

Algèbres de Hecke cyclotomiques éléments de Jucys–Murphy, représentations et limite classique

Sommaire

II.1 Introduction	41
II.1.1 Organisation du chapitre	43
II.2 Algèbres de Hecke cyclotomiques et éléments de Jucys–Murphy	47
II.3 Spectre des éléments de Jucys–Murphy et m-tableaux de Young	49
II.4 Construction des représentations	54
II.4.1 Éléments Baxterisés	54
II.4.2 Produit smash	56
II.4.3 Représentations	60
II.4.4 Produit scalaire	62
Appendice II.4.A Structure de module sur les produits tensoriels	67
II.4.A.1 Définition du produit tensoriel $\hat{\otimes}$	68
II.4.A.2 Règles de décomposition	70
II.5 Complétude	78
II.6 Limite classique	82
II.6.1 Groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n)$	84
II.6.2 Éléments de Jucys–Murphy	85
II.6.3 Algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique	85
II.6.4 Spectre des éléments de Jucys–Murphy classiques	89
II.6.5 Construction des représentations	93
II.6.5.1 Éléments Baxterisés	94
II.6.5.2 Produit smash classique	95
II.6.5.3 Représentations	97
II.6.5.4 Produit scalaire	98
II.6.6 Complétude	101
Appendice II.6.A Structure de l’algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique	103

II.1 Introduction

L’algèbre de Hecke de type A, $H_n(q)$, est une déformation à un paramètre de l’algèbre du groupe symétrique (voir le Chapitre *Introduction générale*). Nous omettrons la plupart de temps la référence au paramètre de déformation q et écrirons simplement H_n (pour les autres familles d’algèbres apparaissant dans ce Chapitre, la référence aux paramètres sera aussi très souvent omise).

Les algèbres de Hecke H_n forment, par rapport à n , une chaîne ascendante d’algèbres. Ces algèbres possèdent un ensemble d’éléments de Jucys–Murphy. C’est un ensemble commutatif maximal (pour q générique et dans la limite classique) dont les avantages sont : description explicite (comparativement aux autres ensembles maximaux commutatifs découverts dans l’étude des modèles de chaînes de spin) et une relation simple avec les centralisateurs des membres de la chaîne. De plus, la formule inductive pour les éléments de Jucys–Murphy peut être relevée au niveau universel : il existe une chaîne d’algèbres de Hecke affines \hat{H}_n pour lesquelles on définit également les éléments de Jucys–Murphy ; la sous-algèbre de \hat{H}_n engendrée par les éléments de Jucys–Murphy est isomorphe à une algèbre polynômiale et il existe une surjection $\hat{H}_n \rightarrow H_n$ qui envoie les éléments de Jucys–Murphy de l’algèbre de Hecke affine aux éléments de Jucys–Murphy de l’algèbre de Hecke H_n .

Le principal objet d’étude de ce Chapitre est l’algèbre de Hecke, que nous notons $H(m, 1, n)$, associée au groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n)$. L’algèbre $H(m, 1, n)$ a été introduite dans [4, 10, 16] et est appelée l’algèbre de Hecke cyclotomique (ou aussi algèbre de Ariki–Koike). Pour $m = 1$ elle est l’algèbre de Hecke de type A, et pour $m = 2$ elle est l’algèbre de Hecke de type B. La théorie des représentations de l’algèbre $H(m, 1, n)$ a été développée dans [4] (et dans [36] pour l’algèbre de Hecke de type B) ; les représentations irréductibles de l’algèbre $H(m, 1, n)$ sont labellisées, comme pour le groupe $G(m, 1, n)$, par les m -uplets de diagrammes de Young.

Les algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m, 1, n)$ forment aussi (comme les algèbres de Hecke usuelles), par rapport à n , une chaîne ascendante d’algèbres. De plus, l’algèbre $H(m, 1, n)$ est naturellement un quotient de l’algèbre de Hecke affine \hat{H}_n et hérite ainsi de l’ensemble d’éléments de Jucys–Murphy de l’algèbre de Hecke affine. Un objectif de ce Chapitre est de reproduire la théorie des représentations de l’algèbre de Hecke cyclotomique en analysant le spectre des éléments de Jucys–Murphy. Nous généralisons l’approche de Okounkov et Vershik à la théorie des représentations de l’algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$; nous construisons les représentations irréductibles et montrons que l’utilisation de cette approche permet de décrire toutes les représentations irréductibles de $H(m, 1, n)$ sous certaines conditions (légèrement plus fortes que les conditions de semi-simplicité) sur les paramètres de l’algèbre $H(m, 1, n)$.

Nous insistons sur le fait que notre objectif ici n’est pas la construction de la théorie des représentations en soi - elle a déjà été construite dans [4] - mais nous voulons retrouver les représentations directement à partir de l’analyse des opérateurs de Jucys–Murphy, encoder les bases des représentations en terme d’ensembles de nombres qui satisfont à des règles simples, et qui sont en fait les ensemble

de valeurs propres communes des éléments de Jucys–Murphy, et réinterpréter les multi-tableaux de Young en terme de lignes de valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy. Il suit de la construction des bases des représentations que l'ensemble des éléments de Jucys–Murphy est commutatif *maximal* (cette observation est présente dans [4]). L'approche, basée sur les opérateurs de Jucys–Murphy, est de nature récursive - elle utilise la structure de chaîne ascendante, par rapport à n , des algèbres cyclotomiques $H(m, 1, n)$.

Comme l'algèbre de Hecke cyclotomique est un quotient de l'algèbre de Hecke affine, une représentation de l'algèbre de Hecke cyclotomique est aussi une représentation de l'algèbre de Hecke affine. Les représentations des algèbres de Hecke affines sont habituellement exprimées dans un langage différent, voir [1, 3, 6, 93, 99, 109] pour les papiers originaux et des articles de revues sur les situations classique et q -déformée.

Une nouveauté de la construction présentée ici des représentations de l'algèbre de Hecke cyclotomique consiste en l'introduction d'une nouvelle algèbre associative. Nous équipons d'une structure d'algèbre le produit tensoriel de l'algèbre $H(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m -tableaux standards correspondant aux m -partitions de n . Nous notons l'algèbre qui résulte de cette construction par \mathfrak{T} . Les représentations sont ensuite construites par évaluation à droite avec l'aide de la représentation unidimensionnelle la plus simple de $H(m, 1, n)$. Il existe un homomorphisme "d'évaluation" naturel de \mathfrak{T} vers $H(m, 1, n)$ envoyant le générateur associé à un m -tableau standard à l'idempotent correspondant de l'algèbre $H(m, 1, n)$.

Une conséquence intéressante de l'existence de ce "produit smash" avec l'algèbre libre est une structure de $H(m, 1, n)$ -module sur le produit tensoriel de représentations correspondant à deux (en général, un nombre arbitraire de) m -partitions. Nous déterminons les règles de décomposition de ces produits tensoriels en sommes directes de représentations irréductibles. Les règles de décomposition elles-mêmes sont plutôt simples : $V_{\lambda^{(m)}} \otimes V_{\lambda'^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}}) V_{\lambda^{(m)}}$; pourtant un opérateur d'entrelacement, établissant l'isomorphisme, est difficile à décrire explicitement - déjà pour de petits n le choix le plus simple d'un opérateur d'entrelacement est relativement complexe. Par ailleurs, pour obtenir les règles de décomposition nous avons besoin du résultat de complétude qui assure que tout $H(m, 1, n)$ -module est isomorphe à une somme directe de $H(m, 1, n)$ -modules correspondant à des m -partitions de n ; pourtant la définition de la structure de module sur le produit tensoriel n'utilise pas la complétude. Nous pensons que la structure de module sur le produit tensoriel mérite une étude plus poussée.

L'espace vectoriel d'une représentation obtenue avec l'aide du produit smash est équipé d'une base distinguée qui est analogue à la base semi-normale pour les représentations du groupe symétrique. Il s'avère qu'il existe plusieurs analogues d'un produit scalaire invariant sur les espaces des représentations. L'un est bilinéaire, les définitions des autres utilisent la conjugaison complexe, ainsi que l'involution $\omega: q \rightarrow q^{-1}, v_j \rightarrow v_j^{-1}, j = 1, \dots, m$ (q et $v_j, j = 1, \dots, m$, sont les paramètres de l'algèbre $H(m, 1, n)$, voir Section II.2 pour les définitions précises). Nous calculons ces produits pour toute représentation irréductible de $H(m, 1, n)$, construisant ainsi les analogues des représentations orthogonales du groupe symétrique. En conséquence, une large classe de représentations irréductibles de dimension finie de l'algèbre de Hecke affine sont unitarisables dans un certain sens. Si les paramètres q et $v_j, j = 1, \dots, m$, de l'algèbre $H(m, 1, n)$ prennent des valeurs dans le cercle unitaire (dans \mathbb{C})

alors un de ces produits devient un produit Hermitien usuel.

L'approche inductive pour la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke usuelle (de type A) utilise de manière cruciale la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke affine de type A. On pourrait s'attendre à ce que il soit nécessaire d'utiliser ici les représentations de l'algèbre de Hecke affine de type B (voir [25, 72] pour les définitions) pour la théorie des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques. Mais – et cela peut être surprenant – dans le cas non-dégénéré, la théorie des représentations des algèbres $H(m, 1, n)$, par l'approche inductive, requiert également l'étude de l'algèbre de Hecke affine de type A. Pourtant, dans la limite classique, une certaine version d'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique, que nous notons $\mathfrak{A}_{m,n}$ dans le texte, apparaît; les représentations de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique la plus simple, $\mathfrak{A}_{m,2}$, servent pour l'étude de la théorie des représentations du groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n)$ – la limite classique de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$.

Les algèbres $\mathfrak{A}_{m,n}$ pour tout $m = 1, 2, \dots$ peuvent être obtenues par une certaine limite à partir d'une seule et même algèbre de Hecke affine \hat{H}_n .

La théorie des représentations de $G(2, 1, n)$ (le groupe de Coxeter de type B) a été étudiée par Young dans [106] et la théorie des représentations du produit en couronne $A \wr S_n$ d'un groupe fini arbitraire A par le groupe symétrique (dont $G(m, 1, n)$ est un cas particulier) a été étudiée par Specht dans [97]. Etant donné un groupe fini A , les produits en couronne $A \wr S_n$ forment, par rapport à n , une chaîne ascendante de groupes. L'approche de Okounkov et Vershik a été étendue à la théorie des représentations du produit en couronne d'un groupe fini quelconque par le groupe symétrique dans [87]. Les règles de branchement de la chaîne des groupes $A \wr S_n$ sont sans multiplicité si et seulement si le groupe A est abélien. La chaîne des groupes $G(m, 1, n)$ est l'exemple le plus simple (ici A est un groupe cyclique) d'une chaîne sans multiplicité de produits en couronne $A \wr S_n$.

Dans ce travail, nous décrivons attentivement la limite classique de toute la construction faite pour $H(m, 1, n)$, incluant en particulier le produit smash, cette fois de l'algèbre du groupe $G(m, 1, n)$, avec l'algèbre libre associative des m -tableaux standards. Certaines parties de cette construction s'avèrent être plus compliquées que dans le cas non-dégénéré. Nous omettons systématiquement les preuves dans la limite classique quand elles sont pratiquement une répétition des preuves de l'assertion correspondante pour l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$. Mais quand la situation dans le cas dégénéré ne suit pas exactement le cas non-dégénéré, nous donnons toute l'information nécessaire. Cela concerne, en particulier, la structure des algèbres de Hecke affines dégénérées cyclotomiques et leurs ensembles commutatifs, et aussi certaines subtilités concernant les opérateurs d'entrelacement.

Les représentations obtenues avec l'aide du produit smash sont les analogues, pour $G(m, 1, n)$, des représentations semi-normales du groupe symétrique. Nous déterminons le produit scalaire Hermitien $G(m, 1, n)$ -invariant sur les espaces de représentations et décrivons les analogues des représentations orthogonales du groupe symétrique.

II.1.1 Organisation du chapitre

Dans la Section II.2 nous rappelons les définitions de diverses chaînes de groupes et d'algèbres intervenant plus tard, et la définition des éléments de Jucys–Murphy de la chaîne des groupes de

tresses et des chaînes des quotients de l’algèbre du groupe de tresses.

Les Sections II.3, II.4 et II.5 sont consacrées à la théorie des représentations de l’algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$.

Dans la Section II.3 nous commençons l’étude de la théorie des représentations de la chaîne, par rapport à n , des algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m, 1, n)$, généralisant l’approche de Okounkov et Vershik de la théorie des représentations du groupe symétrique. Un outil important ici est la liste des représentations, satisfaisant certaines propriétés naturelles, de l’algèbre de Hecke affine \hat{H}_2 . Nous relierons l’ensemble des m -tableaux standards de Young avec l’ensemble $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ des valeurs propres communes des éléments de Jucys–Murphy J_1, \dots, J_n dans une certaine classe de représentations (que nous appelons C -représentations) de $H(m, 1, n)$. Plus précisément, nous montrons que toute ligne de nombres appartenant à $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ est contenue dans un ensemble appelé $\text{Cont}_m(n)$ qui est en bijection avec l’ensemble des m -tableaux standards de Young.

Dans la Section II.4 nous équipons, pour toute m -partition $\lambda^{(m)}$ de n , l’espace $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}] \otimes H(m, 1, n)$ d’une structure d’algèbre associative. Ici $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}]$ est l’algèbre libre associative dont les générateurs $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ sont labellisés par les m -tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. Pour définir la structure d’algèbre, il est pratique d’utiliser la forme Baxterisée de (seulement) une partie des générateurs de $H(m, 1, n)$. Etant donnée une représentation unidimensionnelle de l’algèbre $H(m, 1, n)$, nous construisons, avec l’aide de la structure d’algèbre sur $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}] \otimes H(m, 1, n)$, une représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ sur l’espace vectoriel dont une base est paramétrée par les m -tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. Cette construction implique que l’ensemble $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ des valeurs propres communes des éléments de Jucys–Murphy dans les C -représentations coïncide avec l’ensemble $\text{Cont}_m(n)$ et ainsi avec l’ensemble des m -tableaux standards. A la fin de la Section II.4 nous calculons des analogues d’un produit scalaire invariant pour toute représentation $V_{\lambda^{(m)}}$.

Dans l’Appendice à la Section 4 nous expliquons comment la structure d’algèbre sur l’espace $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}] \otimes H(m, 1, n)$ induit une structure tensorielle sur l’ensemble des C -représentations de l’algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$; plus généralement, étant donné un $H(m, 1, n)$ -module W , la structure d’algèbre sur $\mathbb{C}[\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}] \otimes H(m, 1, n)$ permet de définir une structure de $H(m, 1, n)$ -module sur l’espace $V_{\lambda^{(m)}} \otimes W$, où $V_{\lambda^{(m)}}$ est la C -représentation correspondant à la m -partition $\lambda^{(m)}$. Nous déterminons les règles de décomposition des produits tensoriels de C -représentations en sommes directes de représentations irréductibles. Au cours de la preuve nous donnons plusieurs exemples explicites de telles décompositions. Cet Appendice est plutôt technique et n’est pas nécessaire pour la compréhension du reste du chapitre. Il peut être sauté lors d’une première lecture.

Dans la Section II.5 nous complétons la théorie des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques; nous montrons que les représentations construites sont irréductibles et non-isomorphes deux à deux (la preuve est incluse pour être complet; elle est adoptée de [4]). Utilisant une borne supérieure (prouvée indépendamment dans le Chapitre III) pour la dimension de l’algèbre de Hecke cyclotomique et certains résultats sur les produits de diagrammes de Bratteli (rappelés dans le Chapitre I, Section I.2), nous concluons de façon standard que la classe des C -représentations irréductibles contient toutes les représentations irréductibles de l’algèbre de Hecke cyclotomique, quand les paramètres de l’algèbre satisfont les restrictions de la Section II.2.

De plus, nous incluons dans la Section II.5 plusieurs conséquences directes de la théorie des représentations (valides soit dans le cadre générique, soit sous les restrictions sur les paramètres considérées dans ce chapitre) : la semi-simplicité de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$, la simplicité des règles de branchement pour les représentations de l'algèbre $H(m, 1, n)$ ¹ et la maximalité dans $H(m, 1, n)$ de l'ensemble commutatif formé par les éléments de Jucys–Murphy. Nous mentionnons aussi l'information, impliquée par la théorie des représentations développée, sur la structure du centralisateur de l'algèbre $H(m, 1, n - 1)$ considérée comme une sous-algèbre de $H(m, 1, n)$.

La limite classique de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$ est l'algèbre du groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n)$. La Section II.6 est entièrement consacrée au groupe $G(m, 1, n)$.

La théorie des représentations de $H(m, 1, n)$ développée dans les Sections II.3, II.4 et II.5 peut être utilisée pour obtenir immédiatement la théorie des représentations du groupe $G(m, 1, n)$: on doit seulement prendre la limite classique des paramètres dans les formules pour les éléments matriciels des générateurs. Néanmoins il est intéressant de construire la théorie des représentations de la chaîne des groupes indépendamment du cas non-dégénéré. Nous présentons la limite classique de toute l'approche développée dans les Sections II.3, II.4 et II.5, établissant l'approche inductive à la théorie des représentations de la chaîne, par rapport à n , des groupes $G(m, 1, n)$.

Tout d'abord, nous expliquons comment obtenir les éléments de Jucys–Murphy classiques de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ à partir des éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke cyclotomique non-dégénérée $H(m, 1, n)$ (nous étendons ainsi un résultat de [88] sur les groupes de Weyl et leurs algèbres de Hecke). En ce qui concerne la relation avec l'algèbre de Hecke affine, la situation se complique au niveau classique ; nous introduisons une algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$. Les algèbres de Hecke affines dégénérées cyclotomiques forment aussi une chaîne par rapport à n . Nous établissons la commutativité d'un certain ensemble d'éléments de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$; nous appelons les éléments de cet ensemble commutatif les éléments de Jucys–Murphy "classiques universels". Il existe une surjection $\mathfrak{A}_{m,n} \rightarrow \mathbb{C}G(m, 1, n)$ et les éléments de Jucys–Murphy classiques sont les images des éléments de Jucys–Murphy classiques universels de $\mathfrak{A}_{m,n}$ par cette surjection ; nous obtenons ainsi, indépendamment du cadre non-dégénéré, une preuve de la commutativité de l'ensemble formé par les éléments de Jucys–Murphy classiques.

Ensuite nous répétons *grosso modo* les mêmes étapes que dans le cas non-dégénéré. Nous étudions une certaine classe de représentations de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ et déduisons que le spectre des éléments de Jucys–Murphy classiques dans les \mathcal{C} -représentations est inclus dans un ensemble $\text{cCont}_m(n)$ qui est en bijection avec l'ensemble des m -tableaux de Young standards. Nous introduisons une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m -tableaux standards. Nous expliquons brièvement l'analogie de la construction des représentations de $H(m, 1, n)$ dans le cadre classique et concluons que les représentations construites contiennent toutes les représentations irréductibles du groupe $G(m, 1, n)$. Nous ne donnons pas les preuves des

1. L'article [34] défend le point de vue que c'est l'algèbre de Hecke affine "qui est responsable du phénomène des multiplicités égales à 1" ; pour les représentations génériques de dimension finie, la simplicité des règles de branchement (le phénomène des multiplicités égales à 1) de l'algèbre de Hecke affine est une conséquence de la simplicité des règles de branchement des algèbres de Hecke cyclotomiques car dans une représentation générique de dimension finie, le spectre de l'élément de Jucys–Murphy J_1 est fini, et donc une telle représentation est en fait une représentation d'un quotient cyclotomique de l'algèbre de Hecke affine.

propriétés concernant $G(m, 1, n)$ quand elles suivent les mêmes lignes que dans le cas non-dégénéré ; nous indiquons seulement les modifications quand elles apparaissent.

La Section II.6 se termine avec deux appendices. Le premier traite la structure des algèbres de Hecke affines dégénérées cyclotomiques $\mathfrak{A}_{m,n}$; nous construisons une base de $\mathfrak{A}_{m,n}$, ce qui donne une forme normale pour les éléments de $\mathfrak{A}_{m,n}$. Dans le deuxième appendice, nous étudions les opérateurs d'entrelacement classiques, utiles dans l'analyse du spectre des opérateurs de Jucys–Murphy ; nous montrons comment obtenir les opérateurs d'entrelacement classiques comme des limites classiques de certains opérateurs d'entrelacement de l'algèbre de Hecke affine non-dégénérée \hat{H}_n .

Certains des résultats de la Section II.6 peuvent être trouvés dans la littérature. Les éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre de groupe du produit en couronne d'un groupe fini A par le groupe symétrique (dont $CG(m, 1, n)$ est un exemple particulier) ont été définis indépendamment dans [87] et [104] ; les éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre du groupe de Coxeter $G(2, 1, n)$ ont été introduits dans [88]. Dans [87], l'approche de Okounkov et Vershik est étendue aux produits en couronne d'un groupe fini quelconque A par le groupe symétrique. Egalement, il s'avère que l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$ coïncide avec l'algèbre de Hecke en couronne adaptée à notre situation ; l'algèbre de Hecke en couronne a été définie et étudiée dans [103] (voir aussi [102]). L'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$, définie différemment, apparaît aussi dans [89] comme un analogue pour $G(m, 1, n)$ d'une algèbre de Hecke graduée. Dans notre présentation, nous insistons spécialement sur les connections entre le traitement pour les groupes $G(m, 1, n)$ avec notre traitement pour les algèbres $H(m, 1, n)$; en particulier, comme nous l'avons dit plus haut, nous obtenons les éléments de Jucys–Murphy pour $G(m, 1, n)$ (respectivement, les opérateurs d'entrelacement de $\mathfrak{A}_{m,n}$) en prenant la limite dans certaines expressions impliquant les éléments de Jucys–Murphy de $H(m, 1, n)$ (respectivement, les opérateurs d'entrelacement de \hat{H}_n).

Ce chapitre se termine avec l'Appendice A, qui contient plusieurs exemples des relations définissantes de l'algèbre sur le produit tensoriel de $H(m, 1, n)$ avec l'algèbre libre associative engendrée par les m -tableaux standards ; les formules explicites pour les éléments matriciels des générateurs dans des représentations irréductibles de $H(m, 1, n)$ de basse dimension sont données.

Notations.

Dans ce chapitre, le corps de base est le corps \mathbb{C} des nombres complexes.

Le spectre d'un opérateur \mathcal{T} est noté $\text{Spec}(\mathcal{T})$.

Nous notons, pour $k, l \in \mathbb{Z}$ avec $k < l$, par $[k, l]$ l'ensemble des entiers $\{k, k + 1, \dots, l - 1, l\}$.

Le q -nombre j_q est défini par $j_q := \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}$.

La matrice diagonale qui a pour entrées z_1, z_2, \dots, z_k (sur la diagonale) est notée $\text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_k)$.

II.2 Algèbres de Hecke cyclotomiques et éléments de Jucys–Murphy

Le groupe de tresses B_n de type A (ou simplement le groupe de tresses) à n brins est engendré par les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-2, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{pour } i, j = 1, \dots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(II.2.1)} \\ \text{(II.2.2)} \end{matrix}$$

Le groupe de tresses αB_n de type B (parfois appelé groupe de tresses *affine*) est obtenu en ajoutant aux générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ le générateur τ avec les relations définissantes (II.2.1), (II.2.2) et :

$$\begin{cases} \tau \sigma_1 \tau \sigma_1 = \sigma_1 \tau \sigma_1 \tau, \\ \tau \sigma_i = \sigma_i \tau & \text{pour } i > 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(II.2.3)} \\ \text{(II.2.4)} \end{matrix}$$

Les éléments J_i , $i = 1, \dots, n$, du groupe de tresses de type B définis de manière inductive par la condition initiale et la récursion suivantes :

$$J_1 = \tau, \quad J_{i+1} = \sigma_i J_i \sigma_i, \quad \text{(II.2.5)}$$

sont appelés éléments de Jucys–Murphy. Il est connu que ces éléments forment un ensemble commutatif. De plus, J_i commute avec tous les σ_k , exceptés σ_{i-1} et σ_i ,

$$J_i \sigma_k = \sigma_k J_i \quad \text{si } k > i \text{ ou } k < i-1. \quad \text{(II.2.6)}$$

L'algèbre de Hecke affine \hat{H}_n est le quotient de l'algèbre du groupe de tresses affine αB_n par :

$$\sigma_i^2 = (q - q^{-1})\sigma_i + 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1. \quad \text{(II.2.7)}$$

L'algèbre de Hecke usuelle de type A, H_n , est l'algèbre engendrée par les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ avec les relations (II.2.1)–(II.2.2) et (II.2.7).

L'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$ est le quotient de l'algèbre de Hecke affine \hat{H}_n par

$$(\tau - v_1) \dots (\tau - v_m) = 0. \quad \text{(II.2.8)}$$

Ainsi, l'algèbre $H(m, 1, n)$ est engendrée par les éléments $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ avec les relations définissantes (II.2.1)–(II.2.4) et (II.2.7)–(II.2.8). En particulier, $H(1, 1, n)$ est l'algèbre de Hecke de type A et $H(2, 1, n)$ est l'algèbre de Hecke de type B. La sous-algèbre de $H(m, 1, n)$ engendrée par les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke de type A (voir, par exemple, Chapitre suivant).

L'algèbre $H(m, 1, n)$ est une déformation de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ du groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n)$. Le groupe $G(m, 1, n)$ est isomorphe à $S_n \wr C_m$, le produit en couronne du groupe cyclique à m éléments par le groupe symétrique S_n . Nous rappelons la présentation standard du groupe $G(m, 1, n)$ dans la Section II.6.

La déformation de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ vers l'algèbre $H(m, 1, n)$ est plate dans le sens où $H(m, 1, n)$ est un $\mathbb{C}[q, q^{-1}, v_1, \dots, v_m]$ -module libre de dimension égale au cardinal de $G(m, 1, n)$, c'est-à-dire :

$$\dim(H(m, 1, n)) = n! \cdot m^n . \quad (\text{II.2.9})$$

La platitude est prouvée dans [4] avec l'aide de la théorie des représentations, et dans le Chapitre III, Section III.4, dans le cadre de la théorie des algèbres associatives.

La spécialisation de $H(m, 1, n)$ est semi-simple si et seulement si les valeurs numériques des paramètres satisfont (voir [2])

$$1 + q^2 + \dots + q^{2N} \neq 0 \text{ pour tout } N : N < n \quad (\text{II.2.10})$$

et

$$q^{2i}v_j - v_k \neq 0 \text{ pour tout } i, j, k \text{ tels que } j \neq k \text{ et } -n < i < n . \quad (\text{II.2.11})$$

Par la suite, nous travaillons soit avec une algèbre de Hecke cyclotomique générique (c'est-à-dire, v_1, \dots, v_m et q sont des indéterminées), soit dans le cas semi-simple avec une condition supplémentaire :

$$v_j \neq 0 , j = 1, \dots, m . \quad (\text{II.2.12})$$

En faisant varier n , les algèbres $H(m, 1, n)$ forment une chaîne ascendante d'algèbres, au sens du Chapitre I, Section I.1 :

$$H(m, 1, 0) = \mathbb{C} \subset H(m, 1, 1) \subset \dots \subset H(m, 1, n) \subset \dots \quad (\text{II.2.13})$$

(les éléments τ et $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ de $H(m, 1, n)$ engendrent une sous-algèbre isomorphe à $H(m, 1, n-1)$, voir Chapitre III, Section III.4). De la même manière, les groupes de tresses, les groupes de tresses affines et les algèbres de Hecke affines forment des chaînes ascendantes d'algèbres. Ainsi, la référence à n (comme dans $H_n, H(m, 1, n)$, etc.) dans la notation pour les générateurs peut être omise.

La théorie des représentations de l'algèbre générique $H(m, 1, n)$ a été étudiée dans [4]. Ici, nous présentons une autre approche qui est une généralisation de l'approche de Okounkov et Vershik de la théorie des représentations du groupe symétrique [86], et qui fait référence à la structure de chaîne (II.2.13).

Nous noterons par les mêmes symboles J_i les images des éléments de Jucys–Murphy dans l'algèbre de Hecke cyclotomique. Comme conséquence de la théorie des représentations de l'algèbre générique $H(m, 1, n)$, l'ensemble des éléments de Jucys–Murphy $\{J_1, \dots, J_n\}$ est commutatif maximal dans $H(m, 1, n)$; plus précisément, l'algèbre des polynômes en les éléments de Jucys–Murphy coïncide avec l'algèbre engendrée par l'union des centres de $H(m, 1, k)$ pour $k = 1, \dots, n$.

Remarque. Nous utilisons la même notation " σ_i " pour les générateurs de différents groupes et algèbres : ce sont les groupes de tresses usuels et affines et les algèbres de Hecke usuelles, affines et cyclotomiques. Le symbole τ est aussi utilisé pour un générateur de plusieurs différents objets. Cela ne devrait pas prêter à confusion, il sera clair selon le contexte quel(le) est le groupe/algèbre en question.

II.3 Spectre des éléments de Jucys–Murphy et m -tableaux de Young

Nous entamons le développement d'une approche, basée sur les éléments de Jucys–Murphy, à la théorie des représentations de la chaîne (par rapport à n) des algèbres de Hecke cyclotomiques $H(m, 1, n)$. Cela généralise l'approche développée par Okounkov et Vershik dans [86].

1. La première étape consiste en l'étude des représentations de $H(m, 1, n)$ vérifiant deux conditions. Premièrement, les éléments de Jucys–Murphy J_1, \dots, J_n sont représentés par des opérateurs semi-simples (diagonalisables). Deuxièmement, pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, l'action de la sous-algèbre engendrée par J_i, J_{i+1} et σ_i est complètement réductible. Nous utiliserons le nom de C -représentations (C vient de la première lettre de "complètement réductible") pour de telles représentations. A la fin de la construction, nous verrons que toutes les représentations irréductibles de $H(m, 1, n)$ sont des C -représentations.

En analogie avec [86], nous notons $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ l'ensemble des lignes de valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy dans l'ensemble des C -représentations : $\Lambda = (a_1^{(\Lambda)}, \dots, a_n^{(\Lambda)})$ appartient à $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ si il existe un vecteur e_Λ dans l'espace d'une C -représentation tel que $J_i(e_\Lambda) = a_i^{(\Lambda)} e_\Lambda$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Toute C -représentation possède une base formée par des vecteurs e_Λ (ceci est une reformulation de la première condition dans la définition des C -représentations). Comme σ_k commute avec J_i pour $k > i$ et $k < i - 1$, l'action de σ_k sur un vecteur e_Λ , $\Lambda \in \text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$, est "locale" dans le sens où $\sigma_k(e_\Lambda)$ est une combinaison linéaire de vecteurs $e_{\Lambda'}$ tels que $a_i^{(\Lambda')} = a_i^{(\Lambda)}$ pour $i \neq k, k + 1$.

