

L'effet photoélastique en régime fortement confiné

L'étude des interactions entre ondes optiques et acoustiques compte parmi ces activités de recherche dont les premiers balbutiements remontent au début du XXe siècle et qui demeurent pourtant à l'heure actuelle d'un riche intérêt, scientifique comme applicatif. L'introduction par Friedrich Pockels de la formulation phénoménologique éponyme largement répandue dans le traitement des interactions acousto-optiques remonte à 1889. La première étude théorique de l'effet photoélastique remonte à 1920 et aux travaux de Léon Brillouin sur la diffusion de la lumière par les fluctuations thermiques observées dans un solide. Cette étude théorique est rapidement suivie par les travaux Debye et Sears d'une part et de Lucas et Biquard d'autre part, qui ont mené dès 1932 une série d'expériences visant à observer les phénomènes prévus par Brillouin. La disparité entre résultats théoriques et expérience a alors poussé ce dernier en 1933 mais surtout Raman et Nath, de 1935 à 1936, à mettre en place de nouveaux outils théoriques permettant de rendre compte de manière satisfaisante des phénomènes de diffraction de la lumière par les ultrasons. Aujourd'hui encore, la plupart des dispositifs diffractifs acousto-optiques sont souvent définis par les régimes de fonctionnement dits de Bragg ou de Raman-Nath, faisant preuve de la pertinence pratique des théories introduites au début du siècle : celles-ci permettent en effet d'expliquer la plupart des situations expérimentales communément rencontrées. L'acousto-optique telle que nous l'entendons aujourd'hui, c'est-à-dire l'utilisation des propriétés de diffraction de la lumière par une onde acoustique cohérente artificiellement générée, n'a pour sa part connu son véritable essor qu'une trentaine d'années plus tard, avec l'avènement du laser années 60. Elle s'est depuis imposée comme un moyen efficace de manipulation des ondes lumineuses. La déflexion de la lumière ou encore la possibilité d'imposer un léger décalage en fréquence par effet Doppler entre onde incidente et onde diffractée, propriété cruciale dans les systèmes de sondes hétérodynes, comptent parmi les applications les plus prisées. Parallèlement aux développements expérimentaux rendus possibles, notamment du fait des recherches liées à la détermination de matériaux pertinents, de nouveaux problèmes d'ordre plus théoriques ont également été soulevés. Dixon [149] a souligné l'importance de l'anisotropie optique du substrat d'interaction pouvant résulter en un

changement de polarisation de l'onde optique, effet qui jusqu'alors avait été négligé. Nelson et Lax ont pour leur part montré que la formulation classique du tenseur photoélastique tel qu'employé dans la théorie de Pockels devait être corrigée par l'adjonction d'un terme additionnel dans le cas de l'intervention d'ondes acoustiques transverses lors du processus d'interaction.

De nombreux auteurs ont ensuite tenté de dépasser l'approximation des ondes planes admise pour les ondes optiques comme acoustiques en traitant le cas de formes spatiales de modes arbitraires (voir par exemple [150]). Les régimes intermédiaires entre ceux de Bragg et de Raman-Nath ont eux continué à être traités par la formulation de Pockels, en se limitant toutefois aux interactions mettant en jeu des ondes planes, essentiellement.

Une approche différente de l'interaction acousto-optique introduite par Bloombergen [151] consiste à traiter le problème comme une interaction paramétrique, à l'image de ce qui est traditionnellement admis en optique non-linéaire. L'effet élasto-optique peut être vu comme un mélange à trois ondes, deux ondes optiques et une acoustique par introduction d'un terme de polarisation non-linéaire mettant en jeu le tenseur photoélastique, dans sa forme corrigée, idéalement. Cette idée a été exploitée par Nelson et Lax dans une série de travaux visant à établir les limites de la théorie photoélastique de Pockels. Nous verrons dans la suite de ce document que cette approche, si elle n'a guère bénéficié de la popularité des précédentes, permet pourtant un traitement quasi-général des interactions.

Ces divers développements théoriques auxquels viennent s'ajouter nombre de réalisations pratiques ont fait des ondes élastiques des éléments clefs de certains dispositifs de traitement du signal optique. Dans la plupart des cas, c'est la modification de l'indice de réfraction du milieu par les déformations induites par le passage de l'onde élastiques qui est exploitée. Généralement, les fréquences acoustiques mises en jeu sont telles que l'onde élastique reste assimilée à une onde plane d'extension infinie par rapport à l'onde optique, de longueur d'onde plus faible. Dans la littérature, ce type de problème est généralement traité par la théorie de Pockels linéarisée : les déformations induites par la propagation de l'onde élastique affectent le tenseur de permittivité diélectrique. L'intégrale de recouvrement entre ondes optiques et ondes élastiques est généralement évaluée dans le cadre d'une approximation en ondes planes pour les deux types d'ondes. Or, l'onde élastique ne peut être considérée comme une superposition d'ondes planes que si la dimension latérale du milieu de propagation est grande devant la longueur d'onde acoustique. Les récents efforts consacrés aux matériaux microstructurés et particulièrement aux cristaux à la fois *phoToniques* et *phoNoniques* (aussi dits *phoXoniques*), c'est-à-dire présentant simultanément des bandes interdites pour les ondes optiques et pour les ondes élastiques, ont posé le problème d'interactions entre modes optiques et acoustiques conjointement guidés ou confinés dans des structures de dimensions comparables. Le cas d'un guide phononique est bien évidemment hors des limites de validité de ce modèle. Par ailleurs, dans le cas d'une fibre *phoXonique*, l'aspect propagatif liée aux ondes optiques comme acoustiques se doit d'être pris en compte. De nombreux travaux relatifs aux interactions acousto-optiques guidées ont certes été réalisés [152], mais ils demeurent, du moins à notre connaissance, limités à des approches reposant sur le modèle des ondes planes.

L'objet de ces travaux est donc de procéder à la description d'interactions acousto-optiques guidées, avec un fort confinement des deux types d'ondes en usant de la formulation de Pockels d'une part, et de Nelson et Lax d'autre part. Le cas général d'un matériau fortement fortement anisotrope (biréfringent) ou ferroélectrique n'est pas ici traité. Nous avons en effet restreint cette étude au cas d'interactions se produisant dans un matériau isotrope, gardant à l'esprit que nous restons dans le cadre de ces travaux particulièrement intéressés par les interactions acousto-optiques dans les fibres photoniques. Ces conditions, si elles limitent le champ de validité de la théorie mise en place, nous permettent de traiter le cas de la silice, et ainsi celui des fibres à cristaux photoniques, qui sont finalement les candidats les plus immédiats en termes de mise en place d'interactions acousto-optiques exaltées. Le formalisme présenté se veut toutefois général, dans la mesure où il ambitionne de déboucher sur un modèle valide quelle que soit la géométrie de la structuration de la fibre considérée. À cette fin, aucune hypothèse préalable n'est faite sur la forme spatiale des modes optiques ou élastiques.

