

Observation pour les TDS linéaires à entrées inconnues

Sommaire

4.1 Introduction	69
4.2 Formulation du problème	69
4.3 Sorties indépendantes des entrées inconnues	70
4.4 Généralisation des résultats	81
4.5 Conclusion	93

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'observation des systèmes linéaires à retards commensurables et connus avec des entrées inconnues. Étant donné que l'étude pour les systèmes à retard sans entrées inconnues est déjà complexe, prendre en compte des entrées inconnues est encore beaucoup plus complexe. Peu de résultats existent dans la littérature pour ces classes de systèmes, et pourtant les systèmes à retard sont plus proches des systèmes réels que les systèmes sans retard. Supposons qu'en réalité, tous les signaux se propageant dans le temps sont retardés par rapport à un instant donné, nous allons considérer, dans ce chapitre, que même les entrées inconnues peuvent être retardées. Alors, pour simplifier notre étude, nous allons tout d'abord nous intéresser aux classes de systèmes à retard dont les entrées inconnues n'ont pas d'effets directs sur les sorties mesurées. Par la suite, nous généraliserons les résultats obtenus au cas où les entrées inconnues apparaissent aussi dans les sorties.

4.2 Formulation du problème

Dans ce chapitre nous allons utiliser certains résultats obtenus dans le Chapitre 3 que nous allons adapter, suivant de nouvelles conditions, aux systèmes linéaires retardés à entrées inconnues.

Pour ce faire, considérons la classe de systèmes linéaires à retards commensurables définie de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{k_a} A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{k_b} B_i u(t - i\tau) \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{k_c} C_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{k_d} D_i u(t - i\tau)\end{aligned}\quad (4.1)$$

où à l'instant t , $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système considéré, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sa sortie, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées inconnues. La constante positive τ représente la base des retards commensurables. La fonction initiale $\omega(t)$ est une fonction continue par intervalle définie par $\omega(t) : [-k\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($k = \max\{k_a, k_b, k_c, k_d\}$); ainsi $x(t) = \omega(t)$ sur $[-k\tau, 0]$. A_i, B_i, C_i et D_i sont des matrices de dimensions appropriées.

Comme dans le chapitre 3, on introduit l'opérateur de retard δ tel que $\delta^k x(t) = x(t - k\tau)$, $k \in \mathbb{N}$. Soit $\mathbb{R}[\delta]$ l'anneau de polynôme de δ défini sur \mathbb{R} . Le système (4.1) peut alors être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t) + D(\delta)u(t)\end{aligned}\quad (4.2)$$

où $A(\delta) = \sum_{i=0}^{k_a} A_i \delta^i$, $B(\delta) = \sum_{i=0}^{k_b} B_i \delta^i$, $C(\delta) = \sum_{i=0}^{k_c} C_i \delta^i$ et $D(\delta) = \sum_{i=0}^{k_d} D_i \delta^i$.

Pour ce qui est de $x(t; \varphi, u)$, nous entendons la solution du système retardé (4.2) avec la condition initiale égale à $\varphi(t)$ et l'entrée $u(t)$. De la même manière, nous définissons $y(t; \varphi, u) = C(\delta)x(t; \varphi, u)$ comme la sortie du système (4.2) quand $x(t) = x(t; \varphi, u)$. Les informations issues de mesures réelles et passées seront utilisées pour concevoir l'observateur et estimer les états du système retardé à entrées inconnues. Cette classe de systèmes dynamiques étant complexe, nous nous proposons d'étudier d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire le cas où les entrées inconnues n'ont pas d'effets directs sur la sortie du système considéré.

4.3 Sorties indépendantes des entrées inconnues

Dans ce premier cas de figure, nous assumons que la matrice $D(\delta)$ du système (4.2) est toujours nulle. Ainsi, nous obtenons un système de la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t)\end{aligned}\quad (4.3)$$

où $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$, $B(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times m}[\delta]$ et $C(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times n}[\delta]$ sont des matrices définies sur l'anneau polynômial $\mathbb{R}[\delta]$.

Pour le système (4.3) sans entrée, c'est-à-dire pour $B(\delta) = 0$, Hou a proposé dans [Hou et al., 2002], un simple observateur de Luenberger et des conditions suffisantes ont été déduites pour calculer les gains de l'observateur proposé. Cette méthode peut être aussi adaptée pour construire le même type d'observateur pour le système (4.3) avec les entrées connues, mais ne peut pas être appliquée aux classes de systèmes dont les entrées $u(t)$ sont inconnues, comme par exemple le système étudié dans cette partie. Dans [SENAME, 1997], le problème de la construction

d'un observateur pour le système (4.3) avec entrées inconnues a été étudié en utilisant les mêmes approches algébriques et polynômiales que dans [Hou et al., 2002]. Toutefois, dans cet article, seules les conditions nécessaires ont été données pour garantir l'existence de l'observateur proposé et cela rend la procédure de conception non constructive. En extension aux résultats des travaux récents présentés dans [BEJARANO et al., 2014], la principale contribution de cette partie est d'étendre la méthode proposée dans [Hou et al., 2002] pour traiter le système (4.3) avec des entrées inconnues, et en déduire les conditions suffisantes qui nous permettent de présenter une procédure simple et constructive pour concevoir un observateur en temps fini.

4.3.1 Définitions et résultats préliminaires

Les Définitions 3.1 et 3.2 du Chapitre 3 concernant l'unimodularité et les matrices polynômiales sont aussi applicables aux systèmes (4.1) et (4.2) de ce chapitre.

Dans le but de découpler les entrées inconnues du système (4.3), nous allons utiliser les méthodes présentées dans [SILVERMAN, 1969] et dans [MOLINARI, 1976]. Ainsi, nous pouvons définir une matrice $N_k(\delta)$ générées par l'algorithme suivant :

Algorithme 4.1. [MOLINARI, 1976]

- *Initialisation* : $\Delta_1 \triangleq 0$, $E_1 \triangleq 0$, $J_1(\delta) \triangleq C(\delta)$, $N_1(\delta) \triangleq \Delta_1$;
- *Itération* : Pour $l \geq 1$, calculer la matrice unimodulaire $P_l(\delta)$ sur $\mathbb{R}[\delta]$ telle qu'elle transforme $\Delta_l(\delta)B(\delta)$ en sa forme de Hermite

$$P_l(\delta)\Delta_l(\delta)B(\delta) = \begin{bmatrix} E_{l+1}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alors on obtient

$$\begin{bmatrix} E_{l+1}(\delta) & J_{l+1}(\delta) \\ 0 & \Delta_{l+1}(\delta) \end{bmatrix} = P_l(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_l(\delta)B(\delta) & \Delta_l(\delta)A(\delta) \\ E_l(\delta) & J_l(\delta) \end{bmatrix}.$$

$$\text{— On note } N_{l+1}(\delta) \triangleq \begin{bmatrix} N_l(\delta) \\ \Delta_{l+1}(\delta) \end{bmatrix}.$$

En appliquant l'algorithme 4.1 au système (4.3), il a été prouvé dans [BEJARANO et al., 2014] qu'il existe toujours un plus petit entier naturel l^* , indépendant du choix de $P_l(\delta)$, tel que $\text{Inv}_S N_{l^*+1}(\delta) = \text{Inv}_S N_{l^*}(\delta)$. De plus, il a été prouvé que le système (4.3) est Observable Retardé à Entrées Inconnues (OREI) si $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_{l^*}(\delta) = n$ et que $\text{Inv}_S N_{l^*}(\delta) \subset \mathbb{R}$. En se basant sur ce résultat, considérons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.1. Pour le système (4.3), il existe un plus petit entier naturel l^* tel que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_{l^*}(\delta) = n$ et $\text{Inv}_S N_{l^*}(\delta) \subset \mathbb{R}$. Ainsi le système (4.3) est observable.

Sous cette hypothèse, un observateur peut être conçu pour estimer les états du système (4.3).

4.3.2 Observateur en temps fini

Dans cette section, un observateur en temps fini basé sur deux observateurs de type Luenberger est conçu. Mais avant de le présenter, définissons la matrice polynômial d'observabilité suivante sur $\mathbb{R}[\delta]$:

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)Q(\delta)A(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)[Q(\delta)A(\delta)]^{l^*-1} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où la matrice $Q(\delta)$ sera définie dans le Lemme 4.2. Le résultat suivant est alors déduit pour le système (4.3).

