

Estimation pour les TDS non linéaires

Sommaire

7.1	Introduction	123
7.2	Formulation du problème	124
7.3	Étude du cas sans les entrées inconnues	125
7.4	Étude du cas avec des entrées inconnues	128
7.5	Estimateur par modes glissants d'ordre supérieur	129
7.6	Exemple illustratif	131
7.7	Conclusion	135

7.1 Introduction

Par rapport aux TDS linéaires, les systèmes non linéaires à retard sont encore plus réalistes et leurs études permettent de se rapprocher au maximum des systèmes réels. Ce type de système est généralement très complexe. Mais de nombreux chercheurs ont effectué des travaux sur des systèmes non linéaires à retards et des résultats existent sous certaines conditions. La complexité augmente considérablement si l'on doit considérer ces systèmes en réseau.

Dans les Chapitres 5 et 6, nous avons évoqué l'identifiabilité topologique d'un réseau de systèmes dynamiques non linéaires. Dans ce chapitre, nous allons considérer le problème d'identification de la topologie comme un problème d'observation partielle ou globale des états et des paramètres inconnus d'un système non linéaire avec retards. Nous serons donc amenés à utiliser les résultats obtenus précédemment dans ce manuscrit.

7.2 Formulation du problème

Considérons une fois encore un réseau de k systèmes dynamiques où ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) et dont le modèle mathématique général est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}(x(t-s\tau)) + \varphi(x(t))\theta + \tilde{g}(x(t-s\tau))\vartheta, & s \in \mathbb{N}, s\tau \in \mathcal{S} \\ y(t) = \bar{h}(x(t-s\tau)) \\ x(t) = x_0 \quad \forall t \in [-s\tau, 0] \end{cases} \quad (7.1)$$

où

$$\begin{aligned} x_i &= (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})^T \in \mathbb{R}^{n_i} \text{ et } x = (x_1^T, \dots, x_k^T)^T \in \mathbb{R}^n; \\ y_i &= (y_{i,1}, \dots, y_{i,p_i})^T \in \mathbb{R}^{p_i} \text{ et } y = (y_1^T, \dots, y_k^T)^T \in \mathbb{R}^p; \\ \vartheta_i &= (\vartheta_{i,1}, \dots, \vartheta_{i,m_i})^T \in \mathbb{R}^{m_i} \text{ et } \vartheta = (\vartheta_1^T, \dots, \vartheta_k^T)^T \in \mathbb{R}^m; \\ \theta_i &= (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q_i})^T \in \mathbb{R}^{q_i} \text{ et } \theta = (\theta_1^T, \dots, \theta_k^T)^T \in \mathbb{R}^q; \\ \tilde{g}_i(x_i(t-s\tau)) &= (\tilde{g}_{i,1}(x_i(t-s\tau)), \dots, \tilde{g}_{i,m_i}(x_i(t-s\tau))) \text{ et} \\ \tilde{g}(x(t-s\tau)) &= (\tilde{g}_1(x_1(t-s\tau)), \dots, \tilde{g}_k(x_k(t-s\tau))); \\ \varphi_{i,j}(x_j) &= (\varphi_{i,j}^1(x_j), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(x_j))^T \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad \varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}^T(x_1), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(x_{q_i}))^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i} \text{ et} \\ \varphi(x(t)) &= \text{diag}\{\varphi_1(x(t)), \dots, \varphi_k(x(t))\} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times q}; \\ \bar{f}(x(t-s\tau)) &= \begin{pmatrix} \bar{f}_1(x_1(t-s\tau)) \\ \vdots \\ \bar{f}_k(x_k(t-s\tau)) \end{pmatrix}, \text{ et } \bar{h}(x(t-s\tau)) = \begin{pmatrix} \bar{h}_1(x_1(t-s\tau)) \\ \vdots \\ \bar{h}_k(x_k(t-s\tau)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

avec $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $m = \sum_{i=1}^k m_i$, $p = \sum_{i=1}^k p_i$ et $q = \sum_{i=1}^k q_i$;

Le vecteur $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ représente le vecteur des états du sous système Σ_i du réseau, $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ le vecteur de sorties et $\vartheta_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ le vecteur des entrées inconnues. La constante positive τ représente un retard commensurable. Le paramètre $\theta_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ représente le coefficient (constant mais inconnu) de connexion entre deux sous systèmes du réseau. La constante positive s_i est le coefficient du retard commensurable de base τ et \mathcal{S} est un ensemble fini des coefficient du retard.

Connaissant la dynamique des paramètres inconnus mais constants par intervalles, nous pouvons alors les considérer comme des états additionnels. Par conséquent, le modèle du réseau (7.1) peut alors être réécrit sous la forme suivante en définissant $\xi = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ et en introduisant l'opérateur de retard δ tel que $x(t-s\tau) = \delta^s x(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi, \delta) + g(\xi, \delta)\vartheta \\ y(t) = h(\xi, \delta) \\ z(t) = P\xi(t) \end{cases} \quad (7.2)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^{n+q}$, $f(\xi, \delta) = \bar{f}(x(t-s)) + \varphi(x(t))\theta$ et $\bar{h}(\xi, \delta) = h(x(t-s\tau))$. Comme dans le Chapitre 5, la matrice P est choisie en fonction des états et des paramètres inconnus dont on veut étudier l'identifiabilité. Étant donné la complexité du système (7.2), nous allons entamer notre étude avec le cas le plus simple, c'est-à-dire en supposant qu'il n'y a pas d'entrées inconnues.