6.1 Retour sur la relation de Pockels

Les interactions acousto-optiques classiques sont en général formellement décrites par la théorie linéarisée de Pockels. La prise en compte de la variation d'indice de réfraction du milieu induite par une onde acoustique propagative se fait par l'utilisation du produit tenseur photoélastique par tenseur des déformations élastiques. Les variations d'indice optique induites sont généralement de l'ordre de 10^{-4} . Dans la plupart des situations pratiques, l'onde acoustique est supposée d'extension infinie devant l'onde optique. Le problème se ramène donc à une étude de la diffraction induite par le réseau, supposé stationnaire du fait du contraste de vitesse entre ondes élastiques et optiques. L'épaisseur du milieu de propagation conditionne alors le régime de fonctionnement : Bragg pour un réseau épais (un seul ordre de diffraction) et Raman-Nath pour un réseau très fin (plusieurs ordres). Le cas traité ici se situe bien évidemment hors des limites de validité de cette théorie simplifiée dans la mesure où l'onde acoustique ne peut plus être supposée d'extension infinie devant l'onde optique. Il s'agit alors de traiter le problème en se plaçant dans le cas le plus général permis par le formalisme de Pockels, c'est-à-dire en prenant pleinement en compte les formes des modes acoustiques comme optiques dans le plan transverse à la direction de propagation. On suppose toutefois en adoptant ce formalisme que ces formes demeurent inchangées au cours de l'interaction élasto-optique : seule l'évolution de l'amplitude modale est en effet prise en compte. Cette dérivation de l'équation initiale de Pockels nous mènera à l'écriture d'équations d'ondes couplées dont la résolution se ramènera à un problème aux valeurs propres généralisé. Ce dernier sera abordé en prenant successivement comme bases de travail le champ électrique \mathbf{E} et le champ de déplacement \mathbf{D} , qui, comme nous le verrons mèneront à des systèmes d'équations non équivalents, notamment du fait de la présence de termes spatiaux additionnels dans le cas du champ de déplacement. Les deux modèles seront ensuite confrontés à l'approche non-linéaire du problème et éprouvés sur une série d'expériences numériques simples mettant en jeu le cas particulier et bien connu de la diffraction d'une onde plane optique par une onde élas-

tique, mais également les phénomènes de rétrodiffusion Brillouin et de couplage de polarisations (diffraction anisotrope).

6.1.1 Variation de l'indice de réfraction

Dans un milieu anisotrope, la permittivité diélectrique ϵ prend la forme d'un tenseur symétrique de rang 2. Son inverse, l'impermittivité η vérifie quant à elle la relation suivante :

$$\epsilon_{ij}\eta_{jk} = \delta_{ik} \quad (6.1)$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker, avec des indices i, j et k variant de 1 à 3. La théorie phénoménologique de Pockels traduit l'effet élasto-optique par une modification du tenseur impermittivité diélectrique sous l'influence d'une onde acoustique, modification proportionnelle au champ des déformations induite par cette dernière et au tenseur des coefficients photoélastiques p , de rang 4 :

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{ij}(t, \mathbf{r}) = p_{IJ}\mathbf{S}_J &= p_{ijkl}S_{kl} \exp(j(\Omega t - Kz)) \\ &= \Delta\eta_{ij}(\mathbf{r}) \exp(j(\Omega t - Kz)) \end{aligned} \quad (6.2)$$

où la contraction des paires d'indices symétriques ($I = (ij); J = (kl)$) est employée.

L'impermittivité totale du milieu se ramène ainsi à :

$$\eta_{ij}(\mathbf{r}, t) = \eta_{ij}(\mathbf{r}) + \Delta\eta_{ij}(\mathbf{r}, t) \quad (6.3)$$

où $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ est le tenseur impermittivité pour le milieu non perturbé. Réciproquement, le tenseur de permittivité relative s'écrit :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \Delta\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) \quad (6.4)$$

La variation du tenseur de permittivité est donnée par l'expression $\Delta\epsilon_{il} = -\epsilon_{ij}\Delta\eta_{jk}\epsilon_{kl}$ [153]. Si le milieu d'interaction est initialement isotrope (cas de la silice), $\Delta\epsilon$ prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon(\mathbf{r}, t) &= -\epsilon(\mathbf{r})^2\Delta\eta(\mathbf{r}, t) \\ &= -\epsilon(\mathbf{r})^2\Delta\eta(\mathbf{r}) \exp(j(\Omega t - Kz)) \end{aligned} \quad (6.5)$$

La formulation de Pockels nous permettrait donc de remonter à l'indice de réfraction du milieu soumis à l'onde élastique. Elle est ainsi souvent employée en relation avec les équations de Maxwell de façon à pouvoir quantifier l'influence de cette variation d'indice sur l'onde optique par réinjection dans l'équation d'onde.

6.2 Quelques remarques sur le tenseur photoélastique

La formulation de Pockels fait intervenir le champ des déformations S_{kl} qui s'exprime, comme nous l'avons vu, en fonction des gradients du champ de déplacement :

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (6.6)$$

S_{kl} , et ainsi le tenseur photoélastique p_{ijkl} sont donc supposés symétriques par rapport aux indices k et l . Nelson et Lax [154] ont fait remarquer que cette hypothèse revenait à admettre que les déformations transverses dues au champ élastique et subies par le milieu de propagation restaient uniformes, ce qui ne peut évidemment être le cas si l'onde acoustique est elle-même de nature transverse. Cette approximation est particulièrement dangereuse dans les milieux optiques fortement biréfringents, pour lesquels les effets de rotation liés à l'onde transverse ont une contribution non négligeable. Au-delà du seul effet des coefficients photoélastiques du matériau d'interaction, le tenseur de permittivité diélectrique subit également un effet "géométrique" de rotation, qui se traduit par l'introduction d'un tenseur photoélastique secondaire antisymétrique suivant les indices j et k :

$$p_{ij[kl]} = \frac{1}{2} [\eta_{il}\delta_{kj} + \eta_{lj}\delta_{ik} - \eta_{ik}\delta_{lj} - \eta_{kj}\delta_{il}] \quad (6.7)$$

Les crochets autour des indices k et l soulignent l'antisymétrie du tenseur par rapport aux parenthèses employées par Nelson et Lax pour préciser la symétrie des indices.