2. Algèbre de Hecke affine \hat{H}_2 . Considérons l'algèbre de Hecke affine \hat{H}_2 , engendrée par X, Y et σ avec les relations :

$$XY = YX, \quad Y = \sigma X \sigma, \quad \sigma^2 = (q - q^{-1})\sigma + 1. \quad (\text{II.3.1})$$

Pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, la sous-algèbre de $H(m, 1, n)$ engendrée par J_i, J_{i+1} et σ_i est un quotient de \hat{H}_2 . Nous reproduisons ici les résultats de [44] concernant la classification des représentations irréductibles avec X et Y diagonalisables de l'algèbre \hat{H}_2 .

On trouve des représentations irréductibles de dimension 1 et de dimension 2.

– Les représentations irréductibles unidimensionnelles sont données par

$$X \mapsto a, \quad Y \mapsto q^{2\varepsilon} a, \quad \sigma \mapsto \varepsilon q^\varepsilon, \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1. \quad (\text{II.3.2})$$

– Les représentations irréductibles de dimension 2 sont données par

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q - q^{-1} \end{pmatrix}, \quad X \mapsto \begin{pmatrix} a & -(q - q^{-1})b \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad Y \mapsto \begin{pmatrix} b & (q - q^{-1})b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

avec $b \neq a$ pour que X et Y soient diagonalisables, et avec $b \neq q^{\pm 2} a$ pour assurer l'irréductibilité.

Par un changement de base, nous mettons X et Y sous forme diagonale :

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \frac{(q - q^{-1})b}{b - a} & 1 - \frac{(q - q^{-1})^2 ab}{(b - a)^2} \\ 1 & -\frac{(q - q^{-1})a}{b - a} \end{pmatrix}, \quad X \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad Y \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \quad (\text{II.3.3})$$

3. Nous retournons aux lignes de valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy.

Proposition II.1. *Soit $\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ et soit e_Λ un vecteur correspondant.*

- (a) *On a $a_i \neq a_{i+1}$.*
- (b) *Si $a_{i+1} = q^{2\varepsilon} a_i$ avec $\varepsilon = \pm 1$, alors $\sigma_i(e_\Lambda) = \varepsilon q^\varepsilon e_\Lambda$.*
- (c) *Si $a_{i+1} \neq q^{\pm 2} a_i$, alors $\Lambda' = (a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n) \in \text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$; de plus, le vecteur $\sigma_i(e_\Lambda) - \frac{(q-q^{-1})a_{i+1}}{a_{i+1}-a_i} e_\Lambda$ correspond à la ligne Λ' (voir (II.3.3) avec $b = a_{i+1}$ et $a = a_i$).*

C'est une conséquence directe de la théorie des représentations de l'algèbre \hat{H}_2 , décrite ci-dessus (cf. la Proposition 4.1 dans [86] et la Proposition 3 dans [44]).

4. Lignes de contenus.

Définition II.2. *Une ligne de contenus (a_1, \dots, a_n) est une ligne de nombres satisfaisant les conditions suivantes :*

- (c1) $a_1 \in \{v_1, \dots, v_m\}$;
- (c2) *pour tout $j > 1$: si $a_j = v_k q^{2z}$ pour un certain k et $z \neq 0$, alors $\{v_k q^{2(z-1)}, v_k q^{2(z+1)}\} \cap \{a_1, \dots, a_{j-1}\} \neq \emptyset$;*
- (c3) *si $a_i = a_j = v_k q^{2z}$ avec $i < j$ pour un certain k et un certain z , alors $\{v_k q^{2(z-1)}, v_k q^{2(z+1)}\} \subset \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$.*

Nous notons $\text{Cont}_m(n)$ l'ensemble des lignes de contenus de longueur n .

La proposition suivante est l'analogie "cyclotomique" du Théorème 5.1 dans [86] et de la Proposition 4 dans [44]. Nous adaptons la preuve, en portant une attention particulière aux endroits où les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sont essentielles.

Proposition II.3. *Si une ligne de nombres (a_1, \dots, a_n) appartient à $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$, alors elle appartient à $\text{Cont}_m(n)$.*

Preuve. Comme $J_1 = \tau$, la condition (c1) est impliquée par l'équation caractéristique de τ .

Supposons que (c2) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire il existe une ligne $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ telle que, pour un certain $j > 1$, un certain k et un certain $z \neq 0$, on a $a_j = v_k q^{2z}$ mais $a_i \neq v_k q^{2(z-1)}$ et $a_i \neq v_k q^{2(z+1)}$ pour tout i plus petit que j . Par des applications successives du point (c) de la Proposition II.1, nous obtenons un élément de $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ avec $v_k q^{2z}$ en première position. Les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) impliquent $v_k q^{2z} \neq v_i$ pour tout $i = 1, \dots, m$, ce qui contredit la condition (c1).

Nous prouvons la condition (c3) par récurrence sur $j - i$. La base de la récurrence est le point (a) de la Proposition II.1. Supposons qu'il existe i et j tels que $i < j$ et $a_i = a_j = v_k q^{2z}$ pour une certaine ligne $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$. Par récurrence nous supposons que la condition (c3) est vérifiée pour tout i', j' tels que $|j' - i'| < j - i$. Si $\{v_k q^{2(z-1)}, v_k q^{2(z+1)}\} \cap \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\} = \emptyset$, alors par une

application du point (c) de la Proposition II.1, nous bougeons a_j vers la gauche dans la position $(j-1)$ (notons que $(j-1)$ est toujours plus grand que i par le point (a) de la Proposition II.1) et obtenons un élément de $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ qui contredit l'hypothèse de récurrence. Maintenant supposons que seulement un élément parmi $\{v_k q^{2(z-1)}, v_k q^{2(z+1)}\}$ est présent dans $\{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$. Par hypothèse de récurrence, cet élément apparaît seulement une fois dans $\{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$. Si $j-i > 2$, alors, par une application du point (c) de la Proposition II.1, nous obtenons un élément de $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ contredisant l'hypothèse de récurrence. Donc $j-i = 2$, ce qui est impossible car la relation de tresse $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ est incompatible avec $\sigma_i \mapsto -\varepsilon q^{-\varepsilon}$ et $\sigma_{i+1} \mapsto \varepsilon q^\varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$ (ces valeurs viennent du point (b) de la Proposition II.1). \square

Remarque. Soit E_S un espace vectoriel avec une base $\{e_\Lambda\}$ dont les vecteurs sont labellisés par $\Lambda \in \text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$. Soit E_C un espace vectoriel avec une base $\{e_\mu\}$ dont les vecteurs sont labellisés par $\mu \in \text{Cont}_m(n)$. D'après la Proposition II.3, $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n) \subset \text{Cont}_m(n)$ et donc E_S est naturellement un sous-espace vectoriel de E_C . L'espace E_S est équipé avec une action de l'algèbre $H(m, 1, n)$: l'opérateur correspondant au générateur τ est simplement J_1 ; les formules pour l'action des générateurs σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, sont données dans la Proposition II.1.

La Définition II.2 implique immédiatement que si $(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \text{Cont}_m(n)$ avec $a_{i+1} \neq q^{\pm 2} a_i$, alors $(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n) \in \text{Cont}_m(n)$. C'est pourquoi les opérateurs correspondant aux générateurs τ et σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, ont un sens en tant qu'opérateurs sur l'espace E_C . Le but de la Sous-Section II.4.3 ci-dessous est de montrer que ces opérateurs continuent de définir une action de l'algèbre $H(m, 1, n)$ - maintenant sur le, en principe, plus grand espace E_C . On pourrait construire les représentations en travaillant directement avec les lignes de nombres, mais il est pratique et intéressant de réinterpréter l'ensemble $\text{Cont}_m(n)$ en termes plus géométriques de multi-tableaux de Young.

A la fin de toute la construction, on aura, voir la Section II.5, que les espaces E_S et E_C en fait coïncident.

5. En utilisant les opérateurs "d'entrelacement" $U_{i+1} := \sigma_i J_i - J_i \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$, on peut prouver, comme dans [44], que :

$$\text{Spec}(J_{i+1}) \subset \text{Spec}(J_i) \cup q^{\pm 2} \cdot \text{Spec}(J_i). \quad (\text{II.3.4})$$

Comme $\text{Spec}(J_1) \subset \{v_1, \dots, v_m\}$, nous arrivons à la conclusion suivante.

Proposition II.4. *Pour tout $i = 1, \dots, n$,*

$$\text{Spec}(J_i) \subset \{v_k q^{2[1-i, i-1]}, k = 1, \dots, m\}. \quad (\text{II.3.5})$$

La Proposition II.4 provient également des Propositions II.1 et II.3. En effet, supposons que pour la ligne $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ la Proposition II.4 n'est pas vraie. Soit i l'entier le plus petit pour lequel $a_i \notin \{v_k q^{2[1-i, i-1]}, k = 1, \dots, m\}$. En utilisant le point (c) de la Proposition II.1 nous bougeons a_i vers la gauche jusqu'à ce qu'il atteigne la première position dans la ligne, et nous obtenons ainsi un élément de $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ qui ne vérifie pas la condition (c1). Cela contredit la Proposition II.3.

6. m -diagrammes et m -tableaux de Young . Une m -partition, ou m -diagramme de Young, est un m -uplet de partitions $\lambda^{(m)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Nous identifions les partitions avec leurs diagrammes de Young, voir Chapitre I, Appendice I.2.A.

La taille d'une partition λ est le nombre de cases du diagramme et est notée $|\lambda|$. Par définition, la taille d'un m -uplet $\lambda^{(m)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est

$$|\lambda^{(m)}| := |\lambda_1| + \dots + |\lambda_m|. \quad (\text{II.3.6})$$

Nous rappelons la terminologie standard. Pour une partition usuelle λ , une case α est appelée *supprimable* si l'ensemble des cases obtenu à partir de λ en enlevant la case α est toujours une partition; Une case β , qui n'est pas dans λ , est appelée *ajoutable* si l'ensemble des cases obtenu à partir de λ par ajout de β est toujours une partition.

Nous étendons cette terminologie pour les m -partitions. Dans ce but, nous définissons la notion de m -case : une m -case $\alpha^{(m)}$ est un couple (α, p) consistant en une case usuelle α et un entier p avec $1 \leq p \leq m$. Par la case de la m -case $\alpha^{(m)}$, nous ferons référence à α , et nous écrirons $\text{case}(\alpha^{(m)}) = \alpha$; Par la position de la m -case $\alpha^{(m)}$, nous ferons référence à l'entier p et nous écrirons $\text{pos}(\alpha^{(m)}) = p$. Avec cette définition, une m -partition $\lambda^{(m)}$ est un ensemble de m -cases tel que, pour tout p entre 1 et m , le sous-ensemble consistant en les m -cases $\alpha^{(m)}$ avec $\text{pos}(\alpha^{(m)}) = p$ forme une partition usuelle.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m -partition de taille n . Une m -case $\alpha^{(m)}$ de $\lambda^{(m)}$ est appelée *supprimable* si l'ensemble des m -cases obtenu à partir de $\lambda^{(m)}$ en enlevant $\alpha^{(m)}$ est toujours une m -partition. Une m -case $\beta^{(m)}$, qui n'est pas dans $\lambda^{(m)}$, est appelée *ajoutable* si l'ensemble des m -cases obtenu à partir de $\lambda^{(m)}$ en rajoutant $\beta^{(m)}$ est toujours une m -partition. La m -partition obtenue à partir de $\lambda^{(m)}$ en enlevant une m -case supprimable $\alpha^{(m)}$ sera notée $\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}$. Pour toute m -partition $\lambda^{(m)}$, on note $\mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ l'ensemble des m -cases supprimables de $\lambda^{(m)}$ et $\mathcal{E}_+(\lambda^{(m)})$ l'ensemble des m -cases ajoutables de $\lambda^{(m)}$.

Une m -partition dont les m -cases sont remplies par des nombres est un m -tableau.

Soit n la taille de la m -partition $\lambda^{(m)}$. Nous plaçons maintenant les nombres $1, \dots, n$ dans les m -cases de $\lambda^{(m)}$ de telle manière que, dans tout diagramme, les nombres dans les m -cases soient en ordre croissant le long des lignes vers la droite, et le long des colonnes vers le bas. Ceci est un m -tableau de Young *standard* de forme $\lambda^{(m)}$.

Nous associons à chaque m -case d'une m -partition un nombre (le "contenu") qui est $v_k q^{2(s-r)}$ pour la m -case $\alpha^{(m)}$ telle que $\text{pos}(\alpha^{(m)}) = k$ et $\text{case}(\alpha^{(m)})$ se trouve dans la ligne r et la colonne s (de manière équivalente, nous disons que la m -case $\alpha^{(m)}$ se trouve dans la ligne r et la colonne s du k -ème diagramme de la m -partition). Notons que la notion de contenu a un sens pour une m -case arbitraire d'un ensemble arbitraire de m -cases.

Pour un ensemble arbitraire de m -cases, deux m -cases sur la même diagonale du même diagramme ont le même contenu, ce qui permet de parler du "contenu d'une diagonale".

Nous donnons ci-dessous un exemple de m -tableau standard avec $m = 2$ et $n = 10$ (les contenus des m -cases sont indiqués) :

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline v_1 & v_1q^2 & v_1q^4 \\ \hline 6 & 9 & \\ \hline v_1q^{-2} & v_1 & \\ \hline 7 & & \\ \hline v_1q^{-4} & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 8 & 10 \\ \hline v_2 & v_2q^2 & v_2q^4 \\ \hline 5 & & \\ \hline v_2q^{-2} & & \\ \hline \end{array} \right) . \quad (\text{II.3.7})$$

Proposition II.5. *On a une bijection entre l'ensemble des m -tableaux de Young standards de taille n et l'ensemble $\text{Cont}_m(n)$.*

Preuve. A tout m -tableau de Young standard de taille n , nous associons une ligne de nombres (a_1, \dots, a_n) telle que a_i pour $i = 1, \dots, n$ est le contenu de la m -case dans laquelle le nombre i est placé. Cette ligne appartient à $\text{Cont}_m(n)$. En effet, la condition (c1) est immédiatement vérifiée. La condition (c2) est vraie : si i occupe une m -case dont le contenu est v_kq^{2z} , avec $z \neq 0$, d'un m -tableau standard de forme $\lambda^{(m)}$, alors il existe soit une m -case juste au-dessus dans la même colonne, soit une m -case juste sur la gauche dans la même ligne, du même diagramme de $\lambda^{(m)}$; cette case porte un nombre plus petit que i , et donc son contenu, qui est $v_kq^{2(z+1)}$ ou $v_kq^{2(z-1)}$, apparaît avant v_kq^{2z} dans la ligne. La condition (c3) est vraie parce que si $a_i = a_j = v_kq^{2z}$ pour $i < j$, alors en raison des restrictions (II.2.10)–(II.2.12) les m -cases portant i et j sont sur la même diagonale du même tableau du m -tableau. Ainsi, la m -case juste au-dessus de la m -case portant le nombre j , et la m -case juste sur la gauche de la m -case portant le nombre j sont présentes dans $\lambda^{(m)}$; ces m -cases ont les contenus $v_kq^{2(z+1)}$ et $v_kq^{2(z-1)}$ et sont occupées par les nombres k and l avec $k, l \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ car le m -tableau est standard.

Réciproquement, à toute ligne $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_m(n)$ nous associons tout d'abord un ensemble de m -cases de cardinal n . De plus, cette association distribue les nombres de 1 à n dans ces m -cases ; chaque m -case porte un nombre et différentes m -cases portent des nombres différents. Ensuite nous vérifions que le m -uplet obtenu est un m -tableau standard. La construction est la suivante.

Les m -cases sont construites l'une après l'autre. Etant donné une ligne $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_m(n)$ et en supposant que $(i - 1)$ m -cases sont déjà construites, nous ajoutons à l'étape numéro i une m -case sur la première place non-occupée de la diagonale dont le contenu est a_i ; nous plaçons le nombre i dans cette m -case. Cette construction est sans ambiguïté car les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) assurent que deux diagonales différentes de m -cases ont des contenus différents. La construction d'un ensemble de m -cases de cardinal total n est terminée.

Nous allons montrer que l'ensemble de m -cases construit est un m -tableau standard. Supposons par récurrence que pour $i = 1, \dots, n - 1$ l'ensemble obtenu de m -cases après i étapes est un m -tableau standard (pour $i = 1$ il n'y a rien à prouver ; l'hypothèse de récurrence est justifiée car, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Cont}_m(n)$, il est clair d'après la Définition II.2 que $(a_1, \dots, a_i) \in \text{Cont}_m(i)$ pour tout $i = 1, \dots, n - 1$). Il reste à ajouter une m -case à la position dictée par la valeur $a_n = v_kq^{2z}$, à placer le nombre n à l'intérieur et à vérifier que l'on obtient bien un m -tableau standard.

Si, pour tout $i = 1, \dots, n-1$, le nombre a_i est différent du nombre a_n , alors la n -ème m -case est ajoutée à la première place de la diagonale correspondant. Si $z = 0$, alors il n'y a rien à prouver, donc supposons que $z > 0$ (la situation avec $z < 0$ est similaire); la n -ème m -case est ajoutée dans la première ligne et nous devons prouver qu'il existe un certain i , $0 < i < n$, tel que $a_i = v_k q^{2(z-1)}$. Supposons que ce n'est pas le cas; alors par la condition (c2) de la Définition II.2 il existe un certain i , $0 < i < n$, tel que $a_i = v_k q^{2(z+1)}$. Comme $v_k q^{2z}$ n'est pas présent dans la ligne avant la i -ème position, l'ensemble de m -cases construit à l'étape i ne peut pas être un m -tableau standard, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

Supposons qu'il existe un certain i , $0 < i < n$, tel que $a_i = a_n$. Nous prenons le plus grand entier i satisfaisant cette propriété. Par construction, nous ajoutons la n -ème m -case sur la première place non-occupée de la diagonale qui contient la m -case portant le nombre i . Le résultat est un m -tableau standard seulement si la m -case juste sur la droite de la m -case portant le nombre i et la m -case juste en dessous de la m -case portant le nombre i sont présentes. Et ceci vient de la condition (c3) de la Définition II.2 et de l'hypothèse de récurrence. \square

Dans l'exemple (II.3.7) le 2-tableau de Young standard est associé à la ligne de nombres :

$$(v_1, v_1 q^2, v_2, v_1 q^4, v_2 q^{-2}, v_1 q^{-2}, v_1 q^{-4}, v_2 q^2, v_1, v_2 q^4).$$

Remarque. La condition " $z \neq 0$ " dans la partie (c2) de la Définition II.2 peut être supprimée pour l'algèbre de Hecke de type A; mais cette condition est nécessaire dès lors que $m > 1$. C'est transparent du point de vue géométrique. Pour l'algèbre de Hecke de type A, si $a_j = 1$ (c'est-à-dire, $z = 0$) pour un certain $j > 1$, alors le nombre j est placé sur la diagonale principale, mais pas dans le coin en haut à gauche, du tableau de Young standard; c'est pourquoi les deux valeurs q^2 et q^{-2} sont présentes dans ligne $\{a_1, \dots, a_{j-1}\}$. Néanmoins, pour $m > 1$, si $a_j = v_k$ pour un certain k et un certain $j > 1$, le nombre j peut occuper le coin en haut à gauche d'un tableau du m -tableau standard; dans ce cas, il peut clairement arriver que aucune des valeurs $v_k q^2$ et $v_k q^{-2}$ n'apparaisse dans $\{a_1, \dots, a_{j-1}\}$.

II.4 Construction des représentations

Nous procédons de manière analogue à [84]. Nous définissons premièrement une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de l'algèbre $H(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m -tableaux standards correspondant aux m -partitions de n ; les éléments Baxterisés sont utiles ici. Ensuite, par évaluation (avec l'aide de la représentation unidimensionnelle la plus simple de $H(m, 1, n)$) sur la droite, nous construisons les représentations.

En utilisant le produit tensoriel de l'algèbre $H(m, 1, n)$ avec l'algèbre libre associative engendrée par les m -tableaux standards, nous définissons et étudions dans l'Appendice à cette Section une structure de module sur le produit tensoriel de deux représentations correspondant à des m -partitions.

II.4.1 Eléments Baxterisés

Dans la définition du produit tensoriel de l'algèbre $H(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative, nous allons utiliser fréquemment les éléments Baxterisés.

Définissons, pour tout σ_i parmi les générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ de $H(m, 1, n)$, les éléments Baxterisés $\sigma_i(\alpha, \beta)$ par

$$\sigma_i(\alpha, \beta) := \sigma_i + (q - q^{-1}) \frac{\beta}{\alpha - \beta} . \quad (\text{II.4.1})$$

Les paramètres α et β sont appelés les paramètres spectraux. Nous rappelons certaines relations utiles pour les générateurs Baxterisés σ_i . Soit

$$f(\alpha, \beta) = \frac{q\alpha - q^{-1}\beta}{\alpha - \beta} . \quad (\text{II.4.2})$$

Proposition II.6. *Les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \sigma_i(\alpha, \beta)\sigma_i(\beta, \alpha) &= f(\alpha, \beta)f(\beta, \alpha), \\ \sigma_i(\alpha, \beta)\sigma_{i+1}(\alpha, \gamma)\sigma_i(\beta, \gamma) &= \sigma_{i+1}(\beta, \gamma)\sigma_i(\alpha, \gamma)\sigma_{i+1}(\alpha, \beta), \\ \sigma_i(\alpha, \beta)\sigma_j(\gamma, \delta) &= \sigma_j(\gamma, \delta)\sigma_i(\alpha, \beta) \quad \text{si } |i - j| > 1. \end{aligned} \quad (\text{II.4.3})$$

Preuve. C'est un calcul direct et bien connu. □

Pendant la construction des représentations, nous allons souvent vérifier des relations pour les éléments Baxterisés, comme dans [84]. Les relations seront vérifiées pour certaines valeurs des paramètres spectraux. Le lemme suivant montre que les relations d'origine sont impliquées par les relations pour les éléments Baxterisés avec des valeurs fixées des paramètres spectraux.

Lemme II.7. *Soient A et B des éléments d'une algèbre associative unitale arbitraire \mathcal{A} . Notons $A(\alpha, \beta) := A + (q - q^{-1}) \frac{\beta}{\alpha - \beta}$ et $B(\alpha, \beta) := B + (q - q^{-1}) \frac{\beta}{\alpha - \beta}$ où α et β sont des paramètres.*

(i) Si

$$A(\alpha, \beta)A(\beta, \alpha) = f(\alpha, \beta)f(\beta, \alpha) ,$$

où f est définie par (II.4.2), pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α et β ($\alpha \neq \beta$), alors

$$A^2 - (q - q^{-1})A - 1 = 0 .$$

(ii) Si

$$A^2 - (q - q^{-1})A - 1 = 0 , \quad B^2 - (q - q^{-1})B - 1 = 0$$

et

$$A(\alpha, \beta)B(\alpha, \gamma)A(\beta, \gamma) = B(\beta, \gamma)A(\alpha, \gamma)B(\alpha, \beta)$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α, β et γ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$), alors

$$ABA = BAB .$$

(iii) Si

$$A(\alpha, \beta)B(\gamma, \delta) = B(\gamma, \delta)A(\alpha, \beta)$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α, β, γ et δ ($\alpha \neq \beta$ et $\gamma \neq \delta$), alors

$$AB = BA .$$

Preuve. (i) Nous avons

$$\begin{aligned}
& A(\alpha, \beta)A(\beta, \alpha) = f(\alpha, \beta)f(\beta, \alpha) \\
\Rightarrow & A^2 + (q - q^{-1}) \left(\frac{\beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} \right) A - (q - q^{-1})^2 \frac{\alpha\beta}{(\beta - \alpha)^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta(q^2 + q^{-2})}{(\beta - \alpha)^2} \\
\Rightarrow & A^2 - (q - q^{-1})A - 1 = 0 .
\end{aligned}$$

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned}
& A(\alpha, \beta)B(\alpha, \gamma)A(\beta, \gamma) - B(\beta, \gamma)A(\alpha, \gamma)B(\alpha, \beta) = 0 \\
\Rightarrow & ABA - BAB + (q - q^{-1})(A^2 - B^2) \frac{\gamma}{\alpha - \gamma} + \\
& + (q - q^{-1})^2 (A - B) \left(\frac{\gamma}{\alpha - \gamma} \left(\frac{\beta}{\alpha - \beta} + \frac{\gamma}{\beta - \gamma} \right) - \frac{\gamma}{\beta - \gamma} \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) = 0 \\
\Rightarrow & ABA - BAB + (q - q^{-1})^2 (A - B) \frac{\gamma}{\alpha - \gamma} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} + \frac{\gamma}{\beta - \gamma} - \frac{\beta(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)} \right) = 0 \\
\Rightarrow & ABA - BAB = 0 .
\end{aligned}$$

(iii) Il est immédiat que $A(\alpha, \beta)B(\gamma, \delta) = B(\gamma, \delta)A(\alpha, \beta)$ implique $AB = BA$. □

II.4.2 Produit smash

Nous passons à la définition d'une structure d'algèbre associative sur le produit tensoriel de l'algèbre $H(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative dont les générateurs sont indexés par les m -tableaux standards correspondant aux m -partitions de n . Nous noterons \mathfrak{T} l'algèbre qui résulte de cette construction.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m -partition de taille n . Considérons un ensemble de générateurs libres labellisés par les m -tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$; pour un m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, nous notons $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ le générateur libre correspondant et $c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ le contenu (voir la Section précédente pour la définition) de la m -case portant le nombre i .

Dans la suite, nous utiliserons les générateurs d'Artin (ou de Coxeter) du groupe symétrique. Rappelons que le groupe symétrique (dont l'algèbre de groupe est la limite classique de l'algèbre de Hecke de type A H_n), dans la présentation d'Artin (ou de Coxeter), est engendré par les éléments s_i , $i = 1, \dots, n - 1$, avec les relations définissantes

$$\begin{cases} s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots, n - 2, & \text{(II.4.4)} \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{pour } i, j = 1, \dots, n - 1 \text{ tels que } |i - j| > 1, & \text{(II.4.5)} \\ s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \dots, n - 1. & \text{(II.4.6)} \end{cases}$$

Soit $X_{\lambda^{(m)}}$ une m -partition de n dont les m -cases sont remplies par les nombres de 1 à n ; ainsi, différentes m -cases du m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ portent différents nombres. Le m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ n'est pas nécessairement standard. Par définition, pour un tel m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ et pour toute permutation $\pi \in S_n$, le m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ est obtenu à partir du m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ en appliquant la permutation π aux nombres occupant les m -cases de $X_{\lambda^{(m)}}$; par exemple, $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est le m -tableau obtenu à partir de $X_{\lambda^{(m)}}$ en échangeant les nombres i et $(i+1)$ dans le m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}$. Nous avons par construction :

$$c(X_{\lambda^{(m)}}^\pi | i) = c(X_{\lambda^{(m)}} | \pi^{-1}(i)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (\text{II.4.7})$$

Pour un m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, le m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ n'est pas nécessairement standard. En ce qui concerne les générateurs de l'algèbre libre associative, nous notons $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^\pi$ le générateur correspondant au m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ si le tableau $X_{\lambda^{(m)}}$ est standard. Et si le m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ n'est pas standard, alors nous posons $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^\pi = 0$.

Proposition II.8. *Les relations*

$$\left(\sigma_i + \frac{(q - q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1)}{c(X_{\lambda^{(m)}} | i) - c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1)} \right) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \left(\sigma_i + \frac{(q - q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}} | i)}{c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1) - c(X_{\lambda^{(m)}} | i)} \right) \quad (\text{II.4.8})$$

et

$$(\tau - c(X_{\lambda^{(m)}} | 1)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0 \quad (\text{II.4.9})$$

sont compatibles avec les relations pour les générateurs $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ de l'algèbre $H(m, 1, n)$.

Avant la preuve nous expliquons le sens du mot "compatible" dans la formulation de la Proposition.

Soit \mathcal{F} l'algèbre libre associative engendrée par $\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}$. L'algèbre $H(m, 1, n)$ est naturellement le quotient de \mathcal{F} .

Soit $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ l'algèbre libre associative dont les générateurs $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ parcourent l'ensemble des m -tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$ pour toutes les m -partitions $\lambda^{(m)}$ de n .

Considérons une structure d'algèbre sur l'espace $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes \mathcal{F}$ pour laquelle : (i) l'application $\iota_1 : x \mapsto x \otimes 1, x \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$, est un isomorphisme de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ avec son image par ι_1 ; (ii) l'application $\iota_2 : \phi \mapsto 1 \otimes \phi, \phi \in \mathcal{F}$, est un isomorphisme de \mathcal{F} avec son image par ι_2 ; (iii) les formules (II.4.8)-(II.4.9), étendues par associativité, donnent les règles pour récrire les éléments $(1 \otimes \phi)(x \otimes 1), x \in \mathbb{C}[\mathcal{X}], \phi \in \mathcal{F}$, comme des élément de $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes \mathcal{F}$.

La "compatibilité" signifie que nous avons une structure induite d'algèbre associative, notée \mathfrak{A} , sur l'espace $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes H(m, 1, n)$. Plus précisément, si on multiplie une relation de l'algèbre $H(m, 1, n)$ (la relation est vue comme un élément de l'algèbre libre \mathcal{F}) par la droite par un générateur $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ (c'est une combinaison de la forme "une relation de $H(m, 1, n) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ ") et utilisons les "instructions" (II.4.8)-(II.4.9) pour déplacer les \mathcal{X} 's qui apparaissent vers la gauche (le générateur libre change mais l'expression reste toujours linéaire en \mathcal{X}), alors nous obtenons une combinaison linéaire de termes de la forme " $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^\pi \cdot$ une relation de $H(m, 1, n)$ ", avec $\pi \in S_n$.

Preuve. Nous récrivons la relation (II.4.8) en utilisant la forme Baxterisée des générateurs σ_i :

$$\sigma_i \left(c(X_{\lambda^{(m)}} | i), c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1) \right) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \sigma_i \left(c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1), c(X_{\lambda^{(m)}} | i) \right) .$$

Pour simplifier la suite, nous définissons $c^{(k)} := c(X_{\lambda(m)}|k)$ pour $k = 1, \dots, n$.

