseurs élémentaires \mathbb{E}_i définis ci-dessus sous la forme :

$$\mathbb{L} = l_1\mathbb{E}_1 + l_2\mathbb{E}_2 + l_3\mathbb{E}_3 + l_4\mathbb{E}_4 + l_5\mathbb{E}_5 + l_5\mathbb{E}_6 \quad (2.66)$$

où l_i sont les composantes de chaque tenseur de la base de Walpole. La symétrie du tenseur \mathbb{L} impose l'égalité entre l_5 et l_6 . Pour une écriture plus légère, on notera les coordonnées liées à la base sous la forme suivante :

$$\mathbb{L} = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_5\} \quad (2.67)$$

L'inverse du tenseur \mathbb{L} d'ordre 4 peut être calculer analytiquement, soit :

$$\mathbb{L}^{-1} = \left\{ \frac{l_2}{\Delta}, \frac{l_1}{\Delta}, \frac{1}{l_3}, \frac{1}{l_4}, -\frac{l_5}{\Delta}, -\frac{l_5}{\Delta} \right\} \quad (2.68)$$

avec : $\Delta = l_1l_2 - 2l_5^2$. En notant $\mathbb{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_5\}$, le produit doublement contracté de \mathbb{L} et \mathbb{M} s'écrit :

$$\mathbb{L} : \mathbb{M} = \left\{ l_1m_1 + 2l_5m_5, l_2m_2 + 2l_5m_5, l_3m_3, \right. \\ \left. l_4m_4, l_5m_1 + l_2m_5, l_5m_2 + l_1m_5 \right\} \quad (2.69)$$

Les exemples précédents illustrent la simplicité des opérations dans cette base correspondant aux milieux isotropes transverses. Le tenseur de rigidité associé à un milieu isotrope transverse s'écrit d'une manière générale sous la forme :

$$\mathbb{C}^{el} = 2k_p\mathbb{E}_1 + (E_n + 4k_p\nu_p^2)\mathbb{E}_2 + 2\mu_p\mathbb{E}_3 + 2\mu_n\mathbb{E}_4 + 2k_p\nu_p(\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \quad (2.70)$$

E_n et μ_n désignent respectivement le module d'Young et le module de cisaillement normaux au plan d'isotropie; k_p , μ_p , ν_p sont respectivement les modules de compressibilité, de cisaillement et le coefficient de contraction dans ce plan d'isotropie. Le tenseur de rigidité isotrope transverse \mathbb{C}^{el} s'écrit en notation ingénieur sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^{el} = \begin{bmatrix} E_n + 4k_p\nu_p^2 & 2k_p\nu_p & 2k_p\nu_p & 0 & 0 & 0 \\ 2k_p\nu_p & k_p + \mu_p & k_p - \mu_p & 0 & 0 & 0 \\ 2k_p\nu_p & k_p - \mu_p & k_p + \mu_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_p \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

À partir de l'expression 2.71 et de l'annexe A, on peut interpréter les tenseurs de la base de Walpole de la manière suivante :

- \mathbb{E}_1 porte l'effet sphérique dans le plan d'isotropie,

- \mathbb{E}_2 porte l'effet directionnel,
- \mathbb{E}_3 porte l'effet de cisaillement dans le plan d'isotropie,
- \mathbb{E}_4 porte l'effet de cisaillement dans le plan normal au plan d'isotropie,
- \mathbb{E}_5 et \mathbb{E}_6 correspondent à « l'effet Poisson » entre le plan d'isotropie et sa normale.

La matrice de passage (équation 2.65) dans base de Walpole nous permet de proposer une écriture uniformisée des modèles facilitant les comparaisons analytiques ainsi qu'une autre compréhension des effets existant au sein de chaque modèle.

2.4.2 Uniformisation des modèles dans la base de Walpole

Comme nous l'avons rappelé, les réponses globales respectives de ces modèles résultent de la somme des rigidités endommagées directionnelles sur un nombre fini de directions fixes, pouvant être associées à des systèmes de microfissures. La compréhension des effets présents dans chaque modèle après sommation angulaire passe par la compréhension des effets associés à une unique famille de microfissures de normale commune \mathbf{n} . On ne considèrera donc par la suite qu'une direction endommagée lors de la formulation des tenseurs associés à la rigidité globale dans la base de Walpole. Les fissures sont considérées effectives. Après avoir uniformisé les écritures, on constate que tous les modèles se mettent sous la forme 2.72, avec différentes expressions pour les variables d'endommagement d_i :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} &= 2(k + \frac{1}{3}\mu)(1 - d_1)\mathbb{E}_1 + (k + \frac{4}{3}\mu)(1 - d_2)\mathbb{E}_2 + 2\mu(1 - d_3)\mathbb{E}_3 \\ &+ 2\mu(1 - d_4)\mathbb{E}_4 + (k - \frac{2}{3}\mu)(1 - d_5)(\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \end{aligned} \quad (2.72)$$

- Le modèle discret est formulé initialement en densité de fissuration ρ^{Dis} pour chaque direction \mathbf{n} . Pour uniformiser l'écriture on remplace cette densité par des effets de dommage d_i . Le tenseur de rigidité s'écrit dans la base de Walpole sous la forme 2.72 avec $d_1 = d_5 = 0$ les d_i non nuls s'écrivent sous cette forme :

$$d_2 = \frac{3\alpha + 4\beta}{k + \frac{4}{3}\mu} \rho^{Dis} \quad , \quad d_3 = \frac{2\alpha}{2\mu} \rho^{Dis} \quad , \quad d_4 = \frac{2(\alpha + \beta)}{2\mu} \rho^{Dis} \quad (2.73)$$

où ρ^{Dis} , α et β sont définis dans la section 2.3.1.

- Concernant le modèle VDT, l'écriture du tenseur de rigidité conduit aux variables de dommage suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{[d_V 2k + d_D \frac{2}{3}\mu_D]}{2k + \frac{2}{3}\mu} \quad , \quad d_2 = \frac{[d_V k + \frac{4}{3}d_D \mu_D]}{k + \frac{4}{3}\mu} \\ d_3 &= 0 \quad , \quad d_4 = \frac{\frac{3}{2}d_T \mu_T}{2\mu} \quad , \quad d_5 = \frac{[d_V k - \frac{2}{3}d_D \mu_D]}{k - \frac{2}{3}\mu} \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.4. COMPARAISON ANALYTIQUE DES MODÈLES DANS LA BASE DE
WALPOLE

où d_V , d_D et d_T sont respectivement les variables d'endommagement volumique déviatorique et tangentiel. k est le module de compressibilité, μ_D et μ_T sont les modules cisaillement à l'échelle de microplan.