La variation totale du tenseur impermittivité s'exprime donc sous la forme :

$$\delta\eta = p'_{ijkl} u_{k,l} \quad (6.8)$$

où la convention de sommation sur les indices répétés est entendue et où la notation $u_{k,l}$ se rapporte à la dérivée partielle de la composante selon k du vecteur u par rapport à la variable l . Le tenseur p'_{ijkl} est lui-même la somme des deux contributions, rotationnelles et photoélastiques :

$$p'_{ijkl} = p_{ij(kl)} + p_{ij[kl]} \quad (6.9)$$

Le tenseur $p_{ij[kl]}$ n'est finalement qu'une fonction de la permittivité du milieu. Il ne sera non nul que si les indices k et l sont différents, c'est-à-dire, et comme prévu, seulement dans le cas d'une onde élastique transverse. L'expression du tenseur photoélastique total montre aussi qu'il est important de considérer comme variable du problème non pas le champ des déformations S_{kl} , mais le champ de déplacement u lui-même, de manière à s'affranchir des conditions de symétrie imposées par le tenseur des déformations.

Si la prise en compte de cette correction se révèle nécessaire dans le cas de matériaux optiques fortement anisotropes (qui, soulignons-le, ne sont pas rares en tant que milieux d'interactions acousto-optiques, à l'image du niobate de lithium ou du dioxyde de tellurium), elle reste négli-

geable dans les matériaux faiblement anisotropes, et s'annule dans le cas isotrope. Une description plus complète des modifications encourues par le tenseur photoélastique initial $p_{ij(kl)}$ du fait de la rotation induite est spécifiquement donnée dans la référence [154].

Dans le cadre de ces travaux, nous nous sommes concentrés sur le cas de l'étude des interactions acousto-optiques d'une fibre de silice, milieu isotrope et non-ferroélectrique. La formulation de la variation du tenseur impermittivité se ramènera donc simplement à la formule classique de Pockels, du fait (1) de la symétrie du tenseur photoélastique et (2) de l'équivalence entre traitement par champ de déplacement u ou par champ des déformations S qui en découle. Nous nous contenterons donc dans la sous-section suivante de traiter le problème d'interaction acousto-optique en adoptant complètement la formulation traditionnelle de Pockels.

6.3 Équations constitutives du milieu

Une fois l'influence de l'onde élastique sur l'indice de réfraction du milieu quantifiée, on peut assez naturellement songer à réinjecter les expressions de ϵ ou de η précédemment obtenues dans les équations régissant la propagation des ondes optiques, c'est-à-dire les équations de Maxwell.

6.3.1 Équations électromagnétiques constitutives du milieu

Dans un milieu libre de charges, les équations de Maxwell s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{6.10}$$

où \mathbf{E} désigne le champ électrique et \mathbf{B} et \mathbf{H} les inductions et champ magnétiques respectivement. \mathbf{E} (\mathbf{H}) sont liés à \mathbf{D} (\mathbf{B}) par les équations constitutives du milieu. Si l'on se place dans le cadre d'un milieu non magnétique :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}\tag{6.11}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

Dans un milieu sans pertes, c'est-à-dire dans lequel la permittivité diélectrique est indépendante de la longueur d'onde de travail, et dans le cas d'un champ électrique \mathbf{E} d'amplitude faible (milieu linéaire) :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}\tag{6.12}$$

Enfin, les divergences de l'induction magnétique et du champ de déplacement sont nulles :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{6.13}$$

L'équation d'onde optique peut donc s'écrire et se résoudre indifféremment en fonction du champ électrique ou du champ de déplacement. Nous verrons toutefois un peu plus tard dans ce chapitre que la modulation d'indice de réfraction induite par l'effet photoélastique n'intervient pourtant pas de façon équivalente dans les deux formulations suivant la théorie mise en œuvre.

6.3.2 Tenseur des déformations élastiques

Si l'on se tient à la théorie initiale de Pockels, négligeant notamment les effets de rotation introduits par Nelson et Lax tels que présentés en 6.2, la perturbation d'un milieu soumis à une onde élastique se quantifie généralement en termes de déformations élastiques qui se traduisent formellement par l'emploi du tenseur des déformations S :

$$S_{kl} = S_{kl} \exp [j(\Omega t - \mathbf{K}z)] \quad (6.14)$$

où S_{kl} désigne l'amplitude de la déformation, Ω est la pulsation de l'onde et \mathbf{K} le vecteur d'onde élastique. S_{kl} peut également s'exprimer en fonction du champ de déplacement du mode élastique $u_i(x, y)$, $i = x, y, z$:

$$u_i(x, y, z) = \begin{cases} u_x(x, y) \sin(\Omega t - \mathbf{K}z) \\ u_y(x, y) \sin(\Omega t - \mathbf{K}z) \\ u_z(x, y) \cos(\Omega t - \mathbf{K}z) \end{cases}$$

comme :

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

Par utilisation de la convention de sommation sur les indices répétés et en adoptant les contractions habituelles pour les indices i, j, k et l d'un tenseur symétrique de rang 2, l'équation précédente peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial x} \sin(\Omega t - Kz) \\ S_2 &= \frac{\partial \mathcal{U}_y}{\partial y} \sin(\Omega t - Kz) \\ S_3 &= -jK \mathcal{U}_z \cos(\Omega t - Kz) \\ S_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial y} - jK \mathcal{U}_y \right) \cos(\Omega t - Kz) \\ S_5 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_z}{\partial x} - jK \mathcal{U}_x \right) \cos(\Omega t - Kz) \\ S_6 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{U}_y}{\partial x} \right) \sin(\Omega t - Kz) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Usuellement, c'est-à-dire dans le cas ondes planes, ou du moins pour un champ acoustique

d'extension spatiale suffisamment grande devant celle de l'onde optique, les dérivées du champ de déplacement élastique en fonction des variables x or y peuvent être négligées. Le cas d'une fibre photonique, ou de celui, plus simple, d'une fibre de très faible diamètre, présentant un confinement du mode acoustique invalide une telle approximation et impose de prendre en compte les dérivées des composantes transverses des deux types de champs. C'est d'ailleurs sur ce point précis que repose la différence fondamentale entre notre approche et celle classiquement employée pour le traitement des interactions élasto-optiques.

