

Introduction de l'effet unilatéral dans le modèle VDT

Nous avons vu au premier chapitre que le matériau M1 est initialement endommagé et qu'il peut développer une anisotropie d'endommagement induite par la sollicitation. L'endommagement se traduit par une reprise de raideur (respectivement une forte baisse de raideur) lors d'un chargement de traction simple suivi d'une compression (respectivement une traction suivant une compression simple). Cet effet s'explique par « l'état » dans laquelle se trouve les microfissures. Selon qu'elles sont ouvertes ou fermées, elles agissent différemment sur le comportement global du matériau. Cet effet est appelé « effet unilatéral ». Comme l'état d'ouverture ou de fermeture dépend de la direction de la sollicitation, on dira ici que la sollicitation rend « effectif » ou non un endommagement existant. Bien entendu, la sollicitation participe ensuite à étendre le niveau d'endommagement. L'intégration de ces phénomènes dans les lois de comportement permet de représenter d'une part, la non linéarité dans la réponse du matériau provoquée par le changement d'état des microfissures à endommagement figé mais également la dissymétrie du comportement entre les sollicitations de type traction et compression.

Dans le chapitre précédent, nous avons comparé quelques modèles assurant la continuité de la réponse contrainte-déformation sous des chargements multiaxiaux non proportionnels, l'existence du potentiel thermodynamique et la symétrie du tenseur d'élasticité endommagé et du tenseur Hessien (second gradient) de l'énergie libre. Le modèle microplan avec décomposition VDT a été choisi notamment pour la souplesse qu'il confère au modélisateur. L'objectif de ce troisième chapitre est d'introduire l'effet unilatéral dans la formulation VDT. Nous supposons pour l'instant qu'aucun mécanisme n'induit de déformation résiduelle.

Dans la première partie de ce chapitre, nous analysons quelques modèles proposés dans la littérature. Les principes fondamentaux de la thermodynamique sont ensuite exploités pour définir un cadre rigoureux à la modélisation de cet effet. Enfin, nous identifions un premier jeu de paramètres pour retrouver le comportement élastique

endommageable.

3.1 Synthèse bibliographique des modèles avec effet unilatéral d'endommagement

Parmi la littérature, nous avons sélectionné les modèles les plus pertinents à notre connaissance. Nous en donnons quelques détails pour illustrer les différents choix de modélisation concernant :

- la variable pilotant l'endommagement des matériaux quasi-fragiles,
- la forme des lois d'évolution d'endommagement,
- la méthode utilisée pour intégrer l'effet unilatéral dans le modèle,
- la variable qui pilote cet effet.

L'effet unilatéral se traduit par une variation brutale des propriétés élastiques du matériau. Il faut s'assurer que la réponse contrainte-déformation est bien continue, autrement dit que le saut de propriété n'affecte que la raideur du matériau et ne produit pas un saut de contrainte lorsque l'on se situe au basculement ouvert/fermé (ou l'inverse).

3.1.1 Modèle isotrope de Mazars

Mazars [64][65] a proposé un modèle élastique endommageable isotrope. Ce modèle de référence pour les bétons s'appuie sur la mécanique de l'endommagement et une variable scalaire d telle que le module d'Young courant vaut $E = E_0(1 - d)$. Pour introduire la dissymétrie du comportement, Mazars propose deux variables d'endommagement, notés d_t et d_c , respectivement en traction et en compression (donc fonction de la nature de la sollicitation). La combinaison linéaire de ces deux modes donne l'endommagement effectif :

$$d = \alpha_t d_t + \alpha_c d_c \quad (3.1)$$

où α_t , α_c sont deux coefficients d'effectivité définis en fonction des déformations principales ε_i tels que :

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i(\varepsilon_i) \frac{\varepsilon_{ti} \varepsilon_i}{\hat{\varepsilon}^2} \quad (3.2)$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i(\varepsilon_i) \frac{\varepsilon_{ci} \varepsilon_i}{\hat{\varepsilon}^2} \quad (3.3)$$

$H(\varepsilon_i)$ est la fonction d'Heaviside de la déformation principale ε_i et $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_i \rangle_+^2}$ est la déformation équivalente égale à la somme des carrés des déformations principales

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

positives ($\langle x \rangle_+$ est la fonction de Macaulay représentant la partie positive de x). ε_{ti} et ε_{ci} sont, respectivement, les parties positives et négatives des valeurs principales du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\varepsilon_{ti} = \langle \varepsilon_i \rangle_+ \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ci} = \langle \varepsilon_i \rangle_- \quad (3.5)$$

Une fonction seuil d'endommagement est défini par :

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \hat{\varepsilon} - \kappa(d) \quad (3.6)$$

Ce seuil est différent en traction et en compression car il dépend de la déformation équivalente $\hat{\varepsilon}$. Avec ce modèle, à d_t et d_c fixés, l'endommagement « effectif » d change avec la direction de la déformation. α_t et α_c valent par exemple :

$$\begin{cases} \alpha_c = 0 & \text{en traction pure} \\ \alpha_t = 0 & \text{en compression pure} \\ \alpha_c + \alpha_t = 1 & \text{en cas de combinaison} \end{cases} \quad (3.7)$$

Les lois d'évolution de d_t et d_c sont définis telles que :

$$\begin{aligned} d_t &= 1 - \kappa_0 (1 - A_t) - A_t \exp(-B_t (\kappa(d) - \kappa_0)) \\ d_c &= 1 - \kappa_0 (1 - A_c) - A_c \exp(-B_c (\kappa(d) - \kappa_0)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec κ_0 le seuil d'endommagement initial. Les paramètres A_t , A_c , B_t et B_c permettent d'avoir deux vitesses d'évolution de dommage en fonction de la nature de la sollicitation. Une vitesse d'endommagement rapide en traction et une deuxième plus lente en compression. En supposant que le coefficient de Poisson n'est pas affecté par l'endommagement, l'énergie libre pour un matériau isotrope peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2} (1 - d) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.9)$$

où \mathbb{C} est le tenseur d'élasticité d'ordre quatre du matériau vierge (non endommagé) et $\boldsymbol{\varepsilon}$ représente le tenseur de déformation d'ordre deux. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est déduite par la dérivation de l'énergie libre :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.10)$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement d est obtenue par dérivation de l'énergie libre par rapport à d :

$$Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.11)$$

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

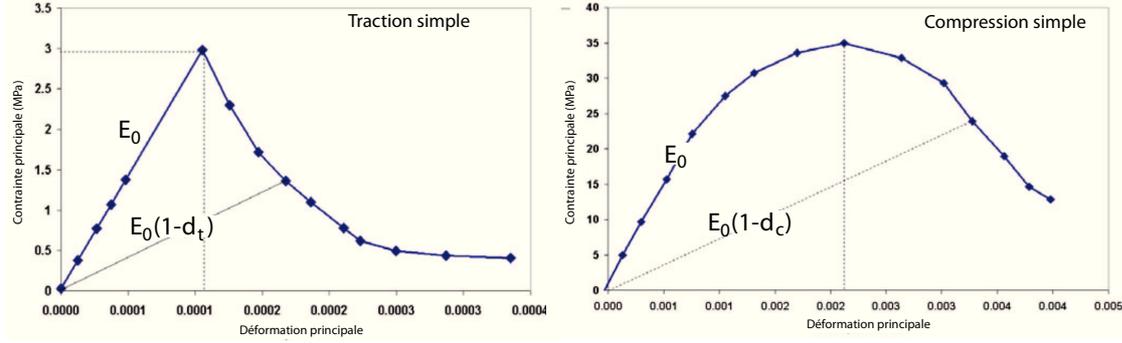


FIGURE 3.1 – Réponse contrainte-déformation d'un essai de traction suivi d'une compression pour le modèle de Mazars [65].

Ce modèle isotrope tient compte d'un endommagement différent en traction et en compression (fig. 3.1) mais il ne permet pas de décrire l'effet unilatéral de manière anisotrope. Compte tenu de la formulation de l'équation 3.9, seule la raideur du matériau varie lors de la refermeture des fissures. Il n'y a donc pas de saut de contrainte car la refermeture s'effectue à déformation nulle. Nous constatons que la même phénoménologie est utilisée pour les deux mécanismes d'endommagement d_t et d_c . Ces deux grandeurs sont pilotées par l'extension du matériau, seule leur effectivité (α_t et α_c) et leur vitesse d'évolution respectives sont différentes.

3.1.2 Modèle isotrope « concrete damaged plasticity »

Il s'agit d'un modèle élasto-plastique avec endommagement destinés à la modélisation du comportement des bétons et disponible dans le code de calcul Abaqus. La loi d'état peut être écrite sous la forme suivante [61] :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.12)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ sont respectivement les tenseurs de déformation totale et de déformation plastique. A l'image du modèle précédent, la variable d est dissociée en deux variables internes d'endommagement par la relation suivante :

$$d = 1 - (1 - s_t d_c)(1 - s_c d_t) = s_t d_c + s_c d_t - s_c s_t d_c d_t \quad (3.13)$$

où s_t et s_c sont des fonctions de l'état des contraintes principales (noté par le signe $\widehat{\mathbf{X}}$) définies par :

$$\begin{aligned} s_t &= 1 - w_t r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i) & 0 \leq w_t \leq 1 \\ s_c &= 1 - w_c (1 - r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i)) & 0 \leq w_c \leq 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

d_t et d_c sont, respectivement, deux variables de dommage en traction et compression simple qui dépendent de l'état de déformation plastique $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$ et $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$:

$$\begin{aligned} d_t &= d_t(\tilde{\varepsilon}_t^{pl}) & 0 \leq d_t \leq 1 \\ d_c &= d_c(\tilde{\varepsilon}_c^{pl}) & 0 \leq d_c \leq 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ces deux fonctions d_t et d_c sont rentrées sous forme de tableau dans Abaqus (figure 3.2). Cette formulation diffère de la proposition de Mazars car ce sont ici les contraintes qui pilotent l'effectivité. La variable $r(\hat{\sigma})$ indique si l'état de contrainte est plutôt du type traction ($r \rightarrow 1$) ou compression ($r \rightarrow 0$). Elle est définie à partir des contraintes principales effectives (définies comme le rapport de la contrainte principale sur le terme $1 - d$) :

$$r(\hat{\sigma}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\hat{\sigma}_i|} \quad 0 \leq r(\hat{\sigma}_i) \leq 1 \quad (3.16)$$

Les pondérations w_t et w_c (deux paramètres fixés entre 0 et 1) permettent de régler les parts des endommagements qui interviennent finalement dans le calcul de l'endommagement total. Pour le modèle de Mazars, w_t et w_c valent l'unité. La figure 3.2 issue de la documentation du code Abaqus illustre l'influence de ces coefficients. L'évolution de chaque variable d'endommagement est pilotée par la déformation plastique. Ce couplage direct entre l'endommagement et la plasticité est illustré sur la figure 3.3.

Ce modèle permet de reproduire le caractère unilatéral des dommages et de différentier le comportement du matériau en compression et en traction. A déformation donnée, le passage ouvert/fermé et son inverse s'effectue à contrainte nulle. Il n'y a donc pas de saut de contrainte. L'effectivité est pilotée ici par les contraintes principales ce qui différentie cette approche de celle proposée par Mazars. Enfin, l'écriture développée dans l'équation 3.13 conduit à un troisième terme dont la signification physique et difficilement interprétable.

3.1.3 Modèles issus de l'homogénéisation

Ces méthodes de changement d'échelle [70] [87] dans les milieux à microstructure aléatoire sont pour l'essentiel basées sur la résolution des problèmes d'inclusion d'Eshelby [39]. Dans le cas du schéma d'Eshelby, la rigidité endommagée s'écrit sous la forme suivante :

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

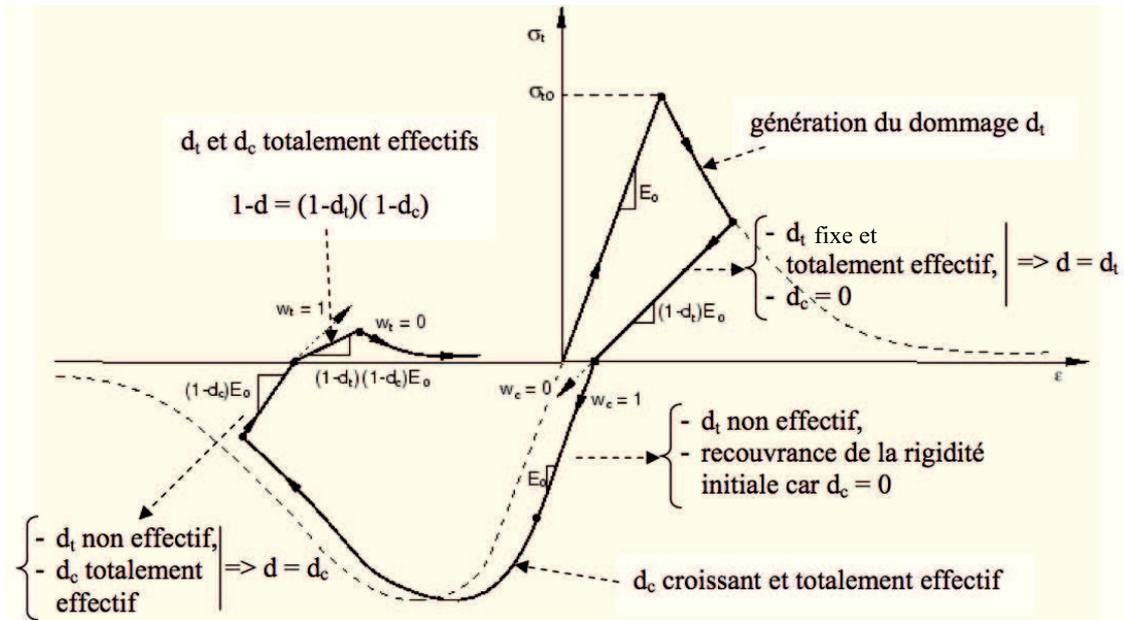


FIGURE 3.2 – Réponse du modèle « concrete damaged plasticity » lors d'un chargement alternant une traction puis une compression. Effets de l'effectivité et du dommage.

