Contexte de la recherche et questions initiales

Dans ce chapitre, nous présentons le projet dans lequel s'inscrit ce travail de thèse ainsi que les travaux en didactique des mathématiques sur lesquels nous nous appuyons pour commencer à répondre aux deux problématiques soulevées dans l'introduction.

Les projets *MindMath* et *Pépite* : liens et enjeux

1.1.1 Inscription dans le projet *MindMath*

Ce travail de thèse se situe en partie dans le cadre du projet *MindMath*, décrit sur son site comme visant l'élaboration d'un « logiciel intelligent, ludique et adaptatif de parcours d'entraînement aux mathématiques au collège » [1]. Nous définissons ici un « parcours d'entraînement aux mathématiques », que nous appellerons **parcours d'apprentissage** désormais, comme une suite d'exercices organisés pour répondre à un objectif d'apprentissage prédéfini.

Le logiciel MindMath est un EIAH, à savoir « un environnement informatique conçu dans le but de favoriser l'apprentissage humain, c'est-à-dire la construction de connaissances chez un apprenant » (Tchounikine, 2002, p. 61) [2]. Il propose des parcours d'apprentissage en algèbre et en géométrie plane.

1. Lien vers le site internet qui présente le projet : `https://www.mindmath.education/`.
2. Le terme EIAH peut être utilisé pour désigner un logiciel ou la communauté des chercheurs qui travaillent sur le sujet.

Cet EIAH est dit « intelligent et adaptatif » car il fonctionne à partir d'algorithmes de *machine learning*[3] qui prennent en compte les connaissances, difficultés et besoins d'apprentissage des élèves d'une façon que nous allons préciser dans la suite de cette thèse. Ces algorithmes s'appuient sur des modèles didactiques et une ontologie que nous définirons dans le chapitre 7.

Le logiciel est dit ludique car on y retrouve certaines mécaniques de gamification. Par exemple, l'élève est récompensé lorsqu'il s'entraîne plusieurs fois sur le logiciel. La gamification peut avoir des impacts sur les exercices proposés aux élèves et sur leurs apprentissages qu'il peut être intéressant d'analyser d'un point de vue didactique. Cependant, nous n'étudions pas cet aspect dans la suite de la thèse.

Le projet *MindMath* est issu d'une collaboration entre deux laboratoires de recherche, quatre entreprises privées dans le domaine de l'informatique et un groupe de presse :

— le Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) dont nous faisons partie est chargé de construire les modèles didactiques qui fondent la conception du logiciel, à savoir le modèle de l'apprenant, le modèle du savoir, le modèle des rétroactions[4] et celui des parcours d'apprentissage ;

— le Laboratoire de recherche en Informatique de Sorbonne Université (LIP6) est chargé d'élaborer un modèle de recommandations afin de proposer des rétroactions pertinentes à l'élève lorsqu'il résout les exercices du logiciel ;

— Cabrilog est une entreprise qui édite des supports numériques pédagogiques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, en particulier le logiciel de géométrie dynamique CABRI (anciennement CABRI-GÉOMÈTRE). Les exercices des parcours d'apprentissage sont implémentés sur une version du logiciel CABRI développée spécifiquement pour ce projet ;

— Domoscio est une *start-up* spécialisée dans le *big data*[5] pour l'apprentissage. À partir des modèles didactiques fournis, elle est chargée d'implémenter les algorithmes qui permettront la création de parcours d'apprentissage adaptés à chaque élève ;

3. Le *machine learning* est un domaine de l'intelligence artificielle qui consiste à élaborer des programmes capables d'apprendre un comportement à partir d'exemples sans avoir besoin d'une suite d'instructions écrites explicitement. Cet « apprentissage » permet par la suite aux programmes de s'adapter à de nouveaux exemples auxquels ils n'avaient pas encore été confrontés.

4. Nous verrons parfois le terme *feedback*, voire *feed-back*, dans la communauté EIAH.

5. Le *big data* est un terme générique qui désigne des volumes massifs de données. On l'emploie pour parler de nombreuses technologies et algorithmes concernant la récolte de données, leur stockage, leur analyse ou leur utilisation, en particulier ici dans des algorithmes de *machine learning*.

— Tralalere est une entreprise qui produit des « programmes cross-media ludo-éducatifs ». C'est l'entreprise qui porte le projet et conçoit l'interface utilisateur ;

— BreakFirst est une entreprise qui développe des jeux vidéo à base de mouvements ainsi que des jeux éducatifs. Elle est chargée de la gamification du logiciel avec l'entreprise Tralalere ;

— Bayard est un groupe de presse et d'édition chargé de recruter des volontaires (élèves et parents) au sein de son réseau pour des expérimentations menées à large échelle qui complètent les expérimentations menées dans des classes de collèges d'académies partenaires du projet.

Notre participation à ce projet fait apparaître des premières questions auxquelles nous tenterons de répondre par la suite : comment concevoir un EIAH au service des apprentissages des élèves ? Comment modéliser le domaine mathématique étudié au sein du logiciel ? Comment prendre en compte les connaissances de l'élève d'un point de vue didactique afin de lui proposer des parcours d'apprentissage adaptés à ces connaissances ? Comment définir les objectifs d'apprentissage des parcours d'apprentissage proposés en lien avec les enjeux d'enseignement de l'enseignant ?

À noter que le travail de recherche que nous menons dans le cadre de cette thèse se situe au-delà des livrables exigés par la participation du LDAR au projet *MindMath*. En particulier, afin de fonder les modèles que nous avons construits pour le logiciel et que nous présentons dans le chapitre 7, nous avons travaillé sur la construction d'un modèle de référence du domaine étudié (cf. chapitres 3 et 4).

Enfin, même si, dans le cadre du projet *MindMath*, le LDAR construit les modèles didactiques et les exercices à la fois en algèbre et en géométrie, ce travail de thèse se situe dans le domaine de la géométrie plane. Dans la suite du chapitre, nous nous intéressons donc à l'enseignement et à l'apprentissage de la géométrie plane au collège afin de commencer à faire des hypothèses pour répondre à nos premières questions et en dégager de nouvelles.

1.1.2 Appui sur le projet *Pépite*

Dans le cadre du projet *MindMath*, le travail sur le domaine algébrique est principalement réalisé par Brigitte Grugeon-Allys et Sébastien Jolivet (post-doctorant au LDAR pendant l'année 2019-2020) qui adaptent et complètent les travaux autour du logiciel Pépite.

Le logiciel Pépite est né dans le cadre du projet *Pépite* dont les travaux sont poursuivis dans le projet *Lingot* dans les années 2000. Le projet *Lingot* comportait trois axes : un axe diagnostic de compétence, un axe apprentissage et un axe instrumentation de l'activité des enseignants de mathématiques (Delozanne, Prévit, Grugeon-Allys, & Chenevotot-Quentin, 2010, p. 900). Le logiciel PÉPITE constitue un des enjeux de l'axe diagnostic de compétences et se situe à l'origine à la transition 3e / seconde. Il est conçu pour accompagner les enseignants dans la gestion de cette transition institutionnelle. Il est basé sur une approche anthropologique qui pointe des ruptures entre les programmes scolaires des classes de 3e et de seconde. Ces ruptures sont sources de difficultés pour les élèves et viennent s'ajouter aux difficultés individuelles qu'ils peuvent rencontrer dans leurs apprentissages.