- Les variables de dommage du modèle VD peuvent être déduites en considérant que $d_D = d_T$ soit :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{d_V}{2k + \frac{2}{3}\mu} \frac{2k + d_{Dev} \frac{2}{3}\mu}{2k + \frac{2}{3}\mu} \quad , \quad d_2 = \frac{d_V}{k + \frac{4}{3}\mu} \frac{k + d_{Dev} \frac{4}{3}\mu}{k + \frac{4}{3}\mu} \\ d_3 &= 0 \quad , \quad d_4 = \frac{3d_{Dev}}{2} \quad , \quad d_5 = \frac{d_V}{k - \frac{2}{3}\mu} \frac{k - d_{Dev} \frac{2}{3}\mu}{k - \frac{2}{3}\mu} \end{aligned} \quad (2.75)$$

- Dans le schéma d'Eshelby on peut exprimer la rigidité endommagée dans la base de Walpole avec les dommages suivants :

$$\begin{aligned} d_1 &= \rho^{Esh} \frac{4(3k - 2\mu)^2(3k + 4\mu)}{9\mu(3k + \mu)^2} \quad , \quad d_2 = d_5 = \rho^{Esh} \frac{4(3k + 4\mu)^2}{9\mu(3k + \mu)} \\ d_3 &= 0 \quad , \quad d_4 = \rho^{Esh} \frac{16(k + 4\mu)}{9(3k + 2\mu)} \end{aligned} \quad (2.76)$$

où ρ^{Esh} désigne la densité de microfissures dans un milieu dilué.

- Le modèle de Dienes étant formulé en souplesse, il implique une inversion. Pour ce faire, les propriétés d'inversion de la base de Walpole ont été exploitées :

$$\mathbb{C}^{ed} = \frac{2}{3} \frac{2c_3^2 + c_2 F^o}{2c_3 + c_1 F^o} \mathbb{E}_1 + \frac{2}{3} \frac{c_3(3k + 4\mu)}{2c_3 + c_1 F^o} \mathbb{E}_2 + 2\mu \mathbb{E}_3 \quad (2.77)$$

$$+ \frac{2\mu}{1 + 2\mu\xi F^o} \mathbb{E}_4 + \frac{2}{3} \frac{c_3(3k - 2\mu)}{2c_3 + c_1 F^o} (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \quad (2.78)$$

avec :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{8(1 - \nu)}{3\mu(2 - \nu)} \quad , \quad c_1 = \xi(3k + 2\mu)(3k + 4\mu) \\ c_2 &= 27\xi k \mu(3k + 2\mu) \quad , \quad c_3 = 3k + \mu \end{aligned} \quad (2.79)$$

On remarque des non-linéarités par rapport à la densité de micro-fissures ouverte F^o dans l'expression 2.77. Or, les autres modèles exposés s'exprime de façon linéaire par rapport à leurs variables d'endommagements. Ainsi, pour permettre la comparaison il est proposé de faire un développement limité au premier ordre du modèle de Dienes par rapport à F^o . Le modèle devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} &= \left(2k + \frac{2}{3}\mu\right) \left(1 - F^o \frac{4(3k - 2\mu)^2(3k + 4\mu)}{9\mu(3k + \mu)^2}\right) \mathbb{E}_1 \\ &+ \left(k + \frac{4}{3}\mu\right) \left(1 - \frac{4(3k + 4\mu)^2}{9\mu(3k + \mu)} F^o\right) \mathbb{E}_2 + 2\mu \mathbb{E}_3 + 2\mu \left(1 - \frac{16}{9} \frac{3k + 4\mu}{3k + 2\mu} F^o\right) \mathbb{E}_4 \\ &+ \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \left(1 - \frac{4(3k + 4\mu)^2}{9\mu(3k + \mu)} F^o\right) (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.4. COMPARAISON ANALYTIQUE DES MODÈLES DANS LA BASE DE
WALPOLE

Base de Walpole	\mathbb{E}_1	\mathbb{E}_2	\mathbb{E}_3	\mathbb{E}_4	$\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6$
Rigidités					
isotrope	$2k + \frac{2}{3}\mu$	$(k + \frac{4}{3}\mu)$	2μ	2μ	$k - \frac{2}{3}\mu$
isotrope transverse	$2k_p$	$E_n + 4k_p\nu_p^2$	$2\mu_p$	$2\mu_n$	$2k_p\nu_p$
Dommages					
Approche Discrète	1	$1 - \frac{(3\alpha+4\beta)}{k+\frac{4}{3}\mu} \rho^{Dis}$	$1 - \frac{2\alpha}{2\mu} \rho^{Dis}$	$1 - \frac{2(\alpha+\beta)}{2\mu} \rho^{Dis}$	1
Modèle VDT	$1 - d_V \frac{2k}{2k+\frac{2}{3}\mu} - d_D \frac{\frac{2}{3}\mu D}{2k+\frac{2}{3}\mu}$	$1 - d_V \frac{k}{k+\frac{4}{3}\mu} - d_D \frac{\frac{4}{3}\mu D}{k+\frac{4}{3}\mu}$	1	$1 - d_T \frac{\frac{3}{2}\mu T}{2\mu}$	$1 - d_V \frac{k}{k-\frac{2}{3}\mu} + d_D \frac{\frac{2}{3}\mu D}{k-\frac{2}{3}\mu}$
Modèle VD	$1 - d_V \frac{2k}{2k+\frac{2}{3}\mu} - d_D \frac{\frac{2}{3}\mu}{2k+\frac{2}{3}\mu}$	$1 - d_V \frac{k}{k+\frac{4}{3}\mu} - d_D \frac{\frac{4}{3}\mu}{k+\frac{4}{3}\mu}$	1	$1 - \frac{3}{2}d_D$	$1 - d_V \frac{k}{k-\frac{2}{3}\mu} + d_D \frac{\frac{2}{3}\mu}{k-\frac{2}{3}\mu}$
Modèle Eshelby	$1 - \rho^{Esh} \frac{4(3k-2\mu)^2(3k+4\mu)}{9\mu(3k+\mu)^2}$	$1 - \rho^{Esh} \frac{4(3k+4\mu)^2}{9\mu(3k+\mu)}$	1	$1 - \rho^{Esh} \frac{16(k+4\mu)}{9(3k+2\mu)}$	$1 - \rho^{Esh} \frac{4(3k+4\mu)^2}{9\mu(3k+\mu)}$
Modèle Dienes linéarisé	$1 - F^o \frac{4(3k-2\mu)^2(3k+4\mu)}{9\mu(3k+\mu)^2}$	$1 - F^o \frac{4(3k+4\mu)^2}{9\mu(3k+\mu)}$	1	$1 - F^o \frac{16}{9} \frac{3k+4\mu}{3k+2\mu}$	$1 - F^o \frac{4(3k+4\mu)^2}{9\mu(3k+\mu)}$