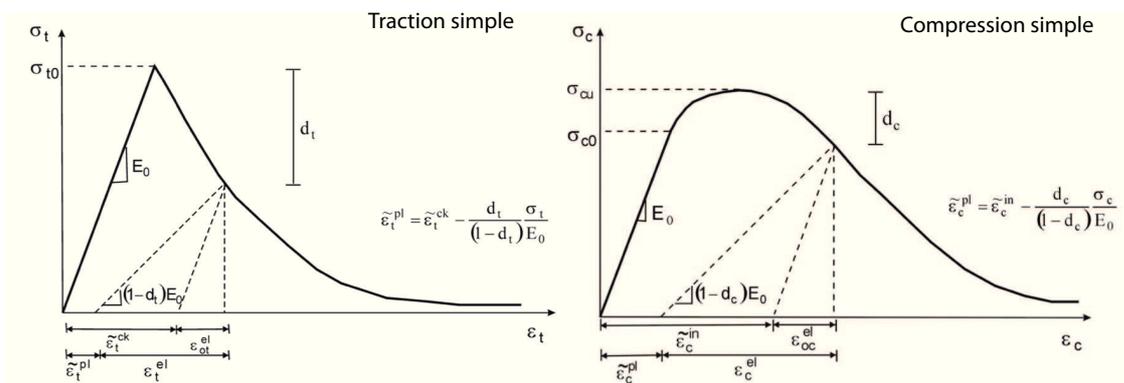


FIGURE 3.3 – Couplage entre endommagement et déformation plastique en compression et en traction [1].

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET
UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

$$\mathbb{C}_{Esh}^{hom}(\rho, \mathbf{n}) = \mathbb{C} - \sum_{i=1}^N \rho_i^f (\mathbb{C}^{i,f} - \mathbb{C}) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_\epsilon^i : (\mathbb{C}^{i,f} - \mathbb{C})]^{-1} \quad (3.17)$$

où \mathbb{P}_ϵ^i désigne le tenseur de Hill qui ne dépend que de la géométrie de l'inclusion f et les propriétés élastiques de la matrice. \mathbb{C} est le tenseur d'élasticité isotrope pour le matériau sain. ρ_i^f représente la densité des microfissures dans l'inclusion f .

L'idée repose sur une différentiation de la modélisation de l'élasticité des fissures suivant leur état [34]. D'une part une élasticité nulle dans l'état ouvert indiquant qu'elles ne supportent pas de contraintes ($\mathbb{C}^{i,f} = 0\mathbb{I}$). D'autre part une élasticité fictive isotrope $C^f = 3k\mathbb{J}$ des microfissures dans l'état fermé avec \mathbb{J} la partie volumique du tenseur d'identité \mathbb{I} d'ordre 4 et k le module de compressibilité du matériau sain. Une inclusion contient une densité de microfissures ρ_i^f orientées dans la même direction \mathbf{n}_i . L'approximation analytique de cette fonction de densité des microfissures n'est pas facile. Pour cette raison Pensée *et al.* ont adopté une procédure d'intégration numérique de type Gauss. De ce fait, cette densité devient $\rho_i^f = w_i d_i$ où w_i est un facteur de pondération et d_i est la densité et cela pour une direction \mathbf{n}_i donnée. Le critère d'ouverture-fermeture $\hat{\beta}$ pour les fissures de normale \mathbf{n}_i s'exprime sous la forme suivante :

$$\hat{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) = \frac{16\rho_i(1-\nu^2)}{3E} [\lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_i] \quad (3.18)$$

La transition de l'état ouvert à l'état fermé se fait à $\hat{\beta} = 0$. Elle dépend de la déformation volumique et de la déformation normale au plan de la fissure. Le critère d'endommagement est exprimé sous la forme suivante :

$$f_i(F^{d_i}, (d_i)) = F^{d_i} - R(d_i) \quad (3.19)$$

où $R(d_i)$ est la résistance à l'endommagement. F^{d_i} est la force thermodynamique :

$$\begin{aligned} F^{d_i} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial d_i} \\ &= \frac{1}{2H_0} \left\{ (\langle \mathbb{C} : \mathbf{N}_i : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+)^2 + \frac{4\mu^2}{1-\frac{\nu}{2}} [(\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbf{N}_i - \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i) : \boldsymbol{\varepsilon}] \right\} \\ H_0 &= \frac{3E}{16(1-\nu^2)} \end{aligned}$$

L'évolution de la densité de microfissures d_i suit une règle de normalité par rapport au critère :

$$\dot{d}_i = \frac{\partial f_i}{\partial F^{d_i}} \frac{\partial F^{d_i}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{d_i}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2H_0} \left\{ 2 \langle \mathbb{C} : \mathbf{N}_i : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ \mathbf{N}_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\mu}{1-\nu/2} [\mathbf{N}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i - 2(\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i) : \boldsymbol{\varepsilon}] \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

où E , μ et ν sont les propriétés élastiques du matériau sain, et $\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ est le tenseur de projection pour chaque direction \mathbf{n}_i fixe. On notera que la force thermodynamique correspond à un taux de restitution de l'énergie en mode mixte puisqu'elle comporte un terme $(\langle \mathbb{C} : \mathbf{N}_i : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+)^2 / 2H_0$ provenant de l'ouverture des microfissures (mode I) et des termes correspondant au taux de restitution de l'énergie de cisaillement (mode II et III). L'évolution du dommage ne dépend donc pas uniquement de l'ouverture des fissures comme dans le modèle de Mazars mais aussi des effets de cisaillement.

Le principe de cette approche consiste à modifier la rigidité au passage ouvert/fermé. Cela revient à disposer de deux énergies pour traiter le dommage en fonction de l'état de la fissure. Cette idée est utilisée aussi par Wellemane dont nous décrivons maintenant le modèle.

3.1.4 Modèle anisotrope de Wellemane

Wellemane a proposé une énergie libre qui se compose d'une énergie libre du matériau sain (sans microfissures) $\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$ modifiée par une énergie libre due à l'endommagement [83] :

$$\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) \quad (3.22)$$

où \mathbf{d} est l'ensemble des tenseurs irréductibles $(d_0, d_2, d_4, \dots, d_p)$ qui décrit la densité des microfissures [32] :

$$\rho(\mathbf{n}) = d_0 + d_2 : [\mathbf{n}^{\otimes 2}] + d_4 :: [\mathbf{n}^{\otimes 4}] + \dots + d_p \bullet [\mathbf{n}^{\otimes p}] \quad (3.23)$$

Cette manière de décrire la distribution de la densité de dommage est plus riche qu'une variable scalaire ou tensorielle d'ordre 2 ou 4. Cependant, la difficulté pratique de gérer des tenseurs d'ordre 8 ou plus (d'ordre p) conduit à limiter son utilisation à des tenseurs de dommage d'ordre 4 seulement. L'énergie de dommage $\Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$ est définie comme la somme sur la sphère unité des contributions pour chaque direction, soit :

$$\Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \psi(\rho(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \quad (3.24)$$

où ψ représente la modification de l'énergie induite pour chaque système de microfissures. Notons que cette somme d'énergies suppose implicitement une non interaction entre les microfissures (cf. [45]). Pour rendre compte de l'effectivité du dommage,

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

cette énergie libre élémentaire ψ prendra des valeurs différentes suivant l'état des microfissures (ouvert ou fermé), soit :

$$\psi(\rho(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} \psi_1(\rho(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) & \text{si } g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) > 0 \\ \psi_2(\rho(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) & \text{si } g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) \leq 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n})$ désigne le critère de gestion d'ouverture-fermeture des microfissures de normale \mathbf{n} . Il s'écrit sous la forme suivante :

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) = \delta_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.26)$$

où δ_1 et δ_2 sont deux paramètres. Ces deux énergies élémentaires sont exprimées en fonctions des invariants de $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ et de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de leurs invariants mixtes. L'énergie est construite de telle façon qu'elle soit continument différentiable. Elle vérifie les conditions de restitution d'énergie au passage ouvert-fermé [83].

L'état des microfissures ne dépend donc pas de leur densité mais seulement de l'orientation \mathbf{n} et l'état de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ce critère ressemble à celui utilisé dans le cas des modèles micromécaniques. La différence réside dans le fait qu'ici on a deux paramètres δ_1 et δ_2 de pondération ajustable alors que, dans le modèle micromécanique, cette pondération est fixe et dépend des paramètres élastiques (éq. 3.18).

La fonction seuil qui gère l'évolution du dommage \mathbf{d} est exprimée de la même façon que dans le cas des approches micromécaniques :

$$f(\mathbf{F}^d, \mathbf{d}) = \|\mathbf{F}^d\| - R(\mathbf{d}) \leq 0 \quad (3.27)$$

où $\|\mathbf{X}\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbf{X} . \mathbf{F}^d est l'ensemble des forces thermodynamiques qui résultent de la différentiation de l'énergie par rapport à l'ensemble des tenseurs irréductibles \mathbf{d} .

$$\mathbf{F}^d = \{F^{d_0}, F^{d_2}, F^{d_4}, \dots, F^{d_p}\} \quad (3.28)$$

$$F^{d_0} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_0}, F^{d_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_2}, F^{d_4} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_4}, \dots, F^{d_p} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_p} \quad (3.29)$$

L'évolution de l'endommagement s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{d}} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\mathbf{F}^d, \mathbf{d}) < 0 \\ \frac{\langle (\mathbf{F}^d, \dot{\mathbf{F}}^d) \rangle_+}{k_0 \eta \|\mathbf{F}^{d_0}\| \|\mathbf{F}^d\|} \mathbf{F}^d & \text{si } f(\mathbf{F}^d, \mathbf{d}) = 0 \\ \dot{\mathbf{F}}^d = \frac{\partial \mathbf{F}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & \end{cases} \quad (3.30)$$

où k_0 et η sont deux paramètres strictement positifs. L'évolution du dommage dépend principalement de la partie positive des forces thermodynamiques.

3.1.5 Modèle de Maire et Chaboche

Maire et Chaboche [62] [25] ont proposé une méthode originale basée sur la notion d'énergie « bloquée » (voir aussi Andrieux *et al.* (1986)) pour assurer la continuité de la réponse contrainte-déformation (fig :3.4).

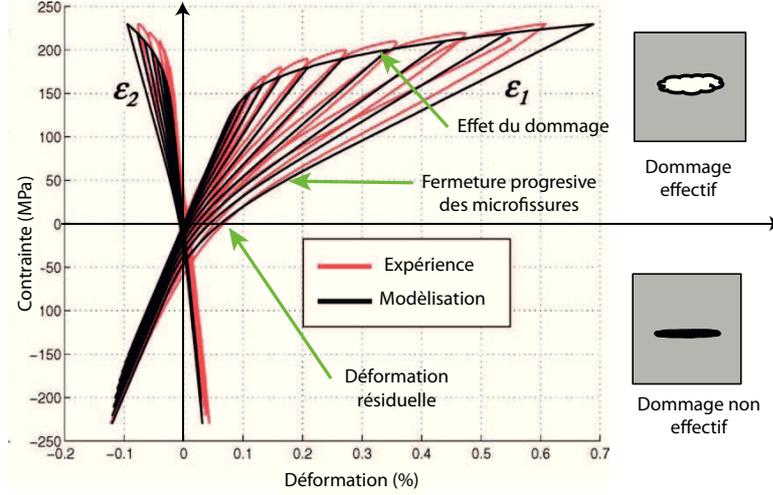


FIGURE 3.4 – Essai de traction-compression d'un composite à matrice céramique [62]

La loi de comportement est écrite sous la forme suivante en introduisant une déformation stockée ε^S :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{ed} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^S) \quad (3.31)$$

où \mathbb{C}^{ed} est le tenseur d'élasticité endommagé. Le dommage est supposé non effectif lorsque la déformation atteint la déformation de fermeture ε^f . Si \mathbf{n} est un vecteur unitaire normal à une famille de microfissures, le critère de désactivation du dommage peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^f) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad (3.32)$$

Le dommage est effectif quand ε_n est positif. Dans le cas contraire l'effet de l'endommagement est désactivé. On remarque qu'à l'inverse des modèles de Wellemane et micromécanique détaillés ci-dessus, le critère est formulé en déformation (les modules élastiques sont absents). La condition unilatérale peut être écrite sur la rigidité effective en tant que :

$$\mathbb{C}^{ed} = \mathbb{C} - \sum_{\alpha=1}^N H(\varepsilon_n) d_\alpha \mathbb{K}_\alpha - [\mathbb{D} : \mathbb{C}]_s \quad (3.33)$$

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

\mathbb{K}_α est un tenseur d'ordre 4 exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\alpha &= \gamma [(\mathbb{K} : \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha) + (\mathbb{K} : (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha)) \otimes \mathbf{1}]_s \\ &+ \frac{\gamma - 1}{2} [\mathbb{K} : (\mathbf{1} \otimes (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha)) + \mathbb{K} : (\mathbf{1} \otimes (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha))]_s \end{aligned} \quad (3.34)$$

où \mathbb{K} est un tenseur d'ordre 4 intrinsèque au matériau. Si le matériau est considéré isotrope à l'état initial sera le tenseur d'élasticité isotrope ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On notera que si le matériau est initialement isotrope transverse alors ce tenseur \mathbb{K} sera isotrope transverse. La rigidité endommagée dépend de deux variables d'endommagement. La première est scalaire d_α , où l'indice α désigne les directions de projection liées aux systèmes des microfissures. La seconde est un tenseur de dommage \mathbb{D} d'ordre 4 construit à partir d'un tenseur \mathbf{d} d'ordre 2 :

$$\mathbb{D} = \gamma [\mathbf{1} \otimes \mathbf{d}]_s + \frac{\gamma - 1}{2} [\mathbf{1} \otimes \underline{\mathbf{d}} + \mathbf{1} \otimes \overline{\mathbf{d}}]_s \quad (3.35)$$

avec :

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 H(\mathbf{n}_i \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^f) \mathbf{n}_i) d_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (3.36)$$

i désigne les directions principales du tenseur de dommage \mathbf{d} . γ est un coefficient de pondération. $H(x)$ est la fonction de Heaviside. $[\mathbb{X}]_s$ signifie « partie symétrique » du tenseur d'ordre 4 \mathbb{X} . d_i représente les variables d'endommagement des directions principales.