Le logiciel PÉPITE implémenté dans ce cadre propose donc un diagnostic en algèbre à la transition 3e / seconde. Il interprète les réponses des élèves aux exercices du diagnostic et les analyse automatiquement « en appliquant des heuristiques dérivées de la grille d'analyse issue de l'analyse didactique » (Delozanne et al., 2010, p. 914). Il établit ainsi le profil de l'élève que nous expliciterons mieux dans la section 2.2.1 et permet de « regroupe[r] des élèves qui témoignent de cohérences similaires dans leur activité algébrique » (Delozanne et al., 2010, pp. 921-922). Une synthèse des résultats des élèves est ensuite fournie à l'enseignant ainsi qu'une proposition de regroupement des élèves de la classe selon les cohérences relevées par le diagnostic. En s'appuyant sur les travaux de Grugeon (1997), les chercheurs du projet *Pépite* font l'hypothèse que les élèves au sein d'un même groupe peuvent bénéficier des mêmes parcours d'apprentissage.

Les projets *Pépite* et *Lingot* se sont poursuivis dans les années 2010 avec les projets *PépiMep* et *NéoPraéval*[6] visant l'implémentation des diagnostics en algèbre à plusieurs niveaux scolaires sur les plateformes en ligne LABOMEP[7] (de l'association des professeurs de mathématiques Sésamath) et WIMS[8]. Il est également poursuivi dans le travail de thèse de Pilet (2012) qui définit des parcours d'apprentissage différenciés en algèbre.

Le projet *MindMath* prend en compte la méthode et les fondements didactiques développés dans le projet *Pépite*. Ces fondements didactiques sont adaptés et développés notamment à partir de la comparaison entre le domaine algébrique (initialement couvert par le logiciel PÉPITE) et le domaine géométrique (également couvert dans le logiciel MINDMATH). Comme dans le projet *Pépite*, dans cette thèse, nous nous situons à une transition institutionnelle. Nous nous appuyons donc sur le travail

6. Nouveaux outils pour de nouvelles pratiques d'évaluation et d'enseignement des mathématiques.
7. Lien vers la plateforme LABOMEP : `https://labomep.sesamath.net/`.
8. Lien vers la plateforme WIMS : `https://wims.unice.fr/wims/`.

développé pour le projet *Pépite* et en particulier ses fondements didactiques issus des recherches de Grugeon-Allys (1997 ; 2016) que nous expliciterons au fur et à mesure.

Dans la suite de ce chapitre, nous commençons donc à étudier les programmes scolaires afin de pointer des ruptures potentielles entre les cycles qui sont sources de difficultés pour les élèves (cf. section 1.2.3). Ces difficultés s'ajoutent aux difficultés d'apprentissage individuelles des élèves que nous étudierons d'un point de vue plus cognitif dans le chapitre 3.

1.2 Première analyse des programmes scolaires des cycles 1 à 4

Dans cette section, nous proposons une première analyse des programmes scolaires en vigueur à la rentrée 2020. Dans le chapitre 5, nous étudierons plus en profondeur ceux des cycles 3 et 4 qui nous intéressent plus particulièrement pour la conception des parcours d'apprentissage.

1.2.1 Vision globale de l'enseignement de la géométrie

L'enseignement de la géométrie plane de l'école maternelle au lycée est souvent décrit comme fait de ruptures. Nous nous appuyons sur les travaux de Perrin-Glorian et Godin (2014) et Mathé, Barrier, et Perrin-Glorian (2020) ainsi que sur les programmes des cycles 1, 2, 3 et 4 de 2020 pour les expliciter.

À l'école maternelle, une forme géométrique est un objet matériel que l'on peut déplacer, retourner, assembler à d'autres. Les élèves reconnaissent perceptivement les formes géométriques et découvrent leurs premières caractéristiques. Ils s'en servent comme gabarit ou comme pochoir pour dessiner des figures géométriques planes.

> Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : forme, longueur, masse, contenance essentiellement. Ils apprennent progressivement à reconnaître, distinguer des solides puis des formes planes (*Programme du cycle 1*, 2020, p. 22).

La première rupture a lieu à la transition cycle 1 / cycle 2 où les instruments usuels de tracé, de mesure et de vérification des propriétés sont peu à peu introduits. Les instruments de tracé et de report de grandeur permettent de produire les caractéristiques visuelles des figures dont certaines relèvent de propriétés géométriques (angles droits et perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, etc.) et d'autres de propriétés spatiales (emplacement sur la feuille, orientation, etc.). La validation des propriétés des figures géométriques ne s'appuie donc désormais plus sur la simple perception mais sur l'utilisation des instruments comme on le lit dans le programme du cycle 2 :

> — utiliser la règle (non graduée) pour repérer et produire des alignements ;
>
> — repérer et produire des angles droits à l'aide d'un gabarit, d'une équerre [...] ;
>
> — repérer ou trouver le milieu d'un segment, en utilisant une bande de papier avec un bord droit ou la règle graduée ; [...]
>
> — reconnaître si une figure présente un axe de symétrie (à trouver), visuellement et/ou en utilisant du papier calque, des découpages, des pliages (*Programme du cycle 2*, 2020, p. 64).

La deuxième rupture a lieu à la transition cycle 3 / cycle 4 lorsque les élèves sont amenés à passer de la **géométrie physique** des tracés matériels avec des instruments à la **géométrie théorique** des démonstrations. Les figures sont désormais des objets géométriques définis par des propriétés avec une axiomatique plus ou moins explicite. Les propriétés sont énoncées ou codées sur les figures et expriment des relations entre des éléments constitutifs des figures. Faire de la géométrie, c'est déduire de nouvelles propriétés à partir de celles que l'on a déjà. Cette rupture tient en particulier au mode de validation des solutions proposées. Au cycle 3, en particulier à l'école primaire, la perception aidée d'instruments de tracé ou de mesure portant sur des objets matériels ou graphiques suffit la plupart du temps. Tandis qu'au cycle 4, il est nécessaire d'établir un discours logique à partir d'énoncés décrivant des propriétés d'objets théoriques ou de relations entre ces objets.

> Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont essentiellement contrôlés par la perception à une géométrie où le recours à des instruments devient déterminant, pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation s'appuie sur le raisonnement et l'argumentation (*Programme du cycle 3*, 2020, p. 97).
>
> Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 136).

Le logiciel MindMath étant à destination des collégiens, nous nous positionnons au niveau de la deuxième rupture lors de l'introduction d'une « géométrie dont la validation s'appuie sur le raisonnement et l'argumentation » que Mathé et al. (2020) appellent géométrie théorique. Nous nous concentrons donc sur l'entrée dans le raisonnement de la géométrie théorique tel qu'il est décrit dans les programmes du cycle 4 (*Programme du cycle 4*, 2020) et apparaît dans les attendus de fin d'année dès la classe de 5e :

> Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde [9] (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 127).
>
> Compétences travaillées [...] démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion (*Programme du cycle 4*, 2020, pp. 129-130).
>
> Ce que sait faire l'élève [...]. Il mène des raisonnements en utilisant des propriétés des figures, des configurations
>
> — et des symétries (*Attendus de fin d'année de 5e*, 2019, p. 10) ;
>
> — et de la translation (*Attendus de fin d'année de 4e*, 2019, p. 10) ;
>
> — de la rotation et de l'homothétie (*Attendus de fin d'année de 3e*, 2019, p. 8).

Nous en concluons que le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique et en particulier l'utilisation du **raisonnement géométrique déductif** (même non encore entièrement formalisé sous la forme de démonstrations) doivent donc être des objectifs d'apprentissage des parcours que nous proposons dans le logiciel MindMath à destination des élèves de cycle 4. Nous nous demandons alors naturellement : comment amener ces élèves à entrer dans la géométrie théorique ?