7.3 Étude du cas sans les entrées inconnues

Dans cette section, on suppose que $\vartheta = 0$. Le système (7.2) peut alors être écrit sous sa forme simplifiée suivante

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi, \delta) \\ y(t) = h(\xi, \delta) \\ z(t) = P\xi(t) \end{cases} \quad (7.3)$$

En considérant les paramètres inconnus du système (7.1) comme des variables d'état avec des dynamiques nulles, l'identification des paramètres inconnus peut alors dans ce cas être résumée à un simple problème d'observabilité des états. Nous allons donc rappeler les définitions de l'observabilité algébrique (pour l'état x dans (7.1)) et de l'identifiabilité algébrique (pour les paramètres θ dans (7.1)) pour un système non linéaire à retards.

Auparavant, définissons \mathcal{K} comme un domaine des fonctions méromorphes d'un nombre fini de variables dans

$$\{x(t-j\tau), j = 0, 1, \dots, s; s \in \mathbb{N}\}$$

Notons $\mathcal{K}[\delta]$ l'anneau non-commutatif du polynôme de l'opérateur δ avec des coefficients définis sur \mathcal{K} :

$$\mathcal{K}[\delta] = \sum a_i \delta^i, \quad a_i \in \mathcal{K}.$$

Introduisons aussi un opérateur d'avance ∇ tel que $x(t+s\tau) = \nabla^s x(t)$ et $\mathcal{K}(\delta, \nabla)$ un anneau polynômial tel que $\mathcal{K}(\delta, \nabla) = \sum a_i \delta^i + \sum b_i \nabla^i$, $a_i, b_i \in \mathcal{K}$.

Définissons $\mathcal{M} = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{d\epsilon | \epsilon \in \mathcal{K}\}$ comme étant un module à gauche défini sur $\mathcal{K}(\delta)$ et $\mathcal{Y} = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{dy, d\dot{y}, \dots\}$ comme étant un sous module de \mathcal{M} . Soient $\mathcal{X} = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{dx\}$, $\Theta = \text{span}\{d\theta\}$ et $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^q$ tels que $\theta \in \mathcal{P}$. Soient \mathcal{I} un ensemble des fonctions initiales défini sur $[-s\tau, 0]$ et $\mathcal{W} = \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tels que

$$(\theta, x_0) \rightarrow (\theta, \delta^j y^{(i)}(t), i, j := 0, 1, \dots, l).$$

Définition 7.1. (*Identifiabilité algébrique pour les TDS*) [ZHANG et al., 2006] Le système (7.1), est dit être algébriquement identifiable s'il existe un entier positif $l \geq 0$, un ensemble ouvert \mathcal{W} et une fonction méromorphe ϕ tels que $\theta = \phi(y^{(i)}(t-j))$, $i, j = 0, 1, \dots, l$ est vrai pour tout $(\theta, x_0) \in \mathcal{W}$.

Dans la suite, des conditions nécessaires à l'identification partielle ou globale des états et des paramètres inconnus seront déduites pour le système (7.3). Sans perte de généralité, supposons

que les composantes de h du système (7.3) sont linéairement indépendantes. Notons $\Xi = \{\mathcal{X} + \Theta\}$ et

$$\mathcal{F}_l = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{dy, d\dot{y}, \dots, dy^{(l)}\}$$

pour $l \in \mathbb{N}$. Il a été montré dans [ZHANG et al., 2006] que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{n+q}$.

Définissons la matrice d'observabilité $\partial\Omega$ comme suit :

$$\partial\Omega = \frac{\partial[h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{n_1-1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{n_k-1} h_p]^T}{\partial\xi} \quad (7.4)$$

et le résultat suivant a été présenté dans ZHANG et al., 2006.

Théorème 7.1. *Le paramètre θ du système (7.1) est identifiable (respectivement z du système (7.3) est observable) si le rang $_{\mathcal{K}(\delta)}\partial\Omega = n + q$ dans le sens où ses colonnes sont indépendantes sur $\mathcal{K}(\delta)$. \diamond*

La condition requise dans le théorème ci-dessus pour l'observabilité des états ainsi que pour l'identifiabilité des paramètres du système est relativement forte. Cette condition suffisante exige que tous les états du système soient observables. Sachant que tous les paramètres ne dépendent pas de tous les états du système, on proposera ci-après un algorithme pour relâcher la condition du Théorème 7.1. Ainsi, on pourra identifier tout ou partie des paramètres du système même si tous les états ne sont pas observables.