Deux critères sont associés à ces variables de dommage d_α et \mathbf{d} :

$$f_\alpha = g_\alpha \left(\sum_\beta a_{\alpha\beta} \langle F_\beta^{d_\beta} \rangle \right) - \frac{d_\alpha}{D_c^\alpha} \leq 0 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} f &= g \left[\chi \left(\langle \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \rangle_+ : \mathbb{Q} : \langle \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \rangle_+ \right)^{1/2} + (1 - \chi) \text{tr}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi \text{tr}(\mathbf{d}) - (1 - \xi) \text{tr}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{d})}{D_c} \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

$a_{\alpha\beta}$ et D_c^α sont deux paramètres où $\langle \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \rangle_+$ est la partie positive du tenseur des forces thermodynamiques. $F_\alpha^{d_\alpha}$ et $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$ sont, respectivement, la variable et le tenseur d'ordre 2 des forces thermodynamiques associés à l'énergie libre. χ et ξ sont deux paramètres. \mathbb{Q} est un tenseur d'ordre 4 qui représente les directions privilégiés du matériau. Les lois d'évolution des variables de dommage sont :

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

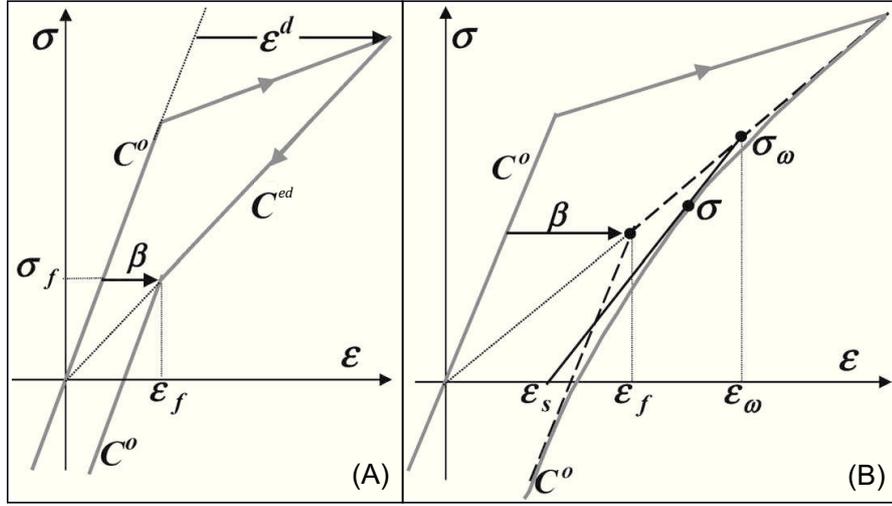


FIGURE 3.5 – Schéma d'une effectivité instantanée de dommage (A) et une effectivité progressive (B) [25]

$$\dot{d}_\alpha = \dot{\mu}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial F_\alpha^{d_\alpha}} \quad , \quad \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^d} \quad (3.39)$$

avec $\dot{\mu}_\alpha$ et $\dot{\mu}$ deux multiplicateurs scalaires déterminés, respectivement, en vérifiant les conditions de consistance $f_\alpha = \dot{f}_\alpha = 0$ et $f = \dot{f} = 0$.

Dans le cas où l'endommagement est effectif, la loi de Hooke s'écrit sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^+ : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C}^{ed} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.40)$$

Après désactivation du dommage la première loi de Hooke est remplacée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_\alpha^- : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^S) \quad (3.41)$$

où

$$\mathbb{C}_\alpha^- = \mathbb{C}^{ed} + d_\alpha \mathbb{K}_\alpha \quad (3.42)$$

Le passage ouvert-fermé se fait à une déformation $\boldsymbol{\epsilon}^f$ (fig :3.5). La continuité de la réponse contrainte-déformation est assurée par la combinaison des deux équations de la loi de Hooke 3.40 et 3.41 pour déterminer la déformation dite « stockée » :

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^f = \mathbb{C}_\alpha^+ : \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^f = \mathbb{C}_\alpha^- : (\boldsymbol{\epsilon}_\alpha^f - \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^S) \quad (3.43)$$

On déduit la déformation « stockée » :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S = \left[\mathbb{I} - \left(\mathbb{C}_\alpha^- \right)^{-1} : \mathbb{C}_\alpha^+ \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^f \quad (3.44)$$

L'énergie est obtenue par intégration de la loi de Hooke 3.41 :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S) : \mathbb{C}^{ed} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S) + \psi_\alpha^s \quad (3.45)$$

avec ψ_α^s l'énergie stockée :

$$\psi_\alpha^s = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S : \left(\mathbb{C}^{ed-1} - \left(\mathbb{C}_\alpha^- \right)^{-1} \right)^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S \quad (3.46)$$

L'évolution de dommage est gérée par un critère qui combine des effets isotropes et des effets purement anisotropes. En plus des variables de dommage, ce modèle utilise deux variables internes supplémentaires : l'indice de désactivation de dommage et la déformation stockée $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S$. Cette nouvelle règle de désactivation de dommage permet de décrire correctement la désactivation complète (en particulier pour le module de cisaillement), sans discontinuité dans la réponse contrainte-déformation. Par contre, dans le cas de réactivation de dommage, il est possible d'avoir une discontinuité de la réponse contrainte-déformation (pour des chargements complexes dans lesquels la contrainte lors de l'ouverture est différente de celle à la fermeture de microfissures).

3.1.6 Approche anisotrope et discrète de Bargellini et al.

L'approche discrète de Bargellini *et al.* [2] prend en compte la refermeture des lèvres des microfissures. Une fonction Heaviside sur la déformation normale au système de microfissures a pour but de gérer l'effet du dommage suivant la direction du chargement pour chaque direction fixe. L'énergie globale est l'énergie élastique dégradée par la somme des énergies dues à l'endommagement. Cette énergie d'endommagement est restituée dans chaque direction où les fissures se referment. L'énergie libre s'écrit sous la forme :

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{el} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.47)$$

$$- \sum_{i=1}^N \rho_i \left\{ \alpha \left[tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{2} tr^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \right] \right. \\ \left. + \beta tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \right\} \quad (3.48)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \rho_i H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \left\{ -\frac{\alpha}{2} tr^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) + 2(\alpha + \beta) tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \right\} \quad (3.49)$$

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET
UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

avec $\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ un tenseur directionnel égal au produit tensoriel de la normale à la famille de fissure sur elle-même. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les paramètres α et β (équivalents à des modules) gèrent le degré d'anisotropie d'endommagement et ρ_i est la densité de microfissures perpendiculaires à la i -ème direction. Le passage ouvert/fermé est géré par une fonction Heaviside sur la déformation normale $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}$ pour chaque direction. À l'ouverture, (3.48) représente la partie endommagée à retirer de l'énergie élastique. Lors de la fermeture des microfissures, 3.49 permet de récupérer les modules endommagés. La restitution des modules élastiques est proportionnelle à la densité des microfissures ρ_i . En dérivant cette énergie par rapport au tenseur des déformations, on obtient l'expression de la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ &- \sum_{i=1}^N \rho_i \{ \alpha [2\boldsymbol{\varepsilon} - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{N}_i] + 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \\ &+ \sum_{i=1}^N \rho_i H(-\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \{ -\alpha \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \mathbf{N}_i + 2(\alpha + \beta) (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dans le cas d'un système de microfissures de direction fixe, on vérifie l'absence de dissipation anormale due à l'effet unilatéral. Pour se faire, on considère que le matériau est pré-endommagé et qu'il n'y a pas d'évolution de dommage. Ainsi on peut écrire le taux d'énergie sous la forme suivante :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} : \dot{\rho} \text{ avec } : \dot{\rho} = 0 \quad (3.51)$$

La dissipation est obtenue par la relation suivante :

$$\begin{aligned} w &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \\ w &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \{ \alpha [2\boldsymbol{\varepsilon} - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{N}] + 4\beta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} \} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &- \rho \frac{\partial H(-\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left\{ \frac{\alpha}{2} \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) - 2(\alpha + \beta) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &- \rho H(-\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})) \{ \alpha \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} - 4(\alpha + \beta) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} \} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

On annule le terme contracté à $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ par définition de la contrainte sous la forme d'une loi d'état. Au passage ouverture/fermeture, on a les relations suivantes :

$$- \text{état ouvert} : -\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) < 0 \Rightarrow H(-\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})) = 0$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^o &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ &- \rho \{ \alpha [2\boldsymbol{\varepsilon} - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{N}] \\ &+ 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

– état fermé : $-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) > 0 \Rightarrow H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})) = 1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^f &= \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \\ &\quad -\rho \{ \alpha [2\boldsymbol{\varepsilon} - tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})\mathbf{1} + tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{N}] + 2\beta(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \\ &\quad +\rho \{ -\alpha tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + 2(\alpha + \beta)(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Exactement à la refermeture, c'est à dire lorsque $-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) = 0$, le saut de contrainte $[\boldsymbol{\sigma}]$ s'écrit sous la forme suivante :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}^f - \boldsymbol{\sigma}^o = 2\rho(\alpha + \beta)(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.55)$$

Cette équation montre que le saut de contrainte n'est pas nul lors du changement d'état de la famille de microfissure. Pour annuler le saut de contrainte, Bargellini *et al.* intègrent un mécanisme de frottement et notamment une déformation caractéristique de cisaillement. Comme nous le verrons au chapitre 4, cette grandeur se soustrait au membre de droite de l'équation 3.55. A chaque fermeture, elle est donc re-initialisée de façon à annuler le saut de contrainte. Elle peut s'interpréter comme un déplacement relatif des lèvres des microfissures de la famille considérée, lorsqu'elles sont ouvertes, sous l'action du cisaillement.

Le critère d'évolution de l'endommagement est associé à une partie de la force thermodynamique à savoir :

$$f(F^{\rho_i}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{N}_i), \rho_i) = F^{\rho_i}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{N}_i) - c_1 \exp(\rho_i/c_2) \leq 0 \quad (3.56)$$

où i désigne les directions de projections. La partie de la force thermodynamique considérée s'écrit :

$$F^{\rho_i}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{N}_i) = -\left(\frac{3}{2}\alpha + 2\beta\right) tr^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) H(tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \quad (3.57)$$

La fonction de Heaviside $H(tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i))$ permet de gérer l'évolution du dommage en fonction de la nature de chargement. c_1 et c_2 sont deux paramètres. La loi d'évolution de l'endommagement s'écrit :

$$\dot{\rho}_i = -\frac{c_2(3\alpha + 4\beta) tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) H(tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i))}{c_1 \exp(\rho_i/c_2)} \mathbf{N}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.58)$$

La continuité de l'énergie libre et de la réponse contrainte-déformation sont assurées grâce à la définition et à l'initialisation d'un nouveau paramètre pour chaque famille de fissure : la déformation de cisaillement. Nous verrons que Bargellini *et al.* se servent de cette grandeur pour introduire un mécanisme de frottement entre lèvres des microfissures. Cette approche diffère donc de toutes celles présentées auparavant, l'effet unilatéral ne pouvant pas être modélisé sans effet de frottement.

La définition des paramètres de pondération α et β reste sommaire. L'hypothèse d'une évolution du dommage uniquement lorsque les fissures sont ouvertes est forte. Il ne peut pas y avoir frottement entre lèvres des microfissures et évolution de la microfissure simultanément. Un endommagement de type mode I est donc privilégié.

3.1.7 Modèles d'endommagement microplan

L'effet unilatéral a été introduit dans les modèles microplans à l'aide de courbes limites enveloppes [8] [7]. Prenons l'exemple de la contrainte normale au plan de la microfissure (fig. 3.6). Elle est reliée linéairement à la déformation normale par un module. Supposons que l'on parte de l'état de repos où contrainte et déformation sont nulle, et qu'on applique une tension (déformation positive). La contrainte normale ne pouvant pas dépasser l'enveloppe, elle est abaissée en suivant les abaques en fonction de la pression. Il en va de même pour un état initial à contrainte normale nulle mais déformation normale négative. Si on impose une déformation normale supérieure et que le comportement linéaire coupe le plateau à gauche de l'axe des ordonnées, la contrainte normale sera ajustée et maintenue à la valeur du plateau.

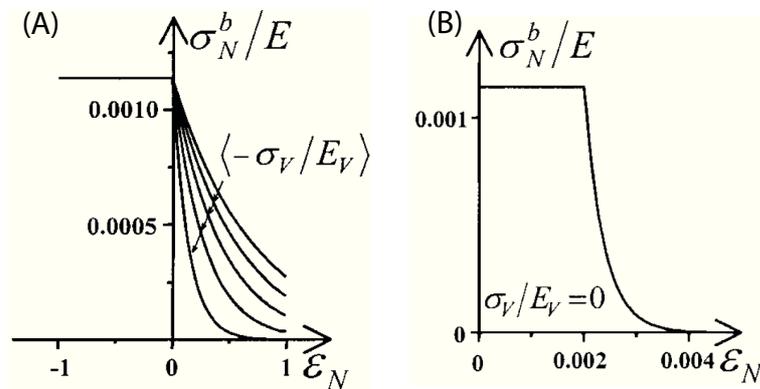


FIGURE 3.6 – Courbes limites enveloppes des contraintes et déformations normales pour gérer le contact [8].

3.1.8 Bilan

L'effet d'ouverture-fermeture des fissures est un phénomène cinématique. Souvent, la variable utilisée pour piloter l'effet unilatéral et l'évolution du dommage est le tenseur de déformation ϵ . L'effet unilatéral peut être introduit de deux façons :

1. dans la loi d'évolution du dommage ce qui permet de ne pas affecter le tenseur de rigidité lors du passage ouvert/fermé (ou l'inverse) et ne produit pas de saut de contrainte à cet instant,

2. sous la forme d'une variation d'énergie libre et donc de contrainte ce qui nécessite d'effectuer le changement de mécanisme à déformation nulle, ou de mettre en place un mécanisme supplémentaire, sous la forme d'une déformation de régularisation, pour annuler le saut de contrainte.

On note que la plupart des modèles utilisent la partie positive du tenseur de déformation projeté pour piloter l'évolution de l'endommagement. Dans le cas où cela ne suffit pas, certains modèles ont recourt à deux lois d'évolution de dommage. Ces dernières sont gérées par une fonction seuil où l'endommagement ne peut décroître.

3.2 Effet unilatéral dans le modèle VDT

Dans cette section, nous vérifions le cadre thermodynamique du modèle microplan avec décomposition de type VDT et prise en compte de l'effectivité. Le modèle microplan VDT a déjà été présenté en détail dans le chapitre précédent. Les conséquences du mécanisme d'ouverture/fermeture des microfissures sont introduites dans l'énergie libre de chaque microplan sous la forme de fonctions d'effectivité notées $\alpha_V(X_V)$, $\alpha_D(X_D)$ et $\alpha_T(X_T)$. Afin de conserver un cadre le plus général possible, nous avons supposé que ces fonctions sont pilotées par des variables quelconques. Nous choisissons une énergie libre pour un plan donné sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Psi^{mic} &= \frac{1}{2}k_V (1 - \alpha_V(X_V) d_V) \varepsilon_V^2 + \frac{1}{2}\mu_D [(1 - \alpha_D(X_D) d_D) \varepsilon_D^2] \\ &+ \frac{1}{2}\mu_T [(1 - \alpha_T(X_T) d_T) \boldsymbol{\varepsilon}_T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_T] \end{aligned} \quad (3.59)$$

où k_V , μ_D et μ_T sont respectivement les modules de compressibilité, de cisaillement déviatorique (normal au plan des microfissures) et de cisaillement tangentiel. Les expressions de ces modules sont exprimés dans l'équation 2.43 au chapitre 2.