Pour cela, nous commençons par étudier brièvement les continuités et discontinuités entre les programmes des cycles 3 et 4 afin de déterminer, dans une première approche, des objets sur lesquels nous pourrions nous appuyer pour amener les élèves à entrer dans le raisonnement de la géométrie théorique.

9. Nous verrons dans la section 3.3.2 que ces trois types de raisonnements relèvent en fait du raisonnement déductif, comme on le lit d'ailleurs dans le document d'accompagnement du cycle 4 relatif au raisonnement : « raisonnement déductif qui (entre autres) s'appuie sur : la déduction [...] la disjonction de cas [...] le raisonnement par l'absurde » (*Raisonner*, 2016, p. 2).

1.2.2 Continuités et discontinuités dans les programmes scolaires des cycles 3 et 4

Après une première lecture rapide des programmes de cycle 3 et de cycle 4 de 2020, nous pouvons déjà pointer des types de problèmes et/ou des démarches de résolution en géométrie plane travaillés dans une institution et plus, moins, ou différemment dans l'autre.

En premier lieu, au cycle 3, nous trouvons beaucoup de tâches de construction, qu'il s'agisse de :

— construire à l'aide d'instruments matériels comme l'équerre (angles droits, droites perpendiculaires), le rapporteur ou le gabarit (pour construire et reporter des angles) ou une association de la règle et de l'équerre (droites parallèles) ;

— reproduire, représenter ou construire des figures simples ou composées de figures simples dans l'environnement papier-crayon ou informatique ;

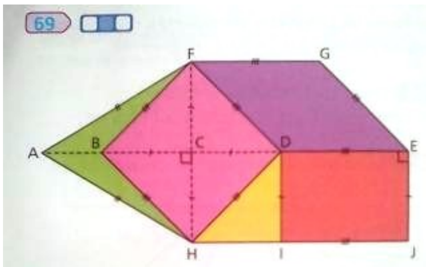
— construire ou compléter l'image d'une figure simple ou composée de figures simples (y compris un point, un segment ou une droite) par une symétrie axiale.

Nous étudierons plus finement les distinctions entre ces types de tâches dans la section 3.2.2.

Ainsi, au cycle 3, « les constructions géométriques ont un rôle essentiel dans les apprentissages. Elles permettent de réinvestir les définitions et les propriétés qui ont été institutionnalisées » (*Espace et géométrie au cycle 3*, 2018, p. 6).

Au contraire, au cycle 4, très peu de tâches de construction sont proposées dans les programmes. La seule mention concerne la construction de figures géométriques à partir d'un « protocole de construction », déjà présent dans les programmes scolaires des cycles 2 et 3 sous le nom de « programme de construction ». Dans les attendus de fin d'année, on trouve cependant quelques tâches de construction, en particulier pour mettre en jeu les transformations géométriques. En 5^{e}, il est également indiqué que l'élève doit réussir à tracer « des triangles et des parallélogrammes donnés sous forme de figure à main levée ou d'un texte » (*Attendus de fin d'année de 5^{e}*, 2019, p. 10) ou tracer « en vraie grandeur » une figure donnée avant d'en expliquer le protocole de construction.

Cela ne signifie pas que les élèves ne construisent plus de figures en 4e et en 3e. Il est toujours régulièrement demandé dans les manuels scolaires de « construire (en vraie grandeur) » la figure décrite par un énoncé avant de travailler sur ses propriétés (comme sur image 1.1, par exemple). Ce n'est cependant plus un attendu du programme.



1. Observer puis reproduire la figure suivante en prenant AB = 2 cm et BC = 4 cm.
2. Indiquer, en justifiant, la nature précise des quadrilatères BHDF, FDEG et DIJE.
3. Communiquer Que peut-on affirmer pour les droites (FE) et (DG) ? pour les longueurs DJ et IE ? Justifier en citant des propriétés du cours.

13 Exercice guidé DNB

L'unité de longueur est le centimètre.
ABCD est un carré tel que AB = 4.
Le point M est situé dans le carré ABCD et vérifie AM = 2,4 et DM = 3,2.
La droite (AM) coupe la demi-droite [DC) au point I.
1. Faire une figure en vraie grandeur.
2. Montrer que le triangle AMD est rectangle en M.
3. Calculer au degré près la mesure de l'angle $\widehat{DAM}$.
4. Dans le triangle ADI rectangle en D, exprimer tan($\widehat{DAI}$).
En déduire une valeur approchée au mm près de la longueur DI.

Image 1.1 – À gauche : Deltamaths, cycle 4, exercice conseillé en 4e (2017, p. 375). À droite : Transmath, 3e (2012, p. 205)

Nous repérons des continuités entre les programmes du cycle 3 et du cycle 4 concernant les objets de la géométrie étudiés : points, droites, cercles, triangles, quadrilatères. Notons cependant que les polygones à plus de quatre côtés sont complètement absents des programmes du cycle 4.

En revanche, ces mêmes objets n'ont pas le même statut selon qu'on se place dans le cadre de la géométrie théorique ou de la géométrie physique comme nous le verrons dans la section 1.2.3 avant d'y revenir plus en détails dans la section 3.1.

De plus, comme nous l'avons vu en parlant des ruptures dans l'enseignement de la géométrie, nous repérons des discontinuités au niveau des types de problèmes, des démarches et des raisonnements mis en jeu. Ainsi, au cycle 4, des propriétés auparavant sous-jacentes dans les constructions doivent être explicitées. Par exemple, au cycle 4, les élèves doivent « faire le lien entre les cas d'égalité des triangles et la construction d'un triangle à partir de la donnée des longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 136). De même, la médiatrice, abordée en lien avec la symétrie axiale au cycle 3, fait l'objet d'une définition formalisée au cycle 4. La propriété d'équidistance et sa réciproque sont également explicitées, cette dernière étant « utilisée pour une construction de la médiatrice à l'aide du compas » (*Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer*, 2016, p. 3).

Enfin, plus encore qu'au cycle 3, les élèves apprennent à mobiliser les propriétés « des figures, des configurations et des transformations » pour « déterminer des grandeurs géométriques » et « mener des raisonnements » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 137). Un nouveau type de problèmes apparaît alors au cycle 4 : démontrer (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 137). Ce type de problème est très présent dans les programmes scolaires en géométrie plane à partir de la 5^{e} puisqu'il n'y a qu'un seul attendu de fin de cycle très général [10] : « utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 136).

Ainsi, les constructions sont très présentes au cycle 3 avant d'être majoritairement remplacées par des exercices de démonstration au cycle 4. Nous nous demandons donc : est-il possible de s'appuyer sur ces constructions pour amener les élèves à entrer dans la géométrie théorique et en particulier à entrer dans la démarche de raisonnement déductif à la transition cycle 3 / cycle 4 ?

1.2.3 Une double rupture épistémologique entre la géométrie physique et la géométrie théorique

Parmi les travaux didactiques qui fondent le logiciel PÉPITE en algèbre, Grugeon (1997) cite les travaux de Vergnaud, Cortes, et Favre-Artigue (1988) pour qui il y a une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre « aussi bien dans l'analyse des caractéristiques de la résolution de problème (opposition entre la démarche arithmétique liée au contexte et le détour algébrique) que dans l'analyse des objets et des techniques intervenant dans la résolution : opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres), des modes de contrôle dans la transformation des écritures » (Grugeon, 1997, p. 7). Kieran poursuit ce travail et présente la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre « en termes de fausses continuités et discontinuités entre l'arithmétique et l'algèbre » (Grugeon, 1997, p. 7). Ces fausses continuités résident dans le partage des mêmes symboles et des mêmes signes, alors qu'ils doivent être interprétés différemment, et dans la présence de lettres qui n'ont plus la même signification selon le contexte. Les discontinuités proviennent, elles, de la mise en œuvre de nouvelles démarches de résolution et de nouveaux objets (en algèbre, les équations, par exemple).