Notons \mathcal{K}_ω comme étant une fonction méromorphe d'un nombre fini de variables dans $\{\omega(t - j\tau), j = 1, \dots, s, s \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{K}_\omega(\delta)$ un anneau polynômial défini sur \mathcal{K}_ω tel que

$$\mathcal{K}_\omega(\delta) = \sum c_i \delta^i, \quad c_i \in \mathcal{K}_\omega.$$

L'algorithme suivant est proposé pour assouplir la condition suffisamment forte énoncée dans le Théorème 7.1.

Algorithme 7.1.

1. Initialisation :

- $b_j = 0, j = 1, \dots, p;$
- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \dots, \omega_{p,0}\}$, avec $\omega_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{h_j\};$
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \dots, \mathcal{F}_{p,0}\}$ avec $\mathcal{F}_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,0}}\{d\omega_{j,0}\};$
- $i = 1.$

2. Itération i : Calculer $\mathcal{L}_i = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_{i-1}}(\delta)}\{d\omega_{i-1}\};$

3. Calculer $\partial\Omega_i = \frac{\partial\omega_{i-1}^T}{\partial\xi}$ et pour la matrice P correspondant à z , déterminer la matrice $K_i(\xi, \delta)$ telle que $P = K_i(\xi, \delta)\partial\Omega_i$. Notons $K_i(\xi, \delta)$ la j ème ligne de la matrice $K_i^j(\xi, \delta);$

- 4. — Vérifier si tous les $K_i^j(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}_i$, alors aller au 5;
- Dans le cas contraire, aller au 8;

5. Déterminer :

- $\omega_i = \{\omega_{1,i}, \dots, \omega_{p,i}\}$ avec $\omega_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{h_j, \dots, h_j^{(b_j+1)}\}$;
- $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{1,i}, \dots, \mathcal{F}_{p,i}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_i}\{d\omega_i\}$ avec $\mathcal{F}_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,i}}\{d\omega_{j,i}\}$;

6. Vérifier si $\mathcal{F}_{j,i} \not\subset \{\mathcal{F}_{i-1} \cup \{\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{j,i}\}\}$, alors $b_j = b_j + 1$;

7. Vérifier :

- si $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$, alors incrémenter i puis retourner au 2 pour l'itération suivante;
- Sinon, aller au 8;

8. Stopper la boucle. Alors noter $\partial\Omega = \partial\Omega_i$, $\omega = \omega_{i-1}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$, et $K(\xi, \delta) = K_i(\xi, \delta)$.

9. Fin de l'algorithme.

A la fin de l'application de l'algorithme, si $K(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}$, alors z n'est pas observable.

Théorème 7.2. Si la matrice $K(\xi, \delta)$ existe après l'application de l'Algorithme 7.1 telle que $P = K(\xi, \delta)\partial\Omega$ et que les composantes de tous les éléments des lignes de $K(\xi, \delta)$ satisfont $K^j(\xi, \delta) \in \mathcal{L}$, alors z est observable. \diamond

Preuve. D'après la définition de \mathcal{L}_i , celui-ci définit l'espace observable à chaque itération i . Après l'application de l'Algorithme 7.1 au système (7.3), on obtient des matrices $\mathcal{K}_i(\xi)$ et $d\Omega$ telles que $P = \mathcal{K}(\xi)d\Omega$. Si $\mathcal{K}^j(\xi) \in \mathcal{L}$, alors tous les éléments dans $\mathcal{K}(\xi)$ sont générés par \mathcal{L} . Et donc, cela implique que $z = P\xi$ est observable. \blacksquare

Remarque 7.1. La matrice $\partial\Omega \in \mathcal{K}^{r \times (n+q)}(\delta)$ étant de rang plein dans le sens des lignes, il existe son inverse à droite $[\partial\Omega]_R^{-1} \in \mathcal{K}^{(n+q) \times r}(\delta, \nabla)$ telle que $\partial\Omega[\partial\Omega]_R^{-1} = I_r$.

Alors, la matrice $K(\xi, \delta)$ peut être déterminée comme suit :

$$K(\xi, \delta) = P[\partial\Omega]_R^{-1}. \quad (7.5)$$

En supposant que la matrice P est choisie de sorte que $K(\xi, \delta) \in \mathcal{L}$ (ce qui signifie que z correspondant à P choisie est observable), le lemme suivant est valable.

Lemme 7.1. Il existe deux fonctions $F_1(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$ et $F_2(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$ telles que :

$$F_1(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})z = F_2(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}). \quad (7.6)$$

Preuve. A partir du système (7.3), on a $z = P\xi$ dont la dérivée nous donne $dz = d(P\xi) = Pd\xi$. Sachant que $P = K(\xi, \delta)\partial\Omega$ et en remplaçant P dans la relation précédente, on obtient $dz = K(\xi, \delta)\partial\Omega d\xi$. Notons $d\Omega = \partial\Omega d\xi$, alors on a $dz = K(\xi, \delta)d\Omega$.