Pour vérifier la positivité de la dissipation, on se base sur la démarche proposée par Kuhl et al. [51]. Nous choisissons arbitrairement de vérifier l'inégalité de Clausius Duhem pour chaque microplan ce qui assure sa validation à l'échelle globale. On écrit la dissipation dans chaque microplan sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}^{mic} = \boldsymbol{\sigma}_V \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_V + \boldsymbol{\sigma}_D \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0 \quad (3.60)$$

Le taux d'énergie libre à l'échelle du microplan s'écrit :

$$\dot{\Psi}^{mic} = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V} \dot{\varepsilon}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_D} \dot{\varepsilon}_D + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \quad (3.61)$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_V} \dot{\alpha}_V(X_V) + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_D} \dot{\alpha}_D(X_D) + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_T} \dot{\alpha}_T(X_T) \quad (3.62)$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} \dot{d}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} \dot{d}_D + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} \dot{d}_T \quad (3.63)$$

On distingue trois contributions : un taux d'énergie dû aux variables observables ($\dot{\varepsilon}_V$, $\dot{\varepsilon}_D$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T$), un taux dû à l'endommagement (\dot{d}_V , \dot{d}_D et \dot{d}_T) et un dernier dû à l'effectivité ($\dot{\alpha}_V(X_V)$, $\dot{\alpha}_D(X_D)$ et $\dot{\alpha}_T(X_T)$). La dissipation dans chaque microplan est la somme de la dissipation intrinsèque (ou mécanique) et de la dissipation due à l'endommagement et à l'effectivité :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{mic} &= \left[\sigma_V - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V} \right] \dot{\varepsilon}_V + \left[\sigma_D - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_D} \right] \dot{\varepsilon}_D + \left[\boldsymbol{\sigma}_T - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \\ &- \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_V} \dot{\alpha}_V(X_V) - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_D} \dot{\alpha}_D(X_D) - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_T} \dot{\alpha}_T(X_T) \\ &- \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} \dot{d}_V - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} \dot{d}_D - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} \dot{d}_T \geq 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables de l'endommagement sont :

$$F^{d_V} = -\frac{\partial \Psi_V}{\partial d_V} = \frac{1}{2} k_V \alpha_V(X_V) \varepsilon_V^2 \quad (3.65)$$

$$F^{d_D} = -\frac{\partial \Psi_D}{\partial d_D} = \frac{1}{2} \mu_D \alpha_D(X_D) \varepsilon_D^2 \quad (3.66)$$

$$F^{d_T} = -\frac{\partial \Psi_T}{\partial d_T} = \frac{1}{2} \mu_T \alpha_T(X_T) \boldsymbol{\varepsilon}_T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_T \quad (3.67)$$

La gestion de la dissipation de l'endommagement ne présente aucune difficulté [18][51]. Afin de focaliser l'attention sur l'effectivité, considérons un processus ne modifiant pas l'endommagement ($\dot{d}_V = \dot{d}_D = \dot{d}_T = 0$). Afin de gérer les trois termes dissipatifs dues à l'effectivité (seconde ligne de l'équation 3.64), deux possibilités se présentent. La première considère des mécanismes d'effectivité non dissipatifs. Dans la seconde, la dissipation due à l'effectivité est conservée mais on assure qu'elle reste positive.

3.2.1 Fonctions d'effectivité liées respectivement aux variables observables

On pose ici que α_V , α_D et α_T sont respectivement fonction de ε_V , ε_D et ε_T ce qui donne :

$$\dot{\alpha}_V(\varepsilon_V) = \frac{\partial \alpha_V(\varepsilon_V)}{\partial \varepsilon_V} \dot{\varepsilon}_V, \quad \dot{\alpha}_D(\varepsilon_D) = \frac{\partial \alpha_D(\varepsilon_D)}{\partial \varepsilon_D} \dot{\varepsilon}_D, \quad \dot{\alpha}_T(\varepsilon_T) = \frac{\partial \alpha_T(\varepsilon_T)}{\partial \varepsilon_T} \dot{\varepsilon}_T \quad (3.68)$$

A titre d'exemple, l'énergie libre sur la partie volumique s'écrit sous la forme :

$$\Psi^{mic} = \frac{1}{2} k_V (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V^2 \quad (3.69)$$

Dans la dissipation, les termes d'effectivité s'ajoutent aux termes de la loi d'état pour donner la relation suivante :

$$\mathcal{D}_V = \left[\sigma_V - (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) k_V \varepsilon_V + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_V(\varepsilon_V)}{\partial \varepsilon_V} d_V k_V \varepsilon_V^2 \right] \dot{\varepsilon}_V \quad (3.70)$$

Si cette formulation annule la dissipation liée à l'effectivité, elle impose (1) la continuité de la dérivée de α_V ou (2) un basculement d'effectivité à ε_V nul pour annuler le saut de contrainte. A titre d'illustration, on choisit une fonction continue pour l'effectivité volumique sous la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_V(\varepsilon_V) &= \frac{1}{2} (1 + \tanh(a_1 \varepsilon_V + a_2)) \\ \frac{\partial \alpha_V(\varepsilon_V)}{\partial \varepsilon_V} &= \frac{a_1}{2} (1 - \tanh^2(a_1 \varepsilon_V + a_2)) \end{aligned} \quad (3.71)$$

où a_1 et a_2 sont des paramètres à définir. La contrainte volumique peut alors s'écrire selon la relation :

$$\begin{aligned} \sigma_V &= k_V (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V - \frac{1}{2} k_V \frac{\partial \alpha_V(\varepsilon_V)}{\partial \varepsilon_V} d_V \varepsilon_V^2 \\ &= k_V \varepsilon_V \left\{ \left[1 - \frac{d_V}{2} (1 + \tanh(a_1 \varepsilon_V + a_2)) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_1}{4} \left[1 - \tanh^2(a_1 \varepsilon_V + a_2) \right] d_V \varepsilon_V \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Cette loi d'état est élastique non linéaire. Elle traduit une effectivité progressive de l'endommagement (fig. 3.7).

L'évolution de la réponse contrainte-déformation au passage ouvert/fermé est continue et se fait sans dissipation anormale. Ceci reste vrai que la fonction d'effectivité soit continue ou non (en pointillé sur la figure, cas d'une fonction Heaviside). Le raisonnement est le même pour les fonctions d'effectivité déviatorique et tangentielle liées à leur déformation ε_D et ε_T respective.

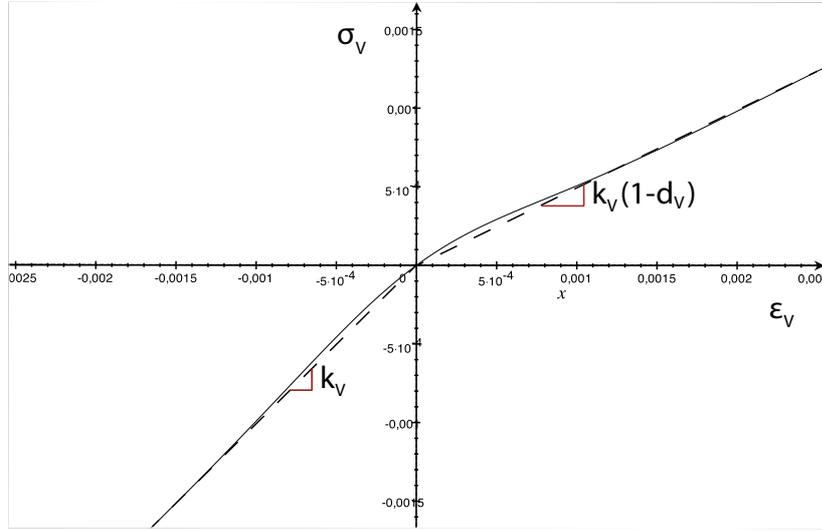


FIGURE 3.7 – Evolution régularisée de la contrainte en fonction de la déformation au passage ouvert/fermé de la partie volumique.

3.2.2 Fonctions d'effectivité non liés à leur variables respectives

Si les fonctions d'effectivité (α_V , α_D et α_T) sont indépendantes de leur variable respective (ε_V , ε_D , ε_T), il suffit que chaque terme dissipatif soit nul indépendamment les uns des autres. On choisit la fonction d'effectivité sur la partie volumique α_V pour exposer notre raisonnement. La dissipation volumique dans l'un des plans est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V &= [\sigma_V - (1 - \alpha_V(X_V) d_V) k_V \varepsilon_V] \cdot \dot{\varepsilon}_V \\ &+ \frac{1}{2} d_V k_V \varepsilon_V^2 \frac{\partial \alpha_V(X_V)}{\partial X_V} \dot{X}_V = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Les choix de la fonction d'effectivité et de la grandeur cinématique qui la pilote X_V sont limités car il faut que $\frac{\partial \alpha_V(X_V)}{\partial X_V}$ soit nul quel que soit \dot{X}_V . Un choix possible est de prendre la fonction d'Heaviside $H(X_V)$ comme fonction d'effectivité. Sa dérivée est toujours nulle sauf en $X_V = 0$. Pour annuler la dissipation en ce point, on peut faire apparaître la variable de pilotage devant la dérivée $X_V \frac{\partial \alpha_V(X_V)}{\partial X_V}$, par exemple en écrivant la relation suivante :

$$H(X_V^n) \Rightarrow n X_V^{n-1} \frac{\partial H(X_V^n)}{\partial X_V} = 0 \quad \forall X_V \text{ \& } n \neq 0 \quad (3.74)$$

Pour ne pas avoir une effectivité dissipative ni de saut de contrainte, on peut aussi adopter la méthode de régularisation utilisée dans le modèle de Bargellini et al. [2]

dans la section 3.1.6 ou dans Maire et Chaboche (section 3.1.5). Supposons que l'on introduise l'effectivité sur l'endommagement tangentiel, pilotée par la déformation normale autrement dit une effectivité non liée à la variable observable (ici ε_T). On écrit :

$$\Psi_T^{mic} = \frac{1}{2}\mu_T [(1 - \alpha_T(X) d_T) (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p) \cdot (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p)] \quad (3.75)$$

où ε_T^p est une déformation du cisaillement tangentielle irréversible permettant d'annuler l'énergie au passage ouvert/fermé. La fonction d'effectivité α_T dépend d'une grandeur cinématique X quelconque. On écrit la dissipation à l'échelle du microplan sur la partie tangentielle sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}^{mic} = \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - \dot{\Psi}_T^{mic} \geq 0 \quad (3.76)$$

où $\dot{\Psi}_T^{mic}$, le taux d'énergie à l'échelle du microplan, s'exprime sous la forme suivante :

$$\dot{\Psi}_T^{mic} = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_T} \frac{\partial \alpha_T}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} \dot{d}_T + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_T^p} \dot{\varepsilon}_T^p \quad (3.77)$$

soit :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_T^{mic} &= \mu_T [(1 - \alpha_T(X) d_T) (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p)] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu_T \left[\frac{\partial \alpha_T}{\partial X} d_T (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p)^2 \right] \dot{X} \\ &\quad - \mu_T [(1 - \alpha_T(X) d_T) (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p)] \dot{\varepsilon}_T^p \end{aligned} \quad (3.78)$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\dot{\Psi}_T^{mic} = \boldsymbol{\sigma}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - F_X \dot{X} - \mathbf{F}_T^P \dot{\varepsilon}_T^p \quad (3.79)$$

Sous l'hypothèse d'une effectivité non dissipative, le terme dissipatif dû à l'effectivité de l'équation 3.78 doit être nul quelque soit \dot{X} . Pour se faire, on choisit pour la fonction d'effectivité α_T la fonction d'Heaviside $H(X)$ pour gérer l'ouverture/fermeture en fonction du paramètre cinématique X . La dérivé de cette fonction est toujours nulle sauf à $X = 0$. Pour faciliter le raisonnement, supposons maintenant que X est une déformation équivalente ε_{eq}^N normale au plan de fissure (ε_{eq}^N est une combinaison de la déformation volumique et de la projection du tenseur de déformation $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$). On remarque alors que :

1. ($\varepsilon_{eq}^N < 0$)

Les microfissures sont fermées, l'endommagement n'est pas effectif.

2. $(\varepsilon_{eq}^N > 0)$

Les microfissures sont ouvertes, l'endommagement est effectif.

3. $(\varepsilon_{eq}^N = 0)$

Les microfissures sont fermées et l'endommagement n'est pas effectif. Afin d'annuler F_{eq}^N (et donc la dissipation due à la variation de X) on réactualise ε_T^P à la valeur courante de la déformation tangentielle ε_T cet instant. Cette réactualisation a comme second effet d'annuler aussi \mathbf{F}_T^P .

Remarquons que pour cette dernière condition, la nullité de ε_{eq}^N impose celle des deux forces F_{eq}^N et \mathbf{F}_T^P qui pourraient être employées pour introduire un phénomène de frottement dans le modèle. Cet aspect n'étant pas l'objet de ce chapitre, nous renvoyons le lecteur à l'introduction du chapitre suivant et en annexe où une formulation avec frottement a été étudiée [B](#).

3.2.3 Critères et lois d'évolution de l'endommagement

À fonction d'effectivité bloquée, considérons maintenant la dissipation due à l'endommagement. En remplaçant les forces associées à l'endommagement dans l'équation [3.64](#), on obtient la dissipation dans le microplan. Elle est positive si la relation suivante est satisfaite :

$$\frac{1}{2}k_V\alpha_V(X_V)\varepsilon_V^2\dot{d}_V + \frac{1}{2}\mu_D\alpha_D(X_D)\varepsilon_D^2\dot{d}_D + \frac{1}{2}\mu_T\alpha_T(X_T)\varepsilon_T \cdot \varepsilon_T\dot{d}_T \geq 0 \quad (3.80)$$

Les modules k_V , μ_D et μ_T sont toujours positifs de même que le carré de chaque déformation. Il suffit donc que les fonctions d'effectivité et l'évolution de l'endommagement restent positives ou nulles pour satisfaire la relation précédente.