Nous faisons l'hypothèse que des types de fausses continuités et de discontinuités du même ordre apparaissent également en géométrie entre les programmes scolaires des cycles 3 et 4. Ainsi, comme nous l'avons vu, les objets et la terminologie travaillés sont les mêmes d'un cycle à l'autre (cercles, triangles, quadrilatères particuliers, etc.). Pourtant, leur statut et leur mode d'appréhension sont différents. Au cycle 3, ils sont essentiellement appréhendés par la perception aidée d'instruments de tracé ou de

10. Il y a un autre attendu de fin de cycle concernant la géométrie dans l'espace et les repères : « représenter l'espace » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 136).

mesure alors que c'est l'énoncé, le texte décrivant les figures géométriques qui permet de les appréhender au cycle 4. Nous reviendrons sur ces différentes appréhensions dans la section 3.1.1. Les modes de validation sont également différents comme nous l'avons vu dans la section 1.2.1. De plus, un nouveau mode de validation doit être mis en œuvre : le raisonnement déductif. Celui-ci présente des différences importantes avec l'argumentation qui est le plus souvent mise en œuvre à l'école primaire. Nous reviendrons en détail sur ces types de raisonnement dans la section 3.3. Ainsi, selon Mathé et al., dans la géométrie théorique, pour valider la solution trouvée, on utilise en général les réciproques des théorèmes utilisés, alors que dans la géométrie physique, on peut se contenter de la simple perception ou de l'expérience car les connaissances peuvent fonctionner simplement à un niveau opératoire sans avoir besoin d'être verbalisées (Mathé et al., 2020, chapitre 3).

Houdement et Kuzniak (2006) parlent alors de paradigmes différents. Un paradigme, au sens de Kuhn (1962) est défini à la fois comme un « ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique » et un moyen de « caractériser les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global » (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 178).

Houdement et Kuzniak font alors l'hypothèse que « dans l'enseignement, des paradigmes différents sont englobés sous le terme unique de géométrie. Ces différents paradigmes rendent compte de la rupture souvent "dénoncée" dans l'enseignement français entre les différents cycles » (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 178) et que nous venons de mettre en avant.

Houdement et Kuzniak définissent ainsi trois **paradigmes géométriques** dont certains correspondent aux finalités pratiques et théoriques de Mathé et al. (2020). Chacun de ces paradigmes laisse une place plus ou moins grande à l'intuition, à l'expérience et au raisonnement déductif.

— Paradigme GI (ou G1) ou « géométrie naturelle » : dans ce paradigme, l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif « s'exercent sur des objets matériels » (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 180). Les résultats sont validés en s'appuyant sur la réalité, la perception ou l'expérience matérielle (un pliage, un découpage, etc.). On ne démontre donc pas ce qui est ou paraît « évident ».

— Paradigme GII (ou G2) ou « géométrie axiomatique naturelle » : dans ce paradigme, l'intuition et l'expérience gardent une place importante mais c'est le raisonnement déductif qui prime pour valider les résultats. Le système hypothético-déductif sur lequel il s'appuie n'est en revanche pas forcément complet, il peut s'agir « d'îlots déductifs ». De plus, les axiomes et la syntaxe restent appuyés sur la réalité.

— Paradigme GIII (ou G3) ou « géométrie axiomatique formaliste » : dans ce paradigme, l'intuition et l'expérience sont au plus des heuristiques mais l'axiomatisation du système hypothético-déductif est cette fois complète, celle-ci peut d'ailleurs n'avoir aucun lien avec la réalité, il est donc nécessaire de démontrer tous les résultats.

Le paradigme GI correspond à la finalité pratique de la géométrie physique de Mathé et al.. Le paradigme GII correspond, lui, à la finalité théorique de la géométrie théorique. Nous continuerons d'employer les deux terminologies selon les chercheurs que nous citons.

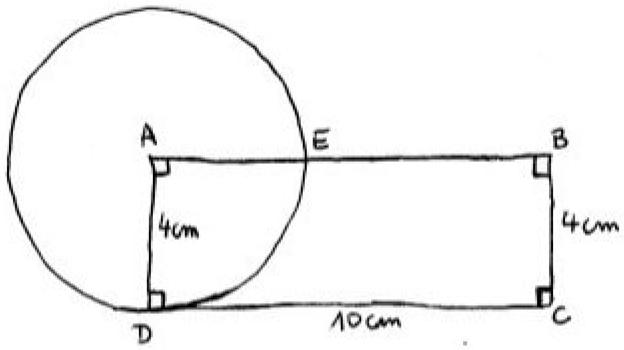
Ainsi, les paradigmes GI et GII interviennent dans la résolution d'exercices de géométrie à la transition entre le cycle 3 et le cycle 4. C'est une source de confusion pour les élèves comme les enseignants. D'autant plus que les paradigmes ne s'excluent pas mutuellement et que l'un ne vient pas remplacer l'autre, de la même manière que l'introduction de l'algèbre n'exclut pas la possibilité de retrouver des problèmes du domaine arithmétique plus tard dans les programmes. En réalité, le géomètre aguerri sait, selon le problème à résoudre, s'il doit se placer dans l'un ou l'autre des paradigmes. Ainsi, pour construire un potager carré dans son jardin, il pourra se contenter de vérifications visuelles en se plaçant dans le paradigme GI, alors qu'il se placera dans le paradigme GII pour résoudre cet exercice proposé lors de l'évaluation à l'entrée en 6e de 1998 (cf. image 1.2).

Comme le montrent Houdement et Kuzniak (2006) qui reprennent cet exemple, les élèves de 6e qui ont résolu cet exercice ne se sont, eux, pas tous placés dans le paradigme GII. C'est même 40% des élèves qui mesurent directement sur le dessin pour trouver la réponse (les mesures qu'ils trouvent ne sont d'ailleurs pas cohérentes avec celles déjà indiquées sur le schéma).

Même si les élèves de 6e sont encore nombreux à se placer dans le paradigme GI pour résoudre cet exercice, pour des élèves d'un niveau supérieur, il est relativement clair que le paradigme attendu ici est GII puisque plusieurs indices montrent qu'on ne peut pas se fier au dessin de la figure en lui-même : l'énoncé parle de « dessin à main levée », les traits ne sont pas tout à fait droits, le cercle n'est pas parfaitement tracé, l'échelle n'est pas respectée, etc. Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, Houdement et Kuzniak présentent un extrait de brevet des collèges donné dans

<u>Exercice 14</u>

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Trouve la longueur du segment [EB]. ....

Explique ta réponse : ....

....

....

Image 1.2 – Extrait de l'évaluation à l'entrée en 6e de 1998

l'académie de Nice en 1991 (cf. image 1.3).

Construire un carré ABCD de côté 5 cm.
1) Calculer BD.
2) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm.
La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ?