Remarquons que dz est une 1-forme fermé, cela implique que $K(\xi, \delta)d\Omega$ est aussi une 1-forme fermé. Par conséquent, nous avons $d(F(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})) = dz$, ce qui implique que

$$z = F(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) \text{ où } F(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = \frac{\bar{g}(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})}{g(\delta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})}.$$

\blacksquare

Après avoir déduit la condition suffisante moins restrictive sur l'observabilité de z , un observateur approprié, comme par exemple un observateur par modes glissant, peut alors être proposé pour l'estimation de celui-ci.

7.4 Étude du cas avec des entrées inconnues

Dans cette partie, nous allons étendre les résultats en prenant en compte les entrées inconnues. Pour rappel, ces entrées inconnues peuvent être des perturbations ou des bruits.

Étant donné que nous prenons en compte les entrées inconnues, l'algorithme 7.1 ne convient donc plus pour l'estimation des états et des paramètres inconnus du système considéré. Comme dans le Chapitre 6, la méthode la mieux adaptée est d'annihiler l'effet des entrées inconnues afin d'aller plus loin dans la dérivation des sorties. Il paraît donc nécessaire d'optimiser l'Algorithme 7.1 pour étendre les résultats aux systèmes avec des entrées inconnues. Pour cela, en se référant toujours aux résultats présentés dans [BARBOT et al., 2009], définissons un espace $G = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\tilde{g}_1(\xi, \delta), \dots, \tilde{g}_m(\xi, \delta)\}$ dont on note son annihilateur G^\perp tel que $G^\perp G = 0$. Définissons aussi un vecteur

$$V = (L_f^{b_1} h_1, \dots, L_f^{b_p} h_p)^T$$

et la matrice

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_1} h_1 & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\tilde{g}_1} L_f^{b_p} h_p & \cdots & L_{\tilde{g}_m} L_f^{b_p} h_p \end{pmatrix}.$$

L'algorithme 7.1 peut être adapté comme suit pour estimer les états et les paramètres inconnus en présence des entrées inconnues.

Algorithme 7.2.

1. Initialisation :

- $b_j = 0, j = 1, \dots, p$;
- $\omega_0 = \{\omega_{1,0}, \dots, \omega_{p,0}\}$, avec $\omega_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{h_j\}$;
- $\mathcal{F}_0 = \{\mathcal{F}_{1,0}, \dots, \mathcal{F}_{p,0}\}$ avec $\mathcal{F}_{j,0} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,0}}\{d\omega_{j,0}\}$;
- $G = \text{span}\{\tilde{g}_1(\xi, \delta), \dots, \tilde{g}_m(\xi, \delta)\}$;
- $i = 1$ et $l^* = 0$.

2. Calculer $\mathcal{L}_i = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_{i-1}}(\delta)}\{d\omega_{i-1}\}$ et G^\perp l'annihilateur de G tel que

$$G^\perp = \text{span}\{\bar{\mathfrak{D}} \in \mathcal{L}_i \mid \bar{\mathfrak{D}} \tilde{g} = 0, \forall \tilde{g} \in G\};$$

3. Calculer $\partial\Omega_i = \frac{\partial\omega_{i-1}^T}{\partial\xi}$;

4. Pour la matrice P correspondant à z , déterminer la matrice $K_i(\xi, \delta)$ telle que $P = K_i(\xi, \delta)\partial\Omega_i$. Notons $K_i(\xi, \delta)$ la jème ligne de la matrice $K_i^j(\xi, \delta)$;

5. Vérifier si tous les $K_i^j(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}_i$, alors aller au 6; Dans le cas contraire, aller au 11;

6. Calculer $V_i = (L_f^{b_1} h_1, \dots, L_f^{b_l} h_1)^T$ et

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,i} \\ \vdots \\ \Gamma_{p,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\bar{g}_1} L_f^{b_1} h_1 & \cdots & L_{\bar{g}_m} L_f^{b_1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\bar{g}_1} L_f^{b_p} h_p & \cdots & L_{\bar{g}_m} L_f^{b_p} h_p \end{pmatrix};$$

— Vérifier si $\Gamma_i = 0$ alors aller au 8;

— Sinon, aller au 7;

7. Déterminer $G^\perp \cap \mathcal{L}_i$ et noter $\Upsilon_i = \{\bar{\delta} \in G^\perp \cap \mathcal{L}_i \mid V_i \bar{\delta} \notin \omega_i\}$;

Si $\Upsilon_i \neq 0$, il existe une nouvelle sortie fictive. Alors, incrémenter l^* puis calculer $\bar{y} = V_i \bar{\delta}$ et $y_{p+l^*} = \bar{y} \text{ mod } \omega$. Ensuite, recalculer $\Gamma_i = (\Gamma_{1,i}, \dots, \Gamma_{p+l^*,i})^T$ avec $\Gamma_{p+l^*,i} = 0$.