Lemme 4.1. *Si l'Hypothèse 4.1 est satisfaite pour le système (4.3), alors il existe plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ définie dans (4.4) est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$.*

Preuve. Si l'Hypothèse 4.1 est satisfaite pour le système (4.3), alors en appliquant l'algorithme 4.1 au système (4.3), nous pouvons trouver un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel qu'après l^* itérations, on obtient $\text{rang } N_{l^*}(\delta) = n$ et $\text{Inv}_S N_{l^*}(\delta) \subset \mathbb{R}$.

En considérant la première itération lors de l'application de l'algorithme précédent au système (4.3), on obtient l'égalité

$$P_1(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_1(\delta)B(\delta) & \Delta_1(\delta)A(\delta) \\ E_1(\delta) & J_1(\delta) \end{bmatrix} = P_1(\delta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2(\delta) & J_2(\delta) \\ 0 & \Delta_2(\delta) \end{bmatrix}$$

à partir de laquelle nous pouvons affirmer qu'il existe des matrices $W_1(\delta)$, $S_1(\delta)$ et $R_1(\delta)$ telles que

$$E_2(\delta) = W_1(\delta)B(\delta) = 0$$

avec

$$W_1(\delta) = 0, \Delta_2(\delta) = S_1(\delta)C(\delta) \text{ et } J_2(\delta) = R_1(\delta)C(\delta) = W_1(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) + R_1(\delta)\mathcal{O}_1(\delta),$$

$\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ étant défini dans (4.4).

Dans ce qui suit, il sera prouvé par induction que, après chaque itération $l \geq 1$, il existe des matrices $W_l(\delta)$, $S_l(\delta)$ et $R_l(\delta)$ telles que

$$E_l(\delta) = W_l(\delta)B(\delta), J_l(\delta) = W_l(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) + R_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta) \text{ et } \Delta_l(\delta) = S_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta).$$

Pour cela, supposons que pour $1 \leq l < l^*$, on a $E_l(\delta) = W_l(\delta)B(\delta)$, $J_l(\delta) = W_l(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) + R_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta)$ et $\Delta_l(\delta) = S_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta)$, alors l'itération suivante $l + 1$ donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{l+1}(\delta) & J_{l+1}(\delta) \\ 0 & \Delta_{l+1}(\delta) \end{bmatrix} &= P_l(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_l(\delta)B(\delta) & \Delta_l(\delta)A(\delta) \\ E_l(\delta) & J_l(\delta) \end{bmatrix} \\ &= P_l(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_l(\delta)B(\delta) & \Delta_l(\delta)A(\delta) \\ W_l(\delta)B(\delta) & R_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta) \end{bmatrix} + P_l(\delta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_l(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où $P_k(\delta) = \begin{bmatrix} P_{k,1}(\delta) & P_{k,2}(\delta) \\ P_{k,3}(\delta) & P_{k,4}(\delta) \end{bmatrix}$. Le fait que $[P_{l,3}(\delta)\Delta_l(\delta) + P_{l,4}(\delta)W_l(\delta)]B(\delta) = 0$ implique que

$$[P_{l,3}(\delta)\Delta_l(\delta) + P_{l,4}(\delta)W_l(\delta)]K(\delta) = 0$$

Par conséquent, il existe les matrices suivantes

$$\begin{aligned} W_{k+1}(\delta) &= P_{k,1}(\delta)\Delta_k(\delta) + P_{k,2}(\delta)W_k(\delta) \\ R_{k+1}(\delta) &= \begin{bmatrix} P_{k,2}(\delta)R_k(\delta), & P_{k,1}(\delta)S_k(\delta) \end{bmatrix} \\ S_{k+1}(\delta) &= \begin{bmatrix} P_{k,4}(\delta)R_k(\delta), & P_{k,3}(\delta)S_k(\delta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

telles qu'après l'itération $l+1$, on obtienne

$$\begin{aligned} E_{k+1}(\delta) &= P_{k,1}(\delta)\Delta_k(\delta)B(\delta) + P_{k,2}(\delta)W_k(\delta)B(\delta) = W_{k+1}(\delta)B(\delta) \\ J_{k+1}(\delta) &= P_{k,1}(\delta)\Delta_k(\delta)A(\delta) + P_{k,2}(\delta)[R_k(\delta)\mathcal{O}_k(\delta) + W_{k+1}(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta)] \\ \Delta_{k+1}(\delta) &= P_{k,3}(\delta)\Delta_k(\delta)A(\delta) + P_{k,4}(\delta)[R_k(\delta)\mathcal{O}_k(\delta) + W_{k+1}(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta)] \end{aligned}$$

à partir desquelles nous pouvons conclure qu'après chaque itération $l \geq 1$, il existe toujours une matrice polynômiale $S_l(\delta)$ telle que $\Delta_l(\delta) = S_l(\delta)\mathcal{O}_l(\delta)$.

Donc, après l^* itération, on a $\Delta_{l^*}(\delta) = S_{l^*}(\delta)\mathcal{O}_{l^*}$, ce qui implique qu'il existe une matrice $S(\delta)$ dépendant de S_l telle que $N_{l^*}(\delta) = S(\delta)\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$. Ainsi, si l'hypothèse 4.1 est satisfaite pour le système (4.4), alors $N_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, et cela signifie que $N_{l^*}(\delta)$ admet une matrice inverse gauche $[N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}$ telle que

$$I_n = [N_{l^*}(\delta)]_L^{-1} N_{l^*}(\delta) = [N_{l^*}(\delta)]_L^{-1} S(\delta)\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$$

Cela implique que $[N_{l^*}(\delta)]_L^{-1} S(\delta)$ est l'inverse à gauche de $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$. Par conséquent $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ est aussi unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$. ■

Considérons maintenant les dynamiques suivantes pour l'observateur du système (4.3).

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= L(\delta)\xi + P(\delta)y \\ \hat{x} &= \xi + K(\delta)y \end{aligned} \tag{4.5}$$

où les matrices $L(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$, $P(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times p}[\delta]$ et $K(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times p}[\delta]$ seront déterminées ci-après. Dé-

signons maintenant par $\varepsilon = x - \hat{x} = [I_n - K(\delta)C(\delta)]x - \xi$ l'erreur d'observation de x et notons $Q(\delta) = I_n - K(\delta)C(\delta)$. On a

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= Q(\delta)A(\delta)x + Q(\delta)B(\delta)u - L(\delta)\xi - P(\delta)C(\delta)x \\ &= Q(\delta)A(\delta)x + Q(\delta)B(\delta)u - L(\delta)\hat{x} + L(\delta)K(\delta)C(\delta)x - P(\delta)C(\delta)x \\ &= [Q(\delta)A(\delta) + L(\delta)K(\delta)C(\delta) - P(\delta)C(\delta)]x - L(\delta)\hat{x} + Q(\delta)B(\delta)u\end{aligned}\quad (4.6)$$

Dans la dynamique de l'erreur d'observation ci-dessus, puisque u est supposée être inconnue, nous devons chercher une matrice polynomiale $Q(\delta)$ afin d'annihiler $B(\delta)u$. L'existence d'une telle matrice $Q(\delta)$ est garantie par le lemme suivant.

Lemme 4.2. *Pour des matrices polynomiales $B(\delta)$ et $C(\delta)$ définies dans le système (4.3), il existe une matrice polynomiale $Q(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$ telle que $Q(\delta)B(\delta) = 0$, si et seulement si*

$$\text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) \\ B(\delta) \end{bmatrix} = \text{Inv}_S [C(\delta)B(\delta)] \quad (4.7)$$

Preuve. Suivant le Théorème S2.1 dans [GOHBERG et al., 2009], il existe une matrice polynomiale $K(\delta)$ telle que $K(\delta)C(\delta)B(\delta) = B(\delta)$ si et seulement si la condition (4.7) est satisfaite. Par conséquent, on peut conclure qu'il existe une matrice polynomiale $Q(\delta) = I_n - K(\delta)C(\delta)$ telle que $Q(\delta)B(\delta) = 0$ si et seulement si la condition (4.7) est satisfaite. ■

Puisque $Q(\delta)B(\delta) = 0$, la dynamique (4.6) peut alors être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= [Q(\delta)A(\delta) + L(\delta)K(\delta)C(\delta) - P(\delta)C(\delta)]x - L(\delta)\hat{x} \\ &= [Q(\delta)A(\delta) + (L(\delta)K(\delta) - P(\delta))C(\delta)]x - L(\delta)\hat{x}\end{aligned}$$

En notant $G(\delta) = P(\delta) - L(\delta)K(\delta)$ et en choisissant $L(\delta) = Q(\delta)A(\delta) - G(\delta)C(\delta)$, on obtient

$$\dot{\varepsilon} = [Q(\delta)A(\delta) - G(\delta)C(\delta)]\varepsilon. \quad (4.8)$$

