Calcul de Malliavin

Introduction au calcul de Malliavin

En dimension finie, le calcul différentiel usuel traduit la dépendance d'une fonction par rapport aux coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Le calcul de Malliavin est un calcul différentiel mais sur un espace de dimension infinie, l'espace de Wiener $C([0,1],\mathbb{R}^d)$. Sur cet espace, une trajectoire du Brownien peut-être comprise comme la fonction continue la plus générale qui soit. Les trajectoires du Brownien sont les pendants des vecteurs en dimension infinie : l'opérateur de différentiation, ou derivée de Malliavin D, traduit la dépendance d'une variable aléatoire par rapport aux accroisements d'une trajectoire du Brownien. Nous nous limiterons aux outils nécessaires à la compréhension de ce mémoire.

2.1 Opérateur de Dérivation

Soit $C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ la classe des fonctions $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ infiniment dérivables et telles que f ainsi que toutes ses dérivées partielles soient bornées. Notons S la classe des fonctionnelles cylindriques de la forme

$$F = f(B^H(\varphi_1),\dots,B^H(\varphi_n)), \tag{2.1}$$

où $f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\varphi_1,\ \dots,\ \varphi_n\in\mathcal{H}$, $n\geq 1$ et $B^H(\varphi)$ désigne l'image de φ par l'isométrie entre $\mathcal{H}$ et l'espace gaussien associé au processus B^H. L'opérateur de dérivation, au sens de Malliavin, d'une fonctionnelle de la forme (2.1) est alors l'application $D:S\to L^2(\Omega,\mathcal{H})$ définie par

$$DF=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B(\varphi_1),\dots,B(\varphi_n))\varphi_i,$$

si $k\geq 1$ et $p\geq 1$, on note $\mathbb{D}^{k,p}$ l'espace de Sobolev définie comme la fermeture de S par rapport à la norme

$$||F||_{k,p}^p=\mathbb{E}[|F|^p]+\sum_{j=1}^k ||D^jF||^p_{L^2(\Omega,\mathcal{H}^{\otimes j})},$$

où D^j est l'opérateur de dérivation D itéré j fois.

2.2 Opérateur de Divergence

L'opérateur de divergence (ou opérateur de Skorohod) noté S est l'ajoint de l'opérateur D et est défini par la relation de dualité

$$\mathbb{E}[F\delta(u)]=\mathbb{E}[\langle DF,u\rangle_{\mathcal{H}}],$$

$u \in L^2(\Omega, \mathcal{H})$, $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Le domaine de δ, noté $Dom(\delta)$, est l'ensemble des processus $u \in L^2(\Omega, \mathcal{H})$ tels que

$$\mathbb{E}[\langle DF, u\rangle] \leq C\sqrt{\mathbb{E}(F^2)} = C||F||_{L^2}$$

pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, et où C est une constante pouvant dépendre de u. De plus, si u est adapté à la filtration engendrée par B^H, L'opérateur de divergence coïncide avec l'intégrale d'Ito. C'est ce qui motive le fait que l'opérateur de divergence $\delta(u)$ puisse également être noté

$$\delta(u) = \int_0^T u_s \delta B_s.$$

2.3 Formule d'intégration par partie

Soient $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $u \in Dom(\delta)$. Supposons de plus que les quantités aléatoires Fu et $F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}$ soient de carré intégrable. Alors on a la relation suivante, connue sous le nom de formule d'intégration par partie

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Soit (u_n) une suite de $Dom(\delta)$ qui converge vers u dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$. Supposons aussi que $\delta(u_n)$ converge dans $L^1(\Omega)$ vers une variable aléatoire de carré intégrable G. On a alors le résultat suivant, $u \in Dom(\delta)$ et $\delta(u) = G$.