TABLE 2.1 – Décomposition dans la base de Walpole des 5 modèles : effet de l'endommagement (ou de la densité de fissuration) pour un réseau de microfissures orientées suivant une même direction.

où on reconnaît la forme de l'expression 2.72.

Le tableau 2.1 rassemble les expressions précédentes obtenues dans la base physique de Walpole à un facteur de pondération angulaire w_i près sur les dommages d . Ces approches sont comparées aux rigidités élastiques linéaires isotrope et isotrope transverse. Pour tous les modèles anisotropes, l'endommagement affecte le module purement directionnel porté par \mathbb{E}_2 et le module de cisaillement normal au plan d'isotropie dans le tenseur \mathbb{E}_4 . On remarque que le module de cisaillement dans le plan d'isotropie μ_p porté par le tenseur \mathbb{E}_3 n'est affecté par l'endommagement que dans l'approche discrète qui, par contre n'affecte pas la rigidité volumique du plan d'isotropie ($\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6$). Elle se différencie donc des autres modèles qui considèrent des effets sur les composantes $\mathbb{E}_3, \mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6$. Sur cette dernière, les modèles micro-plans intègrent une concurrence entre l'effet de l'endommagement volumique voulant

affaiblir le module de compressibilité dans le plan k_p et l'effet de l'endommagement déviatorique qui veut augmenter l'effet Poisson dans le plan d'isotropie ν_p . Pour le modèle hypo-élastique endommageable de Dienes, tous les tenseurs sont affectés par F^o , à l'exception de \mathbb{E}_3 . Dans cette version linéarisé, il correspond, au modèle Eshelby. On associera donc par la suite sa réponse à celle d'Eshelby. Pour les autres composantes, une croissance de la densité de fissure conduit à une décroissance du module correspondant. On observe aussi dans les expressions 2.79 que les modèles discret, Eshelby et Dienes sont entièrement paramétrés par une seule grandeur, la densité de fissure, quand les modèles microplans fournissent déjà deux ou trois variables d'endommagement dont les forces associées ne sont pas obligatoirement les mêmes. Cette souplesse de modélisation est un atout pour les modèles phénoménologiques cherchant à reproduire des effets complexes. Ce choix doit toutefois être tempéré par le manque de données expérimentales réellement discriminantes.

Dans cette partie, l'interprétation des différences et similitudes entre modèles a été prospecté au niveau de l'écriture tensoriel d'un système de microfissures en s'appuyant sur des quantités physiques liées à la base tensorielle de Walpole. Ceci n'est pas aussi facile à appréhender que l'interprétation des évolutions des modules de l'ingénieur classiques que sont le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

2.4.3 Analyse à partir des paramètres de l'ingénieur.

Pour simplifier l'interprétation sur les grandeurs de l'ingénieur, il est proposé de faire des développement limités par rapport au dommage pour les expressions des modules d'Young, modules de cisaillement et coefficient de contraction au premier ordre pour deux directions perpendiculaires. Ces grandeurs sont déterminés à partir des définitions tensorielles, en les projetant selon une direction. Ceci est exprimé dans les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{n}) &= \{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{S}^{ed} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\}^{-1} \\ \mu(\mathbf{n}, \mathbf{p}) &= \{4(\mathbf{n} \otimes \mathbf{p}) : \mathbb{S}^{ed} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{p})\}^{-1} \\ \nu(\mathbf{n}, \mathbf{p}) &= -E(\mathbf{n})\{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \mathbb{S}^{ed} : \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}\}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

où \mathbf{n} 'est une direction par rapport à laquelle est exprimé la grandeur et \mathbf{p} est une direction qui lui est perpendiculaire définie dans le sens direct dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ainsi que le présente la figure 2.9

L'inversion de la rigidité génère des non linéarités dans la matrice de souplesse, tout comme l'inversion de la souplesse a généré des non-linéarité pour le modèle de Dienes. Afin d'appréhender les quantités de l'ingénieur et l'effet des endommagements, les expressions générées par 2.81 sont linarisées par rapport aux variables

2.4. COMPARAISON ANALYTIQUE DES MODÈLES DANS LA BASE DE
WALPOLE

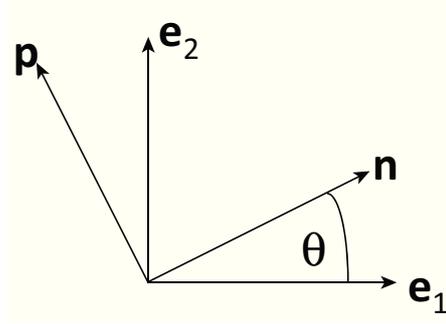


Figure 2.9: \mathbf{n} est le vecteur balayant la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ afin de décrire le module d'Young, le module de cisaillement et de coefficient de Poisson

d'endommagement. Les résultats de ces linéarisations sont donnés dans le tableau 2.2 pour les directions particulières $n = \mathbf{e}_1$ et $n = \mathbf{e}_2$.