8. Calculer :

— $\omega_i = \{\omega_{1,i}, \dots, \omega_{p+l^*,i}\}$ avec $\omega_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{h_j, \dots, h_j^{(b_j+1)}\}$ et pour $j = 1, \dots, p+l^*$;

— $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{1,i}, \dots, \mathcal{F}_{p+l^*,i}\} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_i}\{d\omega_i\}$ avec $\mathcal{F}_{j,i} = \Xi \cap \text{span}_{\omega_{j,i}}\{d\omega_{j,i}\}$;

9. Vérifier si $\mathcal{F}_{j,i} \not\subset \{\mathcal{F}_{i-1} \cup \{\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{j,i}\}\}$ et que $\Gamma_{j,i} = 0$, alors $b_j = b_j + 1$;

10. Vérifier si $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$, alors incrémenter i puis retourner au 2) pour l'itération suivante; sinon, aller au 11;

11. Noter $\partial\Omega = \partial\Omega_i$, $\omega = \omega_{i-1}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$, et $K(\xi, \delta) = K_i(\xi, \delta)$.

12. Fin de l'algorithme.

A la fin de l'application de l'algorithme, si $K(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}$, alors z n'est pas observable.

Après l'application de l'algorithme, le Théorème 7.2 et le Lemme 7.1 peuvent alors s'appliquer pour la suite de l'étude de l'estimation des états et des paramètres inconnus du système considéré.

7.5 Estimateur par modes glissants d'ordre supérieur

L'étude de l'observabilité des états et de l'identifiabilité des paramètres inconnus ayant été réalisée dans la section précédente, un observateur peut alors être proposé pour estimer les états observables et les paramètres identifiables.

Si le vecteur des paramètres inconnus θ est identifiable, selon la Définition 7.1, il est possible de déterminer algébriquement θ comme une fonction des sorties y du système et de ses dérivées $\{\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(k)}\}$.

En se référant au Lemme 7.1, il paraît clair que (7.6) aurait un problème de la singularité si $g(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)})$ passe par zéro à certaines valeurs de y et de ses dérivées. [XIA, 2003]. Ainsi, nous nous proposons d'utiliser un observateur à mode glissant pour l'estimation des états et des paramètres du réseau considéré.

Le principe des observateurs par modes glissants consiste à contraindre, à l'aide de fonctions discontinues, les dynamiques d'un système d'ordre n à converger vers une variété S de dimension

($n-p$) dite surface de glissement (p étant la dimension du vecteur de mesures). Nous ne détaillerons pas plus ici les développements théoriques afférents à cette méthode. Le lecteur intéressé pourra se référer aux ouvrages [EDWARDS et al., 1998; PERRUQUETTI et al., 2002; УТКИН, 1992] ou aux tutoriaux [BARTOLINI et al., 1999; SIRA-RAMIREZ, 1992]. Ici, nous allons utiliser ce qu'on appelle "un différentiateur exacte robuste en temps fini par modes glissants d'ordre supérieur" (real-time exact robust HOSM differentiator) [LEVANT, 2003; LEVANT et al., 2012] (une forme similaire de différentiateur avec une preuve de convergence par fonction de Lyapunov peut être trouvée dans [BARBOT et al., 2010]). Une procédure de conception d'un tel différentiateur est rappelée dans ce qui suit. Considérons un signal $y(t) \in C^{k^*}$ (c'est à dire au moins k^* fois dérivable), et supposons que $(y, \dots, y^{(k^*)}) = (Z_1, \dots, Z_{k^*+1})$. Le différentiateur robuste proposé par Levant dans [LEVANT, 2005] prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{Z}}_1 &= -\lambda_0 M^{\frac{1}{k^*}} |\hat{Z}_1 - y|^{\frac{k^*}{k^*+1}} \text{sign}(\hat{Z}_1 - y) + \hat{Z}_2 = v_1; \\ \dot{\hat{Z}}_2 &= -\lambda_1 M^{\frac{1}{k^*-1}} |\hat{Z}_2 - v_1|^{\frac{k^*-1}{k^*}} \text{sign}(\hat{Z}_2 - v_1) + \hat{Z}_3 = v_2; \\ &\vdots \\ \dot{\hat{Z}}_{k^*} &= -\lambda_{k^*-1} M^{\frac{1}{2}} |\hat{Z}_{k^*} - v_{k^*-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{Z}_{k^*} - v_{k^*-1}) + \hat{Z}_{k^*+1} = v_{k^*}; \\ \dot{\hat{Z}}_{k^*+1} &= -\lambda_{k^*} M \text{sign}(\hat{Z}_{k^*+1} - v_{k^*}).\end{aligned}$$

où M est choisi pour être plus grand que la k^* -ième dérivée de $y(t)$, λ_i sont des paramètres de conception définis positifs. Il est à noter que le réglage de ces paramètres est décrit en détail dans [LEVANT, 1998] et [LEVANT, 2003]. Soient les erreurs d'observation définies comme : $e_i = Z_i - \hat{Z}_i$. Les dynamiques des erreurs d'observation sont alors données par :

$$\begin{aligned}e_1 &= \hat{Z}_1 - y; \\ e_2 = \dot{e}_1 &= \lambda_0 M^{\frac{1}{k^*}} |e_1|^{\frac{k^*}{k^*+1}} \text{sign}(e_1); \\ &\vdots \\ e_{k^*} = \dot{e}_{k^*-1} &= \lambda_{k^*-1} M^{\frac{1}{2}} |e_{k^*-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{k^*-1}); \\ e_{k^*+1} = \dot{e}_{k^*} &= \lambda_{k^*} M \text{sign}(e_{k^*}).\end{aligned}$$