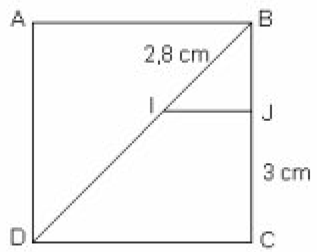


Image 1.3 – Extrait du brevet des collèges de l'académie de Nice en 1991 (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 183)

Dans cet exercice, l'élève doit d'abord construire le carré. Il se place donc dans une perspective d'utilisation des instruments de tracé. La question 1) lui demande ensuite de « calculer » la mesure d'une longueur. Il passe donc dans le paradigme GII en s'appuyant sur la théorie mathématique et ici en particulier le théorème de Pythagore. En revanche, le début de la question 2) l'incite à revenir au tracé de la figure en plaçant les points I et J à l'aide d'une règle graduée. Houdement et

Kuzniak se demandent donc « quelle attitude développera-t-il alors pour répondre à la question du parallélisme ? » (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 184). Pour répondre à cette question, on pourrait supposer qu'un géomètre aguerri sait qu'il faut de nouveau retourner à la théorie et invoquer la réciproque du théorème de Thalès. Or, pour beaucoup d'élèves ce n'est pas évident. Et quand bien même l'élève applique la réciproque du théorème de Thalès, il découvre que les arrondis des rapports $\frac{BI}{BD}$ et $\frac{BJ}{BC}$ sont égaux, ce qui peut l'amener à conclure que : « les droites (IJ) et (DC) sont parallèles si on prend l'arrondi, mais elles ne sont pas parallèles si on prend la valeur exacte » (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 184).

En résumé, les paradigmes géométriques développés par Houdement et Kuzniak définissent des « domaines de rationalité propres à chaque tâche géométrique » et permettent de préciser « celui dans lequel on accepte de résoudre le problème et lequel on retient pour le valider » (Houdement, 2006, p. 6).

Ces éléments nous amènent à parler également d'une double rupture épistémologique entre la géométrie physique et la géométrie théorique :

— une rupture concernant les objets géométriques (statut, mode d'appréhension) ;

— une rupture concernant les raisonnements géométriques (usage des propriétés, forme du raisonnement, mode de validation).

Dans le chapitre 3, nous analyserons plus précisément cette double rupture en étudiant les aspects épistémologiques liés aux objets et aux raisonnements géométriques.

1.2.4 Difficultés des élèves de cycle 4 en géométrie

Dans cette section, nous faisons l'hypothèse que la double rupture dans l'enseignement de la géométrie entraîne des difficultés chez les élèves qui perdurent dans les apprentissages futurs. Celles-ci sont repérées depuis longtemps, en France mais aussi à l'étranger et nous en avons déjà vu certaines.

Dans cette section, nous nous intéressons donc en particulier aux résultats des élèves à la fin du collège ou au lycée pour nous éloigner des difficultés liées spécifiquement au moment de transition entre la géométrie physique et la géométrie théorique.

La note d'information 20.34 publiée en septembre 2020 par la Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (DEPP) suite aux évaluations CEDRE qui se sont déroulées en 2019 montre ainsi que 32,8% des élèves français de 3^{e} ne savent pas mener de raisonnement déductif à un pas. 28,3% des élèves de 3^{e} savent « mettre en œuvre certains théorèmes du programme dans des cas simples »

(DEPP, 2020, p. 3). C'est donc 61,1% des élèves de 3e en France qui ne savent pas mener un raisonnement déductif à plusieurs pas (ou à un seul pas dans des cas complexes).

À l'étranger, Cheng et Lin (2009) s'appuient sur des sondages menés dans plusieurs pays pour montrer qu'environ deux tiers des élèves de lycée ne savent pas construire une « formal geometry proof » [11] (Cheng & Lin, 2009, p. 124).

De façon un peu plus spécifique, dans le cadre de travaux en didactique des mathématiques, Celi étudie les résolutions d'exercices de géométrie de quatre-vingt-cinq élèves italiens et français de 16 ans (en seconde en France). Elle propose l'exercice présenté à la figure 1.4.

Soit ABCD un trapèze avec (AD) parallèle à (BC) et AD = 2BC. Les diagonales se coupent en H et les droites (AB) et (CD) en O.

Prouve que B est le milieu de [OA].

La droite (OH) coupe [BC] en L et le segment [AD] en M. Montre les trois propriétés suivantes :

M est le milieu de [AD] ;

L est le milieu de [BC],

L est le milieu de [OM] ;

Prouve que H est le centre de gravité du triangle BCM. .

Compare les aires des triangles AOD et BCM.

Image 1.4 – Un exercice de preuve (Celi, 2005, p. 390)

Elle constate alors que « l'analyse de la figure demeure une difficulté aussi bien pour les élèves italiens que pour les élèves français [...] les élèves montrent clairement leur difficulté à exploiter des éléments de la figure qui conviennent pour accomplir les diverses tâches » (Celi, 2005, p. 394). Un peu plus d'un tiers des élèves tracent un cas particulier du trapèze ou un cas général auquel ils attribuent pourtant des propriétés particulières. Pour un autre exercice, c'est plus de 10% des élèves qui s'appuient sur la perception pour valider leur réponse à l'exercice donné.

Ainsi, des difficultés qui apparaissent à la transition cycle 3 / cycle 4 ne disparaissent pas, pour beaucoup d'élèves, à la fin du cycle 4.

Parmi ces difficultés, on peut relever les travaux de Grenier (1988) qui montre par exemple que pour construire l'image d'un segment par une symétrie axiale, les élèves de 6e qu'elle observe utilisent différentes stratégies en fonction de la position du segment par rapport à l'axe (Grenier, 1988, p. 45). Ils s'appuient donc sur les différents dessins du segment sans considérer le caractère générique de la situation.

11. Traduction personnelle : « preuve géométrique formelle ».

En ce qui concerne la question de la preuve, Egret et Duval (1989) mènent une expérimentation en 1987-1988 avec 27 élèves de 4e d'un niveau assez homogène (pas d'élèves en réelle difficulté scolaire). L'exercice présenté à la figure 1.5 est proposé à cette classe.

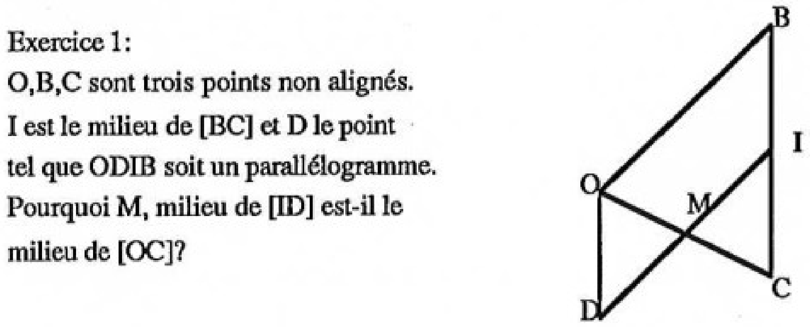


Image 1.5 – Pourquoi M, milieu de $[ID]$, est-il le milieu de $[OC]$? (Egret & Duval, 1989, p. 42)

Les élèves sont unanimement d'accord pour remarquer que la figure $OICD$ proposée dans l'énoncé est un parallélogramme. Deux formulations d'élèves sont ensuite sélectionnées et montrées à tous : « $OICD$ est un parallélogramme parce que ses diagonales $[OC]$ et $[ID]$ se coupent en leur milieu » et « Si M est le milieu de $[ID]$ et si $OICD$ est un parallélogramme alors M est le milieu de $[OC]$ parce que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu » (Egret & Duval, 1989, p. 43). Or, les élèves ne voient pas la différence entre ces deux énoncés : ils ne retiennent « que la présence, dans le même ordre, des propositions et d'expressions semblables : "$OICD$ est un parallélogramme", "parce que... diagonales... se coupent en leur milieu" » (Egret & Duval, 1989, p. 43). Les expérimentateurs proposent alors de représenter ces phrases sous la forme d'étiquettes reliées par des flèches. La moitié des élèves y arrive pour la première phrase, aucun pour la deuxième. De plus, à la suite de cet exercice en classe entière, seuls deux élèves sont en mesure d'écrire une démonstration qui laisse voir sa structure.