3.3 Identification des paramètres du modèle

Dans cette section et les suivantes, nous cherchons à déterminer le modèle d'endommagement *le plus simple possible* permettant de décrire le comportement de notre matériau. Dans un premier temps, supposons que l'effectivité du dommage n'est due qu'à la présence de porosité et que l'effectivité ne porte que sur la partie volumique du comportement. Pour des raisons de simplicité, on suppose que la fonction d'effectivité volumique $\alpha_V(\varepsilon_V)$ est liée à sa variable observable ε_V . Les endommagements sur les parties déviatorique et tangentielle sont donc toujours effectifs. La loi d'état peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{3}{4\pi}\rho_0 \int_{\Omega} \{k_V(1 - \alpha_V(\varepsilon_V)d_V)\varepsilon_V \mathbf{V} \\ &+ \mu_D(1 - d_D)\varepsilon_D \mathbf{D} + \mu_T(1 - d_T)\varepsilon_T \cdot \mathbf{T}\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Afin de simplifier le modèle, on choisit une fonction de Heaviside pour l'effectivité volumique $\alpha_V(\varepsilon_V)$.

3.3.1 Détermination des modules élastiques

Vial *et al.* [81] ont montré que la pression de confinement n'a plus d'effet sur le module de Young du matériau M1 au delà de 10 MPa, bien entendu tant que l'on reste en deçà de la pression de moulage (fig. 3.8). Nous allons donc considérer que tout le pré-dommage mis en évidence sur les micrographies est refermé à cette pression. Ainsi, la caractérisation du matériau à cette pression donne les caractéristiques élastiques du matériau non endommagé. L'essai triaxial avec un confinement de 10 MPa donne un module d'Young $E^{H10} = 4300$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,4$ MPa. Ces valeurs induisent un module de compressibilité $k^{H10} = 7167$ MPa et un module de cisaillement $\mu^{H10} = 1535$ MPa (tableau 3.1). Les modules mesurés en compression simple ou sous un confinement de 5 MPa seront considérés comme affectés d'une pré-dommage auquel nous pourrions accéder.

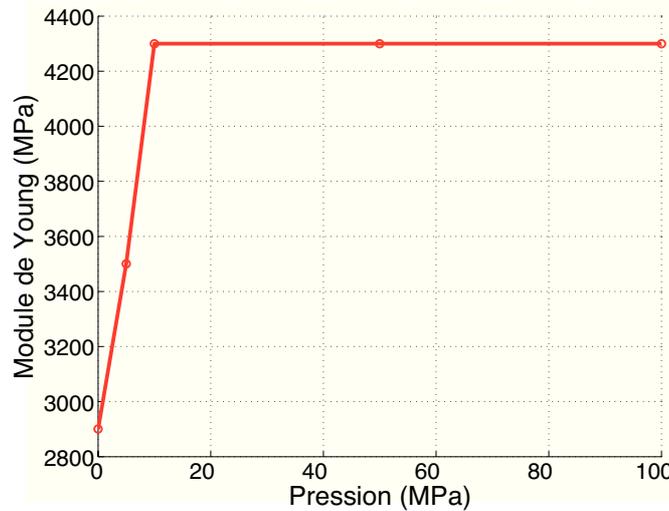


FIGURE 3.8 – Evolution du module de Young en fonction de la pression de confinement pour le matériau agrégataire M1 (Vial *et al.* [81]).

Le modèle 3.81 impose les relations suivantes pour les deux essais rapportés dans le tableau 3.1 :

$$\begin{cases} k_V^0 (1 - d_V^0) & = 3k^{CS} \\ k_V^0 & = 3k^{H10} \end{cases} \quad (3.82)$$

3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE

	E (MPa)	ν	k (MPa)	μ (MPa)
Compression simple (exposant : CS)	2900	0,3	2416	1115
Compression triaxiale à 10 MPa de confinement (exposant : H10)	4300	0,4	7167	1535

TABLE 3.1 – Propriétés élastiques déduites des essais présentés au premier chapitre.

et

$$\begin{cases} 2\mu^{CS} &= \frac{2}{5}\mu_D^0 (1 - d_D^0) + \frac{3}{5}\mu_T^0 (1 - d_T^0) \\ \mu^{H10} &= \mu^{CS} \end{cases} \quad (3.83)$$

La seconde équation de 3.82 donne $k_V^0 = 21500$ MPa. L'effectivité n'étant appliquée que sur la partie volumique du comportement, les modules de cisaillement en début d'essai CS et en début d'essai H10 doivent être identiques dans ce modèle. Ce n'est pas le cas lors des essais. Pour résoudre ce problème, il faudrait :

- Intégrer une effectivité fonction du changement de volume sur la partie déviatorique et tangentielle et gérer les problèmes de dissipation évoqués plus haut. Cette solution bride le choix des fonctions d'effectivité.
- Conserver ce verrou dans le modèle et reporter sur les lois d'évolution des dommages déviatorique et tangentiel la chute rapide du module de cisaillement lors d'un essai CS.

Nous optons pour la seconde approche qui permet de respecter « à moindre frais » le cadre thermodynamique. Afin de déterminer le module de compressibilité apparent en compression simple, on relie les modules d'élasticité longitudinal E_L et transversal E_T aux modules de compressibilité et de cisaillement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_L &= \frac{9k\mu}{3k+\mu} \\ E_T &= \frac{18k\mu}{3k-2\mu} \end{cases} \quad (3.84)$$

Connaissant les modules en début d'essai triaxial H10 (k^{H10} et μ^{H10}), sachant que $\mu^{H10} = \mu^{CS}$ et que les modules en début d'essai de compression simple doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} E_L^{CS} &\leq E_L^{H10} \\ E_T^{CS} &\leq E_T^{H10} \end{cases} \quad (3.85)$$

il est possible de déterminer numériquement une valeur approchée du module de compressibilité en début de compression simple (fig. 3.9).

Le problème impose donc $k^{CS} \in [5740, 7220]$ MPa. Pour $k^{CS} = 5740$ MPa, on obtient $E_L^{CS} = 4230$ MPa et $E_T^{CS} = 10750$ MPa. Pour $k^{CS} = 7220$ MPa, on obtient $E_L^{CS} = 4300$ MPa et $E_T^{CS} = 10375$ MPa. Finalement, les modules longitudinaux et

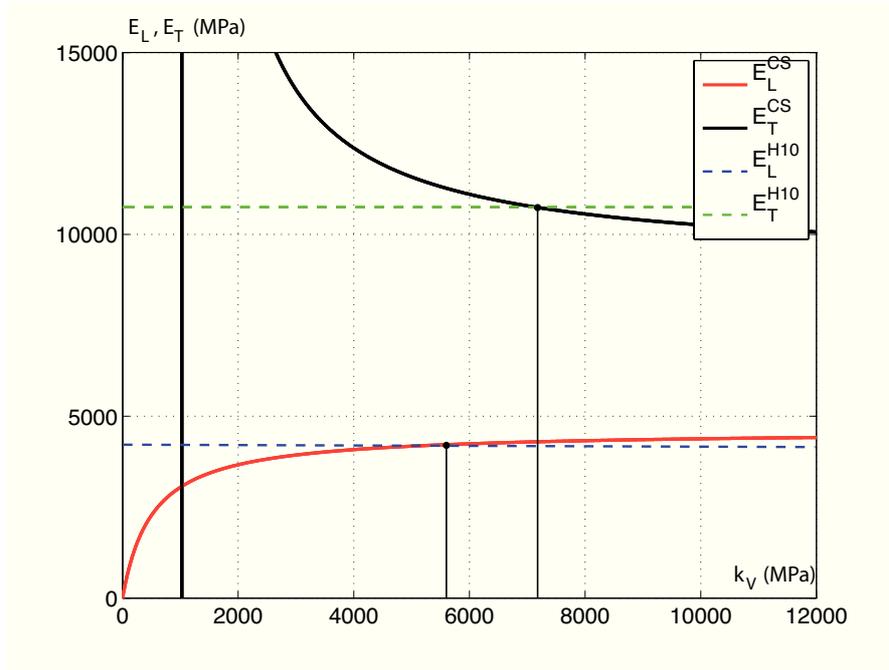


FIGURE 3.9 – Evolution des modules longitudinal et transversal en fonction du module de compressibilité en compression simple.

transversaux sont peu différents quel que soit le choix du module de compressibilité. On observe aussi que le module longitudinal en début d'essai CS est très proche, voir égal, au module à l'origine de l'essai H10. Ne disposant pas de la courbe pression-changement de volume, nous choisissons volontairement d'accentuer sa non linéarité en posant $k^{CS} = 5740$ MPa. On déduit la valeur du pré-dommage :

$$d_V^0 = 1 - \frac{k^{CS}}{k^{H10}} = 1 - \frac{5740}{7167} = 0,2 \quad (3.86)$$

Nous simplifions le modèle, au moins pour l'état initial en supposant l'égalité des modules de cisaillement et des pré-dommages déviatorique et tangentiel $\mu_D^0 = \mu_T^0$ et $d_D^0 = d_T^0$. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, une évolution positive du coefficient de contraction impose le respect de la condition $d_V^0 \leq 2d_D^0$. N'ayant pas à notre disposition d'essais de torsion sur M1, on pose arbitrairement $d_D^0 = 0,1$. On déduit alors $\mu_D^0 = \mu_T^0 = 3070$ MPa.

3.3.2 Lois d'endommagement

Une difficulté lors de l'identification des modèles microplans est que la réponse globale est issue d'une sommation des réponses élémentaires sur chaque plan. Il en résulte que cette réponse globale peut être différente de la réponse « locale ». Il faut

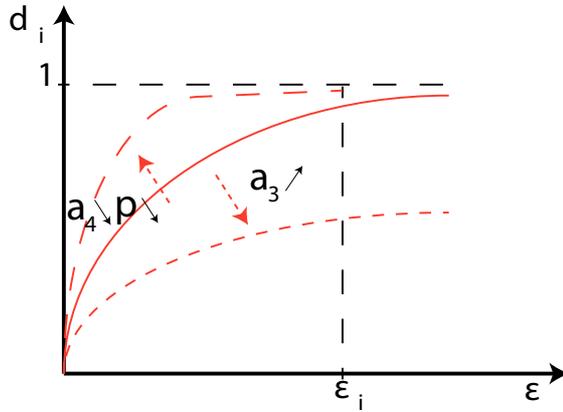


FIGURE 3.10 – Loi d'évolution du dommage.

donc postuler des comportements élémentaires et regarder ensuite quelles en sont les conséquences une fois la réponse de tous les plans assemblés sous la forme du tenseur des contraintes.

Nous supposons que les endommagements évoluent en fonction des forces thermodynamiques associées calculées à partir de l'énergie libre. A l'image du modèle proposé par Bazant *et al.*, nous ajoutons une dépendance de la loi d'endommagement au changement de volume. Les lois d'évolutions sont données par les relations ci-dessous :

$$d_i(F^{d_i}, p) = \max_t \left(d_i^0, 1 - \exp \left(-p \left[a_3 F^{d_i} \right]^{a_4} \right) \right) \quad \text{avec} \quad 0 \leq d_i \leq 1 \quad (3.87)$$

$$p = 1 + a_5 k_V^0 < \varepsilon_V - \varepsilon_{V0}^{H10} >_+ \quad (3.88)$$

où d_i^0 est égal au pré-dommage du matériau (i remplace les indices V , D ou T), et a_3 , a_4 et a_5 sont des paramètres à identifier. ε_{V0}^{H10} est la valeur de la déformation volumique (négative) atteinte après une compression isostatique à 10 MPa de confinement. Ainsi, $p = 1$ au début de la phase de compression de l'essai H10 ($\varepsilon_V = \varepsilon_{V0}^{H10}$) et $p \gg 1$ en début d'essai de compression simple sans confinement. La figure 3.10 illustre l'effet des paramètres sur l'évolution de l'endommagement.

La rigidité du matériau étant la somme des rigidités endommagées dans chaque direction, il est impossible de déduire des mesures directes les valeurs des trois paramètres a_3 , a_4 et a_5 . Les paramètres (a_3 , a_4) sont tout d'abord déterminés par méthode inverse sur la courbe H10 dont on cherche à reproduire la non linéarité. Puis, on détermine a_5 en recalant les courbes CS. Le tableau 3.2 résume les valeurs des modules et des paramètres après identification.

3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE

k_V^0 (MPa)	$\mu_D^0 =$ μ_T^0 (MPa)	d_V^0	$d_D^0 =$ d_T^0	a_3 (MPa ⁻¹)	a_4	a_5 (MPa ⁻¹)	ε_V^{H10}
21500	3070	0,2	0,1	8	$\frac{2}{3}$	0,25	$4,65 \cdot 10^{-4}$

TABLE 3.2 – Premier jeu de paramètres du modèle VDT avec effet unilatéral pour le matériau agrégataire M1.

3.3.3 Réponse contrainte-déformation pour un microplan

On se place ici au niveau d'un seul microplan. On impose dans un premier temps une traction hydrostatique puis on décharge avant de comprimer de façon hydrostatique (fig. 3.11). Durant cet essai fictif, rien n'évolue dans les parties déviatorique et tangentielle du comportement. Durant la première phase, le dommage évolue de 0,2 (valeur de pré-dommage) jusqu'à 0,64 en fin de traction. L'endommagement est totalement effectif ($\alpha_V = 1$) car la déformation volumique est positive. Lors de la décharge, l'endommagement n'évolue plus. Pendant la compression hydrostatique, l'endommagement n'est plus effectif ($\alpha_V = 0$). Le module initial est donc retrouvé et n'évolue pas.

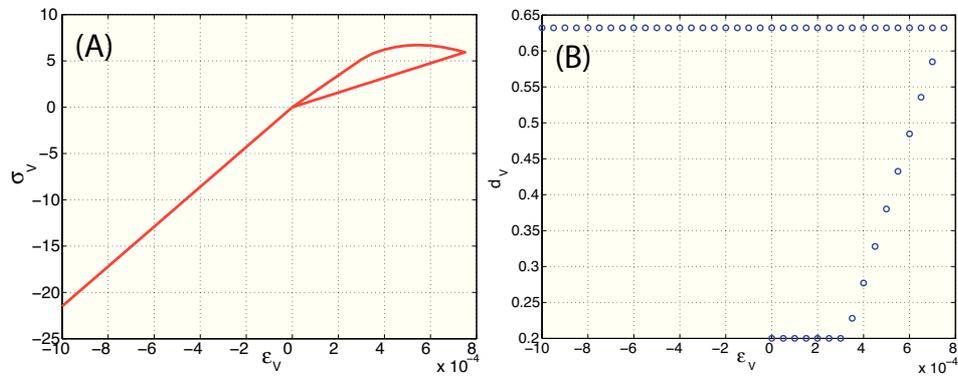


FIGURE 3.11 – Réponse volumique contrainte-déformation et évolution de l'endommagement d_V en fonction de la déformation volumique ε_V .