Nous allons vérifier la compatibilité des "instructions" (II.4.8)-(II.4.9) avec l'ensemble des relations définissantes (II.2.1)–(II.2.4) et (II.2.7)–(II.2.8). Nous commençons avec les relations n'impliquant que les générateurs σ_i . Nous utilisons ici la forme Baxterisée des relations et le Lemme II.7.

Ci-dessous nous utiliserons sans les mentionner les inégalités $c^{(k)} \neq c^{(k+1)}$, $c^{(k)} \neq c^{(k+2)}$, $c^{(k+1)} \neq c^{(k+2)}$ (pour tout k) qui proviennent des restrictions (II.2.10)–(II.2.12).

(a) Considérons tout d'abord la relation $\sigma_i^2 = (q - q^{-1})\sigma_i + 1$. Si le m -tableau $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ est standard, nous analysons cette relation dans sa forme équivalente, donnée dans (i) du Lemme II.7. Nous avons

$$\begin{aligned} & \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} \\ &= \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \\ &= \mathcal{X}_{\lambda(m)} \cdot \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) . \end{aligned} \tag{II.4.10}$$

Nous avons utilisé (II.4.7) dans la seconde inégalité. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) - f(c^{(i+1)}, c^{(i)})f(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \right) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} \\ &= \mathcal{X}_{\lambda(m)} \cdot \left(\sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) - f(c^{(i+1)}, c^{(i)})f(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \right) \end{aligned}$$

et la compatibilité pour cette relation est vérifiée, car l'expression sur la droite de $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ appartient, par la Proposition II.6, à l'idéal engendré par les relations.

Si le m -tableau $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ n'est pas standard, alors $(i+1)$ est placé dans le même tableau du m -tableau $X_{\lambda(m)}$ que i , et est situé juste sur la droite ou juste en dessous de i . Dans cette situation, la relation (II.4.8) peut être réécrite comme $\sigma_i \mathcal{X}_{\lambda(m)} = w \mathcal{X}_{\lambda(m)}$, où w est égal à q ou à $(-q^{-1})$, et la vérification de la compatibilité de la relation $\sigma_i^2 - (q - q^{-1})\sigma_i - 1 = 0$ avec les instructions (II.4.8)-(II.4.9) est directe.

(b) Nous analysons la relation $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ dans sa forme équivalente, donnée dans (ii) du Lemme II.7. Nous avons

$$\begin{aligned} & \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i+2)}) \sigma_{i+1}(c^{(i)}, c^{(i+2)}) \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} \\ &= \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i s_{i+1} s_i} \cdot \sigma_i(c^{(i+2)}, c^{(i+1)}) \sigma_{i+1}(c^{(i+2)}, c^{(i)}) \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \end{aligned} \tag{II.4.11}$$

et

$$\begin{aligned} & \sigma_{i+1}(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+2)}) \sigma_{i+1}(c^{(i+1)}, c^{(i+2)}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} \\ &= \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}} \cdot \sigma_{i+1}(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \sigma_i(c^{(i+2)}, c^{(i)}) \sigma_{i+1}(c^{(i+2)}, c^{(i+1)}) . \end{aligned} \tag{II.4.12}$$

Nous avons utilisé plusieurs fois la relation (II.4.7).

On pourrait penser que, comme pour la relation $\sigma_i^2 - (q - q^{-1})\sigma_i - 1 = 0$, nous devrions considérer séparément le cas où, dans le processus de transformation, le m -tableau devient non-standard. Mais on vérifie que pour un m -tableau standard arbitraire $Y_{\lambda(m)}$:

- Si le m -tableau $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ n'est pas standard, alors les m -tableaux $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_i s_{i+1}}$ et $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_i s_{i+1} s_i}$ ne sont pas standard non plus ;
- Si le m -tableau $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_{i+1}}$ n'est pas standard, alors les m -tableaux $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_{i+1} s_i}$ et $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}$ ne sont pas standards non plus.

Il vient donc que

- Si le m -tableau $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_i s_{i+1} s_i}$ est standard, alors les m -tableaux $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ et $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_i s_{i+1}}$ sont standards aussi ;
- Si le m -tableau $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}$ est standard, alors les m -tableaux $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_{i+1}}$ et $Y_{\lambda^{(m)}}^{s_{i+1} s_i}$ sont standards aussi.

Ainsi, nous ne pouvons pas retourner à un m -tableau standard si un des m -tableaux intermédiaires n'est pas standard. Les égalités (II.4.11) et (II.4.12) sont toujours valides, contrairement à (II.4.10).

Nous remplaçons $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_{i+1} s_i s_{i+1}}$ par $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i s_{i+1} s_i}$ dans la partie droite de (II.4.12) et soustrayons (II.4.12) à (II.4.11). Dans le résultat, l'expression à la droite de $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i s_{i+1} s_i}$ appartient, par la Proposition II.6, à l'idéal engendré par les relations.

(c) Nous analysons la relation $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| > 1$ dans sa forme équivalente, donnée dans (iii) du Lemme II.7. Nous avons

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \sigma_j(c^{(j)}, c^{(j+1)}) - \sigma_j(c^{(j)}, c^{(j+1)}) \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \right) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\ &= \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i s_j} \cdot \left(\sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \sigma_j(c^{(j+1)}, c^{(j)}) - \sigma_j(c^{(j+1)}, c^{(j)}) \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.4.13})$$

De même, comme pour la relation précédente, une inspection directe montre que (II.4.13) est toujours valide.

L'expression à la droite de $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i s_j}$ dans la partie droite de (II.4.13) appartient encore à l'idéal engendré par les relations, d'après la Proposition II.6.

(d) Il reste à analyser les relations impliquant le générateur τ .

La vérification de la compatibilité des relation $(\tau - v_1) \dots (\tau - v_m) = 0$ et $\tau \sigma_i = \sigma_i \tau$ pour $i > 1$ avec les instructions (II.4.8)-(II.4.9) est immédiate.

La compatibilité de la relation restante $\tau \sigma_1 \tau \sigma_1 = \sigma_1 \tau \sigma_1 \tau$ avec les instructions (II.4.8)-(II.4.9) est une conséquence directe du Lemme ci-dessous. \square

Lemme II.9. *Les relations (II.4.8)-(II.4.9) impliquent les relations :*

$$(J_i - c(X_{\lambda^{(m)}}|i)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (\text{II.4.14})$$

Preuve. Pour simplifier, posons $c^{(k)} := c(X_{\lambda^{(m)}}|k)$ pour $k = 1, \dots, n$.

Rappelons que $J_1 = \tau$ et que $J_{i+1} = \sigma_i J_i \sigma_i$. Nous raisonnons par récurrence sur i . Pour $i = 1$ la relation (II.4.14) est la relation (II.4.9).

Supposons tout d'abord que le m -tableau $X_{\lambda^{s_i}}^{s_i}$ est standard. Alors

$$\begin{aligned}
\sigma_i J_i \sigma_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} &= \sigma_i J_i \cdot \left(-(q - q^{-1}) \frac{c^{(i+1)}}{c^{(i)} - c^{(i+1)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \right) \\
&= \sigma_i \cdot \left(-(q - q^{-1}) c^{(i)} \frac{c^{(i+1)}}{c^{(i)} - c^{(i+1)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + c^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \right) \\
&= (q - q^{-1})^2 c^{(i)} \frac{c^{(i+1)} c^{(i+1)}}{(c^{(i+1)} - c^{(i)})^2} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} - (q - q^{-1}) \frac{c^{(i)} c^{(i+1)}}{c^{(i)} - c^{(i+1)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \\
&\quad - (q - q^{-1}) \frac{c^{(i+1)} c^{(i)}}{c^{(i+1)} - c^{(i)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) + c^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \cdot \sigma_i(c^{(i)}, c^{(i+1)}) \sigma_i(c^{(i+1)}, c^{(i)}) \\
&= c^{(i+1)} \left((q - q^{-1})^2 \frac{c^{(i)} c^{(i+1)}}{(c^{(i+1)} - c^{(i)})^2} + \frac{c^{(i)} c^{(i)} + c^{(i+1)} c^{(i+1)} - c^{(i)} c^{(i+1)} (q^2 + q^{-2})}{(c^{(i+1)} - c^{(i)})^2} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\
&= c^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} .
\end{aligned}$$

Ici, nous avons déplacé l'élément σ_i vers la droite en utilisant la relation (II.4.8); nous avons utilisé ensuite les relations (II.4.7), l'hypothèse de récurrence et la première relation dans la Proposition II.6.

Ensuite supposons que le m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ n'est pas standard. Cela signifie que les m -cases portant les nombres i and $(i+1)$ sont adjacentes (voisins dans la même ligne ou la même colonne d'un tableau du m -tableau). Dans cette situation, nous avons $c^{(i)} = q^{\pm 2} c^{(i+1)}$ et

$$\begin{aligned}
\sigma_i J_i \sigma_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} &= \sigma_i J_i \cdot \left(-(q - q^{-1}) \frac{c^{(i+1)}}{q^{\pm 2} c^{(i+1)} - c^{(i+1)}} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\
&= \sigma_i \cdot \left(-(q - q^{-1}) \frac{q^{\pm 2} c^{(i+1)} c^{(i+1)}}{q^{\pm 2} c^{(i+1)} - c^{(i+1)}} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\
&= (q - q^{-1})^2 \frac{q^{\pm 2} c^{(i+1)} c^{(i+1)} c^{(i+1)}}{(q^{\pm 2} c^{(i+1)} - c^{(i+1)})^2} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \\
&= c^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} .
\end{aligned}$$

Nous avons déplacé l'élément σ_i vers la droite en utilisant la relation (II.4.8); nous avons utilisé ensuite l'hypothèse de récurrence. \square

II.4.3 Représentations

La Proposition II.8 fournit un outil effectif pour la construction des représentations de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$.

Soit $|\rangle$ un "vide" - un vecteur de base d'un $H(m, 1, n)$ -module unidimensionnel; par exemple,

$$\sigma_i |\rangle = q |\rangle \quad \text{pour tout } i \text{ et } \tau |\rangle = v_1 |\rangle . \quad (\text{II.4.15})$$

En déplaçant, dans les expressions $\phi \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} |\rangle$, $\phi \in H(m, 1, n)$, les éléments \mathcal{X} 's vers la gauche et en utilisant la structure de module (II.4.15), nous construisons, grâce à la compatibilité, une représentation de $H(m, 1, n)$ sur l'espace vectoriel $U_{\lambda^{(m)}}$ avec la base $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} |\rangle$. Nous allons, par un léger abus de notation, noter $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} |\rangle$ encore par $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$. Cette procédure mène aux formules suivantes pour l'action des générateurs $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ sur les vecteurs de base $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ de $U_{\lambda^{(m)}}$:

$$\sigma_i : \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \frac{(q - q^{-1}) c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1)}{c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1) - c(X_{\lambda^{(m)}} | i)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} + \frac{q c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1) - q^{-1} c(X_{\lambda^{(m)}} | i)}{c(X_{\lambda^{(m)}} | i + 1) - c(X_{\lambda^{(m)}} | i)} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \quad (\text{II.4.16})$$

et

$$\tau : \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto c(X_{\lambda^{(m)}}|1)\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} . \quad (\text{II.4.17})$$

Comme avant, nous supposons ici que $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} = 0$ si $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ n'est pas un m -tableau standard. Notons $V_{\lambda^{(m)}}$ ce $H(m, 1, n)$ -module.

Supposons que le m -tableau $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est standard. Le sous-espace de dimension 2 de $U_{\lambda^{(m)}}$ engendré par $\{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}\}$ est σ_i -invariant. Pour un usage futur, nous écrivons la matrice donnant l'action du générateur σ_i sur ce sous-espace :

$$\frac{1}{c^{(i+1)} - c^{(i)}} \begin{pmatrix} (q - q^{-1})c^{(i+1)} & q^{-1}c^{(i+1)} - qc^{(i)} \\ qc^{(i+1)} - q^{-1}c^{(i)} & -(q - q^{-1})c^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.4.18})$$

où nous avons posé $c^{(i)} = c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ et $c^{(i+1)} = c(X_{\lambda^{(m)}}|i + 1)$.

Remarques.

(a) Dans notre construction des représentations, la Baxterisation du générateur τ (qui est dans [45]) n'est jamais utilisé tandis que les générateurs Baxterisés σ_i , $i = 1, \dots, n - 1$, apparaissent. La relation (II.4.9) assure que τ , placé avant $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$, peut être immédiatement remplacé par un nombre. C'est similaire à la situation de l'élément σ_1 dans la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke ($m = 1$). En effet, si $m = 1$, alors pour tout tableau standard X_λ , le tableau $X_\lambda^{s_1}$ est non-standard et donc σ_1 , placé avant \mathcal{X}_λ , peut être immédiatement remplacé par un nombre ; en particulier, l'action de σ_1 est donnée par une matrice diagonale dans la base $\mathcal{X}_\lambda| \rangle$ de U_λ ; le comportement de τ étend ce phénomène à $m > 1$.

(b) Il vient de la remarque précédente que l'action des générateurs dans les représentations construites ne dépend pas de la valeur de τ sur le vide $| \rangle$. De plus, les représentations construites ne dépendent pas (à un isomorphisme près) de la valeur de σ_i , $i = 1, \dots, n - 1$, sur le vide. En effet, si on prend pour le vide un vecteur de base $| \rangle'$ du $H(m, 1, n)$ -module unidimensionnel tel que $\sigma_i| \rangle' = -q^{-1}| \rangle'$ pour tout i et $\tau| \rangle' = v_1| \rangle'$, la procédure décrite dans cette sous-section conduit à des représentations $\tilde{V}_{\lambda^{(m)}}$ de $H(m, 1, n)$. Par construction, $V_{\lambda^{(m)}}$ et $\tilde{V}_{\lambda^{(m)}}$ ont le même espace vectoriel sous-jacent $U_{\lambda^{(m)}}$. On peut vérifier directement que pour toute m -partition $\lambda^{(m)}$, il existe un isomorphisme de $H(m, 1, n)$ -modules entre $V_{\lambda^{(m)}}$ et $\tilde{V}_{\lambda^{(m)}}$; les opérateurs pour la représentation $\tilde{V}_{\lambda^{(m)}}$ sont obtenus à partir des opérateurs pour la représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ par le changement de base diagonal de $U_{\lambda^{(m)}}$ suivant :

$$\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \mathbf{c}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} , \quad \text{où } \mathbf{c}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} = \prod_{i: \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \neq 0} \left(q c(X_{\lambda^{(m)}}|i) - q^{-1}c(X_{\lambda^{(m)}}|i + 1) \right) .$$

Par construction, $\mathbf{c}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} \neq 0$.

(c) Dans le cas de l'algèbre de Hecke ($m = 1$), les coefficients apparaissant dans l'action des générateurs peuvent être exprimés en termes des longueurs $l_{j,j+1}$ entre cases (voir, e.g., [84]). Nous ne définissons pas la notion de longueur entre des cases qui n'appartiennent pas au même tableau du m -tableau ; la forme de l'action, faisant référence à la longueur, n'est plus utile ici.

(d) L'action des générateurs construite dans les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ coïncide avec l'action donnée dans [4].

(e) L'action des opérateurs d'entrelacement $U_{i+1} = \sigma_i J_i - J_i \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$, (voir paragraphe 5 de la Section II.3) dans une représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ est :

$$U_{i+1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = \left(q^{-1}c^{(i)} - qc^{(i+1)} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}, \quad (\text{II.4.19})$$

où $c^{(i)} = c(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}|i)$, $i = 1, \dots, n$. En effet, nous récrivons $U_{i+1} = \sigma_i J_i - \sigma_i^{-1} J_{i+1} = \sigma_i (J_i - J_{i+1}) + (q - q^{-1})J_{i+1}$, et donc, par le Lemme II.9,

$$U_{i+1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = (c^{(i)} - c^{(i+1)}) \left(\sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) + \frac{(q - q^{-1})c^{(i+1)}}{c^{(i)} - c^{(i+1)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \right).$$

En utilisant (II.4.16), nous obtenons la formule (II.4.19).

II.4.4 Produit scalaire

Les représentations construites sur les espaces $U_{\lambda^{(m)}}$, où $\lambda^{(m)}$ est une m -partition de taille n , sont des analogues pour $H(m, 1, n)$ des représentations semi-normales du groupe symétrique. Nous calculons ici des analogues, pour les espaces de représentations de $H(m, 1, n)$, des produits scalaires invariants sur les espaces de représentations du groupe symétrique.

S-invariance. Soit \mathcal{A} une algèbre associative, U un \mathcal{A} -module, \mathcal{O} un groupe abélien et $\langle, \rangle : U \times U \rightarrow \mathcal{O}$ une application bi-additive. Soit \mathbf{S} un ensemble de générateurs de \mathcal{A} .

Définition II.10. Nous disons que \langle, \rangle est \mathbf{S} -invariant si, pour tout $u, v \in U$ et pour tout $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$,

$$\langle \mathbf{a}(u), \mathbf{a}(v) \rangle = \langle u, v \rangle. \quad (\text{II.4.20})$$

Nous disons que \langle, \rangle est \mathbf{S}^- -invariant si, pour tout $u, v \in U$ et pour tout $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$,

$$\langle \mathbf{a}(u), \mathbf{a}^{-1}(v) \rangle = \langle u, v \rangle. \quad (\text{II.4.21})$$

Pour un \mathbf{S} -invariant \langle, \rangle nous avons, pour tout $u, v \in U$,

$$\langle \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k(u), \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{pour } k \geq 0 \text{ et } \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

Pour un \mathbf{S}^- -invariant \langle, \rangle nous avons, pour tout $u, v \in U$,

$$\langle \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k(u), \mathbf{a}_1^{-1} \dots \mathbf{a}_k^{-1}(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{pour } k \geq 0 \text{ et } \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

Note. Dans ce qui suit, $\mathcal{A} = H(m, 1, n)$ et nous choisirons toujours $\mathbf{S} = \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$.

L'anneau \mathfrak{R} . Soit

$$\mathfrak{D} := \{1 + q^2 + \cdots + q^{2N}\}_{N=1,\dots,n} \cup \{q^{2i}v_j - v_k\}_{i,j,k: j \neq k; -n < i < n}$$

et soit \mathfrak{R} l'anneau $\mathbb{C}[q, q^{-1}, v_1, v_1^{-1}, \dots, v_m, v_m^{-1}]$ des polynômes de Laurent en les variables q, v_1, \dots, v_m localisé par rapport à l'ensemble multiplicatif engendré par \mathfrak{D} .

Dans cette Sous-section nous travaillerons avec l'algèbre de Hecke cyclotomique générique, ce qui signifie ici l'algèbre de Hecke cyclotomique sur \mathfrak{R} . Nous notons par le même symbole $U_{\lambda^{(m)}}$ le module libre, maintenant sur l'anneau \mathfrak{R} , avec la base $\mathfrak{B} := \{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\}$. Comme précédemment, les générateurs $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ de l'algèbre $H(m, 1, n)$ agissent sur $U_{\lambda^{(m)}}$ d'après les formules (II.4.16)–(II.4.17).

Nous allons définir une application $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{R}$ que nous notons par le même symbole \langle, \rangle comme ci-dessus, car elle sera étendue en plusieurs applications bi-additives $U_{\lambda^{(m)}} \times U_{\lambda^{(m)}} \rightarrow \mathfrak{R}$.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m -partition de taille n et soient $X_{\lambda^{(m)}}$ et $X'_{\lambda^{(m)}}$ deux m -tableaux standards différents de forme $\lambda^{(m)}$. Nous posons $c^{(i)} = c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ pour $i = 1, \dots, n$. L'application \langle, \rangle est donnée par

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}'_{\lambda^{(m)}} \rangle = 0, \quad (\text{II.4.22})$$

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle = \prod_{j,k: j < k, c^{(j)} \neq c^{(k)}, c^{(j)} \neq c^{(k)} q^{\pm 2}} \frac{q^{-1}c^{(j)} - qc^{(k)}}{c^{(j)} - c^{(k)}}. \quad (\text{II.4.23})$$

Notons que, si $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est un m -tableau standard, nous avons

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \rangle = \frac{qc^{(i)} - q^{-1}c^{(i+1)}}{q^{-1}c^{(i)} - qc^{(i+1)}} \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle. \quad (\text{II.4.24})$$

Nouvelle base. Dans la situation générique, un analogue pour $H(m, 1, n)$, correspondant à la m -partition $\lambda^{(m)}$, d'une représentation orthogonale du groupe symétrique sera défini sur une extension $\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}}$ de l'anneau \mathfrak{R} . Soit $\tilde{\mathfrak{F}}_{\lambda^{(m)}}$ l'ensemble des m -tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. Soit aussi $\mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}} := \{(j, k) | j < k, c^{(j)} \neq c^{(k)}, c^{(j)} \neq c^{(k)} q^{\pm 2}\}$ (c'est l'ensemble sur lequel le produit dans la partie droite de (II.4.23) est pris). Introduisons, pour chaque m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, une collection de variables $\varsigma_{X_{\lambda^{(m)}}}^{jk}$ et soit

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}} := \mathfrak{R} \left[\varsigma_{X_{\lambda^{(m)}}}^{jk} \right]_{X_{\lambda^{(m)}} \in \tilde{\mathfrak{F}}_{\lambda^{(m)}}, (j,k) \in \mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}}} / \mathfrak{J},$$

où \mathfrak{J} est l'idéal engendré par $\left\{ \left(\varsigma_{X_{\lambda^{(m)}}}^{jk} \right)^2 - \frac{c^{(j)} - c^{(k)}}{q^{-1}c^{(j)} - qc^{(k)}} \right\}_{X_{\lambda^{(m)}} \in \tilde{\mathfrak{F}}_{\lambda^{(m)}}, (j,k) \in \mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}}}$.

Nous définissons une nouvelle base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$ du $\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}}$ -module $\tilde{\mathfrak{R}}_{\lambda^{(m)}} \otimes_{\mathfrak{R}} U_{\lambda^{(m)}}$ par le changement de base (diagonal) suivant :

$$\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}} := \mathfrak{d}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \quad \text{où } \mathfrak{d}_{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}} = \prod_{j,k: (j,k) \in \mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}}} \varsigma_{X_{\lambda^{(m)}}}^{jk} \quad (\text{II.4.25})$$

pour tout m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$ de forme $\lambda^{(m)}$.

1. Produit scalaire bilinéaire.

1.1. Soit U un module libre sur \mathfrak{R} . Nous appelons *produit scalaire bilinéaire* sur U une application bi-additive $\langle, \rangle_{\text{bilin}} : U \times U \rightarrow \mathfrak{R}$ avec la propriété

$$\langle f u, g v \rangle_{\text{bilin}} = f g \langle u, v \rangle_{\text{bilin}}, \quad f, g \in \mathfrak{R}, \quad u, v \in U. \quad (\text{II.4.26})$$

Soit \mathfrak{B} une base de U . Une application arbitraire $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{R}$ s'étend, par bi-additivité et par (II.4.26), en un produit scalaire bilinéaire sur U .

Ainsi les formules (II.4.22)–(II.4.23) définissent un produit scalaire bilinéaire, noté $\langle, \rangle_{\text{bilin}}$, sur le $H(m, 1, n)$ -module $U_{\lambda^{(m)}}$. Rappelons que $\mathbf{S} = \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$.

Proposition II.11. *Le produit scalaire bilinéaire $\langle, \rangle_{\text{bilin}}$ sur $U_{\lambda^{(m)}}$ est \mathbf{S}^- -invariant.*

Preuve. il est immédiat que (II.4.21) est valide pour le générateur τ de $H(m, 1, n)$. La vérification de la \mathbf{S}^- -invariance de (II.4.22) pour le générateur σ_i de $H(m, 1, n)$ est non-triviale seulement si $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est standard et $X'_{\lambda^{(m)}} = X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$. Cette vérification se fait par un calcul direct de $\langle \sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), \sigma_i^{-1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}) \rangle_{\text{bilin}}$ (l'action de σ_i^{-1} sur l'espace à deux dimensions engendré par $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$, $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est facilement obtenue à partir de (II.4.18)); le produit $\langle \sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), \sigma_i^{-1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}) \rangle_{\text{bilin}}$ est égal à

$$-\frac{(q - q^{-1})c^{(i+1)}}{(c^{(i)} - c^{(i+1)})^2} \left((qc^{(i)} - q^{-1}c^{(i+1)}) \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle_{\text{bilin}} + (qc^{(i+1)} - q^{-1}c^{(i)}) \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \rangle_{\text{bilin}} \right),$$

ce qui fait 0 grâce à (II.4.24).

Si $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ n'est pas standard, alors $\sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = \epsilon q^\epsilon \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$, $\epsilon = \pm 1$, et la \mathbf{S}^- -invariance de (II.4.23) pour σ_i suit.

Si $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est standard, alors un calcul direct donne que $\langle \sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), \sigma_i^{-1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}) \rangle_{\text{bilin}}$ est égal à

$$\frac{(q - q^{-1})^2 c^{(i)} c^{(i+1)} \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle_{\text{bilin}} + (q^{-1}c^{(i)} - qc^{(i+1)})^2 \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \rangle_{\text{bilin}}}{(c^{(i)} - c^{(i+1)})^2}.$$

En utilisant (II.4.24), on obtient

$$\langle \sigma_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}), \sigma_i^{-1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}) \rangle_{\text{bilin}} = \langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle_{\text{bilin}}.$$

La preuve de la Proposition est terminée. □

Remarques.

(a) Notons que (II.4.26) est compatible avec toute spécialisation des paramètres q et v_j , $j = 1, \dots, m$.

(b) Pour $m = 1$, c'est-à-dire pour l'algèbre de Hecke usuelle $H(1, 1, n)$, nous avons $c^{(i)} = q^{2cc^{(i)}}$ où $cc^{(i)}$ est le contenu classique de la case contenant i , et la formule (II.4.23) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \rangle_{\text{bilin}} = \prod_{j,k: j < k, c^{(j)} \neq c^{(k)}, c^{(j)} \neq c^{(k)} q^{\pm 2}} \frac{(cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1)_q}{(cc^{(j)} - cc^{(k)})_q}. \quad (\text{II.4.27})$$

1.2. Soit A la matrice correspondant au générateur $\mathbf{a} \in \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ de $H(m, 1, n)$ dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$, voir (II.4.25). Alors

$$A(A^{-1})^T = \mathbf{Id}, \quad (\text{II.4.28})$$

où \mathbf{Id} est la matrice identité et, étant donnée une matrice x , x^T signifie la matrice transposée

2. Produits scalaires sesquilineaires.

2.1. Pour tout polynôme de Laurent $f \in \mathbb{C}[q, q^{-1}, v_1, v_1^{-1}, \dots, v_m, v_m^{-1}]$, notons par $\gamma(f)$ le polynôme de Laurent en q, v_1, \dots, v_m obtenu en conjuguant les coefficients de f . L'involution γ s'étend à l'anneau \mathfrak{R} . Soit U un \mathfrak{R} -module libre. Nous appelons *produit scalaire γ -sesquilineaire* sur U une application bi-additive $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma: U \times U \rightarrow \mathfrak{R}$ avec la propriété (remplaçant (II.4.26))

$$\langle f u, g v \rangle_\gamma = f \gamma(g) \langle u, v \rangle_\gamma, \quad f, g \in \mathfrak{R}, \quad u, v \in U. \quad (\text{II.4.29})$$

Soit \mathfrak{B} une base de U . Une application arbitraire $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{R}$ s'étend, par bi-additivité et par (II.4.29), en un produit scalaire γ -sesquilineaire sur U .

Ainsi les formules (II.4.22)–(II.4.23) définissent un produit scalaire γ -sesquilineaire sur $U_{\lambda^{(m)}}$ qui est S^- -invariant, où $S = \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$; la vérification répète la preuve de la Proposition II.11.

Les \mathbb{C} -spécialisations compatibles avec la définition d'un produit scalaire γ -sesquilineaire sont celles où q et v_j , $j = 1, \dots, m$, sont des nombres réels; pour de telles spécialisations, le produit scalaire γ -sesquilineaire devient un produit scalaire Hermitien usuel sur un espace vectoriel complexe.

2.2. Notons par ω l'involution sur $\mathbb{C}[q, q^{-1}, v_1, v_1^{-1}, \dots, v_m, v_m^{-1}]$ qui envoie q à q^{-1} et v_j à v_j^{-1} , $j = 1, \dots, m$. L'involution ω est compatible avec la localisation par rapport à l'ensemble multiplicatif engendré par \mathfrak{D} , et s'étend donc à \mathfrak{R} . Soit U comme avant un module libre sur \mathfrak{R} . Nous appelons *produit scalaire ω -sesquilineaire* une application bi-additive $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega: U \times U \rightarrow \mathfrak{R}$ avec la propriété

$$\langle f u, g v \rangle_\omega = f \omega(g) \langle u, v \rangle_\omega, \quad f, g \in \mathfrak{R}, \quad u, v \in U. \quad (\text{II.4.30})$$

Soit \mathfrak{B} une base de U . Une application arbitraire $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{R}$ s'étend, par bi-additivité et par (II.4.30), en un produit scalaire ω -sesquilineaire sur U .

Ainsi, les formules (II.4.22)–(II.4.23) définissent un produit scalaire ω -sesquilineaire sur $U_{\lambda^{(m)}}$ qui est S -invariant, où $S = \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$; la vérification est similaire à la preuve de la Proposition II.11.

les seules \mathbb{C} -spécialisations compatibles avec la définition d'un produit scalaire ω -sesquilineaire sont celle où q et v_j , $j = 1, \dots, m$, appartiennent à $\{-1, 1\}$.

2.3. Les involutions γ et ω commutent. Soit ϖ l'involution sur \mathfrak{A} définie comme la composition de γ et ω , $\varpi(f) := \omega(\gamma(f))$ pour $f \in \mathfrak{A}$. Nous appelons *produit scalaire ϖ -sesquilinéaire* une application bi-additive $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varpi} : U \times U \rightarrow \mathfrak{A}$ avec la propriété

$$\langle f u, g v \rangle_{\varpi} = f \varpi(g) \langle u, v \rangle_{\varpi}, \quad f, g \in \mathfrak{A}, \quad u, v \in U. \quad (\text{II.4.31})$$

Soit \mathfrak{B} une base de U . Une application arbitraire $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ s'étend, par bi-additivité et par (II.4.31), en un produit scalaire ϖ -sesquilinéaire sur U .

Ainsi, les formules (II.4.22)–(II.4.23) définissent un produit scalaire ϖ -sesquilinéaire sur $U_{\lambda(m)}$ qui est \mathbb{S} -invariant, où $\mathbb{S} = \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$; la vérification est similaire à la preuve de la Proposition II.11.