Les élèves ont donc des difficultés dans l'appréhension des figures et dans la mise en relation de cette appréhension avec le raisonnement à mettre en œuvre pour résoudre les exercices, en particulier les exercices de preuve, qui leur sont proposés au cycle 4. Ces difficultés perdurent au-delà du collège. Ainsi, comme Grugeon en algèbre, nous faisons l'hypothèse de travail [12] suivante :

12. C'est-à-dire une hypothèse que nous ne chercherons pas forcément à vérifier dans ce travail de recherche mais qui fonde notre hypothèse de recherche (cf. section 2.4).

Hypothèse de travail 1. *La double rupture épistémologique entre la géométrie physique et la géométrie théorique et une prise en compte insuffisante par l'institution de cette transition entraînent des difficultés chez les élèves à l'entrée dans la géométrie théorique au cycle 4.*

Il existe donc, dans la transition entre le cycle 3 et le cycle 4, puis au cycle 4, des **besoins d'apprentissage des élèves** qui restent ignorés par l'institution. Nous caractérisons ces besoins d'apprentissage pour les prendre en compte dans les parcours d'apprentissage implémentés dans l'EIAH MindMath. Nous définirons donc plus précisément la notion de besoins d'apprentissage dans la section 2.2.1 avant de les déterminer *a priori* dans le chapitre 3 et de mettre en lumière ceux qui sont ignorés par l'institution à partir d'une analyse des programmes et manuels scolaires actuels dans le chapitre 5.

1.3 Gestion de la double rupture entre géométrie théorique et géométrie physique

Dans cette section, nous faisons une synthèse de travaux ayant déjà proposé des pistes pour accompagner les élèves à gérer cette double rupture entre la géométrie physique et la géométrie théorique dans la transition cycle 3 / cycle 4.

1.3.1 Des travaux en didactique des mathématiques à la transition entre géométrie physique et théorique

La question de la transition entre la géométrie physique et la géométrie théorique étant un grand enjeu du collège, elle a été beaucoup étudiée en didactique des mathématiques. Nous en recensons ici quelques-uns sans nous donner un but d'exhaustivité.

Dans son livre *Enseigner la géométrie au collège : un chemin pour la découverte progressive par l'élève* publié en 1995 qui se place dans ce champ de recherche, Cousin-Fauconnet propose une nouvelle axiomatique de la géométrie au collège donnant une place fondamentale à la symétrie orthogonale. Celle-ci permet d'engendrer peu à peu toutes les isométries du plan sur lesquelles Cousin-Fauconnet s'appuie en particulier.

> La pratique des constructions relatives aux isométries et très formatrice pour les élèves : cela développe leurs facultés d'analyse et de méthode, et leur donne l'occasion de saisir l'intérêt des propriétés de chacune d'elles,

> car ces propriétés permettent de simplifier les tracés et d'économiser de l'énergie ou du temps, quand on s'y prend bien. [...] Enfin, bien que les démonstrations les plus faciles à faire faire aux élèves au début soient celles qui reposent sur des égalités de longueurs ou d'angles, la familiarisation acquise avec les isométries a un grand intérêt. En effet, les élèves ont naturellement une perception globale des figures, ce qui leur permet de sentir certains invariants (impression traduite par : « c'est pareil » ou « c'est symétrique »). Il est fructueux de les entraîner à analyser leurs impressions et à reconnaître précisément une situation de symétrie ou de translation, car on en déduit alors facilement de nombreuses propriétés (Cousin-Fauconnet, 1995, p. 113).

Dans une autre perspective, Tanguay et Geeraerts veulent redonner une place à la mesure en introduisant un nouveau paradigme entre la géométrie physique et la géométrie théorique : le paradigme du physicien-géomètre. Selon ces chercheurs, en mesurant, les élèves se rendent compte que toutes les mesures ne tombent pas juste, que les graduations des instruments de mesure sont trop grossières, etc. Cela amène l'idée que « la seule observation est déficiente, que notre perception est limitée, que le trait de crayon, par exemple, est source d'imprécision alors même qu'il devrait être en théorie d'épaisseur nulle dans l'objet idéal dont les caractéristiques sont à l'étude » (Tanguay & Geeraerts, 2012, p. 11). Nous verrons dans le chapitre 3 que dans le cadre de notre travail de recherche, nous faisons le choix contraire en concevant des exercices mettant principalement en jeu des grandeurs (en particulier les longueurs de côté des figures) sans mesures.

Nous remarquons que beaucoup de travaux se placent dans le cadre de la géométrie dynamique. Pour De Villiers (2007), par exemple, l'environnement de géométrie dynamique permet de travailler d'autres fonctions de la preuve que celle de vérification, en particulier les fonctions explicative, de découverte ou de généralisation. De plus, comme Cousin-Fauconnet, De Villiers s'appuie sur les symétries pour introduire les propriétés des figures géométriques usuelles. Ainsi, la construction d'un triangle ABC isocèle en A par la symétrie d'axe la hauteur issue de A dans un environnement de géométrie dynamique permet non seulement de se convaincre que les côtés AB et AC ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont deux à deux égaux en déplaçant les points de la figure et en constatant l'invariance des égalités, mais permet aussi de comprendre rapidement pourquoi ce résultat est vrai (De Villiers, 2007, p. 156).

Dans sa thèse, Gousseau-Coutat (2006) travaille également notamment sur la notion de déplacement pour mettre en avant certaines propriétés des figures représentées à l'écran. Elle construit une ingénierie didactique visant à introduire la notion de propriétés géométriques et en particulier le lien de subordination entre la conclusion d'une propriété et sa ou ses prémisse(s). Pour cela, elle s'appuie sur la notion de déplacement et le paradigme des constructions molles que nous étudierons, avec d'autres spécificités de la géométrie dynamique, dans le chapitre 6.

De manière générale, beaucoup de travaux à la transition entre les cycles 3 et 4 s'appuient sur les constructions de figures. En effet, selon Fujita, Jones, et Kunimune (2010), « *geometrical constructions (wether with paper and pencil or with appropriate software) are widely considered to be a suitable vehicle for secondary school students to gain experience of proof and proving* » [13] (Fujita et al., 2010, p. 9). C'est aussi ce qu'on retrouve dans le document d'accompagnement en géométrie associé aux programmes scolaires français de 2008 : « les problèmes de construction jouent un rôle important dans la prise de conscience de la nécessité d'une phase d'analyse et dans l'accompagnement des apprentissages sur le raisonnement déductif. [...] Ces activités de construction doivent être pratiquées le plus tôt possible, dès la 6ᵉ » (*Géométrie au collège*, 2007, p. 9).

C'est le cas en particulier des travaux de Perrin-Glorian et Godin (2018) autour de la géométrie des tracés que nous étudierons dans la section suivante mais nous abordons d'abord certains autres travaux dans cette section.