Sur la partie déviatorique, l'endommagement est toujours effectif. La figure 3.12 montre qu'une traction normale au plan et à volume constant (ε_D évolue seul) produit aussi une courbe en cloche en fonction de la loi d'endommagement. La décharge et la compression à volume constant ne se traduisent pas par une reprise de raideur au passage de l'origine des axes. Lorsque le seuil d'endommagement est retrouvé en compression, l'endommagement reprend son évolution. La différence entre les courbes rouge et verte concerne la valeur de la déformation volumique (constante lors des calculs). Pour la courbe rouge, elle est nulle. Pour la courbe verte, elle cor-

3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

respond à ε_V^{H10} la déformation volumique obtenue avec un confinement de 10 MPa. La courbe rouge montre un endommagement plus important. Notons que la réponse de la partie tangentielle du modèle donnera les mêmes courbes lors d'un chargement purement tangentiel.

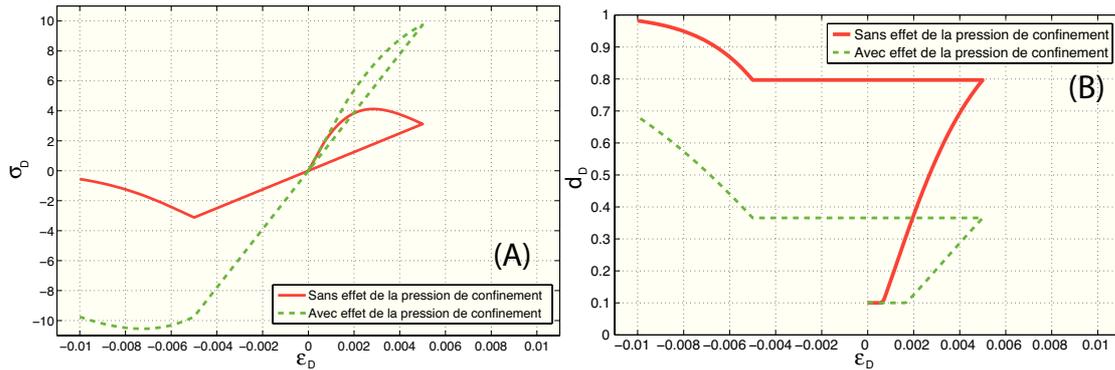


FIGURE 3.12 – Réponse contrainte-déformation déviatorique et évolution de l'endommagement d_D en fonction de la déformation déviatorique ε_D . La courbe rouge correspond à une déformation volumique nulle et la courbe verte à une déformation volumique égale à ε_V^{H10} .

3.4 Simulation des essais sur le matériau M1 et adaptation du modèle

Après l'identification des paramètres du comportement et l'étude de la réponse d'un microplan, le modèle est maintenant appliqué aux essais réalisés sur le matériau M1 et présentés dans le premier chapitre. Nous verrons que la simulation des essais alternés imposera une modification du modèle.

3.4.1 Simulation des essais monotones

Les figures 3.13 et 3.14 présentent les comparaisons entre expériences et simulations (calculs MATLAB) pour les essais de compression simple, de traction et de compression triaxiale à 5 et 10 MPa de confinement. On remarque que l'essai triaxial à 10 MPa est bien reproduit. On profite ici du fait qu'à 10 MPa, les paramètres ont été déduits directement des essais et que l'effectivité est nulle. Par contre, la réponse pour un confinement de 5 MPa varie peu de celle obtenue à 10 MPa. L'influence de la pression n'étant pas parfaitement traduite, il faudra revoir l'identification de a_5 ou la forme de la loi choisie pour p . On constate que malgré les grosses approximations

3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

que nous avons faite suite au « verrou » qu'impose le modèle sur les modules de cisaillement, les pieds de courbes sont bien représentés pour tous les essais. Durant la compression, l'endommagement atteint sa valeur maximale dans les directions où la déformation normale projetée est positive (la normale au plan est perpendiculaire à la direction de compression), . Dans les autres directions, soit l'endommagement évolue moins rapidement, soit il reste bloqué à la valeur du pré-dommage. L'effet du dommage sur la rigidité globale est même annulé par l'effectivité pour les fissures dont la normale est parallèle à la direction de compression.

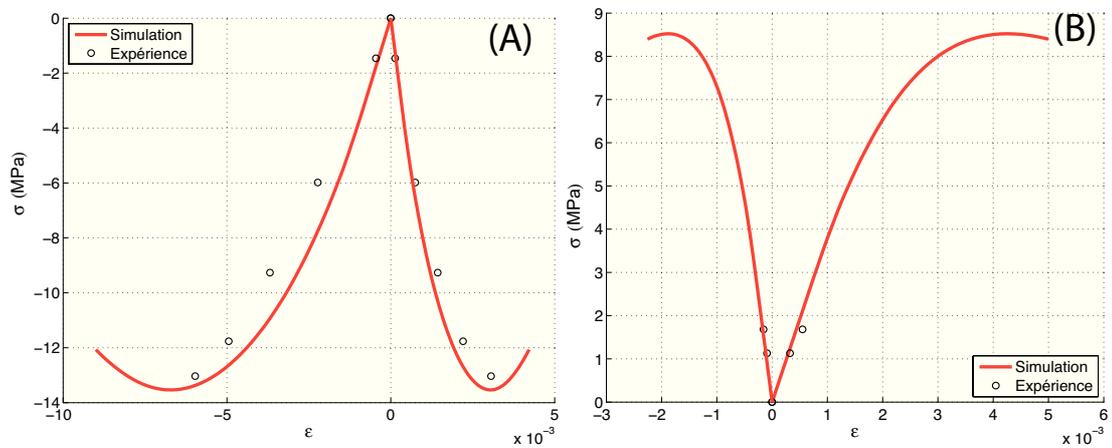


FIGURE 3.13 – Simulation des essais monotones de compression simple (A) et de traction simple (B) pour le matériau agrégataire M1 et le premier jeu de paramètres..

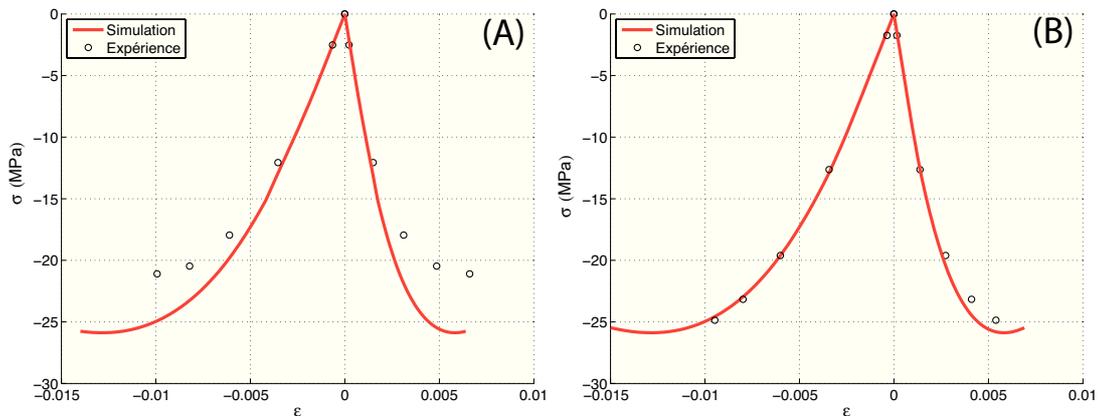


FIGURE 3.14 – Simulation des essais monotones de compression à 5 MPa (A) et 10 MPa (B) de confinement sur le matériau agrégataire M1 et le premier jeu de paramètres.

3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

La figure 3.13 (B) présente la simulation d'un essai de traction. Si les modules à l'origine sont bons, la contrainte maximale est mal reproduite car l'endommagement n'évolue pas assez vite lors de cet essai. La dissymétrie de comportement entre traction et compression simple n'est donc pas maîtrisée. Rappelons toutefois que les lois d'endommagement ont été identifiées à partir d'essais de compression. Pour cela, distinguons maintenant deux lois d'évolution des endommagements en fonction du signe de la déformation volumique. Lorsqu'elle est négative ou nulle (respectivement positive), le paramètre a_5 de l'équation 3.88 vaut $a_5 = 0,25$ (resp. $a'_5 = 1,5$). Donc le paramètre qui permet de tenir compte de la pression de confinement devient :

$$p = 1 + [a_5 H(-\varepsilon_V) + a'_5 H(\varepsilon_V)] k_V^0 < \varepsilon_V - \varepsilon_{V0}^{H10} >_+ \quad (3.89)$$

Finalement, cette démarche reproduit le modèle de Mazars où deux modes d'endommagement sont proposés. Par contre, pour nous, il s'agit de deux vitesses appliquées pour chaque microplan alternativement selon que l'on le soumet à une tension ou à une compression volumique. Avec cette adaptation du modèle d'endommagement, la nouvelle courbe de traction est donnée sur la figure 3.15.

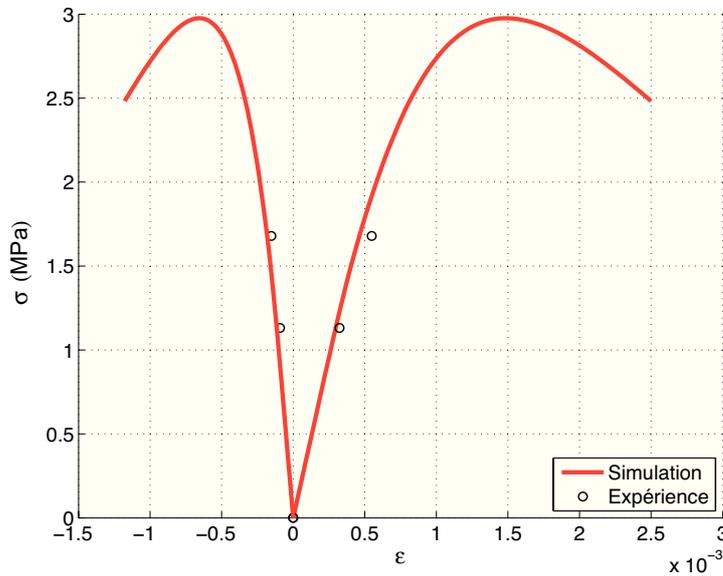


FIGURE 3.15 – Simulation de l'essai de traction simple avec une évolution adaptée au chargement de tension (second jeu de paramètres où $a_5 = 1,5$).

3.4.2 Simulation des essais alternant traction et compression

3.4.2.1 Traction puis compression

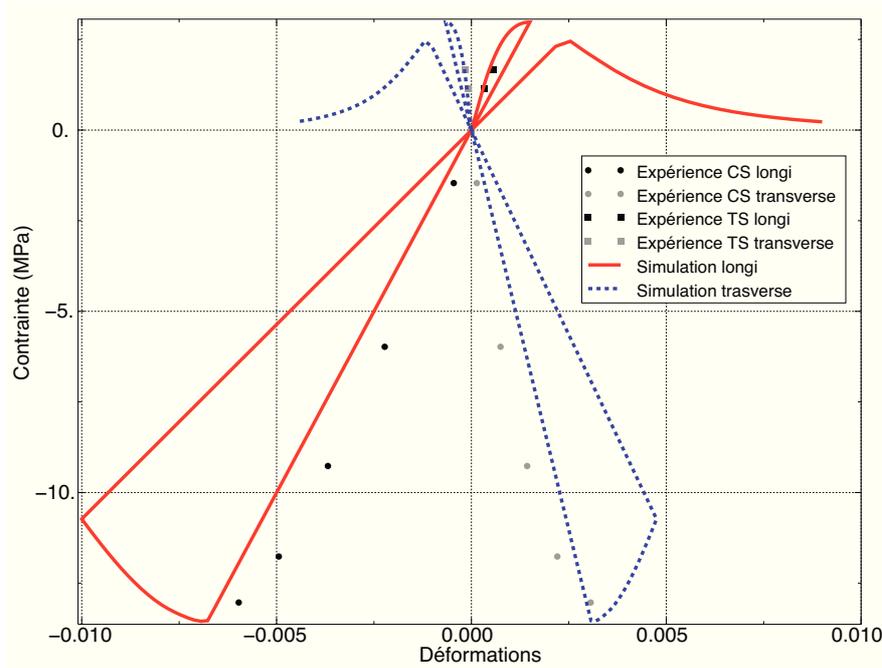


FIGURE 3.16 – Simulation, avec le second jeu de paramètres, d'un cycle de traction simple suivi d'une compression sur le matériau agrégataire M1. Les points expérimentaux rapportés sur la figure correspondent aux réponses expérimentales obtenues après les essais monotones correspondants.

La figure 3.16 présente la réponse contrainte-déformation pour un cycle traction-décharge-compression-décharge. En fin de première décharge, le module endommagé est égal à 2080 MPa. Le module subit une légère hausse de sa valeur pour atteindre 2115 MPa. Cette hausse est faible car elle n'est la conséquence que de l'effectivité sur la partie volumique de la loi de comportement. Afin d'étudier comment ajuster la reprise de raideur, nous avons calculé analytiquement l'équation reliant le module longitudinal global à la réponse d'un système contenant quatre familles de fissure (fig. 3.17). Le choix de ce système est justifié par (1) la difficulté de calculer ce module analytiquement pour un nombre important de systèmes de microfissures et (2) la nécessité de travailler avec un nombre suffisant de famille pour décrire les mécanismes d'ouverture-fermeture. Enfin, nous nous plaçons à l'origine c'est à dire dans un état où seuls les pré-dommages existent afin d'analyser l'effet de la direction de chargement depuis l'état au repos.

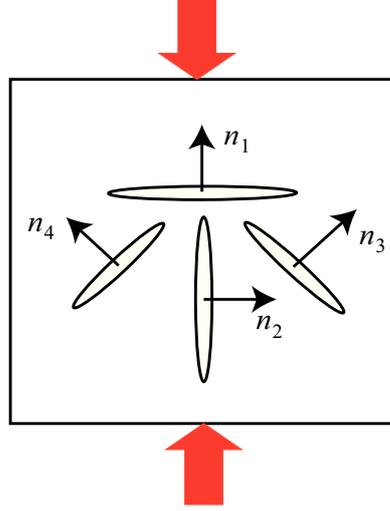


FIGURE 3.17 – Schématisation de la distribution des 4 systèmes de microfissures.