(a)	$\frac{E^d(\mathbf{e}_1)}{E}$	$\frac{E^d(\mathbf{e}_2)}{E}$	
Discret	$1 - \frac{(3\alpha+4\beta)(3k+\mu)}{9k\mu} \rho^{Dis}$	$1 - \rho^{Dis} \left(\frac{3\alpha+4\beta}{9k} + \frac{3\alpha+\beta}{3\mu} - \frac{3(\alpha+\beta)}{3k+\mu} \right)$	
VD	$1 - \left(\frac{\mu}{3k+\mu} d_V + \frac{6k}{3k+\mu} d_{Dev} \right)$	$1 - \left(\frac{\mu}{3k+\mu} d_V + \frac{2k}{3k+\mu} d_{Dev} \right)$	
VDT	$1 - \left(\frac{\mu}{3k+\mu} d_V + \frac{3K}{3k+\mu} \frac{\mu_D}{2\mu} d_D \right)$	$1 - \left(\frac{\mu}{3k+\mu} d_V + \frac{3k}{3k+\mu} \frac{\mu_D}{4\mu} d_D \right)$	
Eshelby	$1 - \frac{12k(3k+4\mu)}{(3k+\mu)^2} \rho^{Esh}$	1	
(b)	$\frac{\nu^d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{\nu}$	$\frac{\nu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}{\nu}$	
Discret	1	$1 - \rho^{Dis} \left(-\frac{\beta}{\mu} - \frac{3(\alpha+\beta)}{(3k+\mu)} \right)$	
VD	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} (d_V - 2d_{Dev})$	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left(d_V - \frac{(3k+2\mu)}{2\mu} d_{Dev} \right)$	
VDT	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left(d_V - \frac{\mu_D}{2\mu} d_D \right)$	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left(d_V - \frac{(3k+2\mu)}{2\mu} \frac{\mu_D}{2\mu} d_D \right)$	
Eshelby	$1 - \frac{12k(3k+4\mu)}{(3k+\mu)^2} \rho^{Esh}$	1	
(c)	$\frac{\mu^d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{\mu} = \frac{\mu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}{\mu}$	$\frac{\mu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{\mu}$	$\frac{\nu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{\nu}$
Discret	$1 - \rho^{Dis} \frac{\alpha+\beta}{\mu}$	$1 - \rho^{Dis} \frac{\alpha}{\mu}$	$1 - \rho^{Dis} \left(\frac{\beta}{\mu} - \frac{3(\alpha+\beta)}{(3k+\mu)} - \frac{3\alpha}{(3k-2\mu)} \right)$
VD	$1 - \frac{3}{2} d_{Dev}$	1	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left(d_V - \frac{(3k+2\mu)}{2\mu} d_{Dev} \right)$
VDT	$1 - \frac{3}{2} \frac{\mu_T}{2\mu} d_T$	1	1 -
Eshelby	$1 - \frac{16(3k+4\mu)}{9(3k+2\mu)} \rho^{Esh}$	1	$\frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left(d_V - \frac{(3k+2\mu)}{2\mu} \frac{\mu_D}{2\mu} d_D \right)$
			1

TABLE 2.2 – (a, b, c) Développements limités au premier ordre vis à vis de l'endommagement, du module d'Young E , du coefficient de contraction ν et du module de cisaillement μ dans les directions \mathbf{e}_1 (normale à la fissure) et \mathbf{e}_2 (dans le plan d'isotropie). E^d , ν^d et μ^d sont les grandeurs endommagées

Suivant la direction \mathbf{e}_1 normale à la fissure, le module d'Young peut être dégradé dans les quatre modèles. Il en va de même pour le module de cisaillement hors plan de fissure.

Dans le plan d'isotropie, les deux paramètres α et β du modèle Discret étant positifs, on peut montrer que le module $E^d(\mathbf{e}_2)$ y est forcément affecté par l'endommagement. Il n'en va pas de même pour le modèle Eshelby issu de l'homogénéisation qui ne fait apparaître aucune dégradation.

Les modèles VD et VDT dégradent également ce module $E^d(\mathbf{e}_2)$ (proportionnellement à $E^d(\mathbf{e}_1)$) sans pour autant affecter le module de cisaillement $\mu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ contrairement au modèle Discret comportant un endommagement isotrope déviatorique (sur \mathbb{E}_3 , tableau 2.1), qui affiche un endommagement affectant à la fois le module de cisaillement et le coefficient de contraction.

Concernant l'évolution du coefficient de contraction $\nu^d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $\nu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ hors le plan d'isotropie, le modèle Discret ne permet pas d'ajuster l'effet de l'endommagement sur le coefficient de contraction suivant la direction \mathbf{e}_1 . Par contre le modèle Discret affiche dans la direction \mathbf{e}_2 une augmentation de l'effet Poisson contrairement à Eshelby qui ne le modifie pas, ce qui est en contradiction avec les constatations expérimentales. Dans les modèles microplan, le coefficient de contraction étant exprimé à partir de la différence de deux termes, peut croître ou décroître suivant ces mêmes directions. Dans le modèle VD, ce sont les niveaux relatifs des variables d_V et d_D^{VD} qui gèrent ce signe, avec une variable d_D^{VD} contrainte par le niveau de dommage sur le module de cisaillement. Il est possible de garantir que le modèle VD décrit une augmentation du coefficient de contraction selon les direction \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 en respectant les relations :

$$d_V^{VD} \leq 2d_D^{VD} \quad \text{et} \quad d_V^{VD} \leq d_D^{VD} \frac{3k + 2\mu}{2\mu} \quad (2.82)$$

Ceci est également possible pour le modèle VDT en respectant les relations :

$$d_V^{VDT} \leq \frac{\mu_D}{\mu} d_D^{VDT} \quad \text{et} \quad d_V^{VDT} \leq \frac{3k + 2\mu}{2\mu} \frac{\mu_D}{2\mu} d_D^{VDT} \quad (2.83)$$

La différentiation dans le modèle VDT des deux paramètres μ_D et μ_T , et l'introduction d'une variable d'endommagement d_T permet de découpler cet endommagement de ceux agissant sur les deux autres paramètres. De plus, des pondérations supplémentaires fonction des propriétés élastiques $\mu_D/2\mu$ et $\mu_T/2\mu$, permet un réglage supplémentaire dans les effets Poisson.

Les comparaisons analytiques aident à comprendre comment l'endommagement agit dans les différents modèles et font ressortir quelques différences importantes (nombre de paramètres et de variables, adaptabilité et souplesse d'identification).