Dans sa thèse, Mithalal (2010) propose par exemple de s'appuyer sur la construction de solides en trois dimensions dans un contexte de géométrie dynamique pour travailler en particulier un regard plus géométrique sur les figures (cf. section 3.1.1). Le fait de construire un solide rend inopérantes beaucoup de stratégies visuelles ou s'appuyant exclusivement sur les instruments utilisées pour construire des figures en deux dimensions. Le contexte de la géométrie dynamique permet cependant de faciliter la visualisation des solides car il est possible de les observer selon plusieurs angles plus aisément que dans l'environnement papier-crayon. Nous reparlerons de ce travail en lien avec les notions de déconstructions instrumentale et dimensionnelle dans la section 3.1.2.

De nombreux chercheurs font aussi un lien direct entre la construction de figures et la démonstration. Pour Coutat, Laborde, et Richard, « une étape de construction est structurellement identique à un pas de raisonnement déductif » (Coutat et al., 2016, p. 204). De même, Fujita et al. (2010) parlent d'une unité cognitive entre la

13. Traduction personnelle : « les constructions géométriques (que ce soit avec du papier et un crayon ou avec un logiciel approprié) sont largement considérées comme un moyen approprié pour les élèves de l'enseignement secondaire d'acquérir de l'expérience en matière de preuve ».

production de conjectures dans le cadre d'une tâche de construction et l'élaboration de preuves. Cependant, cette unité cognitive n'est pas automatique et dépend de la tâche de construction en jeu. Coutat et al. en particulier construisent deux ingénieries à destination d'élèves de 12 à 14 ans en France et au Québec qui introduisent différentes caractérisations des parallélogrammes et permettent de travailler sur la notion de nécessité épistémique qui lie les prémisses et la conclusion d'une propriété.

1.3.2 Géométrie des tracés

Dans cette section, nous nous intéressons aux travaux de Perrin-Glorian et Godin (2014, 2018) qui fondent en partie les travaux de Mathé et al. (2020) que nous avons déjà évoqués. Perrin-Glorian et Godin proposent une approche cohérente de la géométrie de l'école primaire au collège qui s'appuie sur ce qu'ils appellent « la géométrie des tracés » pour introduire peu à peu l'usage des propriétés géométriques :

> C'est [la géométrie des tracés] une modélisation de l'espace par des tracés avec des instruments de tracé à l'exclusion des instruments de mesure des longueurs [...]. Elle a une certaine parenté avec G1 mais s'en distingue par d'autres aspects [...]. Dans cette géométrie, les problèmes et les moyens de validation relèvent de l'espace sensible. Le raisonnement se fait à partir de ce corps de savoirs tenus pour vrais. Cependant, il ne s'agit pas d'accepter tout ce qu'on constate avec les instruments mais de constituer un corps de savoirs valides appuyé sur l'expérience et la vérification contrôlée avec des instruments. La plupart des savoirs qui relèvent de cette géométrie s'énoncent de la même manière que des savoirs théoriques de G2 (Perrin-Glorian & Godin, 2018, pp. 5-6).

On se trouve dans le cadre de la géométrie des tracés lorsque c'est la figure matérielle qui est l'objet du travail. La validation se fait alors par les instruments de tracé mais ceux-ci contrôlent des caractéristiques graphiques qui correspondent à des propriétés géométriques.

Perrin-Glorian et Godin introduisent donc également la notion « d'espace graphique des représentations ». Il s'agit d'une partie de l'espace sensible dans lequel sont représentés des objets du monde sensible ou des objets géométriques sous forme de schémas ou de figures en deux dimensions, cet espace comprend également les instruments de tracé.

> L'espace graphique est une interface entre l'espace sensible et l'espace géométrique dans le cas d'un problème posé dans le monde sensible [...]

> La théorie de référence peut être une théorie physique ou une théorie axiomatique de l'espace. Il faut, de plus, des connaissances spécifiques au registre graphique, par exemple sur le mode d'action des instruments ou les codes de représentation, comme il en faut dans le monde matériel (Perrin-Glorian & Godin, 2018, p. 9).

Perrin-Glorian et Godin utilisent donc les notions de géométrie des tracés et d'espace graphique pour proposer une approche de la rupture entre la géométrie physique et la géométrie théorique qui prend appui sur des figures matérielles pour construire les concepts de la géométrie théorique. Cette approche est basée sur la reproduction et la restauration de figures (nous définirons plus précisément ces termes dans la section 3.2.2) avec des instruments de tracé.

> Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation des instruments en géométrie physique peut jouer un rôle de transition vers la géométrie théorique, à condition que ceux-ci soient prioritairement utilisés pour vérifier ou reproduire les propriétés qu'ils portent pour produire des figures justes plutôt que des figures précises. C'est ce que nous appelons un usage géométrique des instruments parce qu'il respecte des règles qui réfèrent implicitement à des axiomes, des définitions ou des théorèmes de géométrie (Mathé et al., 2020, p. 55).

Ainsi, les différents travaux que nous venons de passer en revue nous permettent de répondre positivement à la question que nous nous posions dans la section 1.2.2 : est-il possible de s'appuyer sur ces constructions pour amener les élèves à entrer dans la géométrie théorique et en particulier à entrer dans la démarche de raisonnement déductif à la transition cycle 3 / cycle 4 ?

Dans la section suivante, nous donnons un autre argument pour fonder cette hypothèse que nous explicitons dans la section 1.3.4.

1.3.3 Le raisonnement déductif dans des situations de décision

Un des grands enjeux de la géométrie théorique est l'introduction du raisonnement déductif et, d'une manière plus générale, l'introduction d'une certaine démarche de preuve systématique des énoncés mathématiques. Or, les enseignants qui cherchent à introduire la démarche de preuve auprès de leurs élèves rencontrent souvent des difficultés, notamment parce que les élèves ne voient pas pourquoi il faudrait démontrer ce qui est évident ou vérifiable empiriquement comme ils le faisaient à l'école primaire.

Pour répondre à cette problématique, il nous semble intéressant de nous demander comment créer des situations en classe mettant en œuvre les raisons qui poussent les mathématiciens à prouver dans leur activité mathématique quotidienne. Confrontés à ces situations, les élèves s'engageront peut-être plus naturellement dans une démarche de validation et de preuve.

Ainsi, pour les mathématiciens, la preuve peut avoir pour objectif principal la validation mathématique d'un résultat ou bien son explication (elle peut aussi avoir ces deux objectifs). Dans les classes, un argument souvent avancé par les enseignants du secondaire pour justifier la nécessité de prouver est celui de la conviction de l'autre (voire de soi-même). Or, selon Hanna (1995), pour les élèves qui apprennent des résultats qu'ils savent connus par l'enseignant (et plus généralement par la communauté mathématique), la preuve a surtout pour but d'éclairer, de permettre de comprendre « pourquoi » le résultat est vrai. Bien sûr, une même preuve peut à la fois permettre de (se) convaincre et d'éclairer.

Nous cherchons donc à identifier des situations qui amèneraient l'élève à comprendre la nécessité de s'engager dans une démarche de raisonnement géométrique, non seulement pour valider son résultat mais aussi pour l'élaborer. Or, Balacheff (1987) identifie deux types de situations qui appellent un travail sur la validation voire sur la production de preuves :

- les situations de validation au sens de Brousseau (1977) dont l'objectif est de produire une preuve d'une assertion mathématique ;
- les situations de décision au sens de Balacheff (1987) qui demandent la mobilisation de moyens de décision et donc de validation sans que la production explicite de la preuve soit exigée. Il s'agit de produire une proposition vraie mais pas forcément sa justification. La preuve sous-jacente est alors un outil au sens de Douady (1986).