Il a été prouvé dans [LEVANT, 2003] qu'il existe un t_0 tel que $\forall t > t_0$, nous avons

$$e_i = Z_i - \hat{Z}_i = 0$$

pour $1 \leq i \leq k^* + 1$. Ceci nous permet donc d'obtenir les dérivées des sorties souhaitées en temps fini.

Comme le système considéré possède p sorties mesurées et l^* sorties fictives, alors il nous faudra construire $p + l^*$ différentiateurs. Dans la section suivante, un exemple est proposé pour illustrer les résultats obtenus.

7.6 Exemple illustratif

Considérons le réseau de systèmes non linéaires à retards suivant (Figure 7.1) :

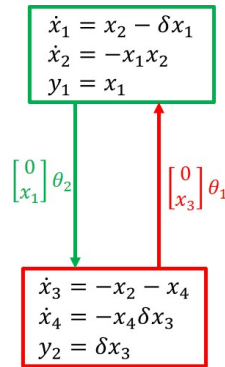


FIGURE 7.1 – Réseau formé par 2 systèmes dynamiques à retards

Le modèle de l'ensemble du réseau est décrit par la forme groupée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \delta x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 + \theta_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 = x_4 \delta x_3 + \theta_2 x_1 \\ y_1 = x_1; y_2 = \delta x_3 \end{cases} \quad (7.7)$$

où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ représente le vecteur des états et $y = (y_1, y_2)^T$ le vecteur des sorties. Soit $z = (\theta_1, \theta_2)^T$ les paramètres inconnus à identifier.

Le système (7.7) peut alors être réécrit sous la forme de (7.3) :

$$\begin{cases} \xi = (x^T, \theta^T)^T \\ \dot{\xi} = f(\xi, \delta) \\ y = (y_1, y_2)^T \end{cases}$$

où $f(\xi, \delta) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \theta_1, \theta_2, \delta)$.

On a alors $\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4, \theta_1, \theta_2)^T$. La matrice P correspondant à z est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, en appliquant l'Algorithme 7.1 au système, on a :

- Initialisation : On initialise $\omega_0 = \{y_1, y_2\}$, $\mathcal{F}_{1,0} = \text{span}_{y_1}\{d\xi_1\}$, $\mathcal{F}_{2,0} = \text{span}_{y_2}\{d(\delta\xi_3)\}$, $\mathcal{F}_0 = \text{span}_{\omega_0}\{d\xi_1, d(\delta\xi_3)\}$ et $b_1 = b_2 = 1$. En suite, on procède à la première itération.

— Itération 1 ($i=1$) : On détermine $\mathcal{L}_1 = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_0}(\delta)}\{d\omega_0\} = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_0}(\delta)}\{d\xi_1, d\delta\xi_3\}$;

$$\partial\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_1(\xi, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $K_1^j(\xi, \delta) \notin \mathcal{L}_1$ pour $j = 1, 2$. Alors on calcule

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2\} \\ \mathcal{F}_{1,1} &= \text{span}_{\{y_1, \dot{y}_1\}}\{d\xi_1, d\xi_2\} \\ \mathcal{F}_{2,1} &= \text{span}_{\{y_2, \dot{y}_2\}}\{d\delta\xi_3, d\delta\xi_4\} \text{ et} \\ \mathcal{F}_1 &= \text{span}_{\omega_1}\{d\xi_1, d\xi_2, d\delta\xi_3, d\delta\xi_4\}. \end{aligned}$$

On vérifie aussi que $\mathcal{F}_{j,1} \not\subset \{\mathcal{F}_0 \cap \{\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_{j,1}\}\}$ avec $j = 1, 2$, alors on fait $b_1 = b_2 = 2$;

Notons que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$, donc on entame la deuxième itération.

— Itération 2 ($i=2$) : On détermine

$$\mathcal{L}_2 = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_1}(\delta)}\{d\omega_1\} = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_1}(\delta)}\{d\xi_1, d\xi_2, d\delta\xi_3, d\delta\xi_4\};$$

$$\partial\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2(\xi, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Ensuite on vérifie que $K_2^j(\xi) \notin \mathcal{L}_2$, $j = 1, 2$, et donc on calcule :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \{y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2\}, \\ \mathcal{F}_{1,2} &= \text{span}_{\{y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1\}}\{d\xi_1, d\xi_2, d(\xi_3\xi_5)\}, \\ \mathcal{F}_{2,2} &= \text{span}_{\{y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2\}}\{d\delta\xi_3, d\delta\xi_4, d(\delta\xi_1\xi_6)\}, \text{ et} \\ \mathcal{F}_2 &= \text{span}_{\omega_2}\{d\xi_1, d\xi_2, d\delta\xi_3, d\delta\xi_4, d(\xi_3\xi_5), d\xi_6\}. \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que

— $\mathcal{F}_{1,2} \not\subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{1,2}\}\}$ donc $b_1 = 3$;

— $\mathcal{F}_{2,2} \not\subset \{\mathcal{F}_1 \cap \{\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_{2,2}\}\}$ donc $b_2 = 3$.