Les \mathbb{C} -spécialisations compatibles avec la définition d'un produit scalaire ϖ -sesquilinéaire sont celles où q et v_j , $j = 1, \dots, m$, sont des nombres complexes de norme 1; pour de telles spécialisations, le produit scalaire ϖ -sesquilinéaire devient un produit scalaire Hermitien usuel sur un espace vectoriel complexe.

2.4. Réintroduisons les paramètres de déformation q, v_1, \dots, v_m dans la notation pour l'algèbre de Hecke cyclotomique : $H_{q, v_1, \dots, v_m}(m, 1, n)$. Il existe une autre façon d'interpréter des formules (II.4.22)–(II.4.23) dans les situations ω -sesquilinéaire et ϖ -sesquilinéaire. A savoir, ces formules définissent un couplage $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre les espaces de représentations $U_{\lambda(m)}$ et $U'_{\lambda(m)}$ où le premier espace $U_{\lambda(m)}$ porte la représentation de l'algèbre $H_{q, v_1, \dots, v_m}(m, 1, n)$, et le second espace $U'_{\lambda(m)}$ porte la représentation de l'algèbre $H_{q^{-1}, v_1^{-1}, \dots, v_m^{-1}}(m, 1, n)$. Dans la situation ω -sesquilinéaire, le couplage est bilinéaire au sens usuel, $\langle f u, g v \rangle = f g \langle u, v \rangle$, $f, g \in \mathfrak{A}$. Dans la situation ϖ -sesquilinéaire, le couplage est γ -sesquilinéaire, $\langle f u, g v \rangle = f \gamma(g) \langle u, v \rangle$, $f, g \in \mathfrak{A}$.

Les deux espaces $U_{\lambda(m)}$ et $U'_{\lambda(m)}$ ont la même base $\mathfrak{B} = \{\mathcal{X}_{\lambda(m)}\}$. La formule (II.4.20), clamant la \mathbb{S} -invariance du couplage, est vérifiée; maintenant, dans la formule (II.4.20), $x(u)$ est compris comme le résultat de l'action du générateur $x \in H_{q, v_1, \dots, v_m}(m, 1, n)$ sur le vecteur $u \in U_{\lambda(m)}$, tandis que $x(v)$ est le résultat de l'action du générateur $x \in H_{q^{-1}, v_1^{-1}, \dots, v_m^{-1}}(m, 1, n)$ sur le vecteur $v \in U'_{\lambda(m)}$.

2.5. Comme chaque facteur $\frac{c^{(j)} - c^{(k)}}{q^{-1}c^{(j)} - qc^{(k)}}$ dans le produit dans la partie droite de (II.4.23) est stable par rapport aux involutions γ et ω , on peut étendre les involutions γ et ω à l'anneau $\tilde{\mathfrak{A}}_{\lambda(m)}$ par les règles $\gamma \left(\zeta_{X_{\lambda(m)}}^{jk} \right) = \zeta_{X_{\lambda(m)}}^{jk}$ et $\omega \left(\zeta_{X_{\lambda(m)}}^{jk} \right) = \zeta_{X_{\lambda(m)}}^{jk}$ pour tout $X_{\lambda(m)} \in \mathfrak{F}_{\lambda(m)}$ et tout $(j, k) \in \mathfrak{E}_{X_{\lambda(m)}}$.

Soit A la matrice correspondant au générateur $\mathbf{a} \in \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ de $H(m, 1, n)$ dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda(m)}\}$, voir (II.4.25). Alors

$$A \gamma(A^{-1})^T = \mathbf{Id}, \quad A \omega(A)^T = \mathbf{Id} \quad \text{et} \quad A \varpi(A)^T = \mathbf{Id}. \quad (\text{II.4.32})$$

Pour une spécialisation où q et v_j , $j = 1, \dots, m$, sont des nombres complexes de norme 1, les matrices des générateurs de $H(m, 1, n)$ dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda(m)}\}$ sont unitaires au sens usuel.

3. Soit $\rho: \hat{H}_n \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ une représentation irréductible de l'algèbre de Hecke affine \hat{H}_n sur un espace vectoriel complexe \mathcal{V} de dimension finie L . Supposons que l'opérateur $\rho(\tau)$ est diagonalisable et que le spectre de $\rho(\tau)$ est $\{(v_1)_{l_1}, (v_2)_{l_2}, \dots, (v_m)_{l_m}\}$; ici, les nombres $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sont différents deux à deux, l_j est la multiplicité de la valeur propre v_j , $j = 1, \dots, m$. Alors, la représentation ρ passe au quotient cyclotomique $H_{q, v_1, \dots, v_m}(m, 1, n)$ de l'algèbre de Hecke affine. Supposons que les paramètres q, v_1, \dots, v_m satisfont aux restrictions (II.2.10)-(II.2.12). Par le résultat de complétude de la Section II.5, la représentation ρ est isomorphe, en tant que représentation de $H_{q, v_1, \dots, v_m}(m, 1, n)$, à $V_{\lambda^{(m)}}$ pour une certaine m -partition $\lambda^{(m)}$. Notons que, étant donnée la connaissance des valeurs de q et v_j , $j = 1, \dots, m$, la base $\{\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\}$ est uniquement déterminée, à un facteur global constant près – si il y avait deux base, alors l'opérateur transformant l'une en l'autre contredirait à l'irréductibilité de la représentation ρ . Le changement de base diagonal ne pose aucun problème : dans le produit dans (II.4.25), $\varsigma_{X_{\lambda^{(m)}}}^{jk}$ peut être choisie comme une racine carrée arbitraire de $\frac{c^{(j)} - c^{(k)}}{q^{-1}c^{(j)} - qc^{(k)}}$, $(j, k) \in \mathfrak{E}_{X_{\lambda^{(m)}}$.

Soit A la matrice du générateur $\mathfrak{a} \in \{\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ de \hat{H}_n dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$. Alors

$$A(A^{-1})^T = \mathbf{Id}_{\mathcal{V}},$$

où $\mathbf{Id}_{\mathcal{V}}$ est l'opérateur identité sur l'espace \mathcal{V} .

Si les paramètres q et v_j , $j = 1, \dots, m$ sont des nombres complexes de norme 1, les matrices des générateurs, dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$, sont unitaires au sens usuel, $AA^\dagger = \mathbf{Id}_{\mathcal{V}}$, où A^\dagger est la matrice transposée conjuguée.

Appendice II.4.A Structure de module sur les produits tensoriels

Les résultats qui suivent ne sont pas nécessaires pour la compréhension du reste du Chapitre et la preuve du résultat principal est un peu longue; c'est pourquoi nous les avons placés dans un Appendice, qui peut donc être sauté lors d'une première lecture.

L'algèbre \mathfrak{T} , définie dans la Sous-Section II.4.2, a été utilisée dans la Sous-Section II.4.3 pour construire les modules sur l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$. Une extension de cette construction équipe les produits tensoriels des espaces sous-jacents des $H(m, 1, n)$ -modules, correspondant aux m -partitions de n , d'une structure de $H(m, 1, n)$ -module. Dans cet Appendice, nous donnons les définitions précises et étudions le produit tensoriel, noté $\hat{\otimes}$, des représentations.

Dans la Section II.5, nous prouvons que, sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sur les paramètres de $H(m, 1, n)$, les représentations irréductibles de $H(m, 1, n)$ sont toutes des représentations correspondant à des m -partitions de n . Notre méthode pour étudier le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ est inductive, et repose largement sur le résultat de complétude de la Section II.5. A priori, nous ne connaissons pas la nature des représentations apparaissant dans la décomposition du produit tensoriel $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ de deux représentations correspondant aux m -partitions $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'^{(m)}$. C'est à ce moment-là que nous avons besoin d'un résultat fort de complétude, assurant que tout $H(m, 1, n)$ -module est isomorphe à une somme directe de $H(m, 1, n)$ -modules correspondant à des m -partitions de n . Notons que le résultat de complétude est établi dans la Section II.5 indirectement, en comptant des dimensions.

Les règles de décomposition du produit tensoriel $\hat{\otimes}$ sont données dans la Proposition II.12 de cet Appendice. Qualitativement, le résultat est formulé très facilement : le produit tensoriel $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$

est isomorphe à la somme directe de $\dim(V_{\lambda'(m)})$ copies de la représentation $V_{\lambda(m)}$. Pour quelques choix parmi les plus simples de $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'(m)$, la décomposition du produit tensoriel $V_{\lambda(m)} \hat{\otimes} V_{\lambda'(m)}$ peut être faite par un calcul direct. Néanmoins, malgré la simplicité de la formulation du résultat de la Proposition II.12, nous n'avons pu trouver un moyen de faire un calcul explicite pour deux m -partitions arbitraires. En outre, les partitions rectangulaires jouent un rôle particulier dans notre façon de prouver la Proposition II.12, mais pas dans la formule finale des règles de décomposition. Il serait intéressant de trouver une façon plus explicite de prouver la Proposition II.12, sans utiliser le résultat de complétude de la Section II.5.

Par construction dans la Sous-Section II.4.3, la représentation $V_{\lambda(m)}$ correspondant à une m -partition $\lambda^{(m)}$ est équipée avec la base naturelle $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ indexée par les m -tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$. La forme explicite de l'isomorphisme $V_{\lambda(m)} \hat{\otimes} V_{\lambda'(m)} \cong \dim(V_{\lambda'(m)}) V_{\lambda(m)}$ est assez complexe, indiquant à nouveau que le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ requiert probablement une meilleure compréhension. Nous donnons plusieurs exemples.

Certaines assertions ci-dessous sont valides dans une situation plus générale, sans le résultat de complétude de la Section II.5. Pour formuler précisément ces assertions, nous dirons qu'une représentation de l'algèbre $H(m, 1, n)$ appartient à la classe \mathcal{S} si elle est isomorphe à une somme directe de représentations correspondant à des m -partitions.

II.4.A.1 Définition du produit tensoriel $\hat{\otimes}$

1. Etant donnée une m -partition $\lambda^{(m)}$ de taille n , rappelons que $U_{\lambda(m)}$ est l'espace vectoriel avec la base choisie $\{\mathcal{X}_{\lambda(m)}\}$. Nous insistons sur le fait que $U_{\lambda(m)}$ est compris seulement comme un espace vectoriel, sans structure de $H(m, 1, n)$ -module spécifiée, alors que $V_{\lambda(m)}$ est compris comme le $H(m, 1, n)$ -module donné par les formules (II.4.16)-(II.4.17) avec l'espace vectoriel sous-jacent $U_{\lambda(m)}$. En particulier, une représentation de $H(m, 1, n)$ est dans la classe \mathcal{S} si elle est isomorphe à une somme directe de représentations de la forme $V_{\lambda(m)}$.

Soient $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'(m)$ deux m -partitions de taille n . Les instructions de la Proposition II.8 sont homogènes en les générateurs \mathcal{X} . Une base du produit tensoriel de $U_{\lambda(m)}$ et $U_{\lambda'(m)}$ est naturellement indexée par les produits $\mathcal{X}_{\lambda(m)}\mathcal{X}_{\lambda'(m)}$, où $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ est le générateur labellisé par le m -tableau standard $X_{\lambda(m)}$ (de la forme $\lambda^{(m)}$) et $\mathcal{X}_{\lambda'(m)}$ est le générateur labellisé par le m -tableau standard $X_{\lambda'(m)}$ (de la forme $\lambda'(m)$).

Maintenant, en déplaçant les éléments \mathcal{X} 's vers la gauche (d'après les instructions de la Proposition II.8) dans les expressions $\phi\mathcal{X}_{\lambda(m)}\mathcal{X}_{\lambda'(m)}| \rangle$, où $\phi \in H(m, 1, n)$, et en évaluant, avec l'aide de (II.4.15), les éléments de $H(m, 1, n)$ sur le vide, nous définissons la structure de $H(m, 1, n)$ -module sur le produit tensoriel $U_{\lambda(m)} \otimes U_{\lambda'(m)}$ des espaces vectoriels sous-jacents aux représentations $V_{\lambda(m)}$ et $V_{\lambda'(m)}$. Notons $V_{\lambda(m)} \hat{\otimes} V_{\lambda'(m)}$ la représentation résultante de $H(m, 1, n)$.

En principe, le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ est défini pour un m et un n donnés, et devrait être noté $\hat{\otimes}_{m,n}$. Pour la clarté de l'exposition, nous omettons m dans la notation pour le produit, la valeur de m étant fixée ici. En ce qui concerne n , nous introduisons ci-dessous l'opération de restriction de n à $(n - 1)$ et expliquons que le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ est compatible avec la restriction ; grâce à la compatibilité, nous omettons aussi n dans la notation pour le produit tensoriel.

Notons que pour tout produit $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}\mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}$, le générateur τ ne passe jamais à travers $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ vers la droite (en raison de la forme particulière (II.4.9) des instructions pour le générateur τ). Seulement les générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ passent à travers $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ et ensuite agissent sur $\mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}$. La sous-algèbre de $H(m, 1, n)$ engendrée par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke $H(1, 1, n)$ (ceci est une conséquence de la forme normale prouvée dans le Chapitre III, Section III.4, Corollaire III.20). Ainsi, cela a du sens de considérer le produit tensoriel $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V$, où V est une représentation de $H(1, 1, n)$, comme une représentation de $H(m, 1, n)$. De plus, par construction, la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ est naturellement isomorphe à la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} W$, où W est la restriction de la représentation $V_{\lambda'^{(m)}}$ à la sous-algèbre engendrée par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$.

Produit $\hat{\otimes}$: exemples simples. Soit $\varpi^{(m)}$ la m -partition $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de taille n telle que λ_1 est la partition à une seule ligne (n) et $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ sont des partitions vides. Il existe un seul m -tableau standard de forme $\varpi^{(m)}$ que nous notons $X_{\varpi^{(m)}}$. Pour cette m -partition particulière, les formules (II.4.8)–(II.4.9) deviennent :

$$(\sigma_i - q)\mathcal{X}_{\varpi^{(m)}} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \quad \text{et} \quad (\tau - v_1)\mathcal{X}_{\varpi^{(m)}} = 0. \quad (\text{II.4.33})$$

Ainsi la représentation $V_{\varpi^{(m)}}$ est isomorphe à la représentation de dimension 1 de l'algèbre $H(m, 1, n)$ engendrée par le vide $|\rangle$. Par construction, les propriétés suivantes sont vérifiées (les isomorphismes doivent être compris comme isomorphismes de $H(m, 1, n)$ -modules) : pour toute m -partition $\lambda^{(m)}$ de taille n ,

$$V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\varpi^{(m)}} \cong V_{\lambda^{(m)}} , \quad (\text{II.4.34})$$

et

$$V_{\varpi^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda^{(m)}} \cong V_{\varpi^{(m)}} \oplus \dots \oplus V_{\varpi^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda^{(m)}}) V_{\varpi^{(m)}} . \quad (\text{II.4.35})$$

En fait, dans les formules (II.4.34)–(II.4.35), on peut remplacer $\varpi^{(m)}$ par toute m -partition $\varpi'^{(m)}$ telle que $V_{\varpi'^{(m)}}$ est de dimension 1 ; ce sont les m -partitions $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ avec une seule partition λ_j non-vide qui est égale à (n) ou (1^n) . Pour la validité de (II.4.34) pour $\varpi'^{(m)}$ voir, par exemple, la Remarque (b) après les formules (II.4.16)–(II.4.17) ; la validité de (II.4.35) pour $\varpi'^{(m)}$ est immédiate.

Les formules (II.4.34)–(II.4.35) sont obtenues de manière directe. La Proposition II.12 ci-dessous décrit le produit $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ de représentations correspondant à deux m -partitions arbitraires de même taille. Pourtant la preuve de la formule (II.4.38) n'est pas directe et repose sur le résultat de complétude, qui repose à son tour sur les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sur les paramètres de $H(m, 1, n)$.

Restriction. Un rôle essentiel, dans notre étude du produit $\hat{\otimes}$, est joué par l'opération de restriction qui permet d'utiliser des arguments de type récursifs.

Pour toute représentation \mathcal{W} de l'algèbre $H(m, 1, n)$, nous notons $\text{Res}_{n-1}^n(\mathcal{W})$ la restriction de \mathcal{W} à la sous-algèbre de $H(m, 1, n)$ engendrée par $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$; d'après les résultats du Chapitre III, Section III.4 (l'assertion (ii) de la Proposition III.19), cette sous-algèbre est isomorphe à $H(m, 1, n-1)$. Cela justifie la notation Res_{n-1}^n .

La classe \mathcal{S} de représentations est stable par rapport à la restriction Res_{n-1}^n . En effet, les formules (II.4.8)–(II.4.9) impliquent que pour toute m -partition $\lambda^{(m)}$ de taille n ,

$$\text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}}) \cong \bigoplus_{\alpha^{(m)}: \alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})} V_{\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}}, \quad (\text{II.4.36})$$

où nous rappelons que $\mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ est l'ensemble des m -cases supprimables de $\lambda^{(m)}$. La stabilité vient de (II.4.36).

Géométriquement, il est clair que l'on peut reconstruire une m -partition $\lambda^{(m)}$ à partir de l'ensemble $\mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ de ses m -cases supprimables. C'est pourquoi, par (II.4.36), pour un $H(m, 1, n)$ -module irréductible V , appartenant à la classe \mathcal{S} , $V \cong V_{\lambda^{(m)}}$, sa restriction $\text{Res}_{n-1}^n(V)$ caractérise la représentation V de $H(m, 1, n)$ uniquement à un isomorphisme près.

De plus, on voit directement que l'opération $\hat{\otimes}$ sur les représentations appartenant à la classe \mathcal{S} est compatible avec l'opération de restriction dans le sens suivant : soient deux $H(m, 1, n)$ -modules \mathcal{W} et \mathcal{W}' appartenant à \mathcal{S} , nous avons

$$\text{Res}_{n-1}^n(\mathcal{W} \hat{\otimes} \mathcal{W}') \cong (\text{Res}_{n-1}^n(\mathcal{W})) \hat{\otimes} (\text{Res}_{n-1}^n(\mathcal{W}')). \quad (\text{II.4.37})$$

Ici, le symbole $\hat{\otimes}$ dans la partie gauche est le produit pour $H(m, 1, n)$; dans la partie droite, c'est le produit pour $H(m, 1, n-1)$. La formule (II.4.37) justifie l'usage du symbole $\hat{\otimes}$ à la place d'un plus rigoureux $\hat{\otimes}_n$.

Notons que (II.4.36) et (II.4.37) sont valides dès que (II.4.8) a un sens pour les représentations concernées (c'est-à-dire, dès que les dénominateurs dans (II.4.8) ne s'annulent pas); nous n'avons pas besoin ici du résultat de complétude de la Section II.5.

II.4.A.2 Règles de décomposition

Sous les contraintes (II.2.10)–(II.2.12) sur les paramètres $H(m, 1, n)$, le produit $\hat{\otimes}$ de deux représentations de la classe \mathcal{S} appartient encore à la classe \mathcal{S} , en raison du résultat de complétude de la Section II.5. La Proposition suivante donne les règles de décomposition pour le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ de représentations de la classe \mathcal{S} .

Proposition II.12. *Soient $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'^{(m)}$ deux m -partitions arbitraires de taille n . Supposons que les conditions (II.2.10)–(II.2.12) sur les paramètres de $H(m, 1, n)$ sont vérifiées. Alors la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ de $H(m, 1, n)$ est isomorphe à la somme directe de $\dim(V_{\lambda'^{(m)})$ copies de $V_{\lambda^{(m)}}$:*

$$V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}) V_{\lambda^{(m)}}. \quad (\text{II.4.38})$$

Preuve. Nous allons utiliser ici que deux représentations $V_{\pi_1^{(m)}}$ et $V_{\pi_2^{(m)}}$ de $H(m, 1, n)$ correspondant à deux m -partitions différentes $\pi_1^{(m)}$ et $\pi_2^{(m)}$ de n ne sont pas isomorphes, et que toute représentation de $H(m, 1, n)$ appartient à la classe \mathcal{S} (ceci est prouvé, sous les contraintes (II.2.10)–(II.2.12), dans la Section II.5).

Nous allons utiliser le Lemme suivant.

Lemme II.13. (i) Soit $\lambda^{(m)}$ une m -partition de taille n satisfaisant les conditions suivantes :

- $\lambda^{(m)}$ est différente des m -partitions de la forme $(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda, \emptyset, \dots, \emptyset)$ où λ est une partition telle que $|\lambda| \leq 2$ ou $\lambda = (2, 1)$ ou $\lambda = (2, 1, 1)$ ou $\lambda = (3, 1)$;
- $\lambda^{(m)}$ est différente des m -partitions de la forme $(\emptyset, \dots, \emptyset, \square, \emptyset, \dots, \emptyset, \square, \emptyset, \dots, \emptyset)$.

(ii) Soit $\mathfrak{L} = \{\lambda_1^{(m)}, \dots, \lambda_l^{(m)}\}$ un l -uplet de m -partitions de taille n différentes de $\lambda^{(m)}$, $\lambda_j^{(m)} \neq \lambda^{(m)}$ pour $j = 1, \dots, l$.

Alors les deux ensembles suivants de m -partitions

$$\lambda^{(m)-} := \{\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}\}_{\alpha^{(m)} : \alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})} \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}^- := \{\lambda_j^{(m)} \setminus \{\alpha_j^{(m)}\}\}_{j: j=1, \dots, l; \alpha_j^{(m)} : \alpha_j^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda_j^{(m)})}$$

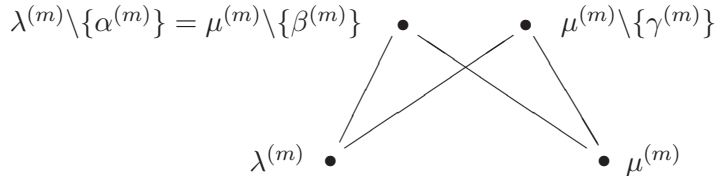
ne coïncident pas.

Le Lemme II.13 est un résultat purement combinatoire. Sa preuve le sera, combinatoire, également. Nous allons prouver que si $\lambda^{(m)-}$ est contenue dans \mathfrak{L}^- , alors il existe une sous- m -partition de taille $n - 1$ de l'une des $\lambda_j^{(m)} \in \mathfrak{L}$ qui n'est pas une sous- m -partition de $\lambda^{(m)}$. La traduction pour la théorie des représentations de la dernière phrase est la suivante.

Corollaire II.14. Supposant les conditions (i) et (ii) vérifiées. Si $\text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}})$ est isomorphe à une sous-représentation de $\text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda_1^{(m)}} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_l^{(m)}})$, alors il existe une m -partition $\nu^{(m)}$ de taille $n - 1$ telle que $V_{\nu^{(m)}}$ est isomorphe à une sous-représentation de $\text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda_1^{(m)}} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_l^{(m)}})$, mais pas à une sous-représentation de $\text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}})$.

Preuve du Lemme. Supposons que le l -uplet $\mathfrak{L} = \{\lambda_1^{(m)}, \dots, \lambda_l^{(m)}\}$, formé par des m -partitions différentes de $\lambda^{(m)}$, est tel que $\lambda^{(m)-}$ est contenu dans \mathfrak{L}^- . Alors pour chaque $\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$, la m -partition $\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}$ de $n - 1$ est une sous- m -partition d'une certaine m -partition de \mathfrak{L} ; pour une m -case $\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ donnée, il peut exister plusieurs m -partitions de \mathfrak{L} avec cette propriété ; choisissons-en une et notons-là $\mu^{(m)}$. D'après la condition (ii), la m -partition $\mu^{(m)}$ est obtenue à partir de $\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}$ en ajoutant une m -case $\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\})$ différente de $\alpha^{(m)}$.

Pour une m -case supprimable $\gamma^{(m)}$ de $\mu^{(m)}$, il est géométriquement clair que la m -partition $\mu^{(m)} \setminus \{\gamma^{(m)}\}$ n'est pas une sous- m -partition de $\lambda^{(m)}$ si et seulement si $\gamma^{(m)}$ est différente de $\beta^{(m)}$; en effet, comme pour les partitions ordinaires, le graphe d'inclusion (voir Chapitre I, Section I.2 pour la définition) des m -partitions est un réseau ; en particulier, il ne peut pas contenir de sous-graphe de la forme



Donc, si $\mu^{(m)}$ admet une m -case supprimable $\gamma^{(m)}$ différente de $\beta^{(m)}$, alors $\mu^{(m)} \setminus \{\gamma^{(m)}\}$ est une sous- m -partition de l'une des $\lambda_j^{(m)} \in \mathfrak{L}$ et n'est pas une sous- m -partition de $\lambda^{(m)}$. Ainsi, il suffit de

montrer qu'il existe une m -case $\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$ telle que, pour toute m -partition $\mu^{(m)}$ obtenue en ajoutant à $\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}$ une m -case $\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\})$, différente de $\alpha^{(m)}$, il existe une m -case supprimable $\gamma^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\mu^{(m)})$, différente de $\beta^{(m)}$.

Une telle m -case $\gamma^{(m)}$ n'existe pas si et seulement si la m -partition $\mu^{(m)}$ a une seule m -case supprimable, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &\text{seulement une partition du } m\text{-uplet } \mu^{(m)} \text{ n'est pas vide} \\ &\text{et cette partition est de forme rectangulaire.} \end{aligned} \tag{II.4.39}$$

Ainsi, une m -partition $\lambda^{(m)}$ contredisant les affirmations du Lemme II.13 doit vérifier cette propriété : pour tout $\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)})$, il existe $\beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\})$, différente de $\alpha^{(m)}$, telle que la m -partition $\mu^{(m)}$, obtenue en ajoutant à $\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}$ la m -case $\beta^{(m)}$, est décrite par (II.4.39). On voit directement que ces m -partitions sont exactement celles qui sont exclues par la partie (i) de la formulation du Lemme II.13. \square

Nous revenons maintenant à la preuve de la Proposition II.12.

Nous procédons par récurrence sur n ; la formule (II.4.38) est triviale pour $n = 0$, c'est-à-dire pour $\lambda^{(m)} = (\emptyset, \dots, \emptyset)$. Comme la vérification de l'étape récursive, ci-dessous, de la récurrence le montre, nous allons avoir besoin de vérifier séparément plusieurs cas pour compléter la preuve de la Proposition II.12.

Etape récursive. Soient $\lambda^{(m)}$ et $\lambda'^{(m)}$ deux m -partitions de taille n telles que $\lambda^{(m)}$ satisfait aux conditions de la partie (i) du Lemme II.13. D'après les formules (II.4.36)–(II.4.37),

$$\begin{aligned} \text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}) &\cong \bigoplus_{\substack{\alpha^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda^{(m)}) \\ \alpha'^{(m)} \in \mathcal{E}_-(\lambda'^{(m)})}} V_{\lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)} \setminus \{\alpha'^{(m)}\}}. \end{aligned} \tag{II.4.40}$$

L'hypothèse de récurrence est : la formule (II.4.38) est valide pour les produits dans la partie droite de (II.4.40). En supposant l'hypothèse de récurrence vérifiée, nous transformons la partie droite de (II.4.40),

$$\text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}) \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}}) \text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}}). \tag{II.4.41}$$

Maintenant, nous allons utiliser plusieurs fois le résultat de complétude de la Section II.5. Premièrement, la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ appartient à \mathcal{S} , donc nous pouvons écrire $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}} = c V_{\lambda^{(m)}} \oplus W$ où

- W appartient à \mathcal{S} et n'a pas de composant irréductible isomorphe à $V_{\lambda^{(m)}}$,
- c est un entier non-négatif ; $c \leq \dim(V_{\lambda'^{(m)}})$ par un argument de dimension.

Si $c < \dim(V_{\lambda'^{(m)}})$, nous utilisons encore les résultats de la Section II.5 pour obtenir une contradiction. En effet, en raison de la semi-simplicité au niveau $n - 1$ (notons que les conditions (II.2.10)–(II.2.12) au niveau $n - 1$ sont impliquées par les conditions (II.2.10)–(II.2.12) au niveau n), le monoïde des représentations de $H(m, 1, n - 1)$ admet un procédé d'annulation : en d'autres termes, nous pouvons simplifier (II.4.41) par $c \text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}})$ des deux côtés. Nous obtenons :

$$\text{Res}_{n-1}^n(W) \cong \left(\dim(V_{\lambda'^{(m)}}) - c \right) \text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}}) .$$

Comme $\text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}})$ est isomorphe à une sous-représentation de $\text{Res}_{n-1}^n(W)$, le Corollaire II.14 implique l'existence d'une m -partition $\nu^{(m)}$ de $n-1$ telle que $\nu^{(m)}$ n'est pas une sous- m -partition de $\lambda^{(m)}$ mais $V_{\nu^{(m)}}$ est isomorphe à une sous-représentation de $\text{Res}_{n-1}^n(W)$. Mais maintenant la représentation $\text{Res}_{n-1}^n(W)$ est isomorphe à une somme directe de plusieurs copies de $\text{Res}_{n-1}^n(V_{\lambda^{(m)}})$ impliquant qu'une telle $\nu^{(m)}$ ne peut pas exister, une contradiction. Ainsi $c = \dim(V_{\lambda^{(m)}})$ et

$$V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}} \cong \dim(V_{\lambda'^{(m)}}) V_{\lambda^{(m)}}.$$

La preuve de l'étape récursive est terminée.

Fin de la preuve de la Proposition II.12. Si la formule (II.4.38) est vérifiée pour une m -partition $\lambda^{(m)}$ et toute m -partition $\lambda'^{(m)}$ de même taille que $\lambda^{(m)}$, nous dirons simplement que (II.4.38) est vérifiée pour $\lambda^{(m)}$. Notre façon de prouver l'étape récursive fait référence au Lemme II.13. Donc si la formule (II.4.38) est établie pour toute m -partition de taille n , alors elle est établie pour toutes les m -partitions $\lambda^{(m)}$ de taille $(n+1)$ sauf si $\lambda^{(m)}$ est une des m -partitions listées dans la partie (i) du Lemme II.13. Pour les m -partitions listées dans la partie (i) du Lemme II.13, une preuve indépendante est requise. Par (II.4.35), la formule (II.4.38) est déjà établie pour les m -partitions $\lambda^{(m)}$ de 1, c'est-à-dire, pour $\lambda^{(m)} = (\emptyset, \dots, \emptyset, \square, \emptyset, \dots, \emptyset)$, et pour les m -partitions de la forme

$$(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda, \emptyset, \dots, \emptyset), \text{ où } \lambda \text{ est } (2) \text{ ou } (1, 1). \quad (\text{II.4.42})$$

Ci-dessous, nous allons vérifier séparément que la formule (II.4.38) est vraie pour les autres m -partitions $\lambda^{(m)}$ listées dans la partie (i) du Lemme II.13, c'est-à-dire, les m -partitions $\lambda^{(m)}$ de la forme

$$(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda, \emptyset, \dots, \emptyset), \text{ où } \lambda \text{ est } (2, 1), (2, 1, 1) \text{ ou } (3, 1) \quad (\text{II.4.43})$$

ou de la forme

$$(\emptyset, \dots, \emptyset, \square, \emptyset, \dots, \emptyset, \square, \emptyset, \dots, \emptyset). \quad (\text{II.4.44})$$

Preuve de (II.4.38) pour les m -partitions de la forme (II.4.43) ou (II.4.44). Nous rappelons ici que, pour toutes $\lambda^{(m)}, \lambda'^{(m)}$, la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} V_{\lambda'^{(m)}}$ est naturellement isomorphe à la représentation $V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} W$ où W est une représentation de l'algèbre de Hecke $H(1, 1, n)$ (voir la fin du paragraphe 1 de la Sous-Section II.4.4 de cet appendice). E raison du résultat de complétude de la Section II.5, il est suffisant de considérer les cas $W \cong V_{\lambda}$ pour toutes partitions λ .