6.4 Détermination des équations d'ondes couplées suivant Pockels

Nous avons vu que l'équation d'onde optique dans un milieu anisotrope pouvait être exprimée indifféremment en fonction du champ électrique comme du champ de déplacement électrique selon :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2[\epsilon \mathbf{E}]}{\partial t^2} = \nabla^2(\mathbf{E}) - \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{E})] \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \nabla^2(\eta : \mathbf{D}) - \nabla[\nabla \cdot (\eta : \mathbf{D})] \quad (6.17)$$

La notation $\alpha : \mathbf{A}$ se rapporte ici à la contraction à droite du tenseur α par le vecteur \mathbf{A} , i.e. à un vecteur de composantes $\alpha_{ij}A_j$.

On peut déjà remarquer par simple observation des différents termes de ces deux équations d'onde que la modulation élasto-optique intervient exclusivement comme dépendante du temps dans le cas de l'expression en fonction du champ électrique (6.16), alors qu'elle dépend des variables spatiales dans le cas du champ de déplacement (6.17), impliquant des différences fondamentales dans le traitement des interactions élasto-optiques. Les deux cas sont dérivés par la suite. Nous nous restreindrons dans cette section à une simple présentation des résultats finaux, le détail des calculs étant donné en annexe B.

6.4.1 Champ de déplacement

On s'intéresse ici à la forme (6.17) de l'équation d'onde. On adopte ici une approche très répandue dans le traitement des interactions élasto-optiques qui consiste à écrire, à l'image de ce qui est employé dans [153] le champ par la superposition :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \sum_m D_m(z) \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) e^{j\phi_m} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \phi_m &= \omega_m t - \mathbf{k}_m \mathbf{r} \\ \omega_m &= \omega + m\Omega \\ \mathbf{k}_m &= \mathbf{k} + m\mathbf{K} \end{aligned} \quad (6.19)$$

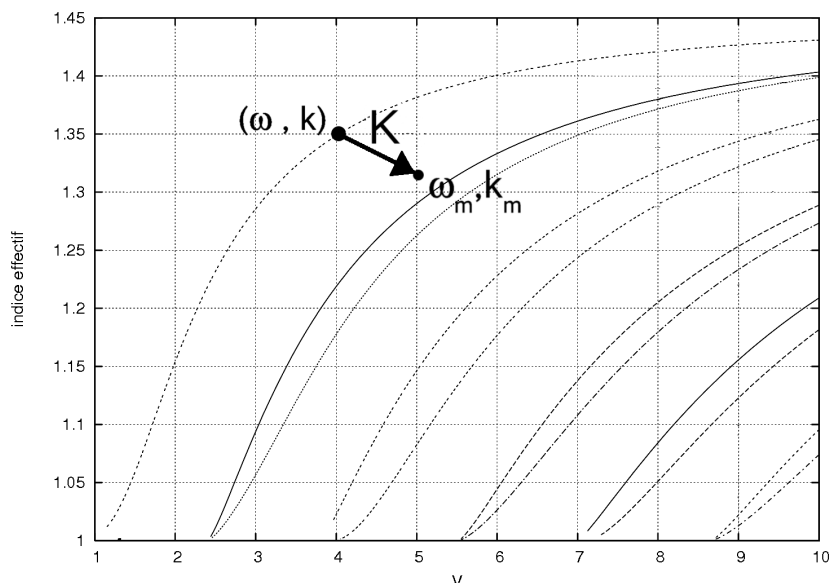


FIG. 6.1 – Exemple de diagramme de bandes pouvant être obtenu dans une fibre optique. Les courbes de dispersion sont celles obtenues dans le cas d'un milieu non perturbé. Le point marqué par le label (ω_m, k_m) montre la position adoptée par un mode optique acoustiquement modulé à une fréquence $f = 2\pi m\Omega$

m est ici un entier, \mathbf{k} (respectivement ω) et \mathbf{K} (resp. Ω) représentent les vecteurs d'onde (pulsations) optique et acoustique respectivement, $D_m(z)$ se réfère à l'amplitude complexe du champ, et $\mathbf{d}_m(\mathbf{r})$ est la forme spatiale du mode optique normalisée telle que : $\int_r d\mathbf{r} \mathbf{d}_m^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) = 1$, où les composantes en x , y et z du mode sont notées d_{mx} , d_{my} et d_{mz} dans la suite du calcul. Notons ici que les champs de déplacement élémentaires $\mathbf{D}_i(\mathbf{r}, t) = D_i(z)\mathbf{d}_i(\mathbf{r})e^{j\phi_i}$ ne satisfont pas nécessairement la relation de dispersion du milieu d'interaction. En revanche, leur superposition se doit d'être solution de l'équation d'onde (6.17).

Il est par ailleurs évident, au vu des équations présentées ci-dessus, que le modèle adopté ne permet pas une description complète des phénomènes d'interactions acousto-optiques confinées. Il suppose en effet que la forme spatiale du champ de déplacement $\mathbf{d}_m(\mathbf{r})$ reste inchangée au cours du processus d'interaction, puisqu'il lui est affecté tantôt le vecteur d'onde \mathbf{k} , dans le cas du milieu non perturbé, tantôt le vecteur d'onde $\mathbf{k}_m = \mathbf{k} + m\mathbf{K}$ après prise en compte de la modulation acoustique. Si le cas général ne peut ainsi être décrit, ce modèle demeure valide si la paire (ω_m, \mathbf{k}_m) correspondant au mode ayant subi la modulation maintient ce dernier au voisinage, en termes de position sur le diagramme de dispersion, d'un mode propre de la structure initiale, comme illustré sur la figure 6.1. Il s'agit heureusement du cas le plus communément rencontré lors du traitement de l'effet élasto-optique, le vecteur d'onde acoustique \mathbf{K} étant généralement très faible devant le vecteur d'onde optique \mathbf{k} .