2.5 Comparaisons numériques : conséquence d'un unique réseau de micro-fissures

Afin de faciliter l'interprétation des évolutions d'endommagement, il est proposé une étude numérique comparative. Dans un premier temps, il est exposé la démarche employée pour la détermination du jeu de paramètres initial et la définition des variables de sensibilité observées. A partir de celui-ci, un premier tracé des sensibilités est présenté. Il s'en suivra une analyse avec des valeurs particulières d'endommagement respectant la sensibilité négative sur le coefficient de contraction (impliquant une augmentation du coefficient de contraction). Enfin, une analyse sur le modèle VDT sera exposé.

2.5.1 Définition des grandeurs observées et jeu de paramètres initial

Comme dans le paragraphe précédant, on ne considère qu'un unique réseau de micro-fissure, de normale \mathbf{n} . Les conséquences de cet endommagement seront analysés sur des sensibilités (variation relative de la variable d'observation par rapport à la variable d'entrée) le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de contraction (à partir des relations 2.81), défini comme suit :

$$s^E = \frac{E - E(\mathbf{n})}{E} \quad , \quad s^\mu = \frac{\mu - \mu(\mathbf{n})}{\mu} \quad , \quad s^\nu = \frac{\nu - \nu(\mathbf{n})}{\nu} \quad (2.84)$$

où E , μ et ν sont respectivement le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient du Poisson identifiés sur un grès des Vosges par Pecqueur [68] (ensemble de paramètres de références). Le coefficient w_1 correspond à la pondération du dommage relatif à chaque direction qui discrétise l'angle solide. Dans notre cas, ce poids est de $w_1 = 4\pi/42$ pour toutes les directions et tous les modèles. Enfin, d_2 est le dommage lié au tenseur \mathbb{E}_2 et qui est fixé arbitrairement à 25%, a été choisis pour l'ensemble des modèles qui sont comparés. Le modèle discret ayant été identifié sur le grès des Vosges, les paramètres α et β sont déjà connus (respectivement 2500 MPa et 8100 MPa). Il est possible d'en déduire la densité de fissures pour ce modèle $\rho^{Dis} = 8,72\%$. Il en va de même pour la densité de fissure du modèle Eshelby qui est $\rho^{Esh} = 4,4\%$. La différence entre ces densités de fissures trouve son origine dans leurs définitions puisque ρ^{Esh} n'inclut pas l'angle solide total ($\frac{4}{3}\pi$). Dans les modèles discret et d'Eshelby les paramètres de dommages d_i sont tous proportionnels à la densité de fissures. Il est donc possible de calculer pour les dommages associés au tenseur de la base de Walpole d_i . Il est supposé ensuite que $d_4^{VD} = d_4^{Dis} = 17,31\%$. Ceci permet d'en déduire directement la valeur de $d_{Dev}^{VD} = 11,55\%$. Puisque d_2 est le même pour tous les modèle, il est possible d'en déduire $d_V^{VD} = 27\%$.

Dans un premier temps, nous allons caler les paramètres du modèle VDT de

2.5. COMPARAISONS NUMÉRIQUES : CONSÉQUENCE D'UN UNIQUE RÉSEAU DE MICRO-FISSURES

manière à ce qu'il soit identique au modèle VD, et ce afin de pouvoir comparer les modèles microplans, aux modèles Discret et Eshelby. Pour assurer cette similarité, les paramètres du modèle VDT doit vérifier $\mu_D^{VDT} d_D^{VDT} = \mu_T^{VDT} d_T^{VDT}$. En imposant arbitrairement que $\mu_D^{VDT} = \mu_T^{VDT}$, il en résulte que $\mu_D^{VDT} = \mu_T^{VDT} = \mu_D^{VD} = \mu$ et $d_D^{VDT} = d_T^{VDT} = d_D^{VD}$.

Notons que si l'endommagement d_2 demeure inférieur à $\frac{27k(3\alpha+4\beta)}{[(3k+4\mu)(11\alpha+20\beta)]}$ alors d_V n'excède jamais 1. Les autres grandeurs lui sont inférieures. Ainsi, pour les valeurs des modules élastiques choisies et pour les valeurs des coefficients de pondération anisotropes identifiés par Bargellini dans le modèle discret, d_2 doit donc être inférieur 92.6 %. Le tableau 2.3 résume les valeurs numériques d'endommagement obtenues.

Modèles	discret	VD	VDT	Eshelby
Paramètres pour $d_2 = 25\%$	$\rho^{Dis} = 8.72\%$	$d_V^{VD} = 27\%$	$d_V^{VDT} = 27\%$	$\rho^{Esh} = 4.4\%$
	$\alpha = -2500 MPa$	$d_{Dev} = 11.55\%$	$d_D = 11.55\%$	
	$\beta = -8100 MPa$		$d_T = 11.55\%$	
	$k = 6805 MPa$	$k_V = 20415 MPa$		$k = 6805 MPa$
	$\mu = 5340 MPa$	$\mu_D = 10680 MPa$ $\mu_T = 10680 MPa$		$\mu = 5340 MPa$
	$d_1 = 0$	$d_1 = 23.79\%$		$d_1 = 2.2\%$
	$d_3 = 4.08\%$	$d_3 = 0$		$d_3 = 0$
	$d_4 = 17.3\%$	$d_4 = 17.3\%$		$d_4 = 7.3\%$
	$d_5 = 0$	$d_5 = 31.28\%$		$d_5 = 25\%$

TABLE 2.3 – Paramètres et amplitudes des endommagements pour chaque modèle, déterminés à partir de l'endommagement

Les modèles ont été programmés dans Matlab. Les résultats numérique et analyses des modèles seront détaillés dans la section suivante.