Pour les m -partitions $\lambda^{(m)}$ de la forme (II.4.43), le générateur τ agit comme une constante dans $V_{\lambda^{(m)}}$ et il est donc suffisant de travailler avec l'algèbre de Hecke $H(1, 1, n)$.

Réintroduisons pour ce paragraphe le paramètre de déformation q dans la notation pour l'algèbre de Hecke : $H_q(1, 1, n)$. Grâce aux relations (II.2.1)–(II.2.2) et (II.2.7), nous avons un isomorphisme d'algèbres $\theta: H_q(1, 1, n) \rightarrow H_{-q^{-1}}(1, 1, n)$, définis sur les générateurs par $H_q(1, 1, n) \ni \sigma_i \mapsto \sigma_i \in H_{-q^{-1}}(1, 1, n)$. La composition avec θ d'une représentation de $H_{-q^{-1}}(1, 1, n)$, correspondant à une partition λ , envoie les représentations $V_{(3,1)}, V_{(2,2)}$ et $V_{(2,1,1)}$ de $H_{-q^{-1}}(1, 1, n)$ à, respectivement, les représentations $V_{(2,1,1)}, V_{(2,2)}$ et $V_{(3,1)}$ de $H_q(1, 1, n)$. Ainsi, la formule (II.4.38) pour $\lambda = (3, 1)$ est une conséquence de la formule (II.4.38) pour $\lambda = (2, 1, 1)$.

Nous rappelons que (II.4.38) a déjà été prouvée pour toute m -partition $\lambda^{(m)}$ telle que $V_{\lambda^{(m)}}$ est de dimension 1, voir (II.4.35).

Pour les m -partitions $\lambda^{(m)}$ de la forme (II.4.44), la preuve de (II.4.38) est réduite à la situation où $V_{\lambda^{(m)}}$ est remplacée par $V_{\lambda'}$ où λ' est (2) ou (1, 1), auxquels cas la représentation $V_{\lambda'}$ est unidimensionnelle et la formule (II.4.38) est vérifiée.

1. Pour la m -partition $\lambda^{(m)}$ de la forme (II.4.43) avec $\lambda = (2, 1)$, nous avons réduit la preuve à la situation $m = 1$, et il reste à établir le résultat (II.4.38) seulement pour $V_{\lambda} \hat{\otimes} V_{\lambda}$.

L'espace vectoriel sous-jacent de V_{λ} a une base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\}$ où $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ et $\mathcal{X}_2 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$. Dans cette base, les générateurs σ_1 et σ_2 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \text{diag}(q, -q^{-1}), \quad \sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 3_q \\ 1 & q^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.45})$$

Nous ordonnons la base $\mathcal{X}_i \mathcal{X}_j$ de l'espace vectoriel sous-jacent de $V_{\lambda} \hat{\otimes} V_{\lambda}$ lexicographiquement ; c'est-à-dire que nous choisissons l'ordre $\{\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_2\}$. Dans cette base, les matrices de σ_1 et σ_2 sont :

$$\sigma_1 \mapsto \text{diag}(q, q, -q^{-1}, -q^{-1}), \quad \sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 0 & 0 & 3_q \\ 0 & -q^{-2} & 1 & q^2 + q^{-2} \\ -q^2 - q^{-2} & 3_q & q^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}.$$

Les deux sous-espaces avec les bases

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2, 3_q \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_1\}, \\ & \{\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_2\} \end{aligned} \quad (\text{II.4.46})$$

portent la représentation (II.4.45), ce qui implique (II.4.38) dans ce cas. Comme $V_{\lambda} \hat{\otimes} V_{\lambda}$ se décompose en somme directe de deux représentations isomorphes, le choix (II.4.46) des sous-espaces n'est pas unique. Nous faisons seulement (ici et pour les autres cas ci-dessous) un choix simple.

2. Pour la m -partition $\lambda^{(m)}$ de la forme (II.4.43) avec $\lambda = (2, 1, 1)$, nous avons réduit la preuve à la situation $m = 1$, et il reste à établir le résultat (II.4.38) seulement pour $V_{\lambda} \hat{\otimes} V_{\lambda'}$ avec $\lambda' = (2, 2), (2, 1, 1)$ et (3, 1).

L'espace vectoriel sous-jacent de V_{λ} a une base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3\}$ où $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$, $\mathcal{X}_2 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$ et

$\mathcal{X}_3 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$. Dans cette base, les générateurs σ_1 , σ_2 et σ_3 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \text{diag}(q, -q^{-1}, -q^{-1}),$$

$$\sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 3_q & 0 \\ 1 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1}2_q \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \mapsto \frac{1}{3_q} \begin{pmatrix} -q^{-1}3_q & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-3} & 4_q \\ 0 & 2_q & q^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4.47})$$

2a. $\lambda' = (2, 2)$.

Le sous-espace vectoriel sous-jacent à $V_{\lambda'}$ a une base $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$, où $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$ et $\mathcal{Y}_2 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$.

Nous ordonnons la base $\mathcal{X}_i\mathcal{Y}_j$ de l'espace vectoriel sous-jacent de $V_{\lambda} \hat{\otimes} V_{\lambda'}$ lexicographiquement. Dans cette base, les générateurs σ_1 , σ_2 et σ_3 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \text{diag}(q, q, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}),$$

$$\sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 0 & 0 & 3_q & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2} & 1 & q^2 + q^{-2} & 0 & 0 \\ -q^2 - q^{-2} & 3_q & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \mapsto \frac{1}{3_q} \begin{pmatrix} -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 4_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & -2_q \\ 0 & 0 & 2_q & 0 & q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4_q & 0 & q^3 \end{pmatrix}.$$

Les deux sous-espaces avec les bases

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, 3_q\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1, 3_q\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1\},$$

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1 - (q^2 + q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_2\}$$

portent la représentation (II.4.47), ce qui implique (II.4.38) dans ce cas.

2b. $\lambda' = \lambda = (2, 1, 1)$.

Nous ordonnons la base $\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j$ de l'espace vectoriel sous-jacent de $V_{\lambda} \hat{\otimes} V_{\lambda}$ lexicographiquement. Dans cette base, les générateurs σ_1 , σ_2 et σ_3 sont réalisés comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \text{diag}(q, q, q, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}),$$

$$\sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 0 & 0 & 0 & 3_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2} & 0 & 1 & q^2 + q^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -q^2 - q^{-2} & 3_q & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3_q & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \mapsto \frac{1}{3_q} \begin{pmatrix} -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 0 & -2_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 0 & 0 & 4_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 2_q & q^3 + q^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & -4_q & 0 & 0 & q^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^3 - q^{-3} & 4_q & 0 & q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2_q & 0 & 0 & 0 & q^3 \end{pmatrix}.$$

Les trois sous-espaces avec les bases

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, 3_q\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1, -3_q(q^2 + q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1\},$$

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2, -(q^2 + q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1 - \frac{q^3 + q^{-3}}{2_q}\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_2 + \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3\},$$

$$\{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_3, -3_q\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_3, -3_q(q^2 + q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_2\}$$

portent la représentation (II.4.47), ce qui implique (II.4.38) dans ce cas.

2c. $\lambda' = (3, 1)$.

L'espace vectoriel sous-jacent de $V_{\lambda'}$ a une base $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3\}$, où $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$, $\mathcal{Y}_2 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$ et $\mathcal{Y}_3 := \mathcal{X} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$. Nous ordonnons la base $\mathcal{X}_i\mathcal{Y}_j$ de l'espace vectoriel sous-jacent de $V_{\lambda} \hat{\otimes} V_{\lambda'}$ lexicographiquement. Dans cette base, les générateurs σ_1 , σ_2 et σ_3 sont r ealis es comme suit :

$$\sigma_1 \mapsto \text{diag}(q, q, q, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}, -q^{-1}),$$

$$\sigma_2 \mapsto \frac{1}{2_q} \begin{pmatrix} -q^{-2} & 0 & 0 & q^2 + q^{-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2} & 0 & 3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-2} & 0 & 0 & 3_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3_q & -q^2 - q^{-2} & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1}2_q \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \mapsto \frac{1}{3_q} \begin{pmatrix} -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1}3_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 0 & 4_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 0 & q^3 + q^{-3} & 2_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-3} & 0 & 4_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2_q & 0 & 0 & q^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2_q & 0 & q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4_q & -q^3 - q^{-3} & 0 & 0 & q^3 \end{pmatrix}.$$

Les trois sous-espaces avec les bases

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1, 3_q\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2, 3_q(q^2 + q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3\}, \\ & \{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_1 + \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1 + (q^2 + q^{-2})\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3\}, \\ & \{\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_3, \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_3, \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_2 - \frac{q^3 + q^{-3}}{2_q}\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3\} \end{aligned}$$

portent la représentation (II.4.47), ce qui implique (II.4.38) dans ce cas.

La preuve de la Proposition II.12 est terminée. \square

Remarques.

(a) D'après la Proposition II.12, le produit tensoriel $\hat{\otimes}$ est évidemment associatif. Remarquons que si nous avons une preuve indépendante de l'associativité de $\hat{\otimes}$, cela impliquerait immédiatement la Proposition II.12 :

$$V_{\lambda(m)} \hat{\otimes} V_{\lambda'(m)} \cong (V_{\lambda(m)} \hat{\otimes} V_{\varpi(m)}) \hat{\otimes} V_{\lambda'(m)} \cong V_{\lambda(m)} \hat{\otimes} (V_{\varpi(m)} \hat{\otimes} V_{\lambda'(m)}) \cong \dim(V_{\lambda'(m)}) V_{\lambda(m)} ;$$

nous avons utilisé (II.4.34) pour le premier isomorphisme et (II.4.34)-(II.4.35) pour le dernier.

(b) Soit $\lambda^{(m)}$ une m -partition de taille n et $\rho: H(m, 1, n) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{Y})$ une représentation de $H(m, 1, n)$. On peut construire une représentation de $H(m, 1, n)$ sur l'espace $U_{\lambda(m)} \otimes \mathfrak{Y}$ en déplaçant

les éléments de $H(m, 1, n)$ à travers les éléments de base $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ de $U_{\lambda^{(m)}}$ avec l'aide des instructions de la Proposition II.8, et ensuite en appliquant la représentation ρ . Appelons cette représentation $V_{\lambda^{(m)}} \boxtimes \mathfrak{W}$. Si ρ est une représentation de la classe S , cette construction est équivalente au produit $\hat{\otimes}$,

$$V_{\lambda^{(m)}} \boxtimes \mathfrak{W} \cong V_{\lambda^{(m)}} \hat{\otimes} \mathfrak{W} . \quad (\text{II.4.48})$$

De manière similaire à la construction de la structure de $H(m, 1, n)$ -module sur l'espace $U_{\lambda^{(m)}} \otimes U_{\lambda'^{(m)}}$, on peut construire une structure de $H(m, 1, n)$ -module sur le produit tensoriel de l espaces correspondant à l m -partitions quelconques, avec $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On doit remplacer dans la construction les combinaisons quadratiques $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mathcal{X}_{\lambda'^{(m)}}$ par des combinaisons $\mathcal{X}_{\lambda_l^{(m)}} \mathcal{X}_{\lambda_{l-1}^{(m)}} \dots \mathcal{X}_{\lambda_1^{(m)}}$ de degré l , déplacer les éléments de $H(m, 1, n)$ à travers ces combinaisons en utilisant les relations homogènes (en \mathcal{X}) (II.4.8)–(II.4.9), et en évaluant ces éléments sur le vide $|\rangle$. Appelons cette représentation $\mathfrak{W}_{\lambda_l^{(m)}, \lambda_{l-1}^{(m)}, \dots, \lambda_1^{(m)}}$. La représentation $\mathfrak{W}_{\lambda_l^{(m)}, \lambda_{l-1}^{(m)}, \dots, \lambda_1^{(m)}}$ est isomorphe à la somme directe de $\dim(V_{\lambda_l^{(m)}}) \times \dots \times \dim(V_{\lambda_{l-1}^{(m)}})$ copies de $V_{\lambda_l^{(m)}}$. En effet, par (II.4.48), $\mathfrak{W}_{\lambda_l^{(m)}, \lambda_{l-1}^{(m)}, \dots, \lambda_1^{(m)}}$ est équivalente à la représentation $V_{\lambda_l^{(m)}} \boxtimes \mathfrak{W}_{\lambda_{l-1}^{(m)}, \dots, \lambda_1^{(m)}}$. Par récurrence (la base de la récurrence est la formule (II.4.38)), la représentation $\mathfrak{W}_{\lambda_{l-1}^{(m)}, \dots, \lambda_1^{(m)}}$ est isomorphe à la somme directe de $\dim(V_{\lambda_{l-1}^{(m)}}) \times \dots \times \dim(V_{\lambda_{l-2}^{(m)}})$ copies de $V_{\lambda_{l-1}^{(m)}}$. Avec (II.4.38) et (II.4.48), l'affirmation est vérifiée.

(c) La partition $(2, 1, 1)$ apparait dans la liste de la partie (i) du Lemme II.13 parce que

$$\text{Res}_3^4(V_{(2,1,1)}) \cong \text{Res}_3^4(V_{(2,2)}) \oplus \text{Res}_3^4(V_{(1,1,1,1)}) .$$

Pour la représentation $V_{(2,1,1)}$, la matrice de l'opérateur $\sigma_1 \sigma_3$ est

$$\frac{1}{3_q} \begin{pmatrix} -3_q & 0 & 0 \\ 0 & q^{-4} & -q^{-1}4_q \\ 0 & -q^{-1}2_q & -q^2 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, $\text{tr}_{V_{(2,1,1)}}(\sigma_1 \sigma_3) = -2 + q^{-2}$. Dans la représentation $V_{(1,1,1,1)}$, nous avons $\sigma_1, \sigma_3 \mapsto (-q^{-1})$ tandis que dans la représentation $V_{(2,2)}$ nous avons $\sigma_1, \sigma_3 \mapsto \text{diag}(q, -q^{-1})$; donc $\text{tr}_{V_{(1,1,1,1)}}(\sigma_1 \sigma_3) + \text{tr}_{V_{(2,2)}}(\sigma_1 \sigma_3) = q^2 + 2q^{-2}$. Ceci est différent de $\text{tr}_{V_{(2,1,1)}}(\sigma_1 \sigma_3) = -2 + q^{-2}$ si et seulement si $(q + q^{-1})^2 \neq 0$ c'est-à-dire, $q + q^{-1} \neq 0$. C'est pourquoi, pour établir la formule (II.4.38) pour la représentation $V_{(2,1,1)}$, il est suffisant de calculer la trace de $\sigma_1 \sigma_3$ dans les représentations $V_{(2,1,1)} \hat{\otimes} V_{\lambda}$ avec $\lambda = (2, 2), (2, 1, 1)$ et $(3, 1)$. Notons que cet argument marche en particulier dans la limite classique $q \rightarrow 1$.

II.5 Complétude

1. Dans la Section précédente, nous avons construit, pour toute m -partition $\lambda^{(m)}$, une représentation de $H(m, 1, n)$. Le spectre des éléments de Jucys–Murphy J_1, \dots, J_n dans cette représentation est l'ensemble des lignes de nombres correspondant aux m -tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$, voir le Lemme II.9. Cette construction fournit une inclusion de l'ensemble des m -tableaux standards de taille n dans $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$. D'un autre côté, la Proposition II.3 et la Proposition II.5 donnent une

inclusion de $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ dans l'ensemble des m -tableaux standards de taille n . Ces opérations sont, par construction, inverses l'une à l'autre. Nous compilons ces résultats.

Nous soulignons que les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sont essentielles pour les affirmations ci-dessous.

Proposition II.15. *L'ensemble $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$, l'ensemble $\text{Cont}_m(n)$ et l'ensemble des m -tableaux standards sont en bijection.*

Corollaire II.16. *Le spectre des éléments de Jucys–Murphy est simple dans les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ (labellisées par les m -partitions).*

Cela signifie que pour deux m -tableaux standards différents (pas nécessairement de la même forme), les éléments de $\text{Spec}(J_1, \dots, J_n)$ qui leur sont associés par la Proposition II.15 sont différents (deux lignes (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) sont différentes s'il existe un certain i tel que $a_i \neq a'_i$).

2. Il reste à vérifier que nous obtenons avec cette approche toutes les représentations irréductibles de l'algèbre $H(m, 1, n)$.

D'après des résultats sur les puissances du graphe de Young, exposés dans le Chapitre I, Section I.2, la somme des carrés des dimensions des représentations construites est égale à la dimension de $H(m, 1, n)$. Il est donc suffisant de prouver que les représentations construites sont irréductibles et non-isomorphes deux à deux. Ceci est fait dans le Théorème II.17.

Comme conséquence, nous obtenons que l'algèbre $H(m, 1, n)$ est semi-simple sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12).

Théorème II.17. *Les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ (labellisées par les m -partitions) de l'algèbre $H(m, 1, n)$, construites dans la Section II.4 sont irréductibles et non-isomorphes deux à deux.*

Preuve. La preuve peut-être trouvée dans [4] (ainsi que le résultat de semi-simplicité). Nous répétons brièvement l'argument pour être complet.

Dans la preuve, nous utilisons une récurrence sur n . Ceci est justifiée car les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) pour $H(m, 1, n)$ impliquent les restrictions (II.2.10)–(II.2.12), dans lesquelles n est remplacé par n' , pour $H(m, 1, n')$ avec n' arbitraire vérifiant $0 < n' < n$.

Le Corollaire II.16 implique tout de suite que les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ et $V_{\lambda'^{(m)}}$ sont non-isomorphes si $\lambda^{(m)} \neq \lambda'^{(m)}$.

Supposons par récurrence que les représentations $V_{\mu^{(m)}}$, pour toutes les m -partitions $\mu^{(m)}$ de $n-1$, sont des représentations irréductibles de $H(m, 1, n-1)$. La base de la récurrence est $n=1$; il n'y a rien à prouver dans ce cas.

Fixons une m -partition $\lambda^{(m)}$ avec $|\lambda^{(m)}| = n$. Soit $\{\mu_i^{(m)}\}$, $i = 1, \dots, l$, l'ensemble des sous- m -partitions de $\lambda^{(m)}$ avec $|\mu_i^{(m)}| = n-1$.

Pour chaque i , la représentation $V_{\mu_i^{(m)}}$ de $H(m, 1, n-1)$ est une sous-représentation de la restriction de la représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ à $H(m, 1, n-1)$. La dimension de $V_{\lambda^{(m)}}$ (le nombre de m -tableaux standards

de forme $\lambda^{(m)}$) est la somme (sur i) des dimensions de $V_{\mu_i^{(m)}}^{(m)}$. Ainsi, la représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ de $H(m, 1, n)$ se décompose par rapport à $H(m, 1, n - 1)$ en la somme directe des représentations $V_{\mu_i^{(m)}}^{(m)}$.

Les sous- m -partitions $\mu_i^{(m)}$ sont différentes, et correspondent donc à des représentations irréductibles non-isomorphes de $H(m, 1, n - 1)$. Il s'ensuit que les positions de $V_{\mu_i^{(m)}}^{(m)}$ en tant que sous-espaces de $V_{\lambda^{(m)}}$ sont bien définies. C'est pourquoi, si $V_{\lambda^{(m)}}$ a un sous-espace non-trivial invariant U , alors U doit contenir au moins une des $V_{\mu_i^{(m)}}^{(m)}$, disons $V_{\mu_1^{(m)}}^{(m)}$.

Il suffit de montrer que, partant d'éléments de $V_{\mu_1^{(m)}}^{(m)}$, on peut obtenir un élément de $V_{\mu_j^{(m)}}^{(m)}$, quel que soit $j \neq 1$, par l'action d'opérateurs de $H(m, 1, n)$. Un vecteur de base de $V_{\lambda^{(m)}}$, labellisé par un m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$ de forme $\lambda^{(m)}$, appartient au sous-espace $V_{\mu_j^{(m)}}^{(m)}$, où $\mu_j^{(m)}$ est la sous- m -partition de taille $(n - 1)$ formée par les m -cases de $X_{\lambda^{(m)}}$ portant $1, \dots, n - 1$. Pour tout $j \neq 1$, la sous- m -partition $\mu_j^{(m)}$ est obtenue à partir de $\mu_1^{(m)}$ en enlevant une m -case et en ajoutant une autre m -case, différente de celle enlevée; Il est facile de voir que les deux m -cases impliquées ne sont pas adjacentes et, de plus, ne sont pas sur des diagonales voisines. Prenons le m -tableau standard de forme $\lambda^{(m)}$ pour lequel les nombres $1, \dots, n - 1$ sont placés dans la sous- m -partition $\mu_1^{(m)}$ de $\lambda^{(m)}$, et de plus le nombre $n - 1$ est dans la seule m -case de $\mu_1^{(m)}$ qui n'est pas dans la sous- m -partition $\mu_j^{(m)}$. Le vecteur \vec{v} de $V_{\lambda^{(m)}}$ labellisé par ce m -tableau appartient au sous-espace $V_{\mu_1^{(m)}}^{(m)}$, et est envoyé par σ_{n-1} à une combinaison du vecteur \vec{v} et d'un vecteur appartenant à $V_{\mu_j^{(m)}}^{(m)}$. La formule (II.4.16) montre que le vecteur de $V_{\mu_j^{(m)}}^{(m)}$ n'est pas nul. \square

Soit \mathcal{B} une sous-algèbre associative d'une algèbre associative \mathcal{A} . Une représentation indécomposable (irréductible si l'algèbre \mathcal{A} est semi-simple) de l'algèbre \mathcal{A} se décompose par rapport à la sous-algèbre \mathcal{B} , c'est-à-dire, se décompose en somme directe de représentations indécomposables (irréductibles si l'algèbre \mathcal{B} est semi-simple) de \mathcal{B} . L'information sur les décompositions de toutes les représentations \mathcal{A} par rapport à la sous-algèbre \mathcal{B} est appelée *règles de branchement* pour le couple $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (voir Chapitre I, Section I.1).

Comme corollaire de toute la construction, nous obtenons sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) les règles de branchement pour le couple $(H(m, 1, n), H(m, 1, n - 1))$; la représentation de l'algèbre $H(m, 1, n)$ labellisée par une m -partition $\lambda^{(m)}$ de n se décompose en la somme directe des représentations de l'algèbre $H(m, 1, n)$ labellisées par les sous- m -partitions de $\lambda^{(m)}$ de taille $n - 1$. En particulier, nous obtenons le Corollaire suivant.

Corollaire II.18. *Sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12), les règles de branchement pour la chaîne, par rapport à n , d'algèbres $H(m, 1, n)$ sont sans multiplicité.*

Cela signifie que, sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12), dans la décomposition d'une représentation irréductible de $H(m, 1, n)$, chaque représentation irréductible de l'algèbre $H(m, 1, n - 1)$ apparaît avec une multiplicité égale à 0 ou 1.

Par des arguments standards (voir Chapitre I, Section I.1, Proposition I.11), il vient que, sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12), le centralisateur de la sous-algèbre $H(m, 1, n - 1)$ dans l'algèbre

$H(m, 1, n)$ est commutatif pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$.

- Il vient également de la théorie des représentations que, sous les restrictions (II.2.10)–(II.2.12),
- Le centralisateur de la sous-algèbre $H(m, 1, n - 1)$ dans l’algèbre $H(m, 1, n)$ est engendré par le centre de $H(m, 1, n - 1)$ et l’élément de Jucys–Murphy J_n ;
 - la sous-algèbre engendrée par les éléments de Jucys–Murphy J_1, \dots, J_n de l’algèbre $H(m, 1, n)$ est maximale commutative.

Remarques.

(a) Pour tout m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, définissons l’élément $\mathfrak{P}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ de l’algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$ par la récursion suivante. La condition initiale est $\mathfrak{P}_{\emptyset} = 1$. Soit $\alpha^{(m)}$ la m -case portant le nombre n dans $X_{\lambda^{(m)}}$; définissons $\mu^{(m)} := \lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}$. Notons $X_{\mu^{(m)}}$ le m -tableau standard avec les nombres $1, \dots, n - 1$ dans les mêmes m -cases que dans $X_{\lambda^{(m)}}$. La récursion est donnée par

$$\mathfrak{P}_{X_{\lambda^{(m)}}} := \mathfrak{P}_{X_{\mu^{(m)}}} \prod_{\beta^{(m)} : \beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}), \beta^{(m)} \neq \alpha^{(m)}} \frac{J_n - c(\beta^{(m)})}{c(\alpha^{(m)}) - c(\beta^{(m)})} \quad (\text{II.5.1})$$

où $c(\beta^{(m)})$ est le contenu de la m -case $\beta^{(m)}$. En raison des résultats de complétude de cette Section, les éléments $\mathfrak{P}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ forment un ensemble complet d’idempotents primitifs orthogonaux deux à deux de l’algèbre $H(m, 1, n)$ (voir Chapitre suivant, Section III.3).

De plus, nous allons prouver que il existe un homomorphisme bien défini $\varrho : \mathfrak{T} \rightarrow H(m, 1, n)$, qui est l’identité sur les générateurs $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, et qui envoie $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ à $\mathfrak{P}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ pour tout m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$. Après utilisation de la complétude, la seule vérification non-triviale que l’on doit faire est de vérifier que, pour tout m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$ tel que $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ est standard, la relation définissante (II.4.8) de l’algèbre \mathfrak{T} est satisfaite par les images de $\sigma_i, \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ et $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ par l’homomorphisme ϱ . La vérification se réduit à l’égalité suivante pour les matrices (voir (II.4.18)) :

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.5.2})$$

où $A = \frac{qc^{(i)} - q^{-1}c^{(i+1)}}{c^{(i)} - c^{(i+1)}}$, $B = \frac{qc^{(i+1)} - q^{-1}c^{(i)}}{c^{(i+1)} - c^{(i)}}$, $C = \frac{(q - q^{-1})(c^{(i+1)} + c^{(i)})}{c^{(i+1)} - c^{(i)}}$ et $c^{(i)} := c(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Les éléments $\varrho(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}})$ sont les unités matricielles diagonales ; les éléments

$$\varrho\left(\sigma_i + \frac{(q - q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}}|i + 1)}{c(X_{\lambda^{(m)}}|i) - c(X_{\lambda^{(m)}}|i + 1)}\right) \varrho(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = \varrho(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i}) \varrho\left(\sigma_i + \frac{(q - q^{-1})c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}{c(X_{\lambda^{(m)}}|i + 1) - c(X_{\lambda^{(m)}}|i)}\right) \quad (\text{II.5.3})$$

forment une partie des unités matricielles hors-diagonales (non-normalisées) - le calcul (II.5.2) montre que ces éléments ne sont pas nuls. Pour l’algèbre de Hecke usuelle $H(1, 1, n)$, l’égalité (II.5.3) avait déjà été établie dans [77]. L’ensemble complet des unités matricielles hors-diagonales a été construit dans [84] pour l’algèbre de Hecke usuelle. La construction pour l’algèbre de Hecke cyclotomique est similaire, et nous laissons les détails au lecteur.

(b) Pour un sous-ensemble $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\}$ avec $l < m$, soit $\mathfrak{z} := (\tau - v_{i_1}) \dots (\tau - v_{i_l})$. En prenant le quotient de $H(m, 1, n)$ par l'idéal engendré par \mathfrak{z} , nous obtenons un homomorphisme $\mathfrak{p}: H(m, 1, n) \rightarrow H(l, 1, n)$ où $H(l, 1, n)$ est l'algèbre de Hecke cyclotomique avec les paramètres $q, v_{i_1}, \dots, v_{i_l}$ (notons que les restrictions (II.2.10)–(II.2.12) sont vérifiées pour ce choix de paramètres si elles sont vérifiées pour q, v_1, \dots, v_n). Les représentations de $H(m, 1, n)$ pour lesquelles les entrées diagonales de la matrice (diagonale) (II.4.17) appartiennent à $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\}$ (ces représentations sont labellisées par les m -partitions avec des partitions vides aux places correspondant aux v_j qui ne sont pas dans $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\}$) passent à travers l'image $\mathfrak{p}(H(m, 1, n))$ dans $H(l, 1, n)$. La somme des carrés des dimensions de ces représentations est égale à la dimensions de $H(l, 1, n)$. Il vient donc que \mathfrak{p} est surjectif.

Début du diagramme de Bratteli coloré de $H(2, 1, n)$. Ci-dessous, le début du diagramme de Bratteli (quatre premiers étages) pour la chaîne des algèbres $H(2, 1, n)$ est dessiné. Nous "colorons" les arêtes par les valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy de $H(2, 1, n)$, qui représentent l'ajout d'une m -case dans un m -tableau standard (les arêtes descendant du niveau i au niveau $i + 1$ sont labellisés par les valeurs propres de l'élément J_{i+1} ; le sommet du haut est situé au niveau 0).