Les équations d'ondes couplées sont ensuite obtenues par insertion de l'expression (6.18)

dans l'équation d'onde (6.17). Il est montré en Annexe B que dans le cadre d'une approximation pour des fonctions d'enveloppe lentement variables, et d'une variation faible de l'indice telle que $\Delta\eta \ll \eta$, l'équation d'ondes couplées prend la forme d'un équation différentielle du premier ordre :

$$N_D \mathbf{D}'(z) = M_D \mathbf{D}(z) \quad (6.20)$$

$\mathbf{D}(z)$ est un vecteur admettant pour composantes les amplitudes des champs $D_m(z)$, $D'(z) = \frac{dD}{dz}$, N_D est une matrice diagonale telle que :

$$\begin{aligned} N_{Dm} = & \int_S \mathbf{d}_m^\dagger(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} d_{mz,x}(\mathbf{r}) \\ d_{mz,y}(\mathbf{r}) \\ d_{mx,x}(\mathbf{r}) + d_{my,y}(\mathbf{r}) - 2jk_m d_{mz}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} dr \\ & + 2jk_m \int_S \mathbf{d}_m^\dagger(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}) \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) dr \end{aligned} \quad (6.21)$$

et M_D est une matrice carrée tridiagonale ayant pour éléments non nuls :

$$\begin{aligned} M_{Dm} = & \frac{\omega_m^2}{c^2} + \int_S \mathbf{d}_m^\dagger(\mathbf{r}) (\nabla_t^2 - k_m^2) \eta(\mathbf{r}) : \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) dr \\ & - \int_S \mathbf{d}_m^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{V}_m(\eta : \mathbf{d}_m) dr \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{D(m-1)} = & \left[\int_S \mathbf{d}_m^\dagger(\mathbf{r}) [(\nabla_t^2 - k_m^2) \Delta\eta : \mathbf{d}_{m-1}(\mathbf{r})] dr \right. \\ & \left. + \int_S \mathbf{d}_m^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{V}_{m-1}(\Delta\eta : \mathbf{d}_{m-1}(\mathbf{r})) dr \right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

Enfin, $\mathbf{V}_n(F)$ est un vecteur dont les composantes consistent en une combinaison de dérivées spatiales de la fonction F , tel que défini en annexe B.

Les coefficients de l'équation (6.20) restent constants et peuvent être aisément obtenus à condition que les modes optiques et acoustiques soient connus. Cela est généralement le cas, dans la mesure où des méthodes numériques ou analytiques, à l'image de celles qui vont être introduites dans la suite de ce chapitre, sont disponibles, en particulier dans le cas d'une fibre optique.

L'équation (6.20) peut être vérifiée en traitant le cas de la diffraction d'une onde plane optique par une onde plane acoustique dans un régime quelconque [155]. (6.20) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & 2jk_m D'_m(z) \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) : \eta : \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) \\ = & D_m(z) \left[\mathbf{d}_m(\mathbf{r}) k_m^2 \eta \cdot \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) + \frac{\omega_m^2}{c^2} \right] \\ & + D_{m-1}(z) \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) k_m^2 \Delta\eta \cdot \mathbf{d}_{m-1}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

En usant des mêmes notations que dans la référence [155], i.e. :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{n_m^2} \\ \mathbf{d}_m(\mathbf{r}) \cdot \Delta \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{d}_{m\pm 1}(\mathbf{r}) &= \Delta n_m^{m\pm 1} \end{aligned} \quad (6.24)$$

où n_m est l'indice effectif du mode optique diffracté d'ordre m . On retrouve alors la forme finale de l'équation d'ondes planes couplées, à condition d'affecter une dépendance exponentielle au champ des déformations S :

$$\begin{aligned} D'_m(z) &= \frac{j}{2} k_m D_m(z) \left[1 - \frac{\omega_m^2 n_m^2}{c^2 k_m^2} \right] \\ &\quad - \frac{n_m^2 k_m}{2j} D_{m-1}(z) \Delta n_m^{m-1} \end{aligned} \quad (6.25)$$

6.4.2 Champ électrique

Une approche similaire peut être adoptée pour traiter le problème en fonction du champ électrique \mathbf{E} . Ce dernier peut également s'exprimer sous la forme d'une superposition du type :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m E_m(z) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) e^{j\phi_m} \quad (6.26)$$

où $e^{j\phi_m}$, $E_m(z)$ et $\mathbf{e}_m(\mathbf{r})$ sont les homologues pour \mathbf{E} des grandeurs précédemment définies pour \mathbf{D} .

L'équation d'onde prend une fois de plus la forme d'une équation différentielle du premier ordre :

$$N_E \mathbf{E}'(z) = M_E \mathbf{E}(z) \quad (6.27)$$

où, à nouveau, $\mathbf{E}'_m(z)$ est le vecteur admettant pour composantes les amplitudes $\frac{dE_m(z)}{dz}$, et N_E et M_E sont des matrices respectivement diagonale et tridiagonale de termes respectifs :

$$N_{Em} = 2jk_m + \int_S \mathbf{e}_m^\dagger(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} e_{mz,x}(\mathbf{r}) \\ e_{mz,y}(\mathbf{r}) \\ e_{mx,x}(\mathbf{r}) + e_{my,y}(\mathbf{r}) - 2jk_m e_{mz}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} dr \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} M_{Em} &= -k_m^2 + \frac{\omega_m^2}{c^2} \int_S \mathbf{e}_m^\dagger(\mathbf{r}) \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) dr \\ &\quad + \int_S \mathbf{e}_m^\dagger(\mathbf{r}) [\nabla_t^2 \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_m(\mathbf{e}_m(\mathbf{r}))] dr \\ &= \frac{\omega_m^2 n_m^2}{c^2} - k_m^2 \\ &\quad + \int_S \mathbf{e}_m^\dagger(\mathbf{r}) [\nabla_t^2 \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_m(\mathbf{e}_m(\mathbf{r}))] dr \end{aligned} \quad (6.29)$$

et

$$\begin{aligned}
 M_{E(m-1)} &= \frac{\omega_m^2}{c^2} \int_S \mathbf{e}_m^\dagger(\mathbf{r}) \Delta \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{m-1}(\mathbf{r}) dr \\
 &= \frac{\omega_m^2}{c^2} \Delta n|_m^{m-1}
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

La déformation acoustique n'apparaît ici que dans les termes non diagonaux de la matrice M_E , ce qui constitue une différence fondamentale avec la formulation en champ de déplacement du problème, telle que donnée en (6.20).

6.4.3 Formulation suivant Pockels : Bilan

Dans les deux cas, les équations d'ondes couplées prennent la forme de simples équations différentielles vectorielles du premier ordre, admettant la forme commune suivante :

$$\frac{d\mathbf{a}}{dz} = \begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & & 0 \\ & \ddots & & C_{12} & \\ \ddots & & M_{11} & & \ddots \\ & C_{12} & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix} \mathbf{a} \tag{6.31}$$

\mathbf{a} est le vecteur des amplitudes modales représentant indifféremment \mathbf{D} ou \mathbf{E} , les éléments diagonaux de la matrice M_{11} expriment pour leur part la déviation de la relation des modes optiques perturbés par l'onde élastique par rapport à celle observée dans un milieu non perturbé. Les éléments C_{12} , quant à eux, se réfèrent à des termes induisant potentiellement un couplage entre deux modes optiques distincts 1 et 2.