La démarche analytique consiste à :

- calculer la rigidité endommagée par ces 4 systèmes de microfissures,
- inverser cette rigidité pour obtenir la souplesse,
- inverser le premier terme de la souplesse pour revenir à l'expression du module longitudinal.

Le module longitudinal est donné par la relation suivante (l'exposant « 0 » désignant les pré-dommages est volontairement supprimé pour alléger l'expression) :

$$E_L = \frac{\mu (3 - 4(2 - d_D) d_D) (-16\mu d_D + 3k(3 - d_V))}{3(3k + \mu) - d_D(9k + 24\mu - 20\mu d_D) - 3k(1 - d_D) d_V} \quad (3.90)$$

Pour quantifier l'effet de l'endommagement volumique et déviatorique sur le module d'Young à l'origine, nous avons tracé l'évolution du rapport du module longitudinal sur le module du matériau sain en fonction de valeurs fictives pour d_V et d_D . On observe sur la figure 3.18 que le dommage volumique a peu d'effet sur le rapport des modules, et donc sur la reprise de raideur. En revanche, d_D a beaucoup d'influence sur le rapport des modules. Cette étude illustrative nous incite donc à introduire l'effectivité aussi sur la partie déviatorique. Le modèle est modifié comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{3}{4\pi} \rho_0 \int_{\Omega} [k_V (1 - \alpha_V (\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V] \mathbf{V} \\ &+ [\mu_D (1 - \alpha_D (\varepsilon_D) d_D) \varepsilon_D] \mathbf{D} + [\mu_T (1 - d_T) \boldsymbol{\varepsilon}_T] \cdot \mathbf{T} d\Omega \end{aligned}$$

L'analyse de la courbe 1.29 du premier chapitre montre une reprise partielle de la raideur initiale. Rappelons toutefois que les effets visqueux n'ont pas été éliminés

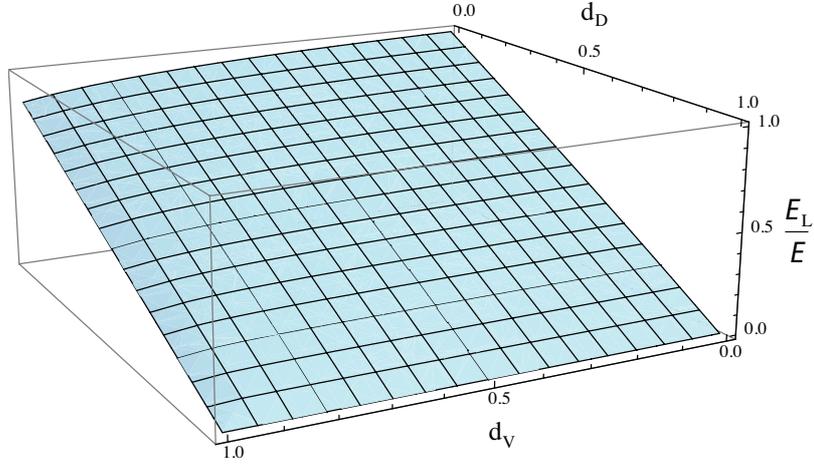


FIGURE 3.18 – Variation du rapport du module longitudinal endommagé sur le module sain en fonction des dommages d_V et d_D des 4 systèmes de microfissures.

de ces courbes car ces essais alternés n'intégraient pas des phases de relaxation et fluage. Nous avons remarqué lors des calculs qu'il est possible de régler l'ampleur de la reprise de raideur en admettant une faible perte d'effectivité. Par exemple, la loi ci-dessous :

$$\begin{cases} \varepsilon_D \leq 0 & \Rightarrow \alpha(\varepsilon_D) = a_6 = 0,5 \\ \varepsilon_D > 0 & \Rightarrow \alpha(\varepsilon_D) = 1 \end{cases} \quad (3.91)$$

induit une reprise de raideur partielle (le module initial n'est pas récupéré en totalité) au passage traction-compression. On dispose donc d'un moyen simple pour régler le modèle (la valeur de a_6 n'a pas été optimisée). La simulation de l'essai cyclé, avec ce troisième jeu de paramètres, permet de tracer la figure 3.19. Le module longitudinal endommagé en fin de traction est égal à 2400 MPa. Au début du chargement en compression simple, le module longitudinal devient égal à 2700 MPa, soit une reprise de 12 %. Le niveau de contrainte maximale est plutôt satisfaisant en traction comparé à l'expérience. Par contre, la courbe est trop raide en compression simple. Pour retrouver un comportement satisfaisant, il a suffi de modifier le paramètre a_3 ($a_3 = 12$). On obtient ainsi le quatrième et dernier jeu de paramètres.

La figure 3.20 illustre comment un microplan réagit maintenant lorsqu'il subit une sollicitation normale au plan à volume constant et sans déformation tangentielle. Les niveaux de contraintes maximum en compression sont nettement différents par rapport à la courbe 3.12 précédente. Dans les deux courbes (avec ou sans l'effet de la pression) et au début de la compression simple, les modules de cisaillement déviatoriques $\mu_{D_1}^{CS}$ et $\mu_{D_2}^{CS}$ sont différents du module initial $\mu_{D_1}^{TS}$ et du module en fin

3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

de traction $\mu_{D_2}^{TS}$.

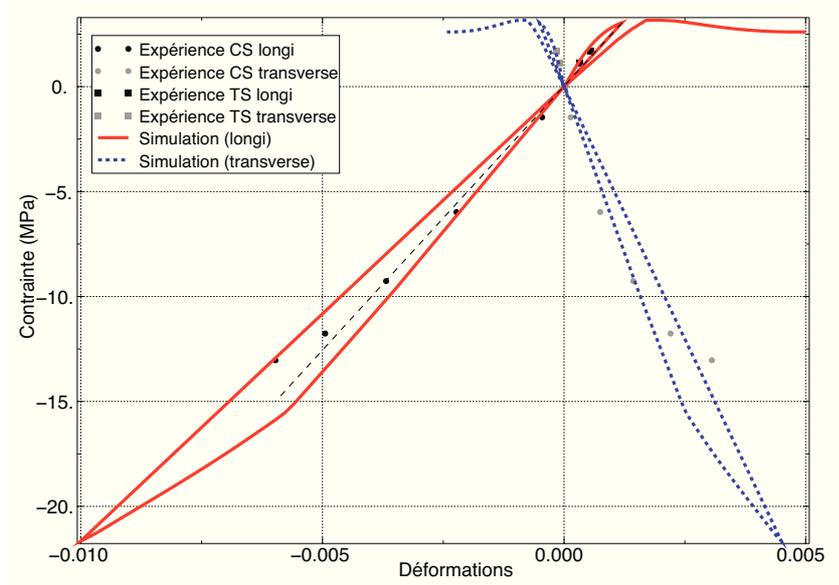


FIGURE 3.19 – Simulation, avec le troisième jeu de paramètres, d’un cycle de traction suivi d’une compression sur le matériau agrégataire M1. (trait pointillé noir) Module longitudinal endommagé par la première charge de traction.

Avec ces nouveaux paramètres, on simule l’essai de traction suivi d’une compression simple (figure 3.21). On remarque une nette amélioration au niveau de la contrainte maximale. L’allure de la courbe est plutôt satisfaisante comparée à l’expérience. Finalement, cette étude montre que l’on dispose de deux réglages. Le paramètre a_6 permet de régler les reprises de raideur quand la loi d’évolution du dommage induit la non linéarité du comportement. Ce dernier effet ne doit pas dominer aux faibles charges sous peine d’inhiber l’effet de a_6 .

3.4.2.2 Simulation d’un cycle de compression-traction

Pour une comparaison qualitative avec les essais expérimentaux réalisés sur le matériau M1, on propose de simuler un cycle de compression simple suivi d’une décharge, puis d’une traction (fig. 3.22). On remarque un changement de pente entre la décharge de compression et le passage en traction simple comme constaté expérimentalement. En effet le module en fin compression est de 2016 MPa. Au passage en traction le module est de l’ordre de 1864 MPa. Ce qui fait une diminution de module de l’ordre de 8 %.

3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

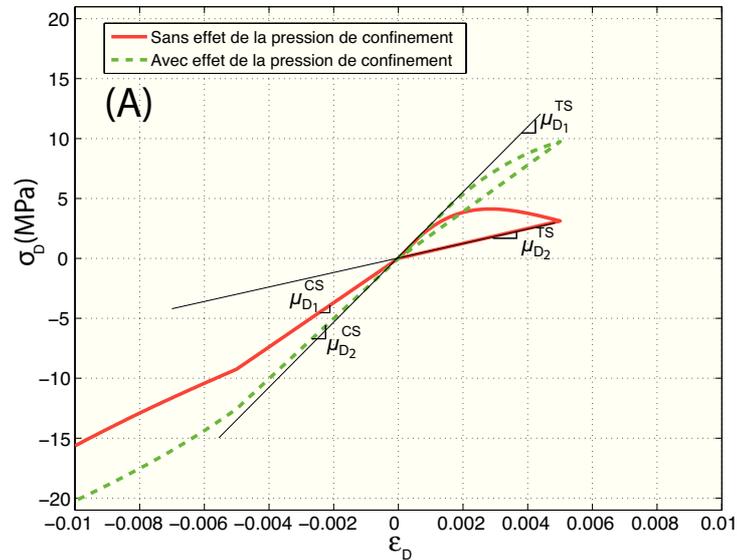


FIGURE 3.20 – Réponse déviatorique contrainte-déformation en fonction de ε_D avec une effectivité de 0,5 à la fermeture des microfissures.

k_V^0 (MPa)	$\mu_D^0 = \mu_T^0$ (MPa)	d_V^0	$d_D^0 = d_T^0$	a_3 (MPa ⁻¹)	a_4	a_5 ou a'_5 (MPa ⁻¹)	ε_V^0
21500	3070	0,2	0,1	12	$\frac{2}{3}$	0,25 ou 1,5	$4,65 \cdot 10^{-4}$

TABLE 3.3 – Tableau final des paramètres du modèle VDT avec effet unilatéral pour le matériau agrégataire M1.

Cette diminution de module est due à la réouverture des défauts existants ou créés lors du chargement en compression. Ce mécanisme est pris en compte ici par les fonctions d'effectivité α_D et α_V .

3.4.3 Confrontation du modèle à l'expérience avec le jeu de paramètres final

On rappelle le tableau 3.3 des paramètres réactualisés après la prise en compte de l'effectivité sur la partie déviatorique α_D .

On re-simule les essais monotones de traction simple et compression simple et sous 5 et 10 MPa de confinement avec ce jeu de paramètres (figure 3.23). On remarque que les courbes des simulations des essais monotones suivent bien les courbes expé-

3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

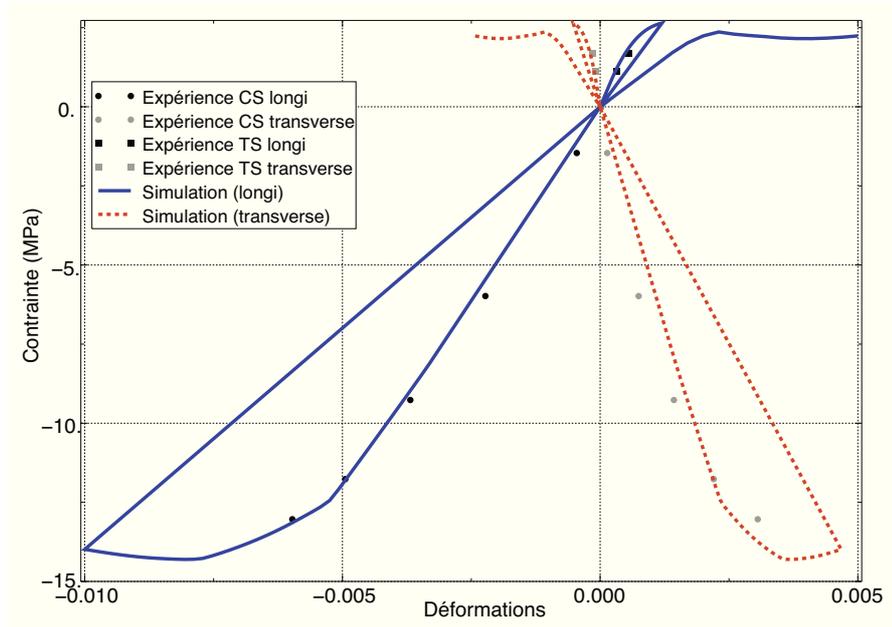


FIGURE 3.21 – Simulation, avec le jeu de paramètre final, d'un cycle de traction simple suivi d'une compression sur le matériau agrégataire M1.

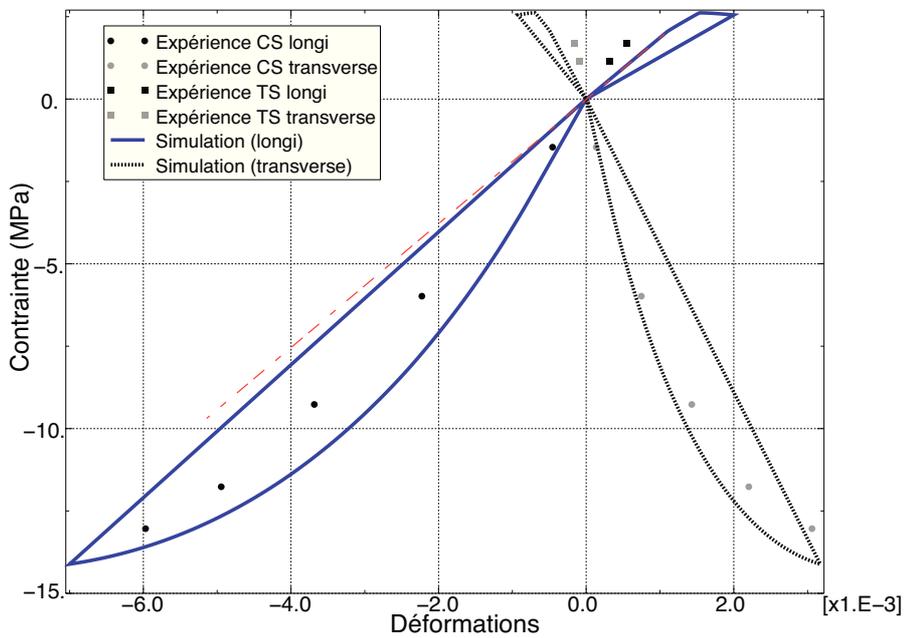


FIGURE 3.22 – Simulation d'un cycle de compression simple suivi d'une traction sur le matériau agrégataire M1.

rimentales.