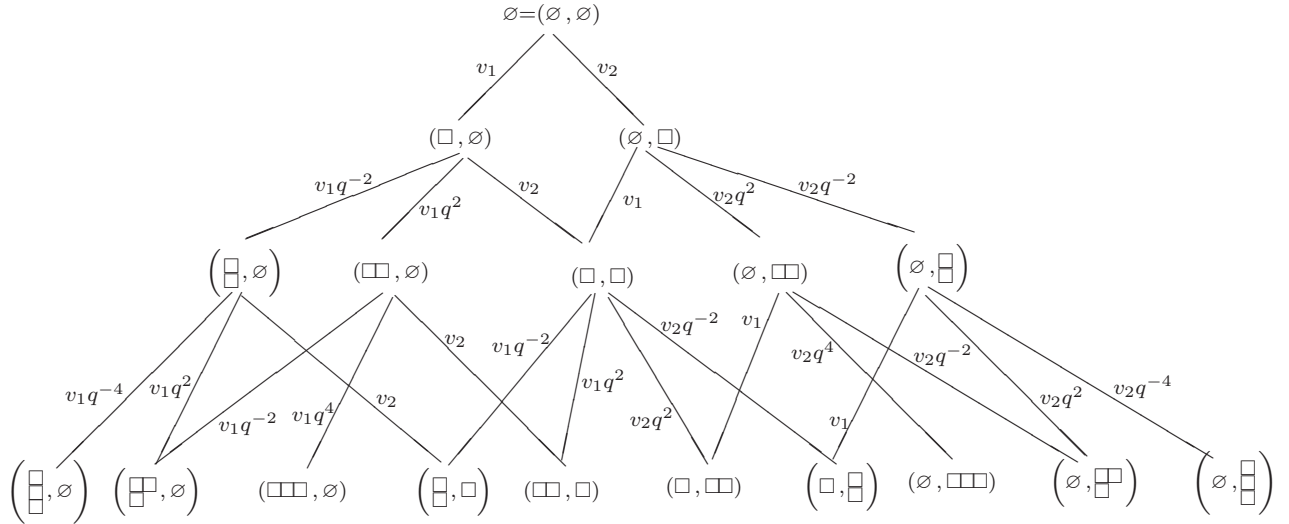


Fig. II.5. Diagramme de Bratteli (quatre premiers niveaux) pour $H(m, 1, n)$ avec $m = 2$.

II.6 Limite classique

Nous étudions dans cette Section la limite classique de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$, c'est-à-dire l'algèbre du groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n)$. La théorie des représentations des groupes $G(m, 1, n)$ est bien connue, voir [97] ou, *e.g.*, [67]. La théorie des représentations de $G(m, 1, n)$

peut aussi être directement déduite de la théorie des représentations de $H(m, 1, n)$ en prenant la limite

$$\begin{cases} v_i \rightarrow \xi_i & \text{pour } i = 1, \dots, m, \text{ où les } \xi_i \text{'s sont les racines } m\text{-ème de l'unité distinctes,} \\ q \rightarrow \pm 1 \end{cases} \quad (\text{II.6.1})$$

dans les formules pour les éléments matriciels. Néanmoins, il est intéressant de considérer la "limite classique" de toute l'approche développée ci-dessus établissant une approche pour la théorie des représentations du groupe $G(m, 1, n)$ ne se référant pas à la théorie des représentations de $H(m, 1, n)$. Notons également que cette approche ne fait pas appel à la théorie des représentations du groupe symétrique (rappelons que $G(m, 1, n)$ est isomorphe au produit en couronne du groupe cyclique à m éléments par le groupe symétrique, voir ci-dessous). Par ailleurs, la construction d'une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de l'algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m -tableaux standards correspondant aux m -partitions de n est intéressante en soi.

La théorie des représentations d'une classe plus générale de groupes, à savoir des produits en couronne de groupes finis avec le groupe symétrique, a été construite, dans l'esprit de [86], dans [87]. La construction dans [87] est élaborée dans le contexte de la théorie des groupes. Dans cette Section, nous allons voir comment cette approche est restaurée – sur l'exemple des groupes $G(m, 1, n)$ – par la limite classique de l'approche développée dans les Sections précédentes pour $H(m, 1, n)$. Nous verrons qu'il existe certaines subtilités lors du passage à la situation classique des groupes (on devra être prudent sur l'ordre des limites *etc*). Comme souvent, la situation classique apparaît être plus compliquée que celle dans le cas non-dégénéré.

Nous résumons brièvement le contenu des prochaines Sous-Sections. Nous présentons tout d'abord, dans la Sous-Section II.6.2, les éléments de Jucys–Murphy classiques de l'algèbre du groupe $G(m, 1, n)$, que nous obtenons comme des limites classiques de certaines expressions impliquant les éléments de Jucys–Murphy de $H(m, 1, n)$. Comme dans le cas non-dégénéré, l'étude des éléments de Jucys–Murphy est l'objet principal dans notre construction de la théorie des représentations. Ensuite, nous répétons plus ou moins les mêmes étapes que dans le cas non-dégénéré.

Dans la Sous-Section II.6.3, nous montrons que les éléments de Jucys–Murphy de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ sont les images d'éléments de Jucys–Murphy "universels" vivant dans une version d'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique (en opposition avec la situation non-dégénérée où l'algèbre de Hecke affine usuelle était utilisée), que nous notons $\mathfrak{A}_{m,n}$ (voir la Définition II.19 ci-dessous). Nous vérifions, au niveau classique, la commutativité de l'ensemble $\{x_1, \tilde{x}_1, \dots, x_n, \tilde{x}_n\}$ d'éléments de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$. Il se trouve que l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$ coïncide avec un cas particulier d'"algèbre de Hecke en couronne" définie dans [103], voir aussi [89] (nous n'avons pas inclus la commutativité de l'ensemble d'éléments $\{x_1, \tilde{x}_1, \dots, x_n, \tilde{x}_n\}$ dans les relations définissantes de $\mathfrak{A}_{m,n}$, contrairement à la définition de l'algèbre de Hecke en couronne de [103]; comme corollaire de la commutativité de ces éléments, prouvée ici, les deux algèbres sont en fait isomorphes).

Dans la Sous-Section II.6.4, nous étudions tout d'abord la théorie des représentations de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$, qui est l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique non-triviale la plus simple. Ses représentations portent une information importante sur les propriétés récursives des éléments de Jucys–Murphy. Nous présentons la liste des représentations irréductibles de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ avec x_1, \tilde{x}_1, x_2 et \tilde{x}_2 diagonalisables, et ensuite, presque sans preuve, les analogues des résultats des Sections II.3, II.4

et II.5 (les preuves suivent les mêmes lignes que les preuves des affirmations analogues des Sections II.3, II.4 et II.5) dans le contexte classique. En particulier, nous caractérisons les ensembles de valeurs propres communes des éléments de Jucys–Murphy de l’algèbre du groupe $G(m, 1, n)$, et établissons ensuite la relation avec les m -partitions.

Les représentations du groupe $G(m, 1, n)$ sont construites, dans la Sous-Section II.6.5, avec l’aide d’une structure d’algèbre sur le produit tensoriel de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ avec une algèbre associative libre engendrée par les m -tableaux standards correspondant aux m -partitions de n .

Finalement, dans la Sous-Section II.6.6, nous présentons le résultat de complétude et certaines conséquences, de manière analogue au contenu de la Section II.5.

Nous donnons aussi dans le premier Appendice à cette Section une preuve d’un théorème structurel (donnant une forme normale) pour l’algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique (c’est un cas particulier de la base PBW pour les algèbres de Hecke en couronne donnée dans [103]). Dans le deuxième Appendice, nous étudions les opérateurs d’entrelacement (introduits dans [103]) de l’algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique, qui fournissent certaines informations sur le spectre des éléments de Jucys–Murphy ; nous expliquons comment obtenir ces opérateurs d’entrelacement en prenant la limite classique de certains opérateurs d’entrelacement de l’algèbre de Hecke affine non-dégénérée.

Certains résultats présentés dans cette Section sont connus (les éléments de Jucys–Murphy [87, 104], la construction des représentations à partir de l’étude du spectre [87], l’algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique [103, 102]). Nous insistons ici sur les connections entre le traitement pour les groupes $G(m, 1, n)$ avec le traitement pour les algèbres $H(m, 1, n)$. Par ailleurs, la méthode pour construire les représentations donnée dans la Sous-Section II.6.5 semble être nouvelle.

II.6.1 Groupe de réflexions complexe $G(m, 1, n)$

Le groupe $G(m, 1, n)$ est engendré par les éléments t, s_1, \dots, s_{n-1} avec les relations définissantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-2, \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{pour } i, j = 1, \dots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.6.2})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} t^m = 1, \\ ts_1 ts_1 = s_1 ts_1 t, \\ ts_i = s_i t & \text{pour } i > 1. \end{array} \right. \quad (\text{II.6.3})$$

La notation " s_i ", la même que pour les générateurs du groupe symétrique S_n , voir (II.4.4)-(II.4.6), ne devrait pas prêter à confusion ; le sous-groupe de $G(m, 1, n)$ engendré par les éléments s_1, \dots, s_{n-1} est isomorphe au groupe symétrique S_n .

Une étude structurelle du groupe $G(m, 1, n)$ est réalisée dans le Chapitre III, Section III.4 (nous donnons une autre présentation, nous appliquons l’algorithme de Coxeter–Todd et donnons une forme normale) ; les résultats présentés dans le présent Chapitre sont plutôt rattachés à la théorie des représentations.

II.6.2 Eléments de Jucys–Murphy

Dans cette Sous-Section, nous obtenons une version des éléments de Jucys–Murphy de $G(m, 1, n)$ à partir des éléments de Jucys–Murphy de l’algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$, plus précisément, par des limites de certaines expressions contenant les éléments de Jucys–Murphy de $H(m, 1, n)$ (un procédé similaire a été utilisé dans [88] pour les groupes de Weyl). Les éléments de Jucys–Murphy ont été définis dans [87, 104] pour le produit en couronne d’un groupe fini quelconque A par le groupe symétrique. Les éléments de Jucys–Murphy obtenus ici par la procédure de limite coïncident avec ceux de [87, 104] quand A est le groupe cyclique.

Dans la suite, nous identifierons systématiquement les générateurs $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ de $H(m, 1, n)$ avec, respectivement, t, s_1, \dots, s_{n-1} dès que la limite classique (II.6.1) aura été prise.

Eléments de Jucys–Murphy. Nous définissons les analogues classiques suivants des éléments de Jucys–Murphy J_i :

$$j_i := \lim_{q \rightarrow 1} \lim_{v_i \rightarrow \xi_i} (J_i) , \quad (\text{II.6.4})$$

et

$$\tilde{j}_i := \frac{1}{m} \lim_{q \rightarrow 1} \lim_{v_i \rightarrow \xi_i} \left(\frac{J_i^m - 1}{q - q^{-1}} \right) . \quad (\text{II.6.5})$$

Attention : l’ordre pour prendre les limites ici est important, nous prenons d’abord la limite par rapport aux variables v_i , et ensuite la limite par rapport à q ; il est peut-être plus instructif d’écrire

$$(\text{II.6.5}) \text{ sous la forme } \tilde{j}_i := \frac{1}{m} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\lim_{v_i \rightarrow \xi_i} (J_i^m - 1)}{q - q^{-1}} .$$

II.6.3 Algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique

Les éléments de Jucys–Murphy de l’algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$ sont les images des éléments de Jucys–Murphy "universels" de l’algèbre de Hecke affine. De façon tout à fait similaire, les éléments j_i et \tilde{j}_i sont les images de certains éléments "universels" d’une certaine algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique, que nous introduisons ici.

Définition II.19. Soit $\mathfrak{A}_{m,n}$ l’algèbre engendrée par $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}$ et deux générateurs de plus, x_1 et \tilde{x}_1 ; les relations définissantes sont données en trois étapes. Premièrement, il y a les relations définissantes concernant seulement les générateurs $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{s}_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{s}_i \bar{s}_{i+1} \bar{s}_i = \bar{s}_{i+1} \bar{s}_i \bar{s}_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-2, \\ \bar{s}_i \bar{s}_j = \bar{s}_j \bar{s}_i & \text{pour } i, j = 1, \dots, n-1 \text{ tels que } |i - j| > 1; \end{array} \right. \quad (\text{II.6.6})$$

deuxièmement, il y a les relations définissantes concernant aussi x_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^m = 1 , \\ x_1 \bar{s}_1 x_1 \bar{s}_1 = \bar{s}_1 x_1 \bar{s}_1 x_1 , \\ x_1 \bar{s}_i = \bar{s}_i x_1 \quad \text{si } i > 1; \end{array} \right. \quad (\text{II.6.7})$$

le troisième groupe de relations concerne en plus le générateur \tilde{x}_1 :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(\bar{s}_1\tilde{x}_1\bar{s}_1 + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_1^p \bar{s}_1 x_1^{-p}) = (\bar{s}_1\tilde{x}_1\bar{s}_1 + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_1^p \bar{s}_1 x_1^{-p})\tilde{x}_1 , \\ \tilde{x}_1\bar{s}_i = \bar{s}_i\tilde{x}_1 \quad \text{si } i > 1 , \\ \tilde{x}_1 x_1 = x_1 \tilde{x}_1 , \\ \tilde{x}_1 \bar{s}_1 x_1 \bar{s}_1 = \bar{s}_1 x_1 \bar{s}_1 \tilde{x}_1 . \end{cases} \quad (\text{II.6.8})$$

L'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$ est appelée l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique.

En raison des relations (II.6.6)–(II.6.7), il existe un homomorphisme

$$\hat{\iota} : \mathbb{C}G(m, 1, n) \rightarrow \mathfrak{A}_{m,n} , \quad \hat{\iota}(s_i) = \bar{s}_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1 , \quad \hat{\iota}(t) = x_1 . \quad (\text{II.6.9})$$

Soit π une application de l'ensemble des générateurs $\{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}, x_1, \tilde{x}_1\}$ vers $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ donnée par

$$\pi : \bar{s}_i \mapsto s_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1 , \quad x_1 \mapsto t , \quad \tilde{x}_1 \mapsto 0 . \quad (\text{II.6.10})$$

Clairement, π s'étend en un homomorphisme, que nous notons par le même symbole π , de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$ vers $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ (l'homomorphisme π est bien défini car les relations (II.6.8) sont trivialement satisfaites quand on envoie \tilde{x}_1 à 0). De plus, la composition $\pi \circ \hat{\iota}$ laisse les générateurs de $G(m, 1, n)$ invariants et est ainsi l'homomorphisme identité de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$; en particulier, l'application $\hat{\iota}$ est injective ou, de manière équivalente, la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{m,n}$ engendrée par les éléments $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}$ et x_1 est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n)$.

Définissons des éléments "de degré plus élevé" x_i et \tilde{x}_i , pour $i = 2, \dots, n$, par

$$x_{i+1} = \bar{s}_i x_i \bar{s}_i , \quad i = 1, \dots, n-1 , \quad (\text{II.6.11})$$

et

$$\tilde{x}_{i+1} = \bar{s}_i \tilde{x}_i \bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p \bar{s}_i x_i^{-p} , \quad i = 1, \dots, n-1 . \quad (\text{II.6.12})$$

La seconde relation de (II.6.7) peut être réécrite comme

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 ; \quad (\text{II.6.13})$$

les première et quatrième relations de (II.6.8) peuvent être réécrites, respectivement, comme

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2 \tilde{x}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{x}_1 x_2 = x_2 \tilde{x}_1 . \quad (\text{II.6.14})$$

Lemme II.20. *Nous avons*

$$\pi(x_i) = j_i \quad \text{et} \quad \pi(\tilde{x}_i) = \tilde{j}_i . \quad (\text{II.6.15})$$

Preuve. Nous devons vérifier que j_i (respectivement, \tilde{j}_i) vérifient la relation de récurrence (II.6.11) (respectivement, (II.6.12)) et la condition initiale $j_1 = t$ (respectivement, $\tilde{j}_1 = 0$).

Il vient de (II.6.4) directement que $j_1 = t$ et $j_{i+1} = s_i j_i s_i$, donc il reste seulement la vérification pour \tilde{j}_i .

En raison de (II.6.5), nous avons $\tilde{j}_1 = 0$. Ensuite nous calculons

$$\begin{aligned} J_{i+1}^m &= (\sigma_i J_i \sigma_i)^m \\ &= \sigma_i J_i \left((1 + (q - q^{-1}) \sigma_i) J_i \right)^{m-1} \sigma_i \\ &= \sigma_i J_i^m \sigma_i + (q - q^{-1}) \left(\sigma_i J_i \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i + \sigma_i J_i^2 \sigma_i J_i^{m-2} \sigma_i + \dots + \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i J_i \sigma_i \right) + O((q - q^{-1})^2). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{J_{i+1}^m - 1}{q - q^{-1}} &= \frac{\sigma_i J_i^m \sigma_i - 1}{q - q^{-1}} + \left(\sigma_i J_i \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i + \sigma_i J_i^2 \sigma_i J_i^{m-2} \sigma_i + \dots + \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i J_i \sigma_i \right) + O(q - q^{-1}) \\ &= \frac{\sigma_i (J_i^m - 1) \sigma_i}{q - q^{-1}} + \sigma_i + \left(\sigma_i J_i \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i + \sigma_i J_i^2 \sigma_i J_i^{m-2} \sigma_i + \dots + \sigma_i J_i^{m-1} \sigma_i J_i \sigma_i \right) + O(q - q^{-1}). \end{aligned}$$

En prenant la limite, et en divisant par m nous obtenons :

$$\tilde{j}_{i+1} = s_i \tilde{j}_i s_i + \frac{1}{m} \left(s_i + \sum_{p=1}^{m-1} s_i j_i^p s_i j_i^{m-p} s_i \right).$$

Finalement, nous utilisons que :

$$s_i j_i^p s_i j_i^q s_i = s_i j_i^p j_{i+1}^q = s_i j_{i+1}^q j_i^p = j_i^q s_i j_i^p,$$

et nous remplaçons s_i par $j_i^m s_i j_i^0$ car $j_i^m = 1$. □

Comme les éléments de Jucys–Murphy J_i commutent dans l’algèbre $H(m, 1, n)$, il vient immédiatement des définitions (II.6.4) et (II.6.5) que les éléments j_i , $i = 1, \dots, n$, et les éléments \tilde{j}_i , $i = 1, \dots, n$, forment un ensemble commutatif. Nous n’avons pas inclus la commutativité de l’ensemble correspondant, formé par les éléments x_i , $i = 1, \dots, n$, et les éléments \tilde{x}_i , $i = 1, \dots, n$, dans les relations définissantes de l’algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$: la commutativité de cet ensemble (et donc, par le Lemma II.20, de son image par le morphisme π , c’est-à-dire, de l’ensemble formé par les éléments j_i , $i = 1, \dots, n$, et \tilde{j}_i , $i = 1, \dots, n$) provient, comme on va le voir maintenant, des relations (II.6.6)–(II.6.8).

Proposition II.21. *Les relations (II.6.6)–(II.6.8) impliquent que :*

$$x_k x_l = x_l x_k, \quad \tilde{x}_k \tilde{x}_l = \tilde{x}_l \tilde{x}_k \quad \text{et} \quad x_k \tilde{x}_l = \tilde{x}_l x_k \quad \text{pour} \quad k, l = 1, \dots, n. \quad (\text{II.6.16})$$

Preuve. Nous commençons par :

Lemme II.22. *Les relations (II.6.6)–(II.6.8) impliquent que x_i et \tilde{x}_i commutent avec \bar{s}_k pour $k > i$ et $k < i - 1$.*

Preuve du Lemme. Il est bien connu (et facile à vérifier) que les relations (II.6.6)–(II.6.7) impliquent que x_i commute avec \bar{s}_k pour $k > i$ et $k < i - 1$.

Nous utilisons une récurrence sur i pour les éléments \tilde{x}_i . Par définition, l'élément \tilde{x}_1 commute avec l'élément \bar{s}_k si $k > 1$; l'élément

$$\tilde{x}_{i+1} = \bar{s}_i \tilde{x}_i \bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p \bar{s}_i x_i^{m-p} \quad (\text{II.6.17})$$

commute, par l'hypothèse de récurrence, avec les éléments \bar{s}_k pour $k > i + 1$ et $k < i - 1$. Il reste à vérifier la commutation de l'élément \tilde{x}_{i+1} avec \bar{s}_{i-1} . Cette vérification n'est pas triviale seulement si $(i - 1) > 0$; dans ce cas, nous décomposons les éléments \tilde{x}_i et x_i dans la partie droite de (II.6.17) :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1} &= \bar{s}_i \tilde{x}_i \bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p \bar{s}_i x_i^{m-p} \\ &= \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \tilde{x}_{i-1} \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \bar{s}_i x_{i-1}^p \bar{s}_{i-1} x_{i-1}^{m-p} \bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \bar{s}_{i-1} x_{i-1}^p \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} x_{i-1}^{m-p} \bar{s}_{i-1} \\ &= \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \tilde{x}_{i-1} \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \left(x_{i-1}^p \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i x_{i-1}^{m-p} + \bar{s}_{i-1} x_{i-1}^p \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i x_{i-1}^{m-p} \bar{s}_{i-1} \right). \end{aligned}$$

Pour tout p , l'expression dans la dernière somme a la forme $\xi + \bar{s}_{i-1} \xi \bar{s}_{i-1}$ (pour un certain ξ) et ainsi commute avec \bar{s}_{i-1} . Le premier terme commute aussi avec \bar{s}_{i-1} :

$$\bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \tilde{x}_{i-1} \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i \cdot \bar{s}_{i-1} = \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \tilde{x}_{i-1} \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i = \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i \tilde{x}_{i-1} \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i = \bar{s}_{i-1} \cdot \bar{s}_i \bar{s}_{i-1} \tilde{x}_{i-1} \bar{s}_{i-1} \bar{s}_i .$$

Nous concluons que \tilde{x}_{i+1} commute avec \bar{s}_{i-1} . □

Nous revenons à la preuve de la Proposition II.21 qui est également faite par récurrence. L'élément \tilde{x}_1 commute avec x_1 par définition. En supposant que $x_1, \dots, x_i, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i$ forment un ensemble commutatif, nous devons prouver que x_{i+1} et \tilde{x}_{i+1} commutent avec x_1, \dots, x_i et $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i$, et également que x_{i+1} commute avec \tilde{x}_{i+1} .

(i) Comme $x_{i+1} = \bar{s}_i x_i \bar{s}_i$ et $\tilde{x}_{i+1} = \bar{s}_i \tilde{x}_i \bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p \bar{s}_i x_i^{m-p}$, nous avons, par l'hypothèse de récurrence et le Lemme II.22, que x_{i+1} et \tilde{x}_{i+1} commutent avec x_k et \tilde{x}_k pour $k < i$.

(ii) Nous prouvons maintenant que les éléments x_{i+1} et \tilde{x}_{i+1} commutent avec les éléments x_i et \tilde{x}_i .

Si $i > 1$, nous écrivons $x_i = \bar{s}_{i-1} x_{i-1} \bar{s}_{i-1}$ and $\tilde{x}_i = \bar{s}_{i-1} \tilde{x}_{i-1} \bar{s}_{i-1} + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_{i-1}^p \bar{s}_{i-1} x_{i-1}^{m-p}$; Par le Lemme II.22 et la partie (i) de la preuve, les éléments x_{i+1} et \tilde{x}_{i+1} commutent avec tous les éléments présents dans les expressions ci-dessus de x_i et \tilde{x}_i , et donc commutent avec x_i et \tilde{x}_i .

Pour $i = 1$, l'élément x_2 commute avec x_1 et \tilde{x}_1 , et l'élément \tilde{x}_2 commute avec \tilde{x}_1 par définition. Pour finir la preuve du fait que x_{i+1} et \tilde{x}_{i+1} commutent avec x_i et \tilde{x}_i , il reste à montrer que $x_1 \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2 x_1$. Nous calculons

$$\begin{aligned} x_1 \tilde{x}_2 &= x_1 \bar{s}_1 \tilde{x}_1 \bar{s}_1 + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_1^{p+1} \bar{s}_1 x_1^{-p} & \text{et} & \quad \tilde{x}_2 x_1 = \bar{s}_1 \tilde{x}_1 \bar{s}_1 x_1 + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_1^p \bar{s}_1 x_1^{1-p} \\ &= \bar{s}_1 x_2 \tilde{x}_1 \bar{s}_1 + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_1^{p+1} x_2^{-p} \bar{s}_1 & & \quad = \bar{s}_1 \tilde{x}_1 x_2 \bar{s}_1 + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_1^p x_2^{1-p} \bar{s}_1 , \end{aligned}$$

et, comme $x_2\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1x_2$, la différence entre $x_1\tilde{x}_2$ et \tilde{x}_2x_1 est $\frac{1}{m}(x_1^{m+1}x_2^{-m} - x_1)\bar{s}_1$, ce qui fait 0 car $x_1^m = x_2^m = 1$.

(iii) Il reste à prouver que les éléments x_{i+1} et \tilde{x}_{i+1} commutent. En utilisant les relations de commutativité déjà prouvées, nous calculons :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1}x_{i+1} &= \bar{s}_i\tilde{x}_ix_i\bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p \bar{s}_i x_i^{m-p} x_{i+1} & \text{et} & \quad x_{i+1}\tilde{x}_{i+1} = \bar{s}_ix_i\tilde{x}_i\bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_{i+1}x_i^p \bar{s}_i x_i^{m-p} \\ &= \bar{s}_ix_i\tilde{x}_i\bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p \bar{s}_i x_{i+1} x_i^{m-p} & & \quad = \bar{s}_ix_i\tilde{x}_i\bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p x_{i+1} \bar{s}_i x_i^{m-p} \\ &= \bar{s}_ix_i\tilde{x}_i\bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=2}^{m+1} x_i^p \bar{s}_i x_i^{m-p+1} , & & \quad = \bar{s}_ix_i\tilde{x}_i\bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p \bar{s}_i x_i^{m-p+1} , \end{aligned}$$

et donc la différence entre $\tilde{x}_{i+1}x_{i+1}$ et $x_{i+1}\tilde{x}_{i+1}$ est égale à $\frac{1}{m}(x_i^{m+1}\bar{s}_i - x_i\bar{s}_ix_i^m)$ ce qui est 0 car $x_i^m = 1$. \square

II.6.4 Spectre des éléments de Jucys–Murphy classiques

Représentations de l’algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$. Comme dans le cas non-dégénéré, l’étape importante dans la compréhension du spectre des éléments de Jucys–Murphy et dans la construction des représentations est l’analyse des représentations de l’algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique non-triviale la plus simple, à savoir l’algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$. Nous présentons ici la liste des représentations irréductibles avec x_1, \tilde{x}_1, x_2 et \tilde{x}_2 diagonalisables de l’algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$.

Considérons l’algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ engendrée par $x, y, \tilde{x}, \tilde{y}$ et s avec les relations :

$$\begin{cases} xy = yx , & \tilde{x}\tilde{y} = \tilde{y}\tilde{x} , & x\tilde{x} = \tilde{x}x , & y\tilde{x} = \tilde{x}y , \\ y = sxs , & x^m = 1 , & \tilde{y} = s\tilde{x}s + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x^p s x^{m-p} , & s^2 = 1 . \end{cases} \quad (\text{II.6.18})$$

Pour tout $i = 1, \dots, n-1$, la sous-algèbre de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ engendrée par $j_i, j_{i+1}, \tilde{j}_i, \tilde{j}_{i+1}$ et s_i est un quotient de l’algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$. Pour $m = 1$, l’algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ se réduit à l’algèbre de Hecke affine dégénérée étudiée dans [86] pour la théorie des représentations du groupe symétrique S_n .

Les quatre éléments x, y, \tilde{x} et \tilde{y} commutent deux à deux, voir la Proposition II.21. Comme pour $H(m, 1, n)$, nous étudions les représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_{m,2}$ avec x, y, \tilde{x} et \tilde{y} diagonalisables. Soit e un vecteur propre commun de x, y, \tilde{x} et \tilde{y} , avec les valeurs propres a, b, \tilde{a} et \tilde{b} , respectivement,

$$x.e = ae , \quad y.e = be , \quad \tilde{x}.e = \tilde{a}e , \quad \tilde{y}.e = \tilde{b}e , \quad (\text{II.6.19})$$

où $\mathfrak{r}.\mathfrak{v}$ représente l’action de \mathfrak{r} de l’algèbre sur le vecteur \mathfrak{v} de l’espace de la représentation. Nous avons $a^m = b^m = 1$. En utilisant $xs = sy, ys = sx, \tilde{x}s = s\tilde{y} - \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m y^p x^{m-p}$ et $\tilde{y}s = s\tilde{x} + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m y^p x^{m-p}$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} x.(s.e) &= bs.e , & y.(s.e) &= as.e , \\ \tilde{x}.(s.e) &= \tilde{b}s.e - \left(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^m b^p a^{m-p} \right) e , & \tilde{y}.(s.e) &= \tilde{a}s.e + \left(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^m b^p a^{m-p} \right) e . \end{aligned} \quad (\text{II.6.20})$$

Ainsi, l'action des générateurs se ferme sur l'espace linéaire engendré par e et $s.e$, et les représentations irréductibles peuvent être seulement de dimension 1 ou de dimension 2. Nous arrivons directement à la liste complète des représentations irréductibles de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ avec x, y, \tilde{x} et \tilde{y} diagonalisables.

- Le vecteur $s.e$ est proportionnel au vecteur e . Donc $s.e = \epsilon e$, où $\epsilon^2 = 1$; les représentations de ce type sont de dimension 1. L'action des générateurs est donnée par

$$x \mapsto a, \quad y \mapsto a, \quad \tilde{x} \mapsto \tilde{a}, \quad \tilde{y} \mapsto \tilde{a} + \epsilon, \quad s \mapsto \epsilon, \quad (\text{II.6.21})$$

où $a^m = 1$ et $\epsilon^2 = 1$.

- les vecteurs e et $s.e$ engendrent un espace de dimension 2. Si $a \neq b$, alors $\sum_{p=1}^m b^p a^{m-p} = 0$. Les représentations irréductibles sont dans ce cas de dimension 2. Les matrices des générateurs de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ sont données par

$$\begin{aligned} s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\ \tilde{x} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{b} & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{II.6.22})$$

où $a^m = b^m = 1$ et $a \neq b$.

- Les vecteurs e et $s.e$ engendrent un espace de dimension 2 et $a = b$. Alors $\frac{1}{m} \sum_{p=1}^m b^p a^{m-p} = 1$. Par (II.6.19)–(II.6.20), l'action de \tilde{x} et \tilde{y} est diagonalisable si et seulement si $\tilde{a} \neq \tilde{b}$. Les représentations sont de dimension 2. Les matrices des générateurs de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,2}$ dans la base $\{e, e'\}$, où $e' := s.e + \frac{1}{\tilde{a}-\tilde{b}} e$ sont données par

$$\begin{aligned} s \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{b-a} & 1 - \frac{1}{(b-a)^2} \\ 1 & -\frac{1}{b-a} \end{pmatrix}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\ \tilde{x} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{b} & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.6.23})$$

où $a^m = 1$ et $\tilde{b} \neq \tilde{a}$. La représentation (II.6.23) est irréductible si et seulement si $\tilde{b} \neq \tilde{a} \pm 1$.