Nous nous positionnons au début du cycle 4, en 5^{e}. La démonstration et le formalisme associé étant classiquement introduits en 4^{e}, nous n'attendons pas des élèves la rédaction d'une preuve déductive formelle (qui n'est pas non plus un attendu des programmes du cycle 4) mais plutôt l'appui sur les propriétés géométriques des figures et la mobilisation d'une forme de raisonnement géométrique que nous développons dans la section 3.3.3 pour prendre une décision.

Or, comme nous l'avons vu, les problèmes de construction sont très présents au cycle 3, ce sont donc des types de problèmes plutôt connus des élèves à l'entrée au cycle 4. De plus, nous avons vu que d'autres travaux en didactique des mathématiques concernant la transition entre géométries physique et théorique s'appuient également sur la construction de figures planes ou de solides géométriques. Nous faisons donc l'hypothèse que les constructions de figures constituent de « bonnes » situations de décision mettant en jeu le raisonnement géométrique attendu et nous nous demandons quelles conditions didactiques doivent respecter ces constructions. Nous répondrons à cette question dans le chapitre 3.

1.3.4 Rôles des constructions de figures

Dans cette section, nous résumons certains des intérêts des problèmes de construction et formulons notre deuxième principale hypothèse de travail.

La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques menée par Kahane dans les années 1990 détermine deux raisons principales d'enseigner la géométrie (Kahane, 2000, p. 2) :

- une raison liée à la formation du citoyen avec l'apprentissage du raisonnement et de la vision dans l'espace, mais aussi parce que la géométrie intervient dans les domaines culturels et esthétiques ;
- une raison liée à la formation scientifique, la géométrie étant très présente dans les autres sciences.

De la même façon, nous pouvons déterminer des sources de signification de la construction de figures géométriques à la fois intra et extra mathématiques.

1. Sources de signification extra-mathémathiques, qu'elles se réalisent ou non dans le monde physique :
   - modélisation d'objets du monde physique (par exemple les terrains pour Clairaut qui explique dans ses *Éléments de géométrie* que savoir construire une figure égale ou semblable à une figure donnée (notamment sur une feuille de papier) rend plus aisée la mesure de terrains inaccessibles à cause du relief, d'un lac ou parce qu'ils sont tout simplement trop grands pour qu'il soit simple de travailler dessus) ;
   - réalisations techniques particulières (en aménagement de paysages, architecture, astronomie, navigation, pour la « construction de cadrans solaires et la graduation d'instruments d'astronomie de haute précision » (Bouhineau, 1997, p. 27), etc.).

2. Sources de signification intra-mathématiques :
   — heuristique d'une preuve (nous aborderons ce point plus en détails dans la section 3.1.4) ;
   — modélisation géométrique de situations mathématiques ;
   — résolutions graphiques de problèmes mathématiques.
3. Sources de signification didactiques :
   — changement du regard sur les figures et l'utilisation des instruments (Perrin-Glorian & Godin, 2018) (cf. section 1.3.2) ;
   — introduction du raisonnement géométrique déductif (cf. section 1.3.1 et toute la suite de cette thèse).

.

Dans la suite de notre travail, nous faisons donc le choix de nous situer dans la continuité des travaux de Perrin-Glorian et Godin (2018), en nous situant au niveau du collège et en passant de la reproduction de figures à la construction de figures à partir d'énoncés et/ou de schémas codés (nous caractériserons plus finement les différences entre ces types de problèmes dans la section 3.2.2). Nous faisons donc l'hypothèse de travail suivante :

Hypothèse de travail 2. *S'appuyer sur des tâches de construction à partir d'énoncés et/ou de schémas codés peut faciliter l'entrée et le développement du raisonnement déductif à la transition cycle 3 / cycle 4.*

Pour que ces tâches favorisent effectivement l'entrée dans la géométrie théorique à la transition cycle 3 / cycle 4, nous étudierons plus précisément dans le chapitre 3 ce qui est en jeu dans l'activité de construction de figures pour pouvoir dégager des aspects épistémologiques sur lesquels nous nous appuierons pour les concevoir. De plus, dans la section 3.5, en lien avec les travaux de Perrin-Glorian et Godin, nous étudierons plus précisément les variables didactiques mises en jeu dans les tâches de construction.

1.4 Objectifs de la thèse

L'objectif principal de ce travail de thèse est donc de construire des parcours d'apprentissage qui prennent en compte les connaissances et difficultés des élèves pour les faire entrer dans la géométrie théorique et en particulier les faire entrer dans une démarche de raisonnement déductif (dans une certaine mesure que nous expliciterons dans la section 3.3.3). Pour cela, nous avons vu dans la section 1.3 et en particulier avec l'hypothèse 2 que nous nous appuyons sur des tâches de construction de figures planes que nous allons donc étudier dans la suite de cette thèse en limitant le domaine à celui de la géométrie plane des triangles et des quadrilatères.

Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.2, nous nous situons dans la continuité du travail de Grugeon-Allys (1997 ; 2016) et du logiciel PÉPITE en algèbre pour fonder l'EIAH MINDMATH et les parcours d'apprentissage en géométrie. En particulier, nous nous appuyons sur ses fondements didactiques et nous adaptons la méthode mise en œuvre dans la conception de cet environnement. Nous expliciterons ainsi le cadre théorique que nous construisons et la méthode générale de la thèse dans le chapitre 2.

Nous commencerons ensuite par établir des aspects épistémologiques des figures planes, des constructions et du raisonnement géométrique déductif (cf. chapitre 3) pour fonder un modèle de référence relatif aux figures de la géométrie plane que nous expliciterons au chapitre 4. Le modèle de référence permet de dégager des conditions didactiques pour caractériser les parcours d'apprentissage que nous proposons afin qu'ils puissent effectivement favoriser l'entrée dans le raisonnement géométrique à la transition cycle 3 / cycle 4. Dans le chapitre 6, nous nous intéresserons également aux spécificités de la géométrie dynamique sur lesquelles nous nous appuyons pour concevoir les tâches de construction proposées aux élèves dans les parcours d'apprentissage.

À partir de ce modèle et dans la continuité des sections 1.2.3 et 1.2.4, nous chercherons à caractériser des décalages entre les programmes scolaires des cycles 3 et 4 qui expliqueraient certains des échecs des élèves dans l'apprentissage de la géométrie et en particulier à l'entrée dans le raisonnement déductif (cf. chapitre 5).

Enfin, le dernier objectif est l'implémentation des parcours d'apprentissage dans le logiciel MINDMATH. Or, comme nous l'avons vu, les parcours d'apprentissage visent à prendre en compte les connaissances, difficultés et besoins d'apprentissage de l'élève mais nous ne pouvons pas coder « en dur » autant de parcours que d'élèves. Nous nous appuierons donc notamment sur la démarche menée pour la conception du logiciel PÉPITE et sur d'autres travaux présentés dans le chapitre 2 pour proposer des modélisations didactiques du domaine de la géométrie plane, des tâches du parcours, mais aussi du raisonnement de l'élève. Les algorithmes de *machine learning* s'appuient sur ces modèles pour construire un parcours qui s'adapte à chaque élève utilisateur du logiciel MINDMATH. Les différents modèles didactiques seront présentés dans le chapitre 7, ils sont implémentés dans le logiciel MindMath lui-même par d'autres acteurs du projet. De même, les rétroactions faites à l'élève via l'algorithme de recommandations développé par le LIP6 sont basées sur un travail didactique que nous présenterons dans le chapitre 8.

Dans le chapitre 9, nous aborderons les expérimentations réalisées auprès d'élèves de collège pour tester la mise en œuvre d'une partie de ces modèles en construisant un diagnostic et un parcours d'apprentissage relatifs à la construction de triangles et de quadrilatères.