2.4 Intégrales stochastiques multiples

On suppose ici que B est un mouvement brownien, auquel cas $\mathcal{H} = L^2([0, T])$. Soit S_n l'ensemble des fonctions simples à n variables de la forme

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1} c_{i_1}, \ldots, c_{i_m} 1_{A_{i_1}} \cdots 1_{A_{i_m}},$$

où les coefficients $c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}$ sont nuls si deux indices i_k et i_l sont egaux et où les boréliens $A_{i_k} \in \mathcal{B}([0, 1])$ sont deux à deux disjoints. Pour une telle fonction, on définit l'intégrale stochastique multiple d'ordre n par

$$I_n(f) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1} B(A_{i_1}) \cdots B(A_{i_m})$$

où l'on a noté $B(A) := B(1_A)$ pour $A \in \mathcal{B}([0, T])$. On notera que pour tout $n \geq 1$, I_n est une application linéaire continue entre S_n et $L^2(\Omega)$. I_n vérifie la propriété suivante : pour tout $h \in \mathcal{H}$ tel que $||h||_{\mathcal{H}} = 1$, on a $I_n(h^{\otimes}(n)) = n! H_n(B^H(h))$, où $H_n(x)$ est le n^{ieme} polynôme de Hermite défini par :

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-}\frac{x^2}{2}).$$

Pour tout $n \geq 1$ et avec $H_0 = 1$. On définit alors le $n^i eme$ chaos de Wiener, noté $\mathcal{H}_n$, comme étant la fermeture dans $L^2(\Omega)$ du sous-espace engendré par $\{H_n(B^H(h)), h \in \mathcal{H}, ||h||_{\mathcal{H}} = 1\}$. Par orthogonalité des polynômes de Hermite, on a

$$\mathbb{E}[I_n(f) I_m(g)] = \begin{cases} n! \left\langle \tilde{f}, \tilde{g} \right\rangle_{L^2([0,T]^n)} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

De plus, on a $I_n(f) = I_m(\tilde{f})$ où $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \sigma([1,n])} f(x_\sigma(1), \ldots, x_\sigma(n))$$

désigne la fonction symétrique de f. L'ensemble S_n étant dense dans $L^2([0,T]^n)$ pour tout $n \geq 1$, l'opérateur I_n peut-être étendue en une application linéaire continue de $L^2([0,T]^n)$ dans $L^2(\Omega)$ et les propriétés énconcées ci-dessus sont également vérifiées pour cette extension. Notons que I_n peut aussi s'écrire comme une intégrale stochastique itérée dans laquelle les intégrales s'éntendent au sens d'Ito :

$$I_n(f) = n! \int_0^T \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} f(t_1, \ldots, t_n) dB_{t_1}^H \cdots dB_{t_n}^H.$$

Le produit de deux intégrales stochastiques multiples peut s'écrire comme une somme finie d'intégrales stochastiques multiples. En effet, si $f \in L^2([0,T]^n)$ et $g \in L^2([0,T]^m)$ sont des fonctions symétriques, alors

$$I_n(f)I_m(g) = \sum_{l=0}^{n \wedge m} l! \mathrm{C}_m^l \mathrm{C}_n^l I_{n+m-2l}(f \otimes_l g),$$

où la contraction $f \otimes_l g \in L^2([0,T]^{m+n-2l})$ est donnée, pour $1 \leq l \leq n \wedge m$ par

$$(f \otimes_l g)(s_1, \ldots, s_{n-l}, t_1, \ldots, t_{m-l}) = \int_{[0,T]^l} f(s_1, \ldots, s_{n-l}, u_1, \ldots, u_l) g(t_1, \ldots, t_{m-l}, u_1, \ldots, u_l) du_1 \cdots du_l.$$

Le cas $l = 0$ correspond au produit tensoriel. Toute variable aléatoire F de carré intégrable mesurable par rapport à la σ-algebre engendrée par B peut-être décomposée de manière unique comme une somme orthogonale de chaos de Wiener :

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \tag{2.2}$$

où $f_0 = \mathbb{E}[F]$ et I_0 est l'application identité sur les constantes.

Les noyaux f_n sont des fonctions symétriques déterminées de manière unique par la formule de Stroock

$$f_n = \frac{1}{n!} \mathbb{E}[D^n F].$$

2.5 Opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck, noté L, défini sur $Dom(L) = \mathbb{D}^{1,2}$, est donné par :

$$LF = -\sum_{n \geq 0} n I_n(f_n).$$

Proposition 2.1. *Soit $F \in S(X)$. Alors $F \in Dom(L)$, et de plus*

$$LF = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} f(X(h_1), \cdots, X(h_m)) \langle h_i, h_j \rangle_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial X_i} f(X(h_1), \cdots, X(h_m)) X(h_i).$$

Définition 2.1. *Soit* $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L_0^2(\sigma(X))$.
Le pseudo-inverse de L est un opérateur lineaire noté L^{-1} *défini dans* $L^2(\Omega)$ *par*

$$L^{-1}F = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I_n(f_n)$$

$F \in L_0^2(\sigma(X))$, *on a* $L^{-1}F \in Dom(L)$, *et* $LL^{-1} = F$.