Dans le cas \mathbf{E} ,

$$C_{12} = \int_S \mathbf{E}_1^\dagger F \tag{6.32}$$

où $F(\mathbf{r}) = p_{ijkl} \mathbf{S}_{kl} \mathbf{E}_2$

Dans le cas \mathbf{D} ,

$$C_{12} = \int_S \mathbf{D}_1^\dagger G \tag{6.33}$$

$$\text{avec } \mathbf{G}(\mathbf{r}) = \begin{cases} g_x - \frac{1}{k_1^2} g_{x,yy} + \frac{1}{k_1^2} g_{y,xy} - \frac{jk_2}{k_1^2} g_{z,x} \\ g_y - \frac{1}{k_1^2} g_{y,xx} + \frac{1}{k_1^2} g_{x,xy} - \frac{jk_2}{k_1^2} g_{z,y} \\ -\frac{1}{k_1^2} (g_{z,xx} + g_{z,yy}) - \frac{j}{k_1} (g_{x,x} + g_{y,y}) \end{cases}$$

$$\text{et } \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \Delta \eta_{ij}(\mathbf{r}) : \mathbf{D}_2(\mathbf{r}).$$

La formulation en \mathbf{D} introduit donc des termes de couplage additionnels issus des gradients des champs de déplacement élastiques. Ces termes sont absents de la formulation en \mathbf{E} comme du modèle en ondes planes usuel¹. Les résultats obtenus pour les équations (6.20) et (6.27) posent donc un problème assez important relatif à la pertinence de la formulation à adopter et à la conceptualisation classique de l'interaction acousto-optique. Généralement, cette dernière est interprétée comme résultant en une déformation de l'ellipsoïde des indices optiques (l'équivalent, en quelque sorte, des surfaces des lenteurs acoustiques). Cette représentation géométrique permet de retrouver les caractéristiques de propagation d'une onde optique (vitesse de phase, polarisation et direction du vecteur de Poynting) en connaissant le tenseur de permittivité diélectrique du milieu. En choisissant comme systèmes de coordonnées celui admettant pour axes les axes diélectriques principaux du cristal, l'équation de l'ellipsoïde s'écrit simplement :

$$\frac{x_1^2}{n_{11}^2} + \frac{x_2^2}{n_{22}^2} + \frac{x_3^2}{n_{33}^2} = 1 \quad \text{où} \quad n_{ii}^2 = \frac{\epsilon_{ii}}{\epsilon_0}.$$

Les x_i sont par ailleurs collinéaires au vecteur champ de déplacement \mathbf{D} . Par exemple, dans le cas d'un cristal optiquement uniaxial, ces axes principaux suivront les axes dits *ordinaires* et *extraordinaires* du substrat. La connaissance du vecteur d'onde d'un champ optique incident permet de remonter par construction géométrique aux deux champs de déplacements électriques susceptibles de se propager dans le cristal, comme illustré sur la figure 6.2. La corrélation généralement établie entre effet acousto-optique et ellipsoïde des indices laisse à penser que la formulation en champ de déplacement de l'interaction acousto-optique telle que donnée en (6.20) devrait être logiquement employée. En effet, cette grandeur physique permet de prendre intrinsèquement en compte l'anisotropie du milieu de propagation. Or il se trouve que dans la littérature (et, ainsi, majoritairement dans des configurations ondes planes, donc sans incidence...), le traitement théorique de ces interactions se fait majoritairement en usant du champ électrique comme variable. Le choix n'étant guère anodin dans le cas où les gradients spatiaux des champs élastiques ne sont plus négligés, il devient nécessaire de confronter cette approche à celle consistant à traiter l'interaction élasto-optique comme une interaction paramétrique à trois ondes, les deux théories s'étant révélées équivalentes dans le cas des ondes planes.

¹Ils s'annulent dans ce cas et les deux formulations redeviennent complètement équivalentes

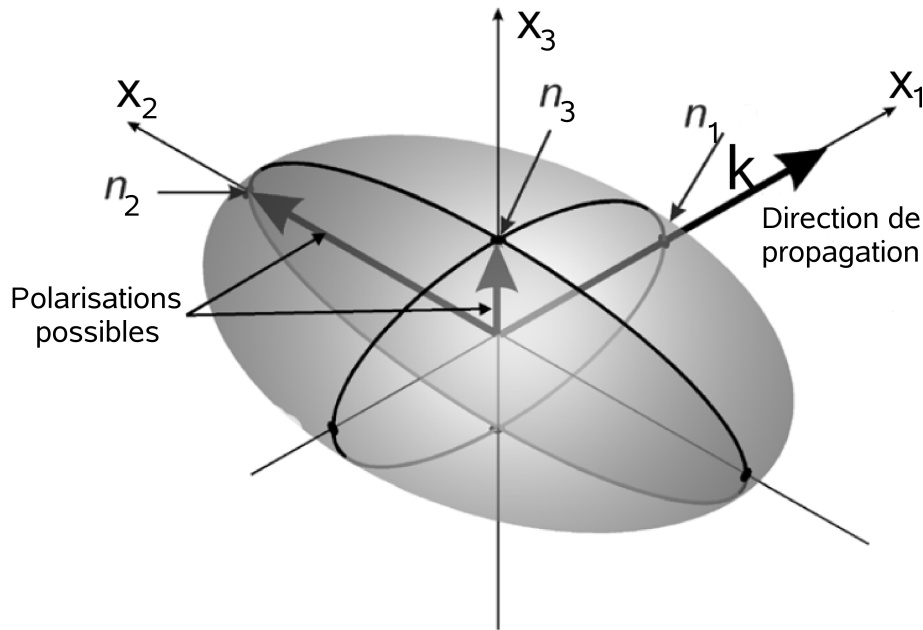


FIG. 6.2 – Exemple de construction géométrique au moyen du concept d'ellipsoïde des indices visant à déterminer les propriétés de propagation et de polarisation d'une onde optique dans un cristal. Les directions a , b et c désignent les axes principaux du cristal.