Dans [Hou et al., 2002], il a été prouvé que si $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, alors il existe un changement de coordonnées $z = T(\delta)x$ qui transforme le système (4.5) en sa forme normale d'observateur (3.6) où la matrice polynomiale $T(\delta) \in \mathbb{R}^{p^{l^*} \times n}[\delta]$ est une matrice unimodulaire à gauche, $F(\delta) = [F_1^T(\delta), \dots, F_{l^*}^T(\delta)]^T$ et les matrices A_0 et C_0 sont définies au (3.7). De plus, la matrice polynomiale $T(\delta) = \text{col}(T_1(\delta), \dots, T_{l^*}(\delta))$ est donnée par :

$$\begin{cases} T_1(\delta) = C(\delta) \\ T_{i+1}(\delta) = T_i(\delta)Q(\delta)A(\delta) - F_i(\delta)C(\delta) \end{cases} \quad (4.9)$$

pour $1 \leq i \leq l^* - 1$, où les $F_i(\delta)$ sont obtenues par l'équation suivante :

$$[F_{l^*}(\delta), \dots, F_1(\delta)] = C(\delta)[Q(\delta)A(\delta)]^{l^*} [\mathcal{O}_{l^*}(\delta)]_L^{-1} \quad (4.10)$$

Tant que $\mathcal{O}_l^*(\delta)$ définie au (4.4) est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, et si l'Hypothèse 4.1 est satisfaite, alors il existe la matrice polynomiale $T(\delta)$ telle que $z = T(\delta)x$. En notant la dynamique des erreurs $\varepsilon_z = z - \hat{z}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_z &= \dot{z} - \dot{\hat{z}} \\
&= A_0 z + F(\delta)y - T(\delta)\dot{\hat{x}} \\
&= A_0 z + F(\delta)C_0 z - T(\delta)[L(\delta)\xi + P(\delta)y] \\
&= A_0 z + F(\delta)C_0 z - T(\delta)[L(\delta)\xi + P(\delta)C_0 z] \\
&= [A_0 + F(\delta)C_0 - T(\delta)P(\delta)C_0]z - T(\delta)L(\delta)[\hat{x} - K(\delta)C_0 z] \\
&= [A_0 + F(\delta)C_0 - T(\delta)[P(\delta) - L(\delta)K(\delta)]C_0]z - T(\delta)L(\delta)\hat{x} \\
&= [A_0 + F(\delta)C_0 - T(\delta)[P(\delta) - L(\delta)K(\delta)]C_0]z - L(\delta)\hat{z}
\end{aligned}$$

Notons $G(\delta) = P(\delta) - L(\delta)K(\delta)$ et $G_0(\delta) = T(\delta)G(\delta) - F(\delta)$, puis choisissons $L(\delta) = A_0 - G_0(\delta)C_0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_z &= [A_0 + F(\delta)C_0 - T(\delta)G(\delta)C_0]z - L(\delta)\hat{z} \\
&= [A_0 - G_0(\delta)C_0]z - L(\delta)\hat{z} \\
\dot{\varepsilon}_z &= [A_0 - G_0(\delta)C_0]\varepsilon_z
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Notons aussi $\varepsilon_z = T(\delta)\varepsilon$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon} &= [Q(\delta)A(\delta) - G(\delta)C(\delta)]\varepsilon \\
&= T_L^{-1}(\delta)\dot{\varepsilon}_z \\
&= T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0(\delta)C_0]\varepsilon_z \\
&= T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0(\delta)C_0]T(\delta)\varepsilon
\end{aligned}$$

donc la dynamique (4.8) devient

$$\dot{\varepsilon} = T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0(\delta)C_0]T(\delta)\varepsilon \tag{4.12}$$

Puisque le couple (A_0, C_0) est observable, il existe une matrice constante $G_0(\delta)$ telle que $[A_0 - G_0(\delta)C_0]$ soit stable.

Dans la suite, deux observateurs du type (4.5) seront utilisés pour concevoir un observateur en temps fini à entrées inconnues pour le système (4.3). Pour cela, gardons les mêmes $Q(\delta)$ et $K(\delta)$ comme ci-dessus et choisissons deux différentes matrices constantes $\hat{G}_0(\delta)$ et $\tilde{G}_0(\delta)$ telles que $\Lambda_1 = [A_0 - \hat{G}_0(\delta)C_0]$ et $\Lambda_2 = [A_0 - \tilde{G}_0(\delta)C_0]$ soient stables. Ensuite, on peut définir les deux matrices suivantes :

$$\begin{cases} G_1(\delta) = T_L^{-1}(\delta)[F(\delta) + \hat{G}_0(\delta)] \\ G_2(\delta) = T_L^{-1}(\delta)[F(\delta) + \tilde{G}_0(\delta)] \end{cases} \tag{4.13}$$

Notons aussi

$$L_i(\delta) = Q(\delta)A(\delta) - G_i(\delta)C(\delta) \quad (4.14)$$

et

$$P_i(\delta) = L_i(\delta)K(\delta) + G_i(\delta) \quad (4.15)$$

pour $i = 1, 2$. Définissons $d_{\max} = \max\{\deg_{\delta}L_i(\delta), \deg_{\delta}P_i(\delta), \deg_{\delta}K(\delta)\}$, avec ces matrices, définissons une constante positive prédéterminée $h > \tau d_{\max}$. Ensuite, l'observateur suivant peut être conçu à partir du couplage de deux observateurs :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = L_i(\delta)\xi + P_i(\delta)y, & i=1,2 \\ \hat{x}_i = \xi_i + K(\delta)y, \\ \hat{x} = \Gamma(\delta, t) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \\ \xi_1(t) = \xi_2(t), & \text{pour } -hd_{\max} \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

où

$$\Gamma(\delta, t) = \begin{cases} [I_{pl^*} \ I_{pl^*}], & \text{si } t < h \\ (I_{pl^*} - e^{\Lambda_2 t} e^{-\Lambda_1 t})^{-1} \begin{bmatrix} e^{\Lambda_2 t} e^{-\Lambda_1 t} & I_{pl^*} \end{bmatrix}, & \text{si } t = h \\ [I_{pl^*} \ 0_{pl^*}], & \text{si } t > h \end{cases} \quad (4.17)$$

Théorème 4.1. *Supposons que l'Hypothèse 4.1 est satisfaite pour le système (4.3). Pour une constante positive prédéterminée $h > \tau d_{\max}$, les dynamiques (4.16) représentent un observateur en temps fini pour le système (4.3) avec l'estimation du temps de stabilisation prédéterminé σ si la condition (4.7) est satisfaite.*

◇

Preuve. Il a été montré que si l'Hypothèse 4.1 et la condition (4.7) sont satisfaites pour le système (4.3), alors on peut toujours trouver deux matrices constantes $\hat{G}_0(\delta)$ et $\tilde{G}_0(\delta)$ telles que $[A_0 - \hat{G}_0(\delta)C_0]$ et $[A_0 - \tilde{G}_0(\delta)C_0]$ soient stables. Notons $\hat{\varepsilon} = x - \hat{x}$, $\tilde{\varepsilon} = x - \tilde{x}$, $\hat{\varepsilon}_{T(\delta)} = T(\delta)\hat{\varepsilon}$ et $\tilde{\varepsilon}_{T(\delta)} = T(\delta)\tilde{\varepsilon}$. Alors, en tenant compte de (4.11), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\varepsilon}}_z &= \Lambda_1 \hat{\varepsilon}_z \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_z &= \Lambda_2 \tilde{\varepsilon}_z \end{aligned} \quad (4.18)$$

où

$$\Lambda_1 = A_0 - \hat{G}_0(\delta)C_0 \text{ et } \Lambda_2 = A_0 - \tilde{G}_0(\delta)C_0. \quad (4.19)$$

En résolvant le système d'équation (4.18), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_z(t) &= T(\delta)[x(t) - \hat{x}(t)] = e^{\Lambda_1 t} \hat{\varepsilon}_z(0) \\ \tilde{\varepsilon}_z(t) &= T(\delta)[x(t) - \tilde{x}(t)] = e^{\Lambda_2 t} \tilde{\varepsilon}_z(0) \end{aligned} \quad (4.20)$$