Spectre classique. Dans ce paragraphe et les deux suivants, les analogues classiques des résultats de la Section II.3 sont donnés sans preuve (les preuves répètent essentiellement celles de la Section II.3).

Comme pour $H(m, 1, n)$, la première étape consiste en la construction de toutes les représentations de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ vérifiant deux conditions. Premièrement, les éléments de Jucys–Murphy classiques $j_1, \dots, j_n, \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n$ sont représentés par des opérateurs semi-simples (diagonalisables). Deuxièmement, pour tout $i = 1, \dots, n-1$, l'action de la sous-algèbre engendrée par $j_i, j_{i+1}, \tilde{j}_i, \tilde{j}_{i+1}$ et s_i est complètement réductible. Nous allons garder le nom de C -représentations pour ces représentations. A la fin

de la construction, nous verrons que toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ sont des C -représentations.

Définissons $\text{Spec} \begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ l'ensemble des valeurs propres communes des éléments $j_1, \tilde{j}_1, \dots, j_n, \tilde{j}_n$ dans les C -représentations :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1^{(\Lambda)} & , \dots , & a_n^{(\Lambda)} \\ \tilde{a}_1^{(\Lambda)} & , \dots , & \tilde{a}_n^{(\Lambda)} \end{pmatrix} \quad (\text{II.6.24})$$

appartient à $\text{Spec} \begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ si il existe un vecteur e_Λ dans l'espace d'une C -représentation tel que $j_i(e_\Lambda) = a_i^{(\Lambda)} e_\Lambda$ et $\tilde{j}_i(e_\Lambda) = \tilde{a}_i^{(\Lambda)} e_\Lambda$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Les éléments j_i et \tilde{j}_i commutent avec s_k pour $k > i$ et $k < i - 1$ (voir le Lemme II.22) ce qui implique que l'action de s_k sur $\text{Spec} \begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ est "locale" dans le sens où $s_k(e_\Lambda)$ est une combinaison linéaire de $e_{\Lambda'}$ tels que $a_i^{(\Lambda')} = a_i^{(\Lambda)}$ et $\tilde{a}_i^{(\Lambda')} = \tilde{a}_i^{(\Lambda)}$ pour $i \neq k, k + 1$.

Nous appellerons encore les tableaux de nombres de taille $2 \times n$ (II.6.24) des lignes, gardant ainsi le nom "ligne" qui était utilisé pour l'ensemble des valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy pour l'algèbre $H(m, 1, n)$.

Proposition II.23. Soit $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_i & , a_{i+1} & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_i & , \tilde{a}_{i+1} & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \text{Spec} \begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ et soit e_Λ un vecteur correspondant. Alors

- (a) nous avons $a_i^n = 1$ pour $i = 1, \dots, n$; si $a_i = a_{i+1}$, alors $\tilde{a}_i \neq \tilde{a}_{i+1}$.
- (b) Si $a_{i+1} = a_i$ et $\tilde{a}_{i+1} = \tilde{a}_i + \varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$, alors $s_i(e_\Lambda) = \varepsilon e_\Lambda$.
- (c) Si $a_{i+1} \neq a_i$ ou $a_{i+1} = a_i$ & $\tilde{a}_{i+1} \neq \tilde{a}_i \pm 1$, alors

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_{i+1} & , a_i & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_{i+1} & , \tilde{a}_i & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \text{Spec} \begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix} .$$

De plus, si $a_{i+1} \neq a_i$, alors le vecteur $s_i(e_\Lambda)$ correspond à la ligne Λ' , voir les matrices (II.6.22) avec $a = a_i$, $b = a_{i+1}$, $\tilde{a} = \tilde{a}_i$ and $\tilde{b} = \tilde{a}_{i+1}$; si $a_{i+1} = a_i$ et $\tilde{a}_{i+1} \neq \tilde{a}_i \pm 1$, alors le vecteur $s_i(e_\Lambda) - \frac{1}{\tilde{a}_{i+1} - \tilde{a}_i} e_\Lambda$ correspond à la ligne Λ' , voir les matrices (II.6.23) avec $a = a_i = a_{i+1}$, $\tilde{a} = \tilde{a}_i$ et $\tilde{b} = \tilde{a}_{i+1}$.

Lignes de contenus classiques. Nous définissons l'analogie classique de l'ensemble $\text{Cont}_m(n)$, que nous notons $c\text{Cont}_m(n)$.

Rappelons que $[k, l] = \{k, k + 1, \dots, l - 1, l\}$ pour deux entiers $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$.

Définition II.24. Une ligne de contenus classiques $\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ est une ligne de colonnes de nombres satisfaisant :

- (1) $\tilde{a}_1 = 0$ et $a_i^m = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
- (2) Pour tout $j > 1$: si $\tilde{a}_j \neq 0$, alors il existe $i, i < j$, tel que $a_i = a_j$ et $\tilde{a}_i \in \{\tilde{a}_j - 1, \tilde{a}_j + 1\}$.
- (3) Si $a_j = a_k$ et $\tilde{a}_j = \tilde{a}_k$ pour $j, k, j < k$, alors il existe $i_1, i_2 \in [j + 1, k - 1]$ tels que $a_{i_1} = a_{i_2} = a_j = a_k$, $\tilde{a}_{i_1} = \tilde{a}_j - 1$ et $\tilde{a}_{i_2} = \tilde{a}_j + 1$.

Nous notons l'ensemble des lignes de contenus classiques $\text{cCont}_m(n)$.

Voici l'analogie classique de la Proposition II.3.

Proposition II.25. Supposons qu'une ligne de colonnes de nombres $\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ appartienne à l'ensemble $\text{Spec} \begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$. Alors elle appartient à l'ensemble $\text{cCont}_m(n)$.

Remarque. Il suit directement de la Définition II.24 que si

$$\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_i , a_{i+1} & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_i , \tilde{a}_{i+1} & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \text{cCont}_m(n)$$

avec $a_{i+1} \neq a_i$ ou avec $a_{i+1} = a_i$ & $\tilde{a}_{i+1} \neq \tilde{a}_i \pm 1$, alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & , \dots , & a_{i+1} , a_i & , \dots , & a_n \\ \tilde{a}_1 & , \dots , & \tilde{a}_{i+1} , \tilde{a}_i & , \dots , & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \text{cCont}_m(n).$$

Comme dans la remarque juste après la preuve de la Proposition II.3, l'action (décrite dans la Proposition II.23) des générateurs $s_i, i = 1, \dots, n - 1$, sur l'espace vectoriel avec une base formée des

vecteurs $e_\Lambda, \Lambda \in \text{Spec} \begin{pmatrix} j_1 & , \dots , & j_n \\ \tilde{j}_1 & , \dots , & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$, s'étend en une action sur l'espace vectoriel avec une base

formée par les vecteurs $e_\mu, \mu \in \text{cCont}_m(n)$. Les analogues classiques des énoncés de la remarque juste après la preuve de la Proposition II.3 sont également valables ici.

Contenu classique d'une m -case dans une m -partition.

Proposition II.26. Il existe une bijection entre l'ensemble des m -tableaux de taille n et l'ensemble $\text{cCont}_m(n)$.

Cet analogue classique de la Proposition II.5 est prouvé suivant les mêmes lignes que la Proposition II.5; nous avons seulement besoin de modifier la notion de contenu d'une m -case d'une m -partition.

Le contenu classique d'une case d'une partition usuelle est $(s - r)$ si la case est située dans la ligne r et la colonne s . Pour étendre cette définition aux m -partitions, nous devons spécifier dans

quelle partition de la m -partition est située la m -case ; ainsi, le contenu classique d'une m -case d'une m -partition est un couple de nombres, le premier nombre spécifiant une partition (dans laquelle la m -case est située) de la m -partition, et le second nombre est le contenu classique de la m -case dans la partition spécifiée. Pour relier cette information avec le spectre des éléments de Jucys–Murphy , fixons (arbitrairement) une bijection entre l'ensemble $[1, m]$ et l'ensemble des différentes racines m -ème de l'unité ; Soit ξ_k la racine de l'unité associée à $k \in [1, m]$ par cette bijection. Nous définissons le contenu classique d'une m -case qui est située dans la ligne r et la colonne s de la k -ème partition de la m -partition comme étant la colonne $\begin{pmatrix} \xi_k \\ s - r \end{pmatrix}$.

Maintenant, à un m -tableau standard de taille n , nous associons la ligne de colonnes de nombres $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \tilde{a}_1 & \dots & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} a_i \\ \tilde{a}_i \end{pmatrix}$ est le contenu classique de la m -case dans laquelle le nombre i est placé dans le m -tableau. Cette association fournit, comme dans la preuve de la Proposition II.5, la bijection énoncée dans la Proposition II.26.

Voici le même exemple que dans le paragraphe 6, Section II.3, mais dans le contexte classique :

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 6 & 9 & \\ \hline -1 & 0 & \\ \hline 7 & & \\ \hline -2 & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 8 & 10 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & & \\ \hline -1 & & \\ \hline \end{array} \right) \quad (\text{II.6.25})$$

La ligne, associée à ce 2-tableau standard, est :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & , & \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_1 & , & \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_1 & , & \xi_2 \\ 0 & , & 1 & , & 0 & , & 2 & , & -1 & , & -1 & , & -2 & , & 1 & , & 0 & , & 2 \end{pmatrix},$$

où $\{\xi_1, \xi_2\}$ est l'ensemble des différentes racines carrées de l'unité.

Remarque. Dans la limite classique, l'élément j_i sert de la même façon dans la théorie des représentations que les nombres v_k devant les puissances de q dans le spectre de l'élément J_i : les éléments j_i 's distinguent les différents tableaux d'un m -tableau.

II.6.5 Construction des représentations

Ici, nous établissons un analogue de la construction de la Section II.4 dans le contexte classique : nous définissons une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ avec une algèbre libre associative engendrée par les m -tableaux standards correspondant aux m -partitions de n . Ensuite, par évaluation (avec l'aide de la représentation la plus simple de $G(m, 1, n)$) par la droite, nous construisons les représentations. Nous ne donnons pas les preuves des propositions quand elles sont complètement similaires aux preuves des propositions correspondantes de la Section II.4 ; nous indiquons seulement les modifications.

II.6.5.1 Éléments Baxterisés

Définissons, pour tout s_i parmi les générateurs s_1, \dots, s_{n-1} de $G(m, 1, n)$, l'élément Baxterisé $s_i(\alpha, \beta)$ par

$$s_i(\alpha, \beta) := s_i + \frac{1}{\alpha - \beta} . \quad (\text{II.6.26})$$

Les paramètres α et β sont appelés paramètres spectraux.

Proposition II.27. *Nous avons les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} s_i(\alpha, \beta)s_i(\beta, \alpha) &= 1 - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} , \\ s_i(\alpha, \beta)s_{i+1}(\alpha, \gamma)s_i(\beta, \gamma) &= s_{i+1}(\beta, \gamma)s_i(\alpha, \gamma)s_{i+1}(\alpha, \beta) , \\ s_i(\alpha, \beta)s_j(\gamma, \delta) &= s_j(\gamma, \delta)s_i(\alpha, \beta) \quad \text{si } |i - j| > 1 . \end{aligned} \quad (\text{II.6.27})$$

Comme dans la situation non-classique, les relations originales sont impliquées par les relations pour les éléments Baxterisés pour une valeur fixée des paramètres spectraux.

Lemme II.28. *Soient A et B deux éléments d'une algèbre associative unitale arbitraire \mathcal{A} . Notons $A(\alpha, \beta) := A + \frac{1}{\alpha - \beta}$ et $B(\alpha, \beta) := B + \frac{1}{\alpha - \beta}$ où α et β sont des paramètres.*

(i) Si

$$A(\alpha, \beta)A(\beta, \alpha) = 1 - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ,$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α et β ($\alpha \neq \beta$), alors

$$A^2 = 1 .$$

(ii) Si $A^2 = 1$, $B^2 = 1$ et

$$A(\alpha, \beta)B(\alpha, \gamma)A(\beta, \gamma) = B(\beta, \gamma)A(\alpha, \gamma)B(\alpha, \beta)$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α , β et γ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$), alors

$$ABA = BAB .$$

(iii) Si

$$A(\alpha, \beta)B(\gamma, \delta) = B(\gamma, \delta)A(\alpha, \beta)$$

pour certaines valeurs (arbitrairement) fixées des paramètres α , β , γ et δ ($\alpha \neq \beta$ et $\gamma \neq \delta$), alors

$$AB = BA .$$

II.6.5.2 Produit smash classique

Soit $\lambda^{(m)}$ une m -partition de taille n . Considérons un ensemble de générateurs libres labellisés par les m -tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$; pour un m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, nous notons, comme avant, $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ le générateur libre correspondant. Nous renvoyons à la Sous-Section II.4.2 pour la définition de $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ et $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^\pi$ pour $\pi \in S_n$.

Rappelons que le contenu classique d'une m -case, qui est située dans la ligne r et la colonne s de la k -ème partition de la m -partition, est la colonne $\begin{pmatrix} \xi_k \\ s-r \end{pmatrix}$, où $k \mapsto \xi_k$ est une bijection, arbitrairement choisie, entre l'ensemble $[1, m]$ et l'ensemble des différentes racines m -ème de l'unité. Pour un m -tableau standard, nous notons $\begin{pmatrix} p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \\ cc(X_{\lambda^{(m)}}|i) \end{pmatrix}$ les entrées de la colonne de contenu de la m -case où i est placé.

Proposition II.29. *Les relations suivantes :*

– si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, alors

$$s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot s_i ; \quad (\text{II.6.28})$$

– si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, alors

$$\left(s_i + \frac{1}{cc(X_{\lambda^{(m)}}|i) - cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)} \right) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot \left(s_i + \frac{1}{cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) - cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)} \right) \quad (\text{II.6.29})$$

et

$$(t - p(X_{\lambda^{(m)}}|1)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0 \quad (\text{II.6.30})$$

sont compatibles avec les relations pour les générateurs t, s_1, \dots, s_{n-1} du groupe $G(m, 1, n)$.

La compatibilité est comprise dans le même sens que dans les explications après la formulation de la Proposition II.8. Nous notons l'algèbre obtenue \mathfrak{T}_c .

Preuve. Notons que si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, la relation (II.6.29) peut être réécrite en utilisant la forme Baxterisée des éléments s_i :

$$s_i(cc(X_{\lambda^{(m)}}|i), cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot s_i(cc(X_{\lambda^{(m)}}|i+1), cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)) .$$

(i) Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, nous prouvons la compatibilité de la relation $s_i^2 = 1$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) par un calcul similaire à celui de la preuve de la Proposition II.8; sont utilisés ici la Proposition II.27 et le Lemme II.28 à la place de la Proposition II.6 et du Lemme II.7.

Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \neq p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1)$, la compatibilité est immédiate.

(ii) Si $p(X_{\lambda^{(m)}}|i) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+1) = p(X_{\lambda^{(m)}}|i+2)$, nous prouvons la compatibilité de la relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) par un calcul similaire à celui de la preuve de la Proposition II.8 (on utilise la Proposition II.27 et le Lemme II.28 à la place de la Proposition II.6 et du Lemme II.7).

Le cas $p(X_{\lambda(m)}|i) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+1) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+2) \neq p(X_{\lambda(m)}|i)$ est immédiat.

Il reste trois cas :

- $p(X_{\lambda(m)}|i) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+1)$ et $p(X_{\lambda(m)}|i+1) = p(X_{\lambda(m)}|i+2)$,
- $p(X_{\lambda(m)}|i) = p(X_{\lambda(m)}|i+1)$ et $p(X_{\lambda(m)}|i+1) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+2)$,
- $p(X_{\lambda(m)}|i) = p(X_{\lambda(m)}|i+2)$ et $p(X_{\lambda(m)}|i+1) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+2)$.

Dans chacun de ces cas, nous réalisons un calcul direct en utilisant que, par définition, pour toute permutation $\pi \in S_n$,

$$cc(X_{\lambda(m)}^\pi|k) = cc(X_{\lambda(m)}|\pi^{-1}(k)) \text{ and } p(X_{\lambda(m)}^\pi|k) = p(X_{\lambda(m)}|\pi^{-1}(k)) .$$

Nous écrivons ce calcul uniquement pour $p(X_{\lambda(m)}|i) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+1)$ et $p(X_{\lambda(m)}|i+1) = p(X_{\lambda(m)}|i+2)$ (les deux autres calculs sont très similaires). Posons $cc^{(k)} = cc(X_{\lambda(m)}|k)$. Nous avons

$$\begin{aligned} s_i s_{i+1} s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} &= s_i s_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \cdot s_i \\ &= s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i+1 s_i} \cdot s_{i+1} s_i \\ &= -\frac{1}{cc^{(i+1)}-cc^{(i+2)}} \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i+1 s_i} \cdot s_{i+1} s_i + \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i s_i+1 s_i} \cdot (s_i + \frac{1}{cc^{(i+2)}-cc^{(i+1)}}) s_{i+1} s_i , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_{i+1} s_i s_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} &= s_{i+1} s_i \cdot \left(-\frac{1}{cc^{(i+1)}-cc^{(i+2)}} \mathcal{X}_{\lambda(m)} + \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_{i+1}} \cdot (s_{i+1} + \frac{1}{cc^{(i+2)}-cc^{(i+1)}}) \right) \\ &= s_{i+1} \cdot \left(-\frac{1}{cc^{(i+1)}-cc^{(i+2)}} \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \cdot s_i + \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i s_{i+1}} \cdot s_i (s_{i+1} + \frac{1}{cc^{(i+2)}-cc^{(i+1)}}) \right) \\ &= -\frac{1}{cc^{(i+1)}-cc^{(i+2)}} \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i+1 s_i} \cdot s_{i+1} s_i + \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i s_{i+1}} \cdot s_{i+1} s_i (s_{i+1} + \frac{1}{cc^{(i+2)}-cc^{(i+1)}}) . \end{aligned}$$

Ainsi $(s_i s_{i+1} s_i - s_{i+1} s_i s_{i+1}) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i s_i+1 s_i} \cdot (s_i s_{i+1} s_i - s_{i+1} s_i s_{i+1})$ et donc la compatibilité de la relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) est prouvée.

(iii) Si $p(X_{\lambda(m)}|i) = p(X_{\lambda(m)}|i+1)$ et $p(X_{\lambda(m)}|j) = p(X_{\lambda(m)}|j+1)$, nous prouvons la compatibilité de la relation $s_i s_j = s_j s_i$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) par un calcul similaire à celui de la preuve de la Proposition II.8 (en utilisant la Proposition II.27 et le Lemme II.28 à la place de la Proposition II.6 et du Lemme II.7).

Si $p(X_{\lambda(m)}|i) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+1)$ ou $p(X_{\lambda(m)}|j) \neq p(X_{\lambda(m)}|j+1)$, la compatibilité provient d'un calcul facile.

La vérification de la compatibilité des relations $t^m = 1$ et $ts_i = s_i t$ pour $i > 1$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) est immédiate.

La compatibilité de la relation $ts_1 ts_1 = s_1 ts_1 t$ avec les instructions (II.6.28)–(II.6.30) est une conséquence directe du Lemme ci-dessous. \square

Lemme II.30. *Les relations (II.6.28) impliquent les relations :*

$$(j_i - p(X_{\lambda(m)}|i)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n , \quad (\text{II.6.31})$$

$$(\tilde{j}_i - cc(X_{\lambda(m)}|i)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n . \quad (\text{II.6.32})$$

Preuve. Soit $X_{\lambda(m)}$ un m -tableau standard et posons, dans un souci de brièveté, $p^{(i)} = p(X_{\lambda(m)}|i)$ et $cc^{(i)} = cc(X_{\lambda(m)}|i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Nous prouvons (II.6.31)-(II.6.32) par récurrence sur i . Rappelons que $j_{i+1} = s_i j_i s_i$ et $\tilde{j}_{i+1} = s_i \tilde{j}_i s_i + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m j_i^k s_i j_i^{-k}$. La base de la récurrence pour (II.6.31) est la relation (II.6.30) et la base de la récurrence pour (II.6.32) est triviale car $\tilde{j}_1 = 0$ et $cc^{(1)} = 0$.

Si $p^{(i+1)} = p^{(i)}$, alors la preuve de (II.6.31) est similaire à la preuve du Lemme II.9. Si $p^{(i+1)} \neq p^{(i)}$, alors (II.6.31) est immédiate.

Nous prouvons maintenant (II.6.32). Supposons tout d'abord que $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ n'est pas standard. Alors $p^{(i+1)} = p^{(i)}$, $cc^{(i+1)} = cc^{(i)} + \varepsilon$ et $s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = \varepsilon \mathcal{X}_{\lambda(m)}$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Il est immédiat que $\tilde{j}_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = cc^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda(m)}$.

Ensuite supposons que $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ est standard et que $p^{(i+1)} \neq p^{(i)}$. Alors, $s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \cdot s_i$ et nous obtenons

$$\tilde{j}_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = cc^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda(m)} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (p^{(i)})^{-k} (p^{(i+1)})^k \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}.$$

Comme $\sum_{k=1}^m (p^{(i)})^{-k} (p^{(i+1)})^k = 0$ (car $p^{(i+1)} \neq p^{(i)}$), nous avons $\tilde{j}_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = cc^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda(m)}$.

Enfin supposons que $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ est standard et que $p^{(i+1)} = p^{(i)}$. Des calculs directs mènent à

$$s_i \tilde{j}_i s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = \left(cc^{(i+1)} + \frac{1}{cc^{(i)} - cc^{(i+1)}} \right) \mathcal{X}_{\lambda(m)} - \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \cdot \left(s_i + \frac{1}{cc^{(i+1)} - cc^{(i)}} \right),$$

et

$$\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m j_i^k s_i j_i^{-k} \right) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = \frac{-1}{cc^{(i)} - cc^{(i+1)}} \mathcal{X}_{\lambda(m)} + \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \cdot \left(s_i + \frac{1}{cc^{(i+1)} - cc^{(i)}} \right).$$

Additionnant ces deux égalités, nous obtenons $\tilde{j}_{i+1} \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = cc^{(i+1)} \mathcal{X}_{\lambda(m)}$. □

II.6.5.3 Représentations

Pour construire les représentations de $G(m, 1, n)$ sur l'espace vectoriel $U_{\lambda(m)}$ engendré par $\{\mathcal{X}_{\lambda(m)}\}$, nous appliquons la même procédure que à la fin de la Section II.4. Nous utilisons comme "vide" $|\rangle$ le vecteur de base du $G(m, 1, n)$ -module de dimension 1 défini par $: s_i |\rangle = |\rangle$ et $t |\rangle = \xi_1 |\rangle$. Cette procédure amène aux formules suivantes pour l'action des générateurs t, s_1, \dots, s_{n-1} sur les vecteurs de base $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ de $U_{\lambda(m)}$:

– Si $p(X_{\lambda(m)}|i) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+1)$, alors

$$s_i : \mathcal{X}_{\lambda(m)} \mapsto \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}, \quad (\text{II.6.33})$$

– Si $p(X_{\lambda(m)}|i) = p(X_{\lambda(m)}|i+1)$, alors

$$\begin{aligned} s_i : \mathcal{X}_{\lambda(m)} \mapsto & -\frac{1}{cc(X_{\lambda(m)}|i) - cc(X_{\lambda(m)}|i+1)} \mathcal{X}_{\lambda(m)} \\ & + \left(1 + \frac{1}{cc(X_{\lambda(m)}|i+1) - cc(X_{\lambda(m)}|i)} \right) \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}, \end{aligned} \quad (\text{II.6.34})$$

et

$$t : \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto p(X_{\lambda^{(m)}}|1)\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} . \quad (\text{II.6.35})$$

Comme avant, il est supposé ici que $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} = 0$ si $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ n'est pas un m -tableau standard.

Remarques.

(a) Comme pour l'algèbre $H(m, 1, n)$ (voir les remarques à la fin de la Sous-Section II.4.3), certaines propriétés de l'action du générateur t répètent les propriétés de l'action du générateur s_1 dans la théorie des représentation du groupe symétrique.

De plus, encore comme pour l'algèbre $H(m, 1, n)$, les représentations construites ne dépendent pas (à isomorphisme près) de la valeur des générateurs s_1, \dots, s_{n-1} et t sur le vide $|\rangle$.

(b) Comme pour l'algèbre de Hecke cyclotomique, la structure d'algèbre associative sur le produit tensoriel de l'algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ avec une algèbre associative libre engendrée par les m -tableaux standards permet d'équiper d'une structure de $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ -module les produits tensoriels d'espaces de représentations correspondant à deux (en général, n'importe quel nombre de) m -partitions. Les règles de décomposition du produit tensoriel sont données par la même formule (II.4.38).

(c) Cette remarque est l'analogue, pour la situation classique, de la remarque (e) à la fin de la Sous-Section II.4.3. Dans l'Appendice III.6.B, nous présentons les opérateurs d'entrelacement classiques $\tilde{u}_{i+1} := \bar{s}_i \tilde{x}_i - \tilde{x}_i \bar{s}_i \in \mathfrak{A}_{m,n}$, $i = 1, \dots, n-1$. L'image par l'application π , définie par (II.6.10), de l'élément \tilde{u}_{i+1} est $\pi(\tilde{u}_{i+1}) = s_i \tilde{j}_i - \tilde{j}_i s_i \in \mathbb{C}G(m, 1, n)$, $i = 1, \dots, n-1$. L'action de $\pi(\tilde{u}_{i+1})$ dans une représentation $V_{\lambda^{(m)}}$ est :

$$\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \mapsto \left(cc^{(i)} - cc^{(i+1)} - \delta_{p^{(i)}, p^{(i+1)}} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} , \quad (\text{II.6.36})$$

où $cc^{(i)} = cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)$, $p^{(i)} = p(X_{\lambda^{(m)}}|i)$, $i = 1, \dots, n$; $\delta_{p, p'}$ est le symbole de Kronecker. En effet, récrivons $\tilde{u}_{i+1} = s_i(\tilde{j}_i - \tilde{j}_{i+1}) + \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m j_i^l j_{i+1}^{-l}$ et donc, par le Lemme II.30,

$$\tilde{u}_{i+1}(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) = (cc^{(i)} - cc^{(i+1)}) \left(s_i(\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}) + \frac{\delta_{p^{(i)}, p^{(i+1)}}}{cc^{(i)} - cc^{(i+1)}} \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} \right) .$$

En utilisant (II.6.33)-(II.6.34), nous obtenons la formule (II.6.36).

II.6.5.4 Produit scalaire

Les représentations de $G(m, 1, n)$ données par les formules (II.6.33)–(II.6.35) sont les analogues des représentations semi-normales du groupe symétrique. Dans cette Sous-Section, nous donnons des analogues pour $G(m, 1, n)$ des représentations orthogonales du groupe symétrique. Les formules de cette Sous-Section pourraient être obtenues en prenant la limite classique dans les formules de la Sous-Section II.4.4. Néanmoins, nous donnons ici une présentation indépendante du cas non-dégénéré.

Soit $\lambda^{(m)}$ une m -partition et soient $X_{\lambda^{(m)}}$ et $X'_{\lambda^{(m)}}$ deux m -tableaux standards différents de forme $\lambda^{(m)}$. Nous posons $cc^{(i)} = cc(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ et $p^{(i)} = p(X_{\lambda^{(m)}}|i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Définissons le produit

scalaire Hermitien suivant sur l'espace $U_{\lambda(m)}$:

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}'_{\lambda(m)} \rangle = 0, \quad (\text{II.6.37})$$

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle = \prod_{j,k: j < k, p^{(j)}=p^{(k)}, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)} \pm 1\}} \frac{cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1}{cc^{(j)} - cc^{(k)}}. \quad (\text{II.6.38})$$

Le produit scalaire ainsi obtenu est défini positif.

Notons que, si $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ est un m -tableau standard, nous avons

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}, \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \rangle = \langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle \quad \text{si } p^{(i)} \neq p^{(i+1)}, \quad (\text{II.6.39})$$

et

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}, \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \rangle = -\frac{cc^{(i+1)} - cc^{(i)} - 1}{cc^{(i)} - cc^{(i+1)} - 1} \langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle \quad \text{si } p^{(i)} = p^{(i+1)}. \quad (\text{II.6.40})$$

Proposition II.31 *Ce produit scalaire Hermitien est invariant sous l'action du groupe $G(m, 1, n)$ donnée par les formules (II.6.33)–(II.6.35) ; c'est-à-dire que, pour tout $u, v \in U_{\lambda(m)}$,*

$$\langle \mathbf{a}(u), \mathbf{a}(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{pour } \mathbf{a} = t, s_1, \dots, s_{n-1}. \quad (\text{II.6.41})$$

Preuve. Il est immédiat que (II.6.37)–(II.6.38) sont invariantes sous l'action du générateur t de $G(m, 1, n)$. La vérification de l'invariance de (II.6.37) sous l'action du générateur s_i de $G(m, 1, n)$ est non-triviale seulement si $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ est standard et $X'_{\lambda(m)} = X_{\lambda(m)}^{s_i}$. Dans cette situation, supposons tout d'abord que $p^{(i)} \neq p^{(i+1)}$. Alors

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}) \rangle = \langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle = 0.$$

Ensuite, supposons que $p^{(i)} = p^{(i+1)}$. On obtient de façon directe que $\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}) \rangle$ est égal à

$$\frac{(cc^{(i+1)} - cc^{(i)} - 1) \langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle + (cc^{(i)} - cc^{(i+1)} - 1) \langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}, \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \rangle}{(cc^{(i)} - cc^{(i+1)})^2}.$$

En utilisant la formule (II.6.40), nous obtenons

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}) \rangle = 0,$$

et la vérification que (II.6.37) est invariante sous l'action de $G(m, 1, n)$ est terminée.

Si $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ n'est pas standard, alors $s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}) = \pm \mathcal{X}_{\lambda(m)}$ et l'invariance de (II.6.38) s'ensuit. Supposons que $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ est standard et que $p^{(i)} \neq p^{(i+1)}$, alors $s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}) = \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}$ et donc, en utilisant (II.6.39),

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}) \rangle = \langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle.$$

Maintenant supposons que $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ est standard et que $p^{(i)} = p^{(i+1)}$. Un calcul direct donne

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}) \rangle = \frac{\langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle + (cc^{(i)} - cc^{(i+1)} - 1)^2 \langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}, \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \rangle}{(cc^{(i)} - cc^{(i+1)})^2}.$$

En utilisant (II.6.40), on obtient

$$\langle s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}), s_i(\mathcal{X}_{\lambda(m)}) \rangle = \langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle ,$$

ce qui conclue la preuve de la Proposition. \square

Remarques. (i) En conséquence, les opérateurs pour les éléments de $G(m, 1, n)$ sont unitaires dans la base $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda(m)}\}$ où

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda(m)} := \left(\prod_{j,k: j < k, p^{(j)}=p^{(k)}, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)} \pm 1\}} \left(\frac{cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1}{cc^{(j)} - cc^{(k)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \mathcal{X}_{\lambda(m)}$$

pour tout m -tableau standard $X_{\lambda(m)}$ de forme $\lambda^{(m)}$.