On peut aussi vérifier que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, donc on procède à l'itération suivante.

— Itération 3 (i=3) : On détermine d'abord

$$\mathcal{L}_3 = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_2}(\delta)}\{d\omega_2\} = \text{span}_{\mathcal{K}_{\omega_2}(\delta)}\{d\xi_1, d\xi_2, d\delta\xi_3, d\delta\xi_4, d(\xi_3\xi_5), d\xi_6\};$$

$$\partial\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta^2 - \xi_2 & -\delta - \xi_1 & \theta_1 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & \delta & 0 & 0 \\ \theta_2\delta & 0 & \delta\xi_4\delta + \delta & -\delta + \delta^2\xi_3\delta & 0 & \delta\xi_1 \end{pmatrix};$$

$$[\partial\Omega_2]_R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla & \nabla & 0 \\ \frac{\delta^2\xi_1}{\delta\xi_3} & \frac{\delta^2 + \delta\xi_1}{\delta\xi_3} & \frac{\delta}{\delta\xi_3} & \frac{-\theta_1}{\delta\xi_3} & 0 & 0 \\ \frac{-\theta_2}{\delta\xi_1} & 0 & 0 & \frac{-\delta^2\xi_3}{\delta\xi_1} & \frac{1 - \delta^2\xi_3}{\delta\xi_1} & \frac{1}{\delta\xi_1} \end{pmatrix} \text{ et donc}$$

$$K_3(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2\xi_1}{\delta\xi_3} & \frac{\delta^2 + \delta\xi_1}{\delta\xi_3} & \frac{\delta}{\delta\xi_3} & \frac{-\theta_1}{\delta\xi_3} & 0 & 0 \\ \frac{-\theta_2}{\delta\xi_1} & 0 & 0 & \frac{-\delta^2\xi_3}{\delta\xi_1} & \frac{1 - \delta^2\xi_3}{\delta\xi_1} & \frac{1}{\delta\xi_1} \end{bmatrix},$$

avec $\partial\Omega_2 \in \mathcal{K}(\delta)^{n \times \Sigma} b_j$ et $[\partial\Omega_2]_R^{-1} \in \mathcal{K}(\delta, \nabla)^{\Sigma} b_j \times n$.

Pour $j = 1, 2$ on a $K_3^j(\xi) \in \mathcal{L}$, donc on stoppe l'algorithme. On remarque que le Théorème 7.2 est satisfaite, et z du système (7.7) est alors observable.

D'où, les paramètres θ_1 et θ_2 du système (7.7) sont identifiables. L'observateur proposé peut donc nous permettre d'estimer ces paramètres identifiables.

Par un simple calcul algébrique, nous avons $P = K(\xi, \delta)\partial\Omega$ et $z = P\xi$, dont la dérivée nous donne $dz = Pd\xi = K(\xi, \delta)\partial\Omega d\xi$.

En définissant $\partial\Omega d\xi = d\Omega = (dy_1, d\dot{y}_1, d\ddot{y}_1, dy_2, d\dot{y}_2, d\ddot{y}_2)^T$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 y_1}{y_2} dy_1 + \frac{\delta^2 + \delta y_1}{y_2} d\dot{y}_1 + \frac{\delta}{y_2} d\ddot{y}_1 - \frac{\xi_5}{y_2} dy_2 & = d\xi_5 \\ -\frac{\xi_6}{\delta y_1} dy_1 - \frac{\delta y_2}{\delta y_1} dy_2 + \frac{1 - \delta y_2}{\delta y_1} d\dot{y}_2 + \frac{1}{\delta y_1} d\ddot{y}_2 & = d\xi_6 \end{cases}$$

lequel équivaut à

$$\begin{cases} d(\theta_1 y_2) = d(y_1 \delta^2 y_1 + \dot{y}_1 (\delta^2 + \delta y_1) + \delta \ddot{y}_1) \\ d(\theta_2 \delta y_1) = d(-y_2 \delta y_2 + (1 - \delta y_2) \dot{y}_2 + \ddot{y}_2) \end{cases}$$

et au final on obtient

$$\begin{cases} \theta_1 & = \frac{y_1 \delta^2 y_1 + \dot{y}_1 (\delta^2 + \delta y_1) + \ddot{y}_1 \delta}{y_2} \\ \theta_2 & = \frac{-y_2 \delta y_2 + \dot{y}_2 (1 - \delta y_2) + \ddot{y}_2}{\delta y_1} \end{cases}$$

À partir de ce résultat, nous pouvons alors concevoir un observateur par modes glissants pour estimer les paramètres inconnus du système.