En raison du fait que les conditions initiales pour ξ_i sont les mêmes que dans (4.16), ceci implique

que $\xi_1(0) = \xi_2(0)$ et on a :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{T(\delta)}(0) &= T(\delta)\hat{\varepsilon}(0) = T(\delta)[x(0) - \hat{x}(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \xi_1(0) - K(\delta)y(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \xi_2(0) - K(\delta)y(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \tilde{x}(0)] = T(\delta)\tilde{\varepsilon}(0) \\ &= \tilde{\varepsilon}_z(0)\end{aligned}$$

donc, en éliminant $\hat{\varepsilon}_z(0)$ et $\tilde{\varepsilon}_z(0)$ dans (4.20), pour $t < h$ on obtient

$$e^{\Lambda_2 t} T(\delta)[x(t) - \hat{x}(t)] = e^{\Lambda_1 t} T(\delta)[x(t) - \tilde{x}(t)]$$

Après de simple manipulations, pour tout $t \geq 0$ on obtient

$$x(t) = T_L^{-1}(\delta)(I_{pl^*} - e^{\Lambda_2 t} e^{-\Lambda_1 t})^{-1} \begin{bmatrix} -e^{\Lambda_2 t} e^{-\Lambda_1 t} T(\delta) & T(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

Quand $t = h$, l'équation ci-dessus devient $x(h) = \Gamma(\delta, h) \begin{bmatrix} \hat{x}(h) \\ \tilde{x}(h) \end{bmatrix}$ et selon le comportement impulsif défini dans (4.16), on obtient $\hat{x}_1(h) = \hat{x}_2(h) = x(h)$. Cela implique que la valeur exacte de l'état $x(t)$ a été obtenue à l'instant h . Enfin, on a toujours $\|x(t) - \hat{x}_i(t)\| = 0$ pour $i = 1, 2$ quand $t \geq h$. Par conséquent (4.16) est un observateur en temps fini pour le système (4.3) et qui converge à un instant fixe prédéterminé h . ■

S'il existe un certain $l^* \in \mathbb{N}$ tel que l'Hypothèse 4.1 et la condition (4.7) sont satisfaites pour le système (4.3), alors la procédure suivante présente une manière constructive de concevoir l'observateur en temps fini.

1. Pour les matrices polynômiales $B(\delta)$ et $C(\delta)$ données, calculer $K(\delta)$ telle que $K(\delta)C(\delta)B(\delta) = B(\delta)$;
2. Calculer $Q(\delta) = I_n - K(\delta)C(\delta)$, et $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ définies dans (4.4);
3. Calculer $F(\delta)$ suivant l'équation (4.10) et ensuite $T(\delta)$ en se basant sur (4.9) ce qui conduit à obtenir deux matrices constantes A_0 et C_0 en suivant (3.7);
4. Choisir deux matrices constantes $\hat{G}_0(\delta)$ et $\tilde{G}_0(\delta)$ telle que Λ_1 et Λ_2 définies dans (4.19) soient stables puis calculer $\Gamma(\delta, \sigma)$ selon (4.18) pour σ prédéterminé et $G_i(\delta)$ pour $i = 1, 2$ d'après (4.13);
5. Finalement, calculer $L_i(\delta)$ et $P_i(\delta)$ définies respectivement dans (4.14) et dans (4.15).

4.3.3 Exemple illustratif

Considérons l'exemple suivant de système dynamique à retard

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} \delta^2 & 1 & \delta \\ \delta & \delta & 1 + \delta \\ 1 & \delta & \delta^2 \end{bmatrix}, \quad B(\delta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \delta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier qu'il existe un entier $l^* = 2$ tel que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_2(\delta) = 3$ et $\text{Inv}_S N_2(\delta) = \{1, 1, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Par conséquent, l'Hypothèse 4.1 est satisfaite, et le système à entrées inconnues étudié est observable. Afin de concevoir l'estimateur en temps fini, on doit vérifier si la condition (4.7) est satisfaite. Tant que $C(\delta)B(\delta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \delta \end{bmatrix}$ et

$$\text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) \\ B(\delta) \end{bmatrix} = \text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) \end{bmatrix} = \{1, 1, 1\}$$

toutes les conditions du Théorème 4.1 sont satisfaites, et la procédure proposée pour concevoir un estimateur convergeant en temps fini peut être utilisée.

Étape 1 et 2 :

D'après le Lemme 4.2, on obtient

$$K(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q(\delta) = I - K(\delta)C(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

telles que $Q(\delta)B(\delta) = 0$. Alors on a

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} C(\delta) \\ C(\delta)Q(\delta)A(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta - \delta^2 & \delta - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$ tant que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} \mathcal{O}_{l^*}(\delta) = 3$ et $\text{Inv}_S [\mathcal{O}_{l^*}(\delta)] = \{1, 1, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Étape 3 :

A partir de (4.10), on a

$$F(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta - 1 \\ 0 & 0 \\ 1 - \delta^3 & 0 \end{bmatrix}$$

laquelle, en se basant sur (4.9), donne la matrice

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\delta - 2\delta^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et dont l'inverse à gauche est donnée par

$$T_L^{-1}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 \\ 2\delta^2 - 2\delta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'après (3.7), on a $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et $C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Étape 4 et 5 :

On peut alors choisir librement les matrices $\hat{G}_0(\delta)$ et $\tilde{G}_0(\delta)$ telles que Λ_1 et Λ_2 soient stables. Ici,

on choisit $\hat{G}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12.5 \\ 8 & 0 \\ 0 & 37.5 \end{bmatrix}$ et $\tilde{G}_0 = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 1.28 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ qui fixent les valeurs propres de Λ_1 à $(-7.5, -5, -4, -2)$,

et celles de Λ_2 à $(-3, -2, -1.6, -0.8)$. Finalement on obtient :

$$G_1(\delta) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -6\delta & 11.5 + \delta \\ -\delta^3 + 12\delta^2 - 12\delta + 1 & 37.5 \end{bmatrix} \text{ et } G_2(\delta) = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ -2.4\delta & 4 + \delta \\ -\delta^3 + 4.8\delta^2 - 4.8\delta + 1 & 6 \end{bmatrix};$$

$$L_1(\delta) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -4.5\delta - 2\delta^2 & -12.5 & 1 \\ -25.5\delta - 12\delta^2 & -37.5 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } L_2(\delta) = \begin{bmatrix} -2.4 & 0 & 0 \\ -0.6\delta - 2\delta^2 & -5 & 1 \\ -1.2\delta - 4.8\delta^2 & -6 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_1(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\delta^2 - 9.5\delta - 12.5 & \delta + 11.5 \\ -\delta^3 - 37.5\delta - 36.5 & 37.5 \end{bmatrix} \text{ et } P_2(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\delta^2 - 2\delta - 5 & \delta + 4 \\ -\delta^3 - 6\delta - 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Avec l'instant de convergence prédéfini $h > 3\tau$, on peut concevoir facilement un observateur à entrées inconnues de type (4.16) pour obtenir l'estimation en temps fini de $x(t)$.

Pour la simulation, le retard de base est $\tau = 0.01s$. Les conditions initiales sont $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 5$ et $\hat{x}_3(0) = 2$.