6.5 L'effet photoélastique : une interaction paramétrique à trois ondes

L'effet élasto-optique peut être conçu comme une interaction paramétrique à trois ondes mettant en jeu deux ondes optiques et une onde élastique [151, 156]. Une première onde optique de fréquence ω_0 se mélange ainsi avec l'onde acoustique incidente ω_a pour former une onde optique de sortie de fréquence ω_s pouvant être en principe égale à n'importe quelle somme ou différence des deux fréquences initiales. Dans le cas de l'interaction acousto-optique, nous limitons nos considérations à $\omega_s = \omega_0 \pm \omega_a$. Cette relation suppose bien évidemment des champs optiques et acoustiques monochromatiques. Nous nous contentons donc ici de traiter le problème en négligeant la partie rotationnelle introduite en 6.2 et la partie piézoélectrique. Pour un traitement mathématique complet du problème, nous suggérons au lecteur de se reporter aux articles cités, ainsi qu'à l'ouvrage de Nelson et Lax [157].

Les équations constitutives du milieu restent les équations de Maxwell, où l'on vient, cette fois, introduire un terme de polarisation non linéaire. Celui-ci s'intègre en particulier dans la relation liant le champ électrique \mathbf{E} et le champ de déplacement \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (6.34)$$

\mathbf{P} est un terme de polarisation dépendant des tenseurs de susceptibilité du milieu. Pour une

interaction paramétrique entre deux ondes E_1 et E_2

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_T \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} E_1 E_2 + \dots \right)\end{aligned}\quad (6.35)$$

Les termes d'ordre plus élevés sont ici négligés. Par ailleurs, si l'on pose comme à l'accoutumée $1 + \chi^{(1)} = \epsilon_r$, on retrouve la formulation classique de champ de déplacement \mathbf{D} en milieu non-linéaire :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} + P_{NL} \quad (6.36)$$

où P_{NL} est la partie non-linéaire de la polarisation. Dans le cadre des hypothèses adoptées, celle-ci est donnée dans les références sus-citées sous la forme :

$$\mathcal{P}_i = \epsilon_0 \chi_{ij(kl)}^{\omega_s \omega_a \omega_0} E_j u_{k,l} \quad (6.37)$$

E_j désigne le champ électrique et $u_{k,l}$ le gradient du champ de déplacement. χ peut alors être définie comme la susceptibilité photoélastique. Nelson montre d'ailleurs la relation :

$$p_{ij(kl)} = -\eta_{im} \eta_{jn} \chi_{mn(kl)} \quad (6.38)$$

et son inverse :

$$\chi_{ij(kl)} = -\epsilon_{im} \epsilon_{jn} p_{mn(kl)} \quad (6.39)$$

On vient ensuite réinjecter les expressions obtenues dans les équations de Maxwell. Pour se faire, on redéfinit tout d'abord \mathbf{D} de sorte à ce que ce vecteur n'inclue plus que la partie linéaire de la polarisation, c'est-à-dire :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_L = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (6.40)$$

Les équations de Maxwell sont alors réécrites pour un milieu libre de charge :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \right) \quad (6.41)$$

soit, en les réécrivant en fonction du champ électrique :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\epsilon_r}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \chi \frac{\partial^2 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \quad (6.42)$$

Par souci de lisibilité, on écrira dans la suite des équations $\epsilon_r = \epsilon$. En se limitant au cas isotrope, pour lequel $p_{ijkl} = p_{ij(kl)}$ et $u_{k,l} = S_{kl}$, l'équation précédente devient, en notation tensorielle :

$$c^2 (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}))_i + \epsilon_{ij} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = -\chi_{ij(kl)} \frac{\partial^2 (E_j S_{kl})}{\partial t^2} \quad (6.43)$$

En posant maintenant $\mathbf{D} \equiv \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \epsilon \mathbf{E}$, on peut exprimer l'équation (6.43) en fonction du champ

de déplacement électrique :

$$c^2 \eta_{ij} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{D}))_j + \frac{\partial^2 D_i}{\partial t^2} = \epsilon_{im} p_{mj(kl)} \frac{\partial^2 (D_j S_{kl})}{\partial t^2} \quad (6.44)$$

Contrairement à ce qui a pu être observé dans le cas des équations en champ électrique et de déplacement dérivées suivant la théorie de Pockels en section 6.4, les formulations en \mathbf{E} et \mathbf{D} obtenues ici sont parfaitement équivalentes. C'est d'ailleurs la forme d'équation (6.27), c'est-à-dire celle en fonction du champ électrique, qui concorde avec cette formulation de type interaction paramétrique. En effet, on peut réécrire cette équation de sorte à faire apparaître le tenseur des susceptibilités. L'équation de départ, suivant Pockels, est l'équation (6.16), soit :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\partial^2 \epsilon E}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \Delta \epsilon E}{\partial t^2} \quad (6.45)$$

On peut alors faire intervenir la variation du tenseur permittivité diélectrique η , et ainsi le tenseur des susceptibilités χ :

$$\begin{aligned} c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_i) + \epsilon_{ij} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial^2 \epsilon_{im} \epsilon_{in} \Delta \eta E_j}{\partial t^2} \\ &= \mu_0 \frac{\partial^2 \epsilon_{im} \epsilon_{in} p_{ijkl} S_{kl} E_j}{\partial t^2} \\ &= \mu_0 \chi_{ijkl} \frac{\partial^2 S_{kl} E_j}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.46)$$

6.6 Conclusion

Le cas général d'une interaction entre modes optiques et acoustiques de formes spatiales arbitraires dans un milieu isotrope a ici été traité. Il n'a été fait, dans cette étude théorique, aucune hypothèse sur le régime d'interaction : le champ couvert s'étend donc au-delà des régimes classiques de Bragg ou de Raman et Nath. Deux types d'approche ont été adoptées : la formulation linéarisée de Pockels d'une part, et l'approche non-linéaire proposée par Nelson et Lax d'autre part. Dans les deux cas, les problèmes ont été traités en fonction du champ électrique comme du champ de déplacement. Si le choix de la grandeur physique électromagnétique à considérer est sans conséquence dans le cas de la théorie de Nelson et Lax, elle est en revanche critique lors d'un traitement par la théorie de Pockels. L'expression des équations d'ondes couplées diffèrent en effet grandement suivant le champ considéré. Dans le cas d'un traitement suivant le champ électrique, les équations obtenues sont parfaitement équivalentes à celles prévues par la théorie non-linéaire, et ainsi très proches de celles déterminées dans une configuration d'ondes planes. La formulation en champ électrique reste donc cohérente quelle que soit la formulation employée. Seule une modification de l'amplitude de la force d'interaction est attendue (du moins dans le cas isotrope) : les coefficients d'interaction photoélastique sont en effet dépendants de l'intégrale de recouvrement entre les formes spatiales des modes acoustiques et optiques. En revanche, des gradients spatiaux des formes modales des champs optiques sont mis en jeu lors d'une approche

fondée sur l'expression du champ de déplacement. L'erreur introduite est loin d'être anodine. Si elle disparaît dans le cas de la diffraction d'une onde optique par une onde plane acoustique, ses implications sont en revanche beaucoup plus cruciales si les ondes optiques et acoustiques sont toutes deux confinées, leur interaction nécessitant la prise en compte complète de la forme de leurs modes respectifs.