2.5.2 Comparaison des modèles avec le jeu de paramètres initial

L'endommagement sur le module directionnel (figure 2.10) est légèrement atténué pour les modèles VD, VDT et EM dans la direction \mathbf{e}_1 alors que pour cette direction, DM amplifie sa sensibilité. Dans le plan d'isotropie ($\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$), DM prévoit une sensibilité de 15% alors que VD/VDT prédisent une amplitude de 42%. La proportionnalité de ces effets dans ce plan est directement reliée au rapport entre les parties volumiques de DM ($-\rho\alpha$) et de VD/VDT ($\frac{k}{3}d_V$)

La figure 2.11 présente la distribution angulaire de la sensibilité du module de cisaillement. Cette figure montre que les courbes pour DM et VD/VDT sont superposées et semblent indépendantes de la direction. Pour EM, on note une légère

2.5. COMPARAISONS NUMÉRIQUES : CONSÉQUENCE D'UN UNIQUE RÉSEAU DE MICRO-FISSURES

atténuation de la sensibilité selon la bissectrice de $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Les paramètres internes de EM ne peuvent ajuster ni la faible sensibilité anisotrope, ni la sensibilité isotrope. Il en va de même pour VD/VDT, tandis que pour DM, ces sensibilités peuvent être ajustées par les paramètres α et β ainsi que le montre le tableau 2.2.

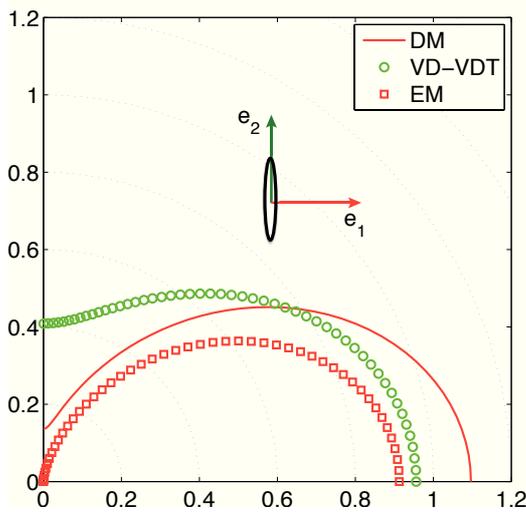


FIGURE 2.10 – Sensibilité du module d'Young au dommage $d_2 : s^E$

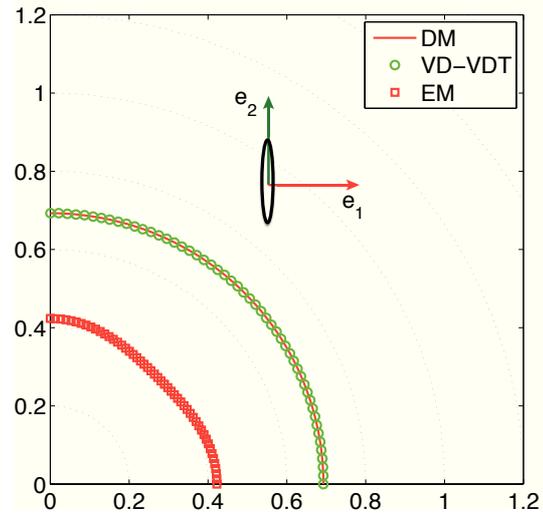


FIGURE 2.11 – Sensibilité du module de cisaillement au dommage $d_2 : S^\mu$

La figure 2.12 présente la distribution angulaire de la sensibilité de l'endommagement sur le coefficient de contraction. DM a une sensibilité négative selon la direction \mathbf{e}_2 , une augmentation de l'effet du coefficient de contraction ; pour ce modèle, il n'y a pas d'effet dans la direction \mathbf{e}_1 . De façon symétrique à DM par rapport à la seconde bissectrice du plan (e_1, e_2) , EM a une sensibilité nulle selon l'axe \mathbf{e}_2 et positive dans la direction \mathbf{e}_1 . Cette sensibilité qui ne peut être que positive (tableau 2.2 $\nu(e_1, e_2)$) implique une diminution du coefficient de contraction, ce qui est en contradiction avec les observations expérimentales (figure 1.8). C'est la raison pour laquelle ce modèle est écarté du reste des investigations. VD et VDT présente une sensibilité négative d'amplitude maximum selon la direction e_2 . Il y a également un effet positif dans la direction e_1 et une sensibilité nulle sur la première bissectrice.

Ainsi que cela a été expliqué dans la section 2.4.3, les paramètres d'endommagement de VD doivent vérifier les relations 2.82 pour que la sensibilité du coefficient de contraction soit négative. Or, la figure 2.12 met en évidence que le jeu de paramètres ($d_D^{VD} = 11,55\%$ et $d_V^{VD} = 27\%$) ne vérifie pas ces relations. Ceci est pris en considération dans la section suivante.

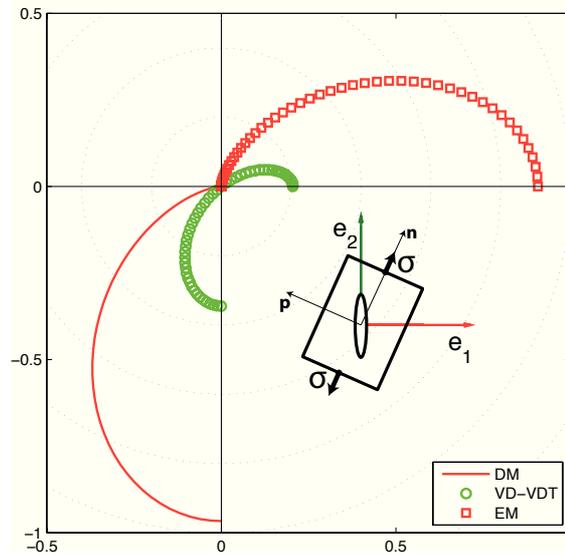


FIGURE 2.12 – Sensibilité du module du coefficient de contraction au dommage d_2 : S^μ

2.5.3 Comparaison de DM, VD et VDT avec des valeurs assurant la sensibilité négative du coefficient de contraction

Dans cette section, la valeur du dommage volumique de VD est changée pour se conformer à la relation 2.82. En l'occurrence, $d_V = 2d_D = 23,10\%$ pour être à la limite de la relation 2.82, soit une sensibilité du coefficient de contraction nulle selon la direction e_1 . Cette modification n'induit pas d'effet sur la sensibilité du module de cisaillement comme le montre la figure 2.14 et n'a qu'une faible modification sphérique sur la sensibilité du module d'Young de VD uniquement tel que le présente la figure 2.13. L'évolution angulaire de la sensibilité du coefficient de contraction change significativement, uniquement pour VD ainsi que le montre la figure 2.15.