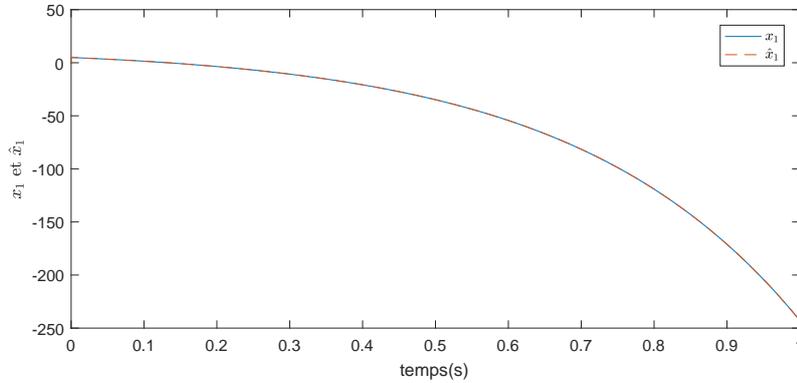


FIGURE 4.1 – L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1

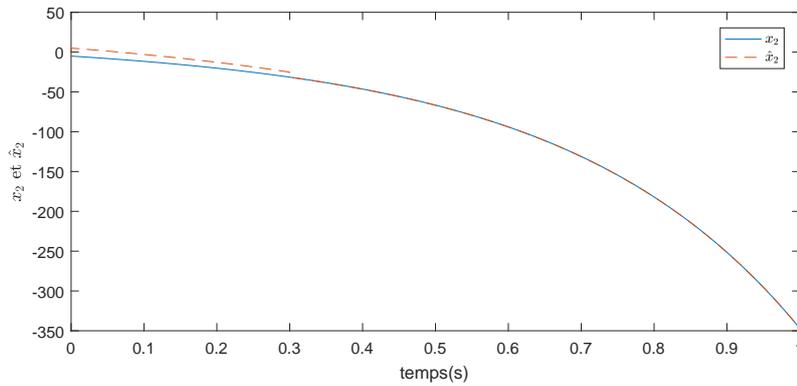


FIGURE 4.2 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2

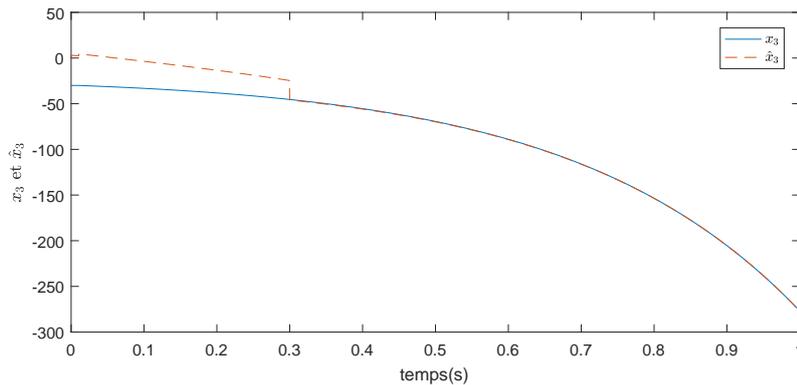


FIGURE 4.3 – L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3

Les Figures 4.1, 4.2 et 4.3 montrent que les trajectoires des états estimés convergent exactement vers les états réels en un temps fini prédéterminé $\sigma = 0.3s$. Les états du système sont en bleu et leurs estimations sont en rouge.

4.4 Généralisation des résultats

Dans cette section, nous allons généraliser les résultats précédemment obtenus à toutes les classes de systèmes dynamiques linéaires à retards commensurables, c'est-à-dire aux cas où les entrées inconnues apparaissent aussi dans les sorties. Pour cela, considérons le système dynamique linéaire avec des retards commensurables (4.2) :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t) + D(\delta)u(t)\end{aligned}$$

Pour toute matrice polynômiale $D(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times m}[\delta]$ avec $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} D(\delta) = k \leq \min\{p, m\}$, il a été montré dans [Hou et al., 2002] que $D(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times m}[\delta]$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$ si et seulement si $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} D(\delta) = m \leq p$ et $\text{Inv}_S[D(\delta)] \subset \mathbb{R}$.

Hypothèse 4.2. *Considérons les matrices polynômiales $B(\delta)$, $C(\delta)$ et $D(\delta)$ du système (4.2). On suppose que*

$$\text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \\ B(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Toujours en suivant la procédure de [MOLINARI, 1976] et [SILVERMAN, 1969], on définit $N_{l^*}(\delta)$ la matrice générée par l'algorithme 4.1.

L'Hypothèse 4.2 garantit alors que le système étudié est observable et qu'un observateur en temps fini peut alors être conçu pour estimer ses états.

4.4.1 Observateur en temps fini généralisé

L'observateur proposé avec convergence en temps fini est réalisé toujours en couplant deux observateurs de type Luenberger.

D'après [ZHENG et al., 2015], le système (4.2) peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}(\delta)x + K_1(\delta)\dot{y} + K_2(\delta)y \\ y = \tilde{C}(\delta)x + \Gamma_1(\delta)\dot{y} + \Gamma_2(\delta)y \end{cases} \quad (4.22)$$

où $K(\delta) = [K_1(\delta), K_2(\delta)]$ et $\Gamma(\delta) = [\Gamma_1(\delta), \Gamma_2(\delta)]$ sont des matrices de dimension appropriée données dans [ZHENG et al., 2015]. Les matrices $\bar{A}(\delta)$ et $\tilde{C}(\delta)$ sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{A}(\delta) &= A(\delta) - K(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}[\delta] \\ \tilde{C}(\delta) &= C(\delta) - \Gamma(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}[\delta]\end{aligned}$$

Supposons que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} \tilde{C}(\delta) = r \leq p$, alors il existe une matrice unimodulaire $\Lambda(\delta)$ définie sur $\mathbb{R}[\delta]$ telle que

$$\Lambda(\delta)\tilde{C}(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $\bar{C}(\delta) \in \mathbb{R}[\delta]$ soit de rang (ligne) plein sur $\mathbb{R}[\delta]$. En notant $\bar{y} = \Lambda(\delta)y$, le système (4.22) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}(\delta)x + K_1(\delta)\Lambda^{-1}(\delta)\dot{\bar{y}} + K_2(\delta)\Lambda^{-1}(\delta)\bar{y} \\ \bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix} x + \bar{\Gamma}_1(\delta)\dot{\bar{y}} + \bar{\Gamma}_2(\delta)\bar{y} \end{cases} \quad (4.23)$$

où

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}_1(\delta) = \Lambda(\delta)\Gamma_1(\delta)\Lambda^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times p}(\delta) \\ \bar{\Gamma}_2(\delta) = \Lambda(\delta)\Gamma_2(\delta)\Lambda^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times p}(\delta) \end{cases} \quad (4.24)$$

Lemme 4.3. Si l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le quadruplet $(A(\delta), B(\delta), C(\delta), D(\delta))$ défini dans (4.2), alors pour le système (4.22) il existe un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathcal{O}_{l^*}(\delta) = \begin{bmatrix} \tilde{C}(\delta) \\ \tilde{C}(\delta)\bar{A}(\delta) \\ \vdots \\ \tilde{C}(\delta)\bar{A}(\delta)^{l^*-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pl^* \times n}[\delta] \quad (4.25)$$

soit unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$.

Preuve. En appliquant l'algorithme 4.1 décrit dans la section précédente au système (4.2), la satisfaction de l'Hypothèse 4.2 implique qu'il existe un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel qu'après l^* itérations, nous avons $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_{l^*}(\delta) = n$ et $\text{Inv}_S N_{l^*}(\delta) \subset \mathbb{R}$.

Considérons maintenant la première itération lors de l'application de l'algorithme 4.1 au système (4.2), nous avons :

$$P_1(\delta) \begin{bmatrix} \Delta_1(\delta)B(\delta) & \Delta_1(\delta)A(\delta) \\ F_1(\delta) & J_1(\delta) \end{bmatrix} = P_1(\delta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2(\delta) & J_2(\delta) \\ 0 & \Delta_2(\delta) \end{bmatrix}$$

à partir de laquelle nous pouvons voir qu'il existe des matrices $W_1(\delta)$, $S_1(\delta)$ et $R_1(\delta)$ telles que

$$F_2(\delta) = W_1(\delta)B(\delta) = 0$$

avec $W_1(\delta) = 0$, $\Delta_2(\delta) = S_1(\delta)C(\delta)$, et $J_2(\delta) = R_1(\delta)C(\delta) = W_1(\delta)K(\delta)C(\delta)A(\delta) + R_1(\delta)\mathcal{O}_1(\delta)$. La matrice $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ étant définie au (4.25).

Dans [ZHENG et al., 2015], il a été prouvé que à la l -ème itération, $1 \leq l < l^*$, il existe des matrices

S_l et R_l définies sur $\mathbb{R}[\delta]$ telles que

$$\Delta_{l+1}(\delta) = S_l(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)A^l(\delta) \end{bmatrix}$$

et

$$J_{l+1}(\delta) = R_l(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta) \\ \vdots \\ C(\delta)A^l(\delta) \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la matrice $N_l(\delta)$ peut s'exprimer comme $N_l(\delta) = S(\delta)\mathcal{O}_l(\delta)$ où $S(\delta)$ dépend de $S_l(\delta)$ et de $\mathcal{O}_l(\delta)$.