La simulation numérique a été réalisée sous Matlab en utilisant la méthode d'Euler avec un pas fixe $h = 0.001$. Les conditions initiales sont $x(0) = [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$, $\hat{x}(0) = [1, 0, -1, -2, 3, 2, 1]^T$ et $\hat{\theta}(0) = [3, 5]^T$. Les valeurs réels des paramètres sont $[\theta_1, \theta_4]^T = [2, 4]^T$. Les figures 7.2 et 7.3 suivantes montrent les résultats de simulation pour l'estimation des paramètres θ_1 et θ_2 .

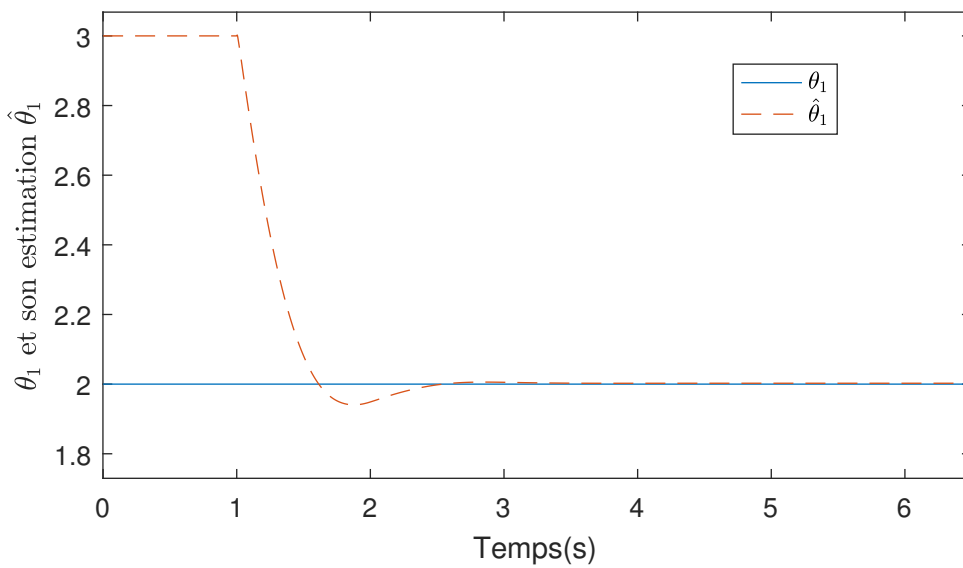


FIGURE 7.2 – Paramètre θ_1 et son estimation $\hat{\theta}_1$

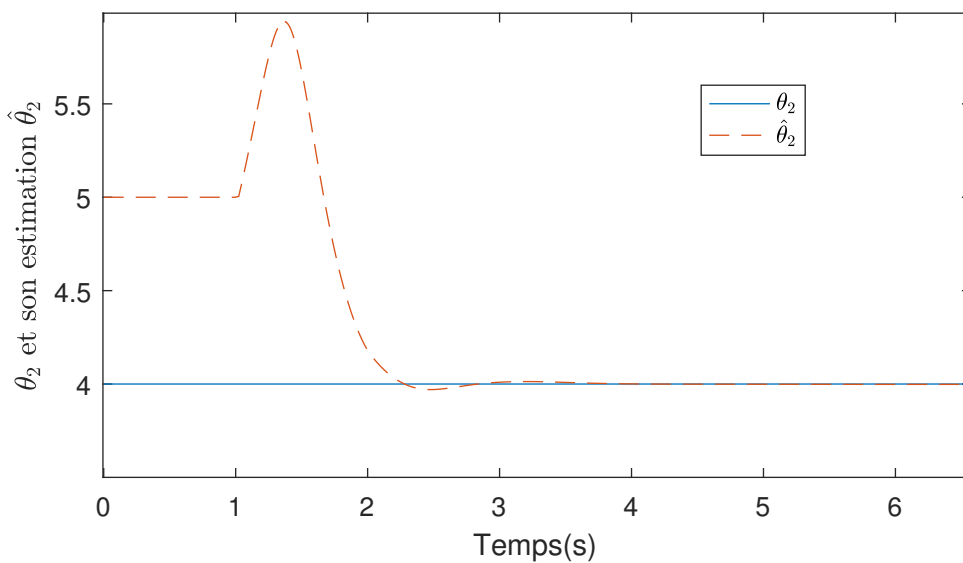


FIGURE 7.3 – Paramètre θ_2 et son estimation $\hat{\theta}_2$

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude sur l'identification paramétrique d'un réseau de systèmes non linéaires à retard commensurable a été présentée. Le problème de l'identifiabilité partielle ou totale de paramètres inconnus a été étudié et un algorithme a été proposé pour résoudre ce problème. Un exemple illustratif a également été proposé pour prouver l'efficacité de la méthode proposée. Les résultats obtenus sont l'extension des résultats que nous avons obtenus dans le chapitre précédent pour des réseaux de systèmes non linéaires sans retard.