Théorème 2.1. $(\delta D = -L)$
$F \in L^2(\sigma(X))$, *on a* $F \in dom(L)$ *si seulement si* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ *et* $DF \in Dom(\delta)$. *Dans ce cas, on a :* $\delta DF = -LF$

Théorème 2.2. *Soit* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ *est telle que* $\mathbb{E}[F] = 0$, *et considérons une* $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Supposons que :*
♣ *ou bien h est continûment différentiable et de dérivée première bornée*
♣ *ou bien h est lipschitzienne et la loi de F est absolument continue.*
Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Fh(F)] &= \mathbb{E}[h'(F)\left\langle DF, -DL^{-1}F\right\rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E}[h'(F)\mathbb{E}[\left\langle DF, -DL^{-1}F\right\rangle_{\mathcal{H}}|F]]. \end{aligned}$$

Démonstration. Grâce à la régle de la chaine (Formule), $h(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $Dh(F) = h'(F)DF$. Par le théorème $(\delta D = -L)$, on peut écrire $F = LL'F = -\delta DL^{-1}F = \delta(-DL^{-1}F)$
Finalement, Par la formule d'intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Fh(F)] &= \mathbb{E}[\delta(-DL^{-1}F)h(F)] \\ &= \mathbb{E}[\langle Dh(F), -DL'F\rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E}[h'(F)\left\langle DF, -DL^{-1}F\right\rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E}[h'(F)\mathbb{E}[\left\langle DF, -DL^{-1}F\right\rangle_{\mathcal{H}}|F]]. \end{aligned}$$

□

Exemple 2.1. *Si* $F = I_n(f)$ *où* $q \leq 1$ *et* $f \in \mathcal{H}^{\odot q}$, *alors* $L^{-1}F = -q^{-1}F$ *et*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Fh(F)] &= \frac{1}{q}\mathbb{E}[h'(F)||DF||_{\mathcal{H}}^2] \\ &= \frac{1}{q}\mathbb{E}[h'(F)\mathbb{E}[||DF||_{\mathcal{H}}^2|F]]. \end{aligned}$$

Exemple 2.2. *Si* $q \geq 2$, *alors pour tout* $n \geq 0$, *nous avons*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F^n||DF||_{\mathcal{H}}^2] &= \mathbb{E}[F^n\langle DF, DF\rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E}[F^n\left\langle DF, D(F^{n+1})\right\rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \frac{1}{n+1}\mathbb{E}[\delta(DF)F^{n+1}] \\ &= \frac{q}{n+1}\mathbb{E}[F^{n+2}], \end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\delta DF = -LF = qF.$$

Propriétés de $\left\langle DF, -DL^{-1}F \right\rangle_{\mathcal{H}}$

Proposition 2.2. *Soit* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ *tel que* $\mathbb{E}[F] = 0$. *Alors*
$\mathbb{E}[\langle DF, -DL^{-1}F\rangle_{\mathcal{H}} |F] \geq 0$ $\mathbb{P} - p.s.$

Démonstration. Soit h une fonction réelle positive et soit $H(X) = \int_0^X h(u)du$ avec l'utilisation de la convention $\int_0^X = -\int_X^0$ pour $X < 0$.
H est croissante et nulle en 0, nous avons $XH(X) \geq 0$ $\forall X \in \mathbb{R}$.
En particulier $\mathbb{E}[FH(F)] \geq 0$. De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[FH(F)] &= \mathbb{E}[\left\langle DF, -DL^{-1}F \right\rangle_{\mathcal{H}} |h(F)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\left\langle DF, -DL^{-1}F \right\rangle_{\mathcal{H}} |F]h(F)]. \end{aligned}$$

Ainsi nous en déduisons que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\langle DF, -DL^{-1}F\rangle_{\mathcal{H}} |F]1_A] \geq 0$ $\forall$ A $\delta(F)$-mesurable.
D'où le résultat desiré. □