3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

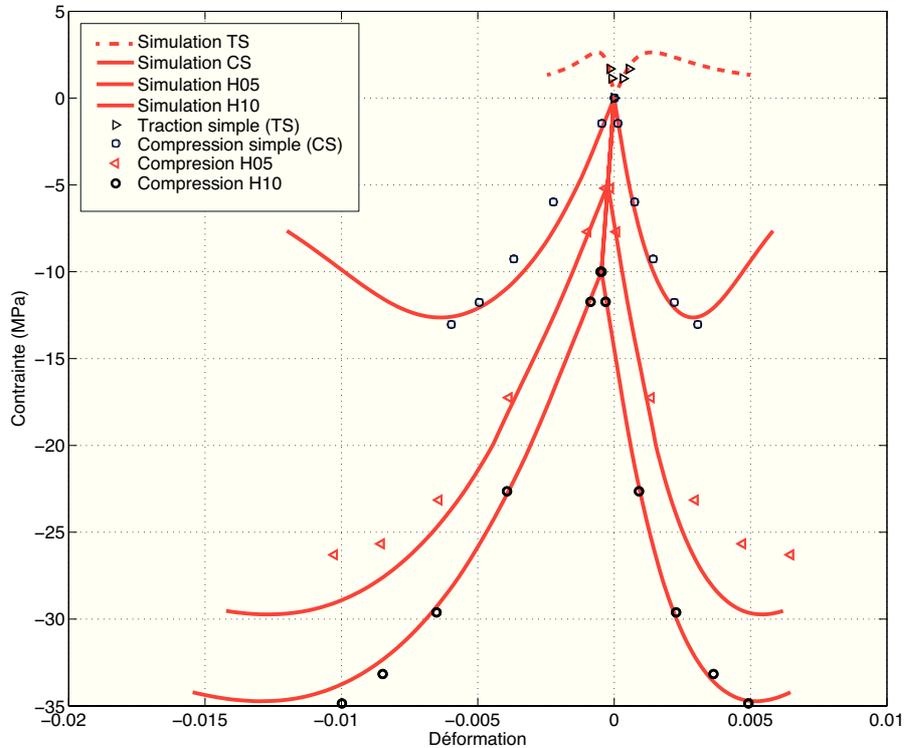


FIGURE 3.23 – Simulation des essais de traction simple, compression simple et compression sous 5 et 10 MPa de confinement sur le matériau agrégataire M1.

Dans le premier chapitre, on a tracé l'évolution des raideurs longitudinales et transversales en fonction de la contrainte relaxée (fig. 1.26) pour quantifier l'évolution des modules en fonction de l'endommagement. On propose de confronter la réponse du modèle à ses résultats expérimentaux. Les figures 3.24 (A) et (B) représentent respectivement l'évolution des raideurs longitudinales et transversales en fonction de la contrainte relaxée. Le modèle prédit bien la dégradation de ces modules dans tous les essais.

Les figures 3.25 (A) et (B) représentent, respectivement, la dégradation des rigidités longitudinales et transversales. Sur la figure 3.25 (A), on remarque que les courbes expérience de traction simple et compression simple sont groupées avec les courbes simulation. Cependant l'évolution de la dégradation en compression simple en simulation reste nettement supérieure à celle en expérience. Les courbes de compression avec confinement sont aussi regroupées avec l'expérience au pied des courbes. Par contre l'évolution reste aussi forte en simulation par rapport à l'expérience. On peut déduire que il reste un affinement des paramètres d'évolution pour confondre l'évolution en simulation avec celle en expérience sur ce module longitudinal.

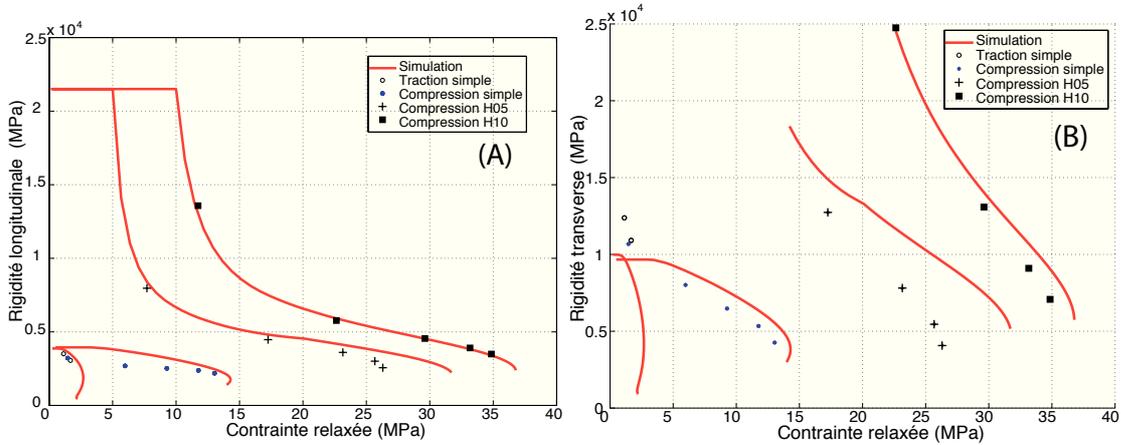


FIGURE 3.24 – Évolution des rigidités élastiques longitudinales et transversales en fonction de la contrainte relaxée, confrontation simulation-expérience des essais de traction simple, compression simple et compression sous 5 et 10 MPa de confinement sur le matériau agrégataire M1.

La figure 3.25 (B) décrit l'évolution de la dégradation du module transversal. Mise à part l'essai de compression à 5 MPa de confinement, on observe une concordance entre les courbes de la simulation et les courbes expérience. On note que l'effet de la pression de confinement est introduit de façon linéaire dans la loi d'évolution du dommage. En perspective, une modification sur la manière d'introduire l'effet de la pression permettra d'affiner la prédiction du modèle.

3.5 Simulations prospectives

3.5.1 Cycle de compression-traction avec 10 MPa de confinement

La simulation commence par un confinement de 10 MPa puis une compression suivi d'une décharge et, ensuite, d'une traction. (fig. 3.26). On remarque deux changements de pente; le point (1) 10 MPa de confinement et le point (2) à contrainte nulle lors du passage en traction. Le premier correspond au point où l'effectivité de dommage s'active et le deuxième point correspond à l'effet de la pression qui n'est pas pris en compte en traction.

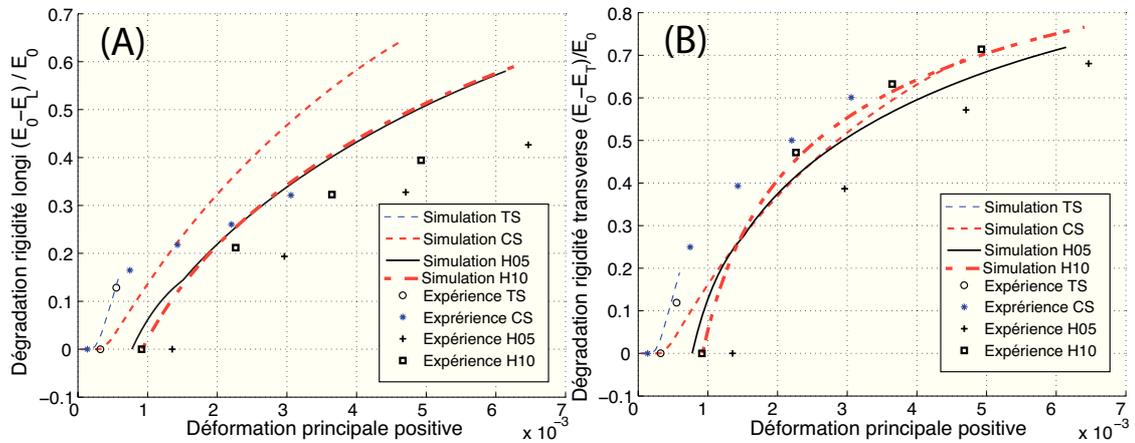


FIGURE 3.25 – Degré de dégradation des raideurs longitudinales et transversales en fonction de la déformation élastique principale positive, confrontation simulation-expérience des essais de traction simple (TS), compression simple (CS) et compression sous 5 et 10 MPa de confinement (H05 et H10) sur le matériau agrégataire M1.

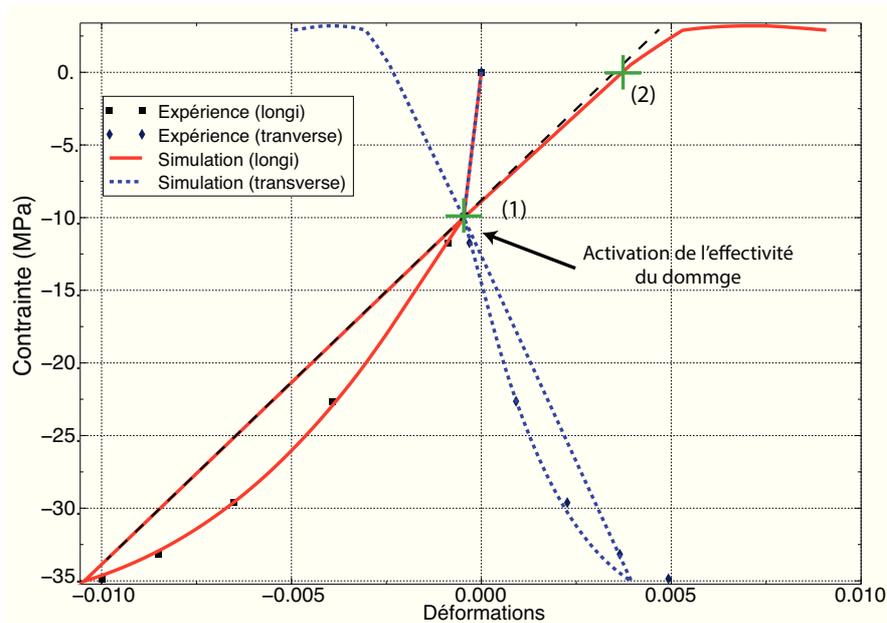


FIGURE 3.26 – Simulation d'un confinement de 10 MPa puis d'une compression suivie d'une décharge.

3.5.2 Sollicitation de cisaillement pure

Les réponses à des essais de torsion avec ou sans confinement sont données sur la figure 3.27. On constate que le modèle ne permet pas de reproduire un module élastique de cisaillement initial dépendant de la pression de confinement. On re-

trouve par contre l'effet du confinement sur la forme des courbes et notamment les contraintes de cisaillement maximales atteintes. Pour intégrer plus de non linéarité dans les courbes de cisaillement, la loi d'évolution de l'endommagement tangentiel pourrait être adaptée, par exemple en amplifiant l'effet de la variable P , connaissant la réponse en cisaillement du matériau. Ces essais font actuellement défaut.

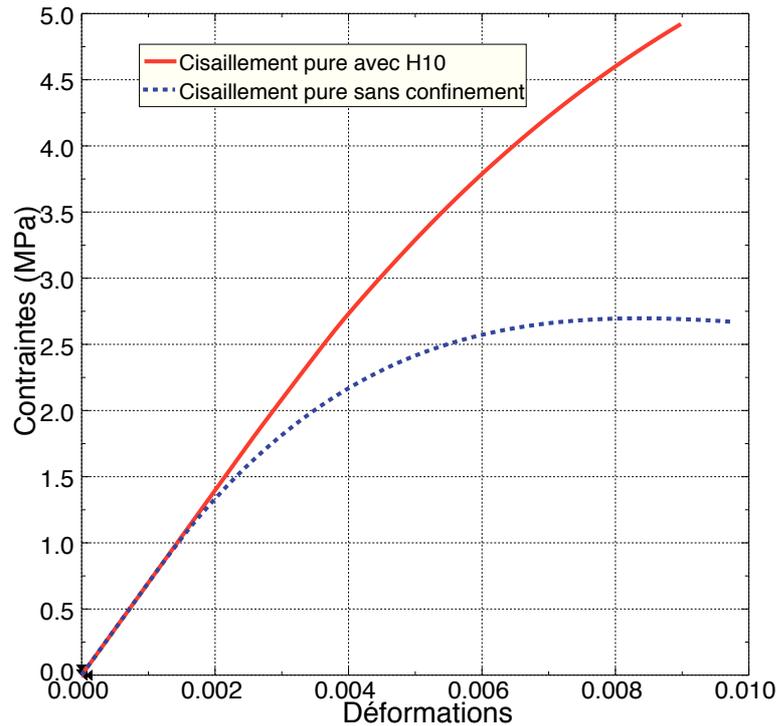


FIGURE 3.27 – Simulation d'un essai de cisaillement pure avec ou sans confinement de 10 MPa sur le matériau agrégataire M1.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons implémenté deux mécanismes d'effectivité dans le modèle VDT en respectant le cadre thermodynamique. Pour obtenir une dissipation nulle, ces mécanismes ne sont gouvernés que par les déformations qui leur sont associées. Ce choix induit le « verrou » analytique suivant : le module de cisaillement à l'origine n'est pas fonction de la pression de confinement. Pour valider ou non cette hypothèse, nous préconisons de réaliser des essais de cisaillement sous confinement. De simples fonctions Heaviside ont été employées pour gérer les variations de raideurs sur chaque microplans. Notons que pour l'endommagement déviatorique,

nous pouvons piloter une perte partielle d'effectivité, et donc la reprise partielle de module, au passage traction-compression. Puisqu'aucun mécanisme dissipatif n'est introduit, les variations brusques de raideurs se font à déformation élastique nulle pour annuler le saut de contrainte résultant de la variation de rigidité.

Pour les chargements de compression, l'effet du confinement a été pris en compte dans l'évolution du dommage. Cela nous a permis d'identifier le modèle sur l'essai triaxial H10 puis de traduire le comportement observé en compression simple. A l'image de ce qui a été proposé dans certains modèles pour les bétons, nous avons intégré deux lois d'endommagement pour maîtriser la dissymétrie traction-compression. Une fois déterminés les pré-dommages, le modèle n'est régi que par 5 paramètres dont 4 règlent l'évolution des trois variables d'endommagement et le dernier la perte partielle d'effectivité. Les paramètres sont donnés dans le tableau [3.3](#).

Le comportement du matériau décrit au premier chapitre montre l'existence de phénomènes irréversibles. Leur prise en compte est l'objet du chapitre suivant.