Ainsi, si l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2), alors $N_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, et cela signifie que $N_{l^*}(\delta)$ admet une matrice inverse à gauche $[N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}$ telle que $I_n = [N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}N_{l^*}(\delta) = [N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}S(\delta)\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$. Ceci implique que $[N_{l^*}(\delta)]_L^{-1}S(\delta)$ est l'inverse à gauche de $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$. Par conséquent $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$. ■

Théorème 4.2. [ZHENG et al., 2015] Si l'hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2), alors pour le système obtenu (4.23), il existe un plus petit entier naturel $l^* \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}_{l^*}(\delta)$ définie dans (3.5) est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$. Alors, il existe un changement de coordonnées généralisé $z = T(\delta)x$ tel que (4.23) peut être transformé en la forme normale d'observateur suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + [F(\delta), 0]\bar{y} + \bar{K}_1(\delta)\dot{\bar{y}} + \bar{K}_2(\delta)\bar{y} \\ \bar{y} = \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \end{bmatrix} z + \bar{\Gamma}_1(\delta)\dot{\bar{y}} + \bar{\Gamma}_2(\delta)\bar{y} \end{cases} \quad (4.26)$$

où $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ sont définis dans (4.24), $F(\delta) = [F_1^T(\delta), \dots, F_{l^*}^T(\delta)]^T$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_r & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r l^* \times r l^*}, \quad (4.27)$$

$$C_0 = [I_r, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{r \times r l^*}, \quad (4.28)$$

et où $T(\delta)$ est définie dans (3.8). $F(\delta)$ est définie dans (3.9) et

$$\begin{cases} \bar{K}_1(\delta) = T(\delta)K_1(\delta)\Lambda^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{r l^* \times p}[\delta] \\ \bar{K}_2(\delta) = T(\delta)K_2(\delta)\Lambda^{-1}(\delta) \in \mathbb{R}^{r l^* \times p}[\delta] \end{cases} \quad (4.29)$$

◇

Un observateur convergeant en temps fini peut alors être conçu en utilisant la forme normale du système (4.26). Tout d'abord, un observateur asymptotique, sur lequel sera basé l'observateur en temps fini, est présenté dans le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Si l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2), alors le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = L_0\xi + G(\delta)\Lambda(\delta)y \\ \dot{\hat{z}} = \xi + H(\delta)\Lambda(\delta)y \\ \hat{x} = T^{-1}(\delta)\hat{z} \end{cases} \quad (4.30)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0 &= A_0 - G_0C_0 \\ H(\delta) &= \bar{K}_1(\delta) - [G_0, 0]\bar{\Gamma}_1(\delta) \\ G(\delta) &= [F(\delta), 0] + \bar{K}_2(\delta) + L_0H(\delta) - [G_0, 0]\bar{\Gamma}_2(\delta) + [G_0, 0] \end{aligned} \quad (4.31)$$

où G_0 est choisie telle que $(A_0 - G_0C_0)$ soit stable, est un observateur à entrée inconnue pour le système (4.2). \diamond

Preuve. Soient les erreurs d'estimation $\varepsilon_z = z - \hat{z}$, $\varepsilon_x = x - \hat{x}$ et notons aussi $\bar{G}_0 = [G_0, 0]$, $\bar{F}(\delta) = [F(\delta), 0]$. Puisque $\bar{y} = \Lambda(\delta)y$, on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_z = A_0z + L_0\hat{z} + [\bar{F}(\delta) + \bar{K}_2(\delta) + L_0H(\delta) - G(\delta)]\bar{y} + [\bar{K}_1(\delta) - H(\delta)]\dot{\bar{y}}$$

Le couple (A_0, C_0) étant observable, il existe une matrice constante G_0 telle que $[A_0 - G_0C_0]$ soit stable. En choisissant le gain G_0 , les matrices L_0 , $H(\delta)$, et $G(\delta)$ définies dans (4.31) peuvent être déduites. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_z &= A_0z + L_0\hat{z} + [\bar{G}_0\bar{\Gamma}_2(\delta) - \bar{G}_0]\bar{y} + \bar{G}_0\bar{\Gamma}_1(\delta)\dot{\bar{y}} \\ &= [A_0 - G_0C_0]\varepsilon_z. \end{aligned}$$

Dès lors que $x = T^{-1}(\delta)z$, on a

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= x - \hat{x} \\ &= T_L^{-1}(\delta)\varepsilon_z \\ &= T_L^{-1}(\delta)[A_0 - G_0C_0]T_L(\delta)\varepsilon_x. \end{aligned}$$

Donc le système (4.31) est un observateur asymptotique à entrées inconnues pour le système (4.2). \blacksquare

Dans la suite, deux observateurs du même type que (4.30) sont utilisés pour concevoir un observateur en temps fini pour le système (4.2). Pour cela, choisissons deux matrices constantes G_{0i} telles que $[A_0 - G_{0i}C_0]$ soient stables pour $i = 1, 2$. Ensuite, notons

$$\begin{cases} L_{0i} &= A_0 - G_{0i}C_0 \\ H_i(\delta) &= \bar{K}_1(\delta) - [G_{0i}, 0]\bar{\Gamma}_1(\delta) \\ G_i(\delta) &= [F(\delta), 0] + \bar{K}_2(\delta) + L_{0i}H_i(\delta) - [G_{0i}, 0]\bar{\Gamma}_2(\delta) + [G_{0i}, 0] \end{cases} \quad (4.32)$$

Définissons $d_{max} = \max\{\deg_\delta G_i(\delta)\Lambda(\delta), \deg_\delta H_i(\delta)\Lambda(\delta)\}$. Pour une constante positive prédéterminée $h \geq \tau d_{max}$, l'observateur en temps fini suivant peut alors être conçu :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = L_{0i}\xi + G_i(\delta)\Lambda(\delta)y, \\ z_i = \xi_i + H_i(\delta)\Lambda(\delta)y, \\ \dot{z} = \Psi(\delta, t) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \\ \xi_1(t) = \xi_2(t) \text{ pour } -\tau d_{max} \leq t \leq 0, \\ \hat{x} = T^{-1}(\delta)\dot{z}. \end{cases} \quad (4.33)$$

où

$$\Psi(\delta, t) = \begin{cases} [I_{pl^*} \ I_{pl^*}], \text{ si } t < h \\ (I_{pl^*} - e^{L_2 t} e^{-L_{01} t})^{-1} [-e^{L_{02} t} e^{-L_1 t}, \ I_{pl^*}], \text{ si } t \geq h \end{cases} \quad (4.34)$$

Théorème 4.4. *Supposons que l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2). Pour une constante prédéterminée $h \geq \tau d_{max}$, le système dynamique (4.33) est un observateur en temps fini pour (4.2) avec l'instant de convergence σ prédéterminé.* \diamond

Preuve. Il a été montré que si l'Hypothèse 4.2 est satisfaite pour le système (4.2), alors on peut toujours trouver deux matrices constantes G_{01} et G_{02} telles que $[A_0 - G_{01}C_0]$ et $[A_0 - G_{02}C_0]$ soient stables. Notons $\varepsilon_{x_1} = x - \hat{x}_1$, $\varepsilon_{x_2} = x - \hat{x}_2$, $\varepsilon_{z_1} = T(\delta)\varepsilon_{x_1}$, $\varepsilon_{z_2} = T(\delta)\varepsilon_{x_2}$, alors on obtient

$$\dot{\varepsilon}_{z_1} = [A_0 - G_{01}C_0]\varepsilon_{z_1} = L_{01}\varepsilon_{z_1} \quad (4.35)$$

et

$$\dot{\varepsilon}_{z_2} = [A_0 - G_{02}C_0]\varepsilon_{z_2} = L_{02}\varepsilon_{z_2}. \quad (4.36)$$

En résolvant les équations (4.35) et (4.36), on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1}(t) &= [z(t) - \hat{z}_1(t)] = e^{L_{01}t} \varepsilon_{z_1}(0) \\ \varepsilon_{z_2}(t) &= [z(t) - \hat{z}_2(t)] = e^{L_{02}t} \varepsilon_{z_2}(0) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Puisque les conditions initiales pour ξ_i sont les mêmes, c'est à dire $\xi_1(0) = \xi_2(0)$, alors on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1}(0) &= T(\delta)\varepsilon_{x_1}(0) = T(\delta)[x(0) - \hat{x}_1(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \xi_1(0)] = T(\delta)[x(0) - \xi_2(0)] \\ &= T(\delta)[x(0) - \hat{x}_2(0)] = T(\delta)\varepsilon_{x_2}(0) \\ &= \varepsilon_{z_2}(0) \end{aligned}$$

Par conséquent, en éliminant $\varepsilon_{z_1}(0)$ et $\varepsilon_{z_2}(0)$ dans (4.37), on obtient

$$e^{L_{02}t}[z(t) - \hat{z}_1(t)] = e^{L_{01}t}[z(t) - \hat{z}_2(t)]$$

La résolution de l'équation précédente donne :

$$z(t) = \left(I_{pl^*} - e^{L_{02}t} e^{-L_{01}t} \right)^{-1} \left[-e^{L_{02}t} e^{-L_{01}t}, I_{pl^*} \right] \begin{bmatrix} \hat{z}_1(t) \\ \hat{z}_2(t) \end{bmatrix}$$