Ce jeu de paramètres particulier met en lumière la souplesse de VD/VDT par rapport à DM au regard de la capacité à modifier la sensibilité du coefficient de contraction. De plus, il apparaît qu'il n'y a pas d'ensemble (α, β) pour que la sensibilité du module d'Young de DM soit nul dans la direction e_2 (à l'exception de $(0,0)$ qui correspond à un comportement isotrope non endommagé). D'autre part, VD n'a comme conséquence aucune diminution marquée de cette limite tout en préservant l'effet de dommage sur les autres directions et modules.

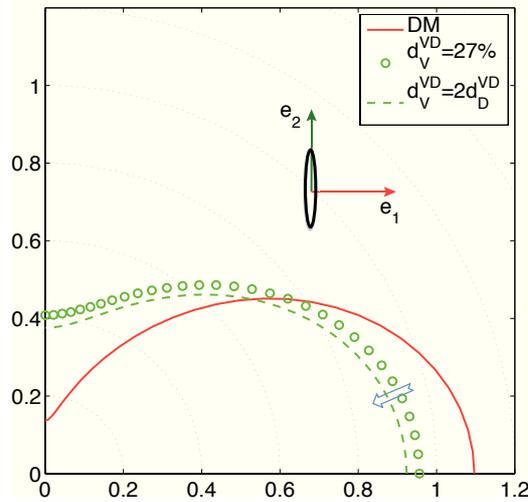


FIGURE 2.13 – Sensibilité du module d’Young au dommage $d_2 : s^E$ pour deux valeurs particulières de d_V

2.5.4 Possibilités du modèle VDT

La formulation VDT permet d’accéder, au niveau de chaque microplan, à la composante transverse pouvant être nécessaire pour piloter les lois d’endommagement faisant intervenir aussi la déformation transverse. Encore une fois, on se limite ici à l’analyse aux conséquences d’un dommage fixé. Toujours pour des raisons de simplicité, on conserve tous les paramètres fournis dans le tableau 2.3 pour analyser ce modèle, à l’exception de μ_D et μ_T qui sont libérés. Afin de vérifier l’isotropie non endommagée, la relation $\frac{2}{5}\mu_D + \frac{3}{5}\mu_T = 2\mu_{Dev} = 2\mu$ est toujours respectée, mais par contre, la relation $\mu_D d_D = \mu_T d_T$ n’est plus vérifiée. On s’intéresse donc, uniquement à l’influence du rapport des modules $\frac{\mu_D}{\mu_T}$ sur les réponses.

Les figures 2.16, 2.17 et 2.18 montrent l’évolution des sensibilités des paramètres de l’ingénieur pour un ensemble discret de valeurs du rapport des modules μ_D/μ_T . Le choix de faire varier ce rapport des modules et non le rapport des endommagements d_D/d_T est guidé par la volonté de conserver la même sensibilité définie précédemment.

On remarque dans un premier temps qu’il existe deux directions d’invariances par paramètre de l’ingénieur (traits pointillés sur les courbes). Il semble que ces invariants dépendent des paramètres du matériau. Il sera donc possible de les gérer dans le cadre d’une identification.

Sur la figure 2.16, les directions d’invariants sont données pour des angles de 33° et 73° . Il est à noter que les amplitudes des sensibilités pour ces deux directions sont différentes. Ceci implique que le rapport des modules de cisaillement ne permet pas seul de caler un comportement isotrope. Dans les intervalles $[0^\circ; 33^\circ]$ et $[73^\circ; 90^\circ]$, la

2.5. COMPARAISONS NUMÉRIQUES : CONSÉQUENCE D'UN UNIQUE RÉSEAU DE MICRO-FISSURES

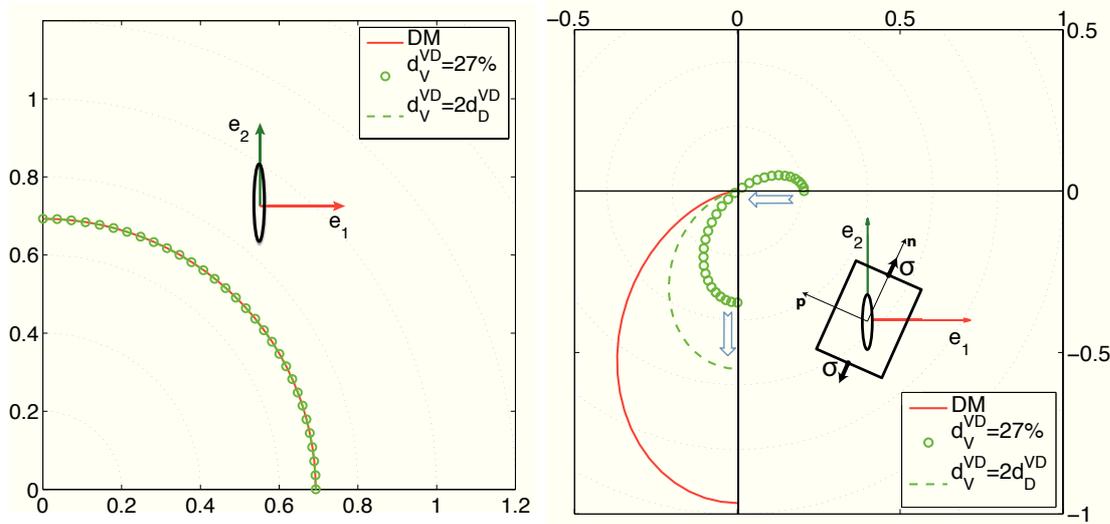


FIGURE 2.14 – Sensibilité du module de cisaillement au dommage d_2 : S^μ pour deux valeurs particulières de d_V

FIGURE 2.15 – Sensibilité du coefficient de cisaillement au dommage d_2 : S^ν pour deux valeurs particulières de d_V

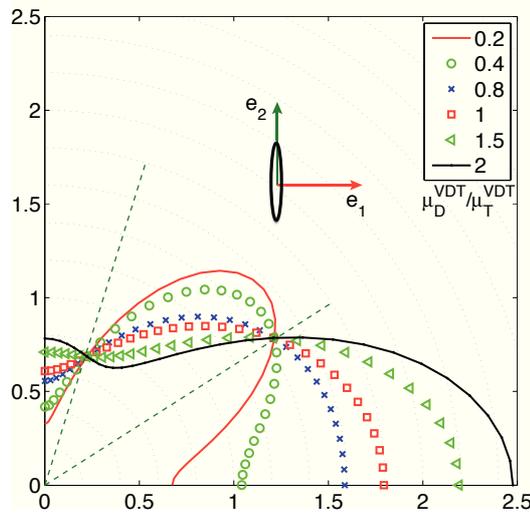


FIGURE 2.16 – Sensibilité du module d'Young au dommage d_2 : s^E pour 5 valeurs particulières du ratio $\frac{\mu_D}{\mu_T}$

sensibilité est une fonction croissante du rapport μ_D/μ_T , contrairement à l'intervalle $[33^\circ ; 73^\circ]$. En outre, l'amplitude des variations de la sensibilité est plus prononcée pour la direction \mathbf{e}_1 .