Dans la littérature, c'est généralement la formulation de l'effet Pockels en fonction du champ électrique qui est privilégiée, bien que les interactions élasto-optiques soient souvent interprétées en termes de déformation de l'ellipsoïde des indices optiques. Or, seul le champ de déplacement électrique permet une prise en compte intrinsèque de l'anisotropie du milieu et ainsi de cet ellipsoïde. Ces résultats remettent donc en cause le fait que la déformation de l'ellipsoïde des indices acoustiquement induite est directement proportionnelle à la déformation élastique appliquée (ou aux gradients des champs de déplacements élastiques) en dehors du cas limite des ondes planes. Cette interprétation physique se révélerait donc fautive dans le cas de formes modales arbitraires si la théorie de la polarisation non-linéaire est acceptée comme valide.

Ces seules dérivations ne nous permettent pas de trancher complètement sur la pertinence de l'une ou l'autre des deux approches², mais elles ont permis de soulever un point souvent négligé lors du traitement des interactions élasto-optiques. Il est donc intéressant, dans un premier temps, d'évaluer sur un cas pratique la répercussion de ces termes additionnels sur la force d'interaction entre ondes élastiques et optiques.

²même si l'aspect phénoménologique de la théorie de Pockels est loin d'avoir le même statut théorique que la susceptibilité non-linéaire.

Chapitre 7

Exemple numérique : interactions acousto-optique dans un barreau de silice

Ce chapitre présente un exemple numérique qui a pour objectif d'évaluer l'erreur introduite sur le calcul des coefficients de couplage élasto-optique selon la formulation adoptée, c'est-à-dire, théorie linéarisée de Pockels en fonction du champ de déplacement ou en fonction du champ électrique. Cette dernière se ramène à la formulation non-linéaire de Nelson et Lax. Nous avons choisi de travailler sur le cas d'un barreau de silice, de diamètre un micron pour une longueur d'onde optique de $1,55 \mu\text{m}$. Cette fibre peut se concevoir comme une version très simplifiée d'une fibre à bande interdite simultanément acoustique et optique, dans la mesure où les deux types de champ restent confinés dans le même volume : elle présente donc, du point de vue d'une démonstration de principe tout au moins, le même intérêt phénoménologique que la PCF de la figure 7.1 par exemple. Dans les deux cas, la forme des modes élastiques du guide peut être obtenue au moyen de simulations en éléments finis de la section de la fibre, telles que présentées par Vincent Laude *et al.* [93]. Celle des modes optiques peut être calculée soit par utilisation d'un logiciel commercial, par exemple, dans le cas d'une fibre microstructurée, soit par calcul analytique des modes d'un guide d'onde optique cylindrique, comme rapporté dans de nombreux ouvrages (par exemple [158]), dans le cas du barreau de silice.

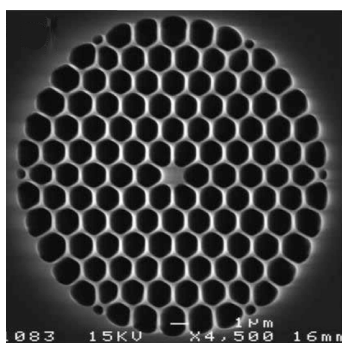


FIG. 7.1 – Image au microscope électronique à balayage d'une fibre à cristaux photoniques en silice. Le diamètre du cœur, solide, est de $1,25 \mu\text{m}$. La large fraction d'air de la gaine rend cette fibre photonique comparable à un simple barreau de silice dans l'air. D'après [94].

7.1 Formes des modes élastiques

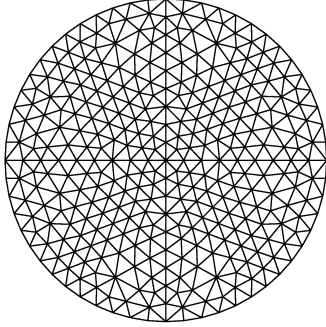


FIG. 7.2 – Exemple de maillage pour un barreau de silice de diamètre $1\ \mu\text{m}$.

Un calcul pertinent des courbes de dispersion des modes élastiques d'une fibre à cristaux photoniques, ou plus simplement dans notre cas d'un barreau de silice, nécessite la prise en compte de la dimension finie de la structure, que la méthode de décomposition en ondes planes ne permet pas d'assurer. Un code éléments finis modifié pour prendre en considération l'aspect propagatif des modes élastiques, a été développé par Vincent Laude [93]. Dans ce contexte, le cas plus général d'une fibre à cristaux photoniques quelconque, c'est-à-dire consistant en un arrangement de trous d'air disposés dans une matrice de silice peut être traité. D'un point de vue élastique, l'énergie élastique peut être considérée comme nulle dans les trous d'air, et reste donc confinée dans la silice. Les frontières de chaque cylindre creux sont supposées libres de toute contrainte et font office de diffuseurs des ondes élastiques incidentes, indépendamment de leur direction de propagation. Enfin, on bénéficiera des simplifications liées à l'isotropie de la silice.

L'analyse des modes élastiques est fondée sur la méthode dite *waveguide finite element method* qui permet de combiner une approche de type décomposition modale le long de la direction de propagation, supposée infinie, avec une autre de type éléments finis de façon à pouvoir simuler une section arbitraire de fibre. Cette dernière, que l'on supposera dans le plan (x, y) est donc maillée par des éléments triangulaires constitués de trois sommets et de six nœuds, un à chaque sommet de l'élément plus un au milieu de chaque arête, comme illustré sur la figure 7.2. Les inconnues du problème sont alors les champs de déplacement suivant x , y et z en chaque nœud. Enfin, on impose une dépendance harmonique en $\exp[j(\Omega t - Kz)]$ le long de la direction de propagation.

Pour des matériaux isotropes et une propagation axiale, les champs transverses u_x et u_y et le champ longitudinal u_z à la direction de propagation sont en quadrature [41]. Les parties réelles des composantes u_x et u_y sont donc couplées à la partie imaginaire de u_z , et réciproquement. Afin de déterminer une solution à caractère unique, les champs de déplacement du mode en chaque