Quand $t = h$, l'équation précédente est équivalente à

$$z(h) = \Psi(\delta, h) \begin{bmatrix} \hat{z}_1(h) \\ \hat{z}_2(h) \end{bmatrix}.$$

Selon le comportement impulsif défini dans (4.33), nous avons

$$\hat{z}_1(h) = \hat{z}_2(h) = z(h) \text{ et } x(h) = T_L^{-1}(\delta)z(h)$$

ce qui implique que la valeur exacte de $x(t)$ a été obtenue à l'instant h . Enfin, nous avons toujours

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0, \forall t \geq h$$

Donc, la dynamique (4.30) est un observateur en temps fini pour le système (4.2) avec un instant de convergence h prédéterminé. ■

Ainsi, la procédure suivante présente une méthodologie constructive pour concevoir l'observateur en temps fini proposé :

1. Comme présenté dans [ZHENG et al., 2015], calculer $W(\delta)$ telle que

$$W(\delta) = [\bar{V}(\delta), 0]U(\delta)$$

où $U(\delta)$ est une matrice unimodulaire sur $\mathbb{R}[\delta]$, $V(\delta)$ est de rang plein sur $\mathbb{R}[\delta]$,

$$U(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(\delta) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{V}(\delta)V(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. La matrice $W(\delta)$ peut être décomposée comme suit

$$W(\delta) = \begin{pmatrix} K(\delta) \\ \Gamma(\delta) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(\delta) & K_2(\delta) \\ \Gamma_1(\delta) & \Gamma_2(\delta) \end{bmatrix}$$

Ensuite, transformer le système (4.2) en (4.23) avec

$$\bar{A}(\delta) = A(\delta) - K(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta) \end{bmatrix}, \text{ et } \tilde{C}(\delta) = C(\delta) - \Gamma(\delta) \begin{bmatrix} C(\delta)A(\delta) \\ C(\delta) \end{bmatrix}$$

puis calculer la matrice unimodulaire $\Lambda(\delta)$ sur $\mathbb{R}[\delta]$ telle que $\Lambda(\delta)\tilde{C}(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{C}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}$;

3. Déterminer $T(\delta)$ définie dans (3.8) et $F(\delta)$ définie dans (3.9);
4. Déterminer A_0 définie dans (4.27), C_0 définie dans (4.28), $\bar{\Gamma}_1(\delta)$, $\bar{\Gamma}_2(\delta)$ définie dans (4.24) puis $\bar{K}_1(\delta)$, $\bar{K}_2(\delta)$ définie dans (4.29);
5. Choisir les matrices constantes G_{01} et G_{02} telles que L_{01} et L_{02} définies dans (4.32) soient stables. Ensuite calculer $H_1(\delta)$ et $H_2(\delta)$ puis $G_1(\delta)$ et $G_2(\delta)$ définies dans (4.32);
6. $\Psi(\delta, t)$ est obtenu selon (4.34) pour l'instant de convergence σ donné;
7. Enfin, concevoir l'observateur (4.33).

4.4.2 Exemple illustratif

Considérons l'exemple de système à retard suivant :

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \delta & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \delta \end{bmatrix},$$

$$C(\delta) = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{et } D(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 0 \\ 1 & \delta \end{bmatrix};$$

On peut vérifier que l'on a $l^* = 3$ tant que $\text{rang}_{\mathbb{R}[\delta]} N_3(\delta) = I_4$. De plus, les facteurs invariants sont

$$\text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \\ B(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \text{Inv}_S \begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \{1, 1, 1\},$$

Par conséquent, l'hypothèse 4.2 est satisfaite et le système étudié est observable à entrées inconnues. Afin de concevoir un observateur à temps fini, nous pouvons suivre la procédure donnée précédemment.

Étape 1 : On peut trouver des matrices $U(\delta)$ et $V(\delta)$ dans le but de transformer la matrice

$\begin{bmatrix} C(\delta)B(\delta) & D(\delta) \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix}$ en sa forme de Hermite. On a donc

$$U(\delta) = \begin{bmatrix} \delta & 0 & -\delta & 1 & 0 & \delta \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } V(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta \end{bmatrix}.$$

Il existe donc la matrice

$$\bar{V}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \delta & \delta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

telle que

$$\bar{V}(\delta)V(\delta) = \begin{bmatrix} B(\delta) & 0 \\ D(\delta) & 0 \end{bmatrix}.$$

Ensuite on détermine

$$W(\delta) = \begin{bmatrix} K_1(\delta) & | & K_2(\delta) \\ \hline \Gamma_1(\delta) & | & \Gamma_2(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \delta-1 & 0 & \delta-1 & | & 1 & 0 & \delta-1 \\ -\delta & 0 & \delta & | & 0 & 0 & -\delta \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étape 2 : Suite à la procédure de conception, on obtient

$$\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \delta & 0 & 0 \\ \delta^2 - \delta & \delta^2 - 1 & -\delta^2 + 2\delta & 2 - 2\delta \\ -\delta^2 & -\delta^2 - \delta + 1 & \delta^2 - \delta + 1 & 2\delta - 1 \end{bmatrix}, \text{ et } \tilde{C}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice unimodulaire $\Lambda(\delta)$ définie sur $\mathbb{R}[\delta]$ peut être choisie comme suit $\Lambda(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ce

qui permet d'obtenir la matrice $\bar{C}(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Étape 3 : A partir des résultats $\bar{A}(\delta)$ et $\bar{C}(\delta)$, on peut vérifier qu'il existe au moins un entier naturel $l^* = 3$ tel que

$$\bar{O}_3(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \delta & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \\ -\delta & \delta^2 + 1 & -1 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

est unimodulaire à gauche sur $\mathbb{R}[\delta]$, avec

$$[\bar{O}_3(\delta)]_L^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \delta & 0 & -1 & 0 \\ \delta^2 - 1 & 1 & -2\delta & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir $[F_3(\delta), F_2(\delta), F_1(\delta)] = \bar{C}(\delta)\bar{A}^3(\delta)[\bar{O}_3(\delta)]_L^{-1}$.

$$F(\delta) = \begin{bmatrix} F_1(\delta) \\ F_2(\delta) \\ F_3(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta^2 + 5\delta - 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \delta^3 - 5\delta^2 + 3\delta + 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \delta^3 - \delta^2 - 4\delta + 3 & 2\delta - 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Ensuite, on détermine

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \delta^2 - 4\delta + 2 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \\ -\delta^2 + 4\delta - 2 & \delta^2 - \delta & -1 & 0 \\ -\delta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et son inverse à gauche

$$[T(\delta)]^{-1} = \begin{bmatrix} \delta^2 - 4\delta + 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta^4 + 8\delta^3 - 19\delta^2 + 15\delta - 4 & 0 & \delta^2 - 4\delta + 2 & 0 & -1 & 0 \\ \delta^4 - 7\delta^3 + 15\delta^2 - 13\delta + 4 & 1 & -\delta^2 + 3\delta - 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Étape 4 : A partir des équations (4.27), (4.28), (4.31), et (4.24), on obtient

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{K}_1(\delta), \bar{K}_2(\delta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \delta - 1 & 1 - \delta & | & 0 & 1 - \delta & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{\Gamma}_1(\delta), \bar{\Gamma}_2(\delta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 5 : Les matrices G_{01} et G_{02} sont choisies telles que L_{01} et L_{02} soient stables. Dans cet exemple, choisissons

$$G_{01} = \begin{bmatrix} 85 & 0 \\ 0 & 85 \\ 2000 & 0 \\ 0 & 2000 \\ 12500 & 0 \\ 0 & 12500 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_{02} = \begin{bmatrix} 85 & 0 \\ 0 & 85 \\ 2250 & 0 \\ 0 & 2250 \\ 18000 & 0 \\ 0 & 18000 \end{bmatrix}$$

afin que les valeurs propres de L_{01} soient $[-10, -10, -25, -25, -50, -50]$ et celles de L_{02} soient $[15, -15, -30, -30, -40, -40]$. On a donc :

$$L_{01} = \begin{bmatrix} -85 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -85 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2000 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2000 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12500 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12500 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } L_{02} = \begin{bmatrix} -85 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -85 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2250 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2250 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -18000 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18000 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