La figure 2.17 présente une symétrie par rapport à la première bissectrice. Ainsi les directions d'invariances sont également symétriques (20° et 70°) et leurs amplitudes de sensibilités sont égales. Cette symétrie récurrente semble être intrinsèque

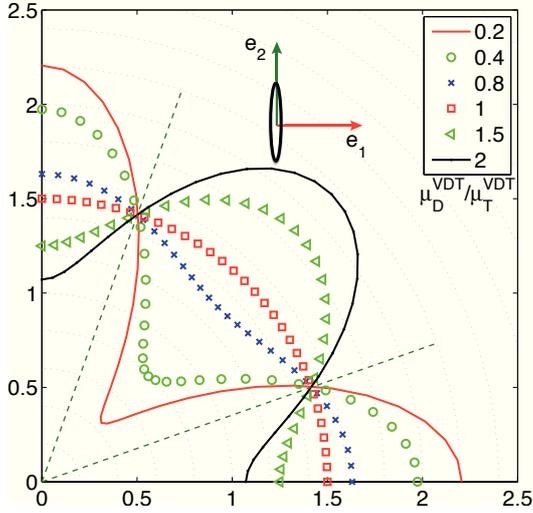


FIGURE 2.17 – Sensibilité du module de cisaillement au dommage $d_2 : s^\mu$ pour 5 valeurs particulières du ratio $\frac{\mu_D}{\mu_T}$

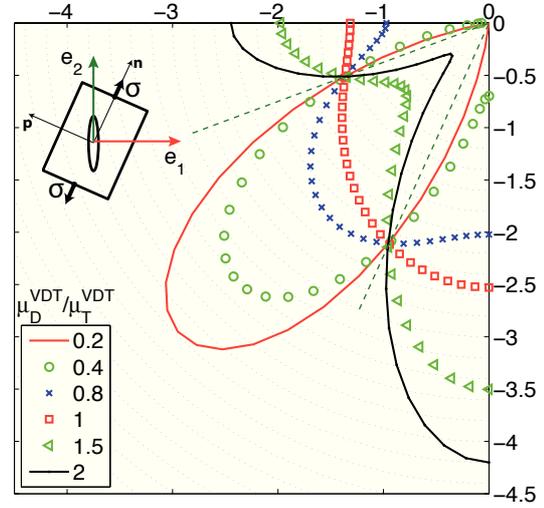


FIGURE 2.18 – Sensibilité du coefficient de contraction au dommage $d_2 : s^\nu$ pour 5 valeurs particulières du ratio $\frac{\mu_D}{\mu_T}$

à la sensibilité du module de cisaillement car elle apparaissait déjà pour DM et EM sur le figure 2.11. Enfin, la plus forte variation de sensibilité est observée selon la bissectrice.

La figure 2.18, bien que représenté dans le troisième quart du plan, présente des directions d'invariances à 21° et 66° par rapport à \mathbf{e}_1 . L'amplitude maximum de variation de la sensibilité est observée pour la direction \mathbf{e}_2 . De plus, il est constaté qu'il y a une sensibilité nulle sur les axes \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 pour la valeur particulière du rapport μ_D/μ_T de 0,2.

La grande variabilité des sensibilités des paramètres de l'ingénieur laisse apparaître de larges possibilités pour une identification sur le matériau objet de cette étude.

2.6 Conclusion

Le choix d'un modèle d'endommagement anisotrope pouvant prendre en compte sainement l'effet unilatéral reste difficile compte tenu du manque de données expérimentales. Des considérations thermodynamiques rappelées dans ce chapitre ont permis de sélectionner les quatre classes de modèle suivantes : (1) l'approche de Bargellini *et al.* [4], (2) les approches microplans [18], (3) les approches anisotropes micromécaniques dont par exemple [89] et (4) un modèle formulé en vitesse [36]. Ces modèles ont été reformulés dans une base tensorielle communément interprétable : la base de Walpole. Ce travail analytique a mis en exergue de grandes

différences quant aux conséquences d'un endommagement fixé sur les tenseurs de la base de Walpole. Ces différences ont été observées quantitativement grâce à l'uniformisation des modèles et à des choix particuliers d'endommagement. En se basant sur la faculté des modèles à décrire un accroissement du coefficient de contraction, l'approche micromécanique que nous avons sélectionnée a finalement été écartée. Il a été montré que le modèle développé par Bargellini *et al.* s'approche fortement du modèle VD dans lequel la condition $d_V = 2d_D$ serait respectée en permanence. Dans ce cas les réponses ne diffèrent que par leur amplitude respective. On remarquera toutefois que les comparaisons proposées n'éclairent pas les effets du dommage sur trois des composantes tensorielles de la base de Walpole ce qui ne permet pas d'étudier comparativement ces deux modèles dans ce cas.

Le modèle microplan VDT se montre le plus souple pour modifier de façon indépendante les trois grandeurs de l'ingénieur. Cette capacité provient de la fermeture du problème (3 équations V, D et T pour 3 inconnues E , μ et ν). Cependant, il reste à comprendre les relations liant les paramètres et les modules. Ceci peut se faire au travers d'une étude de sensibilité qui permettrait de formuler des relations entre les paramètres des microplans et les variables globales.

Ce chapitre n'a pour ambition que de choisir de façon rationnel une structure de modèle qui puisse être adaptée à la modélisation du matériau objet de nos études. Cette adaptation, par la prise en compte de phénomènes mécaniques est l'objet des chapitres suivants.