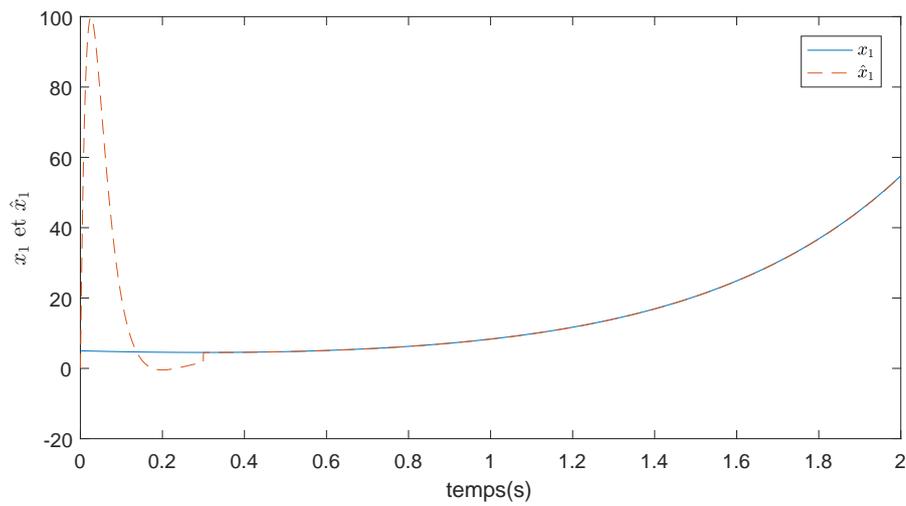
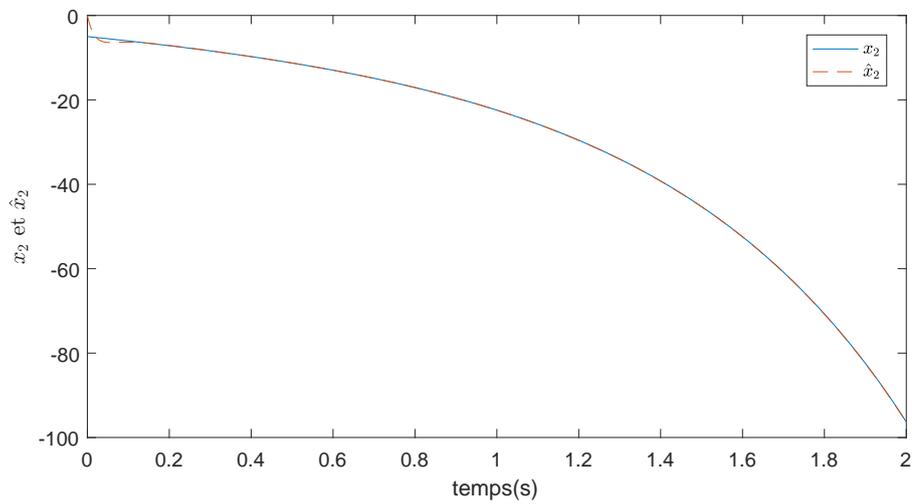
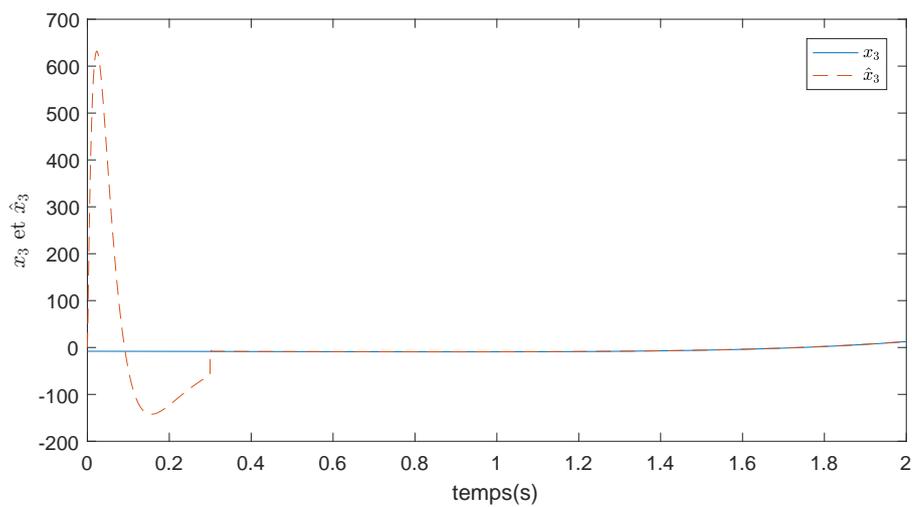
$$H_1(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \delta - 1 & 1 - \delta \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ et } H_2(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \delta - 1 & 1 - \delta \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

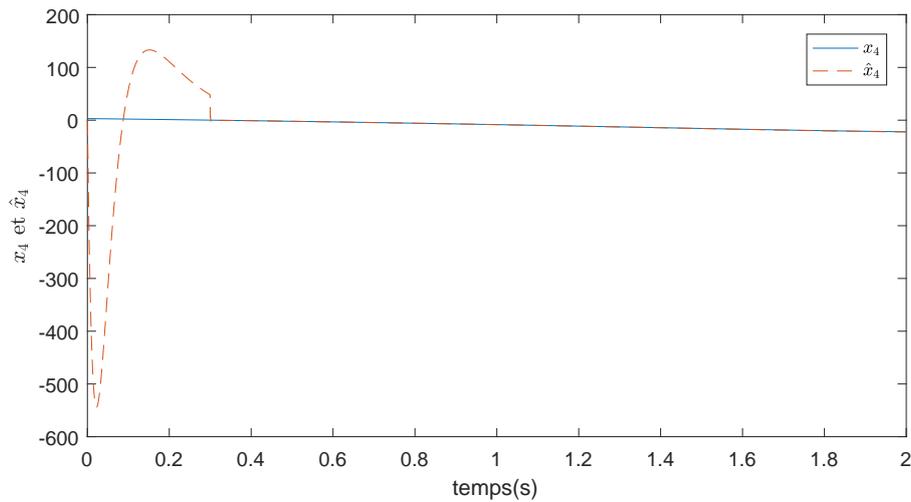
$$G_1(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta^2 + 5\delta + 83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^3 - 5\delta^2 + 3\delta + 2001 & \delta - 1 & 1 - \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^3 - \delta^2 - 4\delta + 12503 & \delta - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } G_2(\delta) = \begin{bmatrix} -\delta^2 + 5\delta + 83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^3 - 5\delta^2 + 3\delta + 2251 & \delta - 1 & 1 - \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^3 - \delta^2 - 4\delta + 18003 & \delta - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 6 : Finalement, à partir de l'équation (4.34), on obtient $\Psi(\delta)$ et avec une constante positive prédéterminé $h > 3\tau$, un observateur en temps fini de type (4.33) peut être conçu pour obtenir une estimation en temps fini de $x(t)$. Par exemple, pour un instant de convergence fixé à $h = 0.3s$, on a

$$\Psi(\delta, h) = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 950 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -950 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 950 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -950 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 16709 & 0 & -179 & 0 & -3 & 0 & -16709 & 0 & 179 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 16709 & 0 & -179 & 0 & -3 & 0 & -16709 & 0 & 179 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pour la simulation, le retard de base est $\tau = 0,001s$ et l'instant de convergence prédéterminé a été fixé à $h = 0,3s$. Les figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7 montrent les trajectoires du système (4.2) et les trajectoires de l'observateur proposé. On peut remarquer que la convergence en temps fini est atteinte en temps fini préfixé $ha = 0.3s$.

FIGURE 4.4 – L'état x_1 et son estimation \hat{x}_1 FIGURE 4.5 – L'état x_2 et son estimation \hat{x}_2 FIGURE 4.6 – L'état x_3 et son estimation \hat{x}_3

FIGURE 4.7 – L'état x_4 et son estimation \hat{x}_4

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un observateur impulsif avec un temps de convergence fini prédéterminé pour un système linéaire à retard commensurable avec des entrées inconnues. Il a été montré que l'observateur converge en temps fini préfixé σ et que l'instant de convergence peut être choisi de manière presque arbitraire. De plus, nous avons pris en compte des retards commensurables pouvant apparaître dans les sorties mesurées. Nous avons utilisé la condition d'observabilité requise dans Hou et al (2002) pour la conception des observateurs proposés. Notons que les résultats obtenus peuvent être utilisés pour l'identification topologique des réseaux de TDS linéaires à entrées inconnues en les associant avec les résultats obtenus dans le chapitre 3. Dans ce qui va suivre, nous allons traiter le problème de l'identification topologique pour des réseaux de systèmes dynamiques non linéaires. Dans cette étude, nous serons amenés à utiliser les résultats obtenus pour les réseaux de systèmes complexes linéaires.