(ii) Une autre formule possible pour le produit scalaire Hermitien, au lieu de (II.6.38), est

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle = \prod_{j,k: j < k, p^{(j)}=p^{(k)}, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)} \pm 1\}} |cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1| . \quad (\text{II.6.42})$$

Les parties droites des formules (II.6.38) et (II.6.42) diffèrent seulement par un facteur de

$$\prod_{j,k: j < k, p^{(j)}=p^{(k)}, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)} \pm 1\}} |cc^{(j)} - cc^{(k)}| .$$

Ce facteur ne dépend pas du m -tableau $X_{\lambda(m)}$ de forme $\lambda^{(m)}$; il dépend seulement de la m -partition $\lambda^{(m)}$.

(iii) La formule (II.6.42) peut être réécrite sans les valeurs absolues de la façon suivante. Définissons

$$\Upsilon(X_{\lambda(m)}) := \prod_{j,k: j < k, p^{(j)}=p^{(k)}, cc^{(j)} \notin \{cc^{(k)}, cc^{(k)} \pm 1\}} (cc^{(j)} - cc^{(k)} - 1) .$$

Alors

$$\Upsilon(X'_{\lambda(m)}) = (-1)^{\ell(w)} \Upsilon(X_{\lambda(m)}) ,$$

où $X_{\lambda(m)}$ et $X'_{\lambda(m)}$ sont deux m -tableaux standards de même forme $\lambda^{(m)}$ et $\ell(w)$ est la longueur de la permutation w qui transforme $X_{\lambda(m)}$ en $X'_{\lambda(m)}$. Ainsi, si nous fixons un m -tableau standard $X_{\lambda(m)}^{\circ}$ de forme $\lambda^{(m)}$, alors

$$(-1)^{\ell(w(X_{\lambda(m)}))} \Upsilon(X_{\lambda(m)}) ,$$

où $X_{\lambda(m)}$ est un autre m -tableau standard de forme $\lambda^{(m)}$ et $w(X_{\lambda(m)})$ est la permutation transformant $X_{\lambda(m)}^{\circ}$ en $X_{\lambda(m)}$, a le même signe pour tout $X_{\lambda(m)}$. Soit ε le signe de $\Upsilon(X_{\lambda(m)}^{\circ})$. Alors la partie droite de (II.6.42) est égale à

$$\varepsilon (-1)^{\ell(w(X_{\lambda(m)}))} \Upsilon(X_{\lambda(m)}) .$$

II.6.6 Complétude

Nous présentons dans cette Sous-Section les analogues, pour la limite classique, des résultats de la Section II.5. Les preuves sont complètement similaires aux preuves de la Section II.5.

Proposition II.32. *L'ensemble $\text{Spec} \left(\begin{array}{c} j_1, \dots, j_n \\ \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n \end{array} \right)$, l'ensemble $c\text{Cont}_m(n)$ et l'ensemble des m -tableaux standards sont en bijection.*

Corollaire II.33. *Le spectre des éléments de Jucys–Murphy classiques est simple dans les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ (labellisées par les m -partitions).*

Cela signifie que pour deux m -tableaux standards (pas nécessairement de la même forme), les éléments de $\text{Spec} \left(\begin{array}{c} j_1, \dots, j_n \\ \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n \end{array} \right)$ qui leur sont associés par la Proposition II.32 sont différents

(deux éléments $\left(\begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \\ \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n \end{array} \right)$ et $\left(\begin{array}{c} a'_1, \dots, a'_n \\ \tilde{a}'_1, \dots, \tilde{a}'_n \end{array} \right)$ sont différents si il existe un certain i tel que $a_i \neq a'_i$ ou $\tilde{a}_i \neq \tilde{a}'_i$).

Il reste à vérifier que nous obtenons dans cette approche toutes les représentations irréductibles du groupe $G(m, 1, n)$. D'après le Chapitre I, Section I.2, la somme des carrés des dimensions des représentations construites est égale au cardinal de $G(m, 1, n)$. Ainsi, la Proposition suivante complète la vérification.

Proposition II.34. *Les représentations $V_{\lambda^{(m)}}$ (labellisées par les m -partitions) du groupe $G(m, 1, n)$ construites dans la Sous-Section précédente sont irréductibles et deux à deux non-isomorphes.*

Il résulte aussi que les règles de branchement pour $(G(m, 1, n), G(m, 1, n - 1))$ (c'est-à-dire, pour la paire d'algèbres $(\mathbb{C}G(m, 1, n), \mathbb{C}G(m, 1, n - 1))$) sont les mêmes que pour le cas non-dégénéré, pour la paire $(H(m, 1, n), H(m, 1, n - 1))$.

Comme dans la situation non-dégénérée, nous obtenons les conclusions suivantes.

- Les règles de branchement de la chaîne, par rapport à n , des groupes $G(m, 1, n)$ sont sans multiplicité.
- Le centralisateur de la sous-algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n - 1)$ dans l'algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ est commutatif pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$
- Le centralisateur de la sous-algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n - 1)$ dans l'algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ est engendré par le centre de $\mathbb{C}G(m, 1, n - 1)$ et les éléments de Jucys–Murphy j_n et \tilde{j}_n .
- La sous-algèbre engendrée par les éléments de Jucys–Murphy $j_1, \dots, j_n, \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n$ de l'algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ est commutative maximale.

Début du diagramme de Bratteli coloré de $G(2, 1, n)$. Ci-dessous, le début du diagramme de Bratteli (quatre premiers étages) pour la chaîne des groupes $G(2, 1, n)$ est dessiné. Nous "colorons" les arêtes par les valeurs propres des éléments de Jucys–Murphy de $G(2, 1, n)$, qui représentent l'ajout d'une m -case dans un m -tableau standard (les arêtes descendant du niveau i au niveau $i + 1$ sont labellisés par les couples de valeurs propres du couple d'éléments $(j_{i+1}, \tilde{j}_{i+1})$; le sommet du haut est situé au niveau 0). Rappelons que $\{\xi_1, \xi_2\}$ est l'ensemble (arbitrairement ordonné) des racines carrées de l'unité.

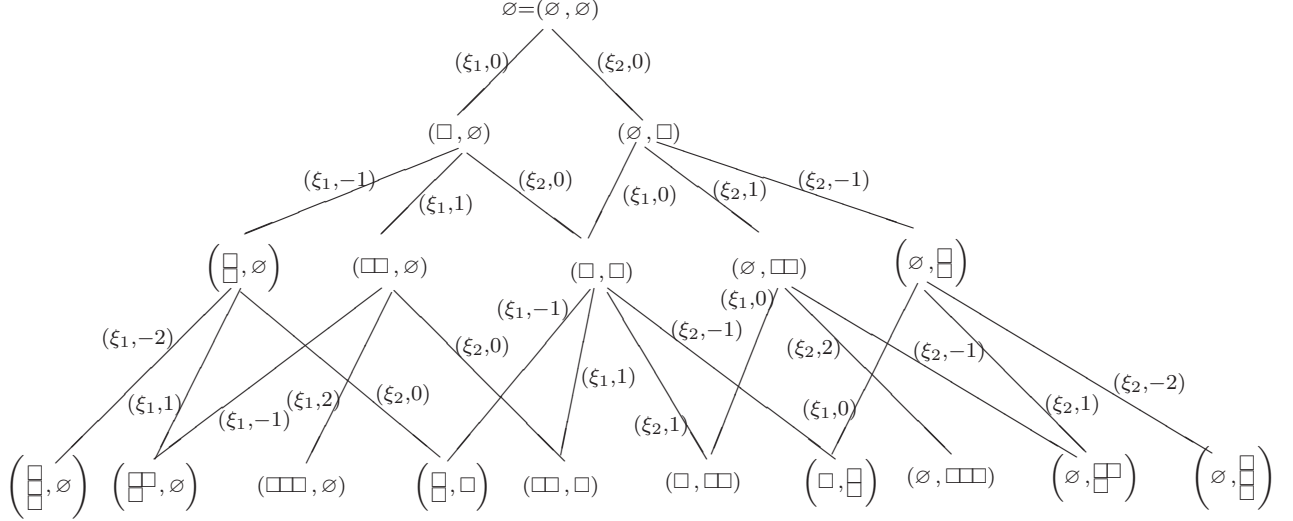


Fig. II.6. Diagramme de Bratteli (quatre premiers niveaux) pour $G(m, 1, n)$ avec $m = 2$.

Remarque. Cette remarque répète, dans la situation classique, la remarque (a) à la fin de la Section II.5. Pour tout m -tableau standard $X_{\lambda^{(m)}}$, définissons l'élément $\mathfrak{p}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ de l'algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ par la récursion suivante. La condition initiale est $\mathfrak{p}_{\emptyset} = 1$. Soit $\alpha^{(m)}$ la m -case occupée par le nombre n dans $X_{\lambda^{(m)}}$; définissons $\mu^{(m)} := \lambda^{(m)} \setminus \{\alpha^{(m)}\}$. Soit $X_{\mu^{(m)}}$ le m -tableau standard avec les nombres $1, \dots, n - 1$ aux mêmes m -cases que dans $X_{\lambda^{(m)}}$. La récursion est donnée par

$$\mathfrak{p}_{X_{\lambda^{(m)}}} := \mathfrak{p}_{X_{\mu^{(m)}}} \prod_{\substack{\beta^{(m)}: \\ \beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \\ cc(\beta^{(m)}) \neq cc(\alpha^{(m)})}} \frac{\tilde{j}_n - cc(\beta^{(m)})}{cc(\alpha^{(m)}) - cc(\beta^{(m)})} \prod_{\substack{\beta^{(m)}: \\ \beta^{(m)} \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}) \\ p(\beta^{(m)}) \neq p(\alpha^{(m)})}} \frac{j_n - p(\beta^{(m)})}{p(\alpha^{(m)}) - p(\beta^{(m)})}, \quad (\text{II.6.43})$$

où $\begin{pmatrix} p(\beta^{(m)}) \\ cc(\beta^{(m)}) \end{pmatrix}$ est le contenu classique de la m -case $\beta^{(m)}$. En raison du résultat de complétude de cette Sous-Section, les éléments $\mathfrak{p}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ forment un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de l'algèbre $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ (voir Chapitre suivant, Section III.2).

Comme pour l'algèbre de Hecke cyclotomique, nous avons un homomorphisme bien défini $\mathfrak{T}_c \rightarrow \mathbb{C}G(m, 1, n)$ qui est l'identité sur les générateurs t, s_1, \dots, s_{n-1} et envoie $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ à $\mathfrak{p}_{X_{\lambda(m)}}$ pour tout m -tableau standard $X_{\lambda(m)}$. La vérification est similaire à celle pour l'algèbre $H(m, 1, n)$ (voir la remarque (a) à la fin de la Section II.5). Nous la laissons au lecteur.

Appendice II.6.A Structure de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique

Nous décrivons ici une forme normale pour les éléments de l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$, voir la Définition II.19. Elle coïncide avec celle donnée dans [103] pour l'algèbre de Hecke en couronne si nous prenons, pour le groupe fini dans [103], le groupe cyclique d'ordre m . Néanmoins, pour être complet, nous donnons les étapes de la preuve dans notre situation. Fixons une base \mathfrak{B} dans l'algèbre du groupe $G(m, 1, n)$. Rappelons l'homomorphisme injectif $\hat{\iota} : \mathbb{C}G(m, 1, n) \rightarrow \mathfrak{A}_{m,n}$ défini par (II.6.9).

Proposition II.35. *L'ensemble suivant est une base de $\mathfrak{A}_{m,n}$:*

$$\tilde{x}_1^{k_1} \dots \tilde{x}_n^{k_n} \cdot \bar{w}, \quad (\text{II.6.44})$$

où $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\bar{w} \in \hat{\iota}(\mathfrak{B})$; ici $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ est l'ensemble des entiers non-négatifs.

Étapes de la preuve. Les relations définissantes (II.6.6)–(II.6.8), avec la Définition (II.6.12), la Proposition II.21 et le Lemme II.22 impliquent que tout élément de $\mathfrak{A}_{m,n}$ peut être écrit comme une combinaison linéaire d'éléments (II.6.44). Seulement l'indépendance linéaire des éléments (II.6.44) demande à être vérifiée. Soit E l'espace vectoriel avec la base

$$\tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_n^{k_n}, \quad \text{où } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (\text{II.6.45})$$

L'élément correspondant à $k_1 = \dots = k_n = 0$ sera noté 1.

Définissons les opérateurs $L_{\tilde{x}_i}$, $i = 1, \dots, n$, sur E :

$$L_{\tilde{x}_i}(\tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_i^{k_i} \dots \tilde{u}_n^{k_n}) = \tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_i^{k_i+1} \dots \tilde{u}_n^{k_n}. \quad (\text{II.6.46})$$

Clairement, $L_{\tilde{x}_i}$, $i = 1, \dots, n$, forment un ensemble commutatif d'opérateurs.

Soit V un $G(m, 1, n)$ -module régulier à gauche. La base \mathfrak{B} induit une base de V que nous notons par le même symbole \mathfrak{B} . Soit $F := E \otimes V$. Étendons les opérateurs $L_{\tilde{x}_i}$, $i = 1, \dots, n$, à des opérateurs sur F agissant comme l'identité sur V . Nous avons

$$L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \dots L_{\tilde{x}_n}^{k_n}(1 \otimes v) = \tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v, \quad (\text{II.6.47})$$

où v est un élément quelconque de V .

Définissons les opérateurs $L_{\tilde{s}_i}$, $i = 1, \dots, n-1$ et L_{x_i} , $i = 1, \dots, n$ sur F par les règles :

- L'action de $L_{\tilde{s}_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, (respectivement, L_{x_i} , $i = 1, \dots, n$) sur le sous-espace formé par les éléments $1 \otimes v$, $v \in V$, est l'action régulière à gauche des éléments s_i (respectivement, de l'élément j_i) du groupe $G(m, 1, n)$.

- Pour définir le résultat de l'action de $L_{\bar{s}_i}$, $i = 1, \dots, n-1$ et L_{x_i} , $i = 1, \dots, n$ sur un élément $\tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v$, nous utilisons (II.6.47) pour écrire

$$\tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v = L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \dots L_{\tilde{x}_n}^{k_n} (1 \otimes v) \quad (\text{II.6.48})$$

et ensuite déplaçant $L_{\bar{s}_i}$ (respectivement, L_{x_i}) vers la droite à travers $L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \dots L_{\tilde{x}_n}^{k_n}$ en postulant les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} L_{\bar{s}_i} L_{\tilde{x}_i} &= L_{\tilde{x}_{i+1}} L_{\bar{s}_i} - \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m L_{x_i}^p L_{x_{i+1}}^{-p}, \quad L_{\bar{s}_i} L_{\tilde{x}_{i+1}} = L_{\tilde{x}_i} L_{\bar{s}_i} + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m L_{x_i}^p L_{x_{i+1}}^{-p}, \\ L_{\bar{s}_i} L_{\tilde{x}_j} &= L_{\tilde{x}_j} L_{\bar{s}_i} \quad \text{si } j \neq i, i+1, \end{aligned} \quad (\text{II.6.49})$$

$$L_{x_i} L_{\tilde{x}_j} = L_{\tilde{x}_j} L_{x_i} \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n.$$

Dans le processus de déplacement de $L_{\bar{s}_i}$ vers la droite à travers $L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \dots L_{\tilde{x}_n}^{k_n}$, des éléments L_{x_i} et $L_{x_{i+1}}$ apparaissent. Nous les déplaçons aussi vers la droite en utilisant les mêmes règles (II.6.49).

Il en résulte la formule explicite suivante pour l'action des générateurs $L_{\bar{s}_i}$, L_{x_i} sur l'espace F :

$$\begin{aligned} L_{\bar{s}_i} (\tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_i^{k_i} \tilde{u}_{i+1}^{k_{i+1}} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v) &= \tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_i^{k_{i+1}} \tilde{u}_{i+1}^{k_i} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes s_i v \\ &+ \sum_{a=1}^{k_{i+1}} \tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_i^{a-1} \tilde{u}_{i+1}^{k_i+k_{i+1}-a} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes \Pi_i v - \sum_{a=1}^{k_i} \tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_i^{a-1} \tilde{u}_{i+1}^{k_i+k_{i+1}-a} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes \Pi_i v, \end{aligned}$$

où $\Pi_i = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m j_i^p j_{i+1}^{-p}$, et

$$L_{x_i} (\tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes v) = \tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes j_i v.$$

On vérifie que les opérateurs L_{x_i} , $L_{\tilde{x}_i}$, $i = 1, \dots, n$, et $L_{\bar{s}_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, satisfont les relations définissantes (II.6.6)–(II.6.8) sur l'espace total F , et définissent ainsi une structure de $\mathfrak{A}_{m,n}$ -module sur F .

Donc,

$$L_{\tilde{x}_1^{k_1} \dots \tilde{x}_n^{k_n}} \cdot \bar{w} (1 \otimes 1) = L_{\tilde{x}_1}^{k_1} \dots L_{\tilde{x}_n}^{k_n} \cdot L_{\bar{w}} (1 \otimes 1) = \tilde{u}_1^{k_1} \dots \tilde{u}_n^{k_n} \otimes w,$$

où $w \in \mathfrak{B}$ et \bar{w} est l'image de w par l'application $\hat{\iota}$; ceci montre que les opérateurs $L_{\tilde{x}_1^{k_1} \dots \tilde{x}_n^{k_n} \cdot \bar{w}}$ sont linéairement indépendants et l'indépendance de l'ensemble (II.6.44) s'ensuit. \square

Appendice II.6.B Opérateurs d'entrelacement classiques

Nous décrivons les opérateurs d'entrelacement dans l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$; ils peuvent être utilisés pour étudier le spectre des éléments \tilde{x}_i dans différentes représentations. Nous discutons l'origine de ces opérateurs d'entrelacement dans l'algèbre de Hecke affine (non-dégénérée). Nous redérivons aussi le spectre des éléments de Jucys–Murphy \tilde{j}_i du point de vue de la théorie des perturbations. Les opérateurs d'entrelacement peuvent être introduits [103] dans le contexte plus général des algèbres de Hecke en couronne.

1. La Proposition suivante est l'analogie classique de la Proposition II.4.

Proposition II.36. *Nous avons*

$$\text{Spec}(\tilde{j}_i) \subset [1 - i, i - 1] \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (\text{II.6.50})$$

La Proposition II.36 provient des Propositions II.23 et II.25, comme la Proposition II.4 vient des Propositions II.1 et II.3 dans la preuve donnée dans le paragraphe 5 de la Section II.3.

Pour donner une preuve alternative (dans l'esprit de [44]), mentionnée dans le paragraphe 5 de la Section II.3, nous introduisons les éléments suivants de l'algèbre $\mathfrak{A}_{m,n}$:

$$\tilde{u}_{i+1} := \bar{s}_i \tilde{x}_i - \tilde{x}_i \bar{s}_i \equiv \bar{s}_i (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1}) + P_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (\text{II.6.51})$$

où $P_{i+1} := \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p x_{i+1}^{-p}$. Clairement, les éléments P_{i+1} sont des idempotents

$$P_{i+1}^2 = P_{i+1} \quad (\text{II.6.52})$$

et satisfont

$$\begin{cases} (x_i - x_{i+1})P_{i+1} = 0, & (\text{II.6.53}) \\ \bar{s}_i P_{i+1} = P_{i+1} \bar{s}_i. & (\text{II.6.54}) \end{cases}$$

Les éléments \tilde{u}_i sont les "opérateurs d'entrelacement classiques", ils satisfont (la vérification est directe)

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i+1} x_i = x_{i+1} \tilde{u}_{i+1}, & \tilde{u}_{i+1} x_{i+1} = x_i \tilde{u}_{i+1}, & \tilde{u}_{i+1} x_j = x_j \tilde{u}_{i+1} \quad \text{pour } j \neq i, i+1, \\ \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_i = \tilde{x}_{i+1} \tilde{u}_{i+1}, & \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i \tilde{u}_{i+1}, & \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_j = \tilde{x}_j \tilde{u}_{i+1} \quad \text{pour } j \neq i, i+1. \end{cases} \quad (\text{II.6.55})$$

Ensuite, les éléments \tilde{u}_i satisfont les relations d'Artin :

$$\tilde{u}_i \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i = \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i \tilde{u}_{i+1}. \quad (\text{II.6.56})$$

Dans la vérification ici, il est pratique d'utiliser (II.6.55) pour transformer, disons, la partie gauche de (II.6.56), commençant ainsi :

$$\tilde{u}_i \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i = \left(\bar{s}_{i-1} (\tilde{x}_{i-1} - \tilde{x}_i) + P_i \right) \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i = \bar{s}_{i-1} \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1}) + P_i \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i.$$

En continuant de cette manière, nous déplaçons vers la droite tous les \tilde{x} 's ; La comparaison de la partie gauche et de la partie droite est plus ou moins directe après ceci. Pour la comparaison, les égalités $\bar{s}_i P_i \bar{s}_i = \bar{s}_{i-1} P_{i+1} \bar{s}_{i-1}$, $(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_{i-1}^p x_{i+1}^{-p} - P_{i+1}) P_i = 0$ et $(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_{i-1}^p x_{i+1}^{-p} - P_i) P_{i+1} = 0$ ont leur utilité ; la première égalité est un calcul direct, les seconde et troisième égalités viennent de (II.6.53).

Une propriété de plus des éléments \tilde{u}_i est

$$\tilde{u}_{i+1}^2 = -(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1})^2 + P_{i+1} = -\left(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} + P_{i+1} \right) \left(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} - P_{i+1} \right). \quad (\text{II.6.57})$$

La relation (II.6.57) peut être vérifiée directement ou en suivant la méthode ci-dessus pour la vérification de (II.6.56).

Ainsi, pour un polynôme χ en une variable, nous avons

$$\tilde{u}_{i+1}\chi(\tilde{x}_i)\tilde{u}_{i+1} = \chi(\tilde{x}_{i+1})\tilde{u}_{i+1}^2 = -\chi(\tilde{x}_{i+1})\left(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} + P_{i+1}\right)\left(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} - P_{i+1}\right). \quad (\text{II.6.58})$$

Les éléments \tilde{x}_i , \tilde{x}_{i+1} et P_{i+1} commutent. Dans une représentation ρ , le spectre de l'opérateur $\rho(P_{i+1})$ est contenu dans $\{0, 1\}$; En prenant pour χ l'équation caractéristique pour $\rho(\tilde{x}_i)$, nous concluons que

$$\text{Spec}(\rho(\tilde{x}_{i+1})) \subset \text{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) \cup \left(\text{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) + 1\right) \cup \left(\text{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) - 1\right). \quad (\text{II.6.59})$$

En réalisant \tilde{x}_i par \tilde{j}_i dans une représentation du groupe $G(m, 1, n)$, et prenant en compte la "condition initiale" $\tilde{j}_1 = 0$, nous redérivons (II.6.50).

Remarque. L'algèbre de Hecke affine dégénérée usuelle (qui correspond à $m = 1$) est distinguée dans le sens où les idempotents P_i deviennent triviaux : $P_i = 1$, en opposition avec l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique pour $m > 1$.

2. Soit \hat{H}_n l'algèbre de Hecke affine. Nous notons les générateurs de \hat{H}_n par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ et y_1 , le symbole y_1 étant utilisé ici à la place de τ . Notons y_i les éléments de Jucys–Murphy de l'algèbre \hat{H}_n ; rappelons que y_{i+1} pour $i > 0$ sont définis inductivement par $y_{i+1} := \sigma_i y_i \sigma_i$.

Des opérateurs d'entrelacement généraux \mathfrak{U}_{i+1} , $i = 1, \dots, n-1$, de l'algèbre de Hecke affine sont définis comme étant des opérateurs vérifiant

$$\begin{cases} \mathfrak{U}_{i+1}y_i = y_{i+1}\mathfrak{U}_{i+1}, \quad \mathfrak{U}_{i+1}y_{i+1} = y_i\mathfrak{U}_{i+1}, \\ \mathfrak{U}_{i+1}y_k = y_k\mathfrak{U}_{i+1} \quad \text{pour } k \neq i, i+1, \end{cases} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n-1. \quad (\text{II.6.60})$$

Les opérateurs d'entrelacement (les solutions $\mathfrak{U}_{i+1} := U_{i+1}$ de (II.6.60)) utilisées dans [44] sont

$$U_{i+1} := \sigma_i y_i - y_i \sigma_i. \quad (\text{II.6.61})$$

Les opérateurs U_{i+1} satisfont, en plus de (II.6.60), l'équation d'Artin,

$$U_i U_{i+1} U_i = U_{i+1} U_i U_{i+1}, \quad (\text{II.6.62})$$

et, élevés au carré, deviennent la fonction suivante des éléments de Jucys–Murphy :

$$U_i^2 = -(y_{i+1} - q^2 y_i)(y_{i+1} - q^{-2} y_i). \quad (\text{II.6.63})$$

Contrastant avec (II.6.57), la partie droite de (II.6.63) ne contient rien d'analogue au projecteur P_{i+1} . Nous allons expliquer l'apparition de ce projecteur dans la limite classique.

Nous pourrions travailler directement avec les opérateurs de Jucys–Murphy de l'algèbre de Hecke cyclotomique $H(m, 1, n)$ et utiliser les formules (II.6.4)-(II.6.5). Pourtant, on peut aussi procéder (et

nous préférons faire ainsi) au niveau de l'algèbre de Hecke affine, et prendre le quotient cyclotomique après. Nous avons la composition suivante :

$$\hat{H}_n \rightarrow H(m, 1, n) \rightsquigarrow \mathbb{C}G(m, 1, n) \quad (\text{II.6.64})$$

Ici, l'homomorphisme de \hat{H}_n vers $H(m, 1, n)$ est donné par $\hat{H}_n \ni \sigma_i \mapsto \sigma_i \in H(m, 1, n)$ et $y_1 \mapsto \tau$, où τ satisfait (II.2.8). Le symbole \rightsquigarrow signifie la limite classique. La limite classique peut aussi être comprise comme un homomorphisme, comme l'autre flèche dans (II.6.64) ; à savoir, la limite classique ici est le quotient par l'idéal engendré par $\{v_i - \xi_i, i = 1, \dots, n\}$ et $(q - 1)$, où v_i et q sont considérés comme des générateurs centraux.

Les formules (II.6.4)-(II.6.5) montrent que les décompositions en séries de Taylor des opérateurs de Jucys–Murphy de l'algèbre $H(m, 1, n)$ commencent ainsi

$$J_i = j_i + j_i \tilde{j}_i \alpha + O(\alpha^2) ; \quad (\text{II.6.65})$$

ici α est le paramètre de déformation, $q^2 = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$. Nous "relevons" la formule (II.6.65) à l'algèbre de Hecke affine \hat{H}_n en supposant que les décompositions en séries de Taylor des opérateurs de Jucys–Murphy de \hat{H}_n commencent ainsi

$$y_i = x_i + x_i \tilde{x}_i \alpha + O(\alpha^2) , \quad (\text{II.6.66})$$

où x_i et \tilde{x}_i appartiennent à l'algèbre de Hecke affine dégénérée cyclotomique $\mathfrak{A}_{m,n}$, voir (II.6.6)-(II.6.8). La supposition (II.6.66) peut être vue en quelque sorte comme la considération du "premier voisinage infinitésimal" de l'homomorphisme de \hat{H}_n vers $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ participant à (II.6.64).

Pour faire la limite classique, on prend en compte le début de la décomposition en série de Taylor des éléments σ_i :

$$\sigma_i = \bar{s}_i + \frac{\alpha}{2} + O(\alpha^2) . \quad (\text{II.6.67})$$

Notons que les opérateurs U_{i+1} , donnés par (II.6.61) tendent, par (II.6.66) et (II.6.67), vers les opérateurs

$$u_{i+1} := \bar{s}_i x_i - x_i \bar{s}_i \equiv \bar{s}_i (x_i - x_{i+1}) . \quad (\text{II.6.68})$$

Les opérateurs u_{i+1} satisfont toutes les relations pour les éléments \tilde{u}_{i+1} listées dans (II.6.55) ; mais les opérateurs d'entrelacement u_{i+1} n'aident pas à comprendre le spectre des images des éléments \tilde{x}_i dans les représentations.

Comme il a été remarqué dans [44], les opérateurs $\mathfrak{U}_{i+1} := U_{i+1} f(y_i, y_{i+1})$, où f est une fonction arbitraire, sont des opérateurs d'entrelacement qui satisfont l'équation d'Artin.

On montre par récurrence que pour tout entier non-négatif L ,

$$\sigma_i y_i^L - y_i^L \sigma_i = U_{i+1} \cdot \sum_{b=0}^{L-1} y_i^b y_{i+1}^{L-1-b} . \quad (\text{II.6.69})$$

C'est pourquoi les opérateurs $\sigma_i y_i^L - y_i^L \sigma_i$ sont des opérateurs d'entrelacement pour tout entier non-négatif L .

Sous l'hypothèse (II.6.66), les opérateurs $\sigma_i y_i^m - y_i^m \sigma_i \equiv \sigma_i (y_i^m - 1) - (y_i^m - 1) \sigma_i$ tendent vers 0 quand α tend vers 0. Ces opérateurs sont d'ordre $O(\alpha)$. Notons

$$\tilde{U}_{i+1} := \frac{1}{m} \left(\sigma_i \frac{y_i^m - 1}{\alpha} - \frac{y_i^m - 1}{\alpha} \sigma_i \right). \quad (\text{II.6.70})$$

Clairement, \tilde{U}_{i+1} tend vers \tilde{u}_{i+1} quand α tend vers 0 ($q - q^{-1} = \alpha + O(\alpha^2)$).

En utilisant (II.6.69) avec $L = m$, (II.6.60) avec $\mathfrak{U}_{i+1} := U_{i+1}$ et (II.6.63), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\sigma_i y_i^m - y_i^m \sigma_i)^2 &= U_{i+1} \cdot \sum_{b=0}^{m-1} y_i^b y_{i+1}^{m-1-b} \cdot U_{i+1} \cdot \sum_{c=0}^{m-1} y_i^c y_{i+1}^{m-1-c} \\ &= U_{i+1}^2 \cdot \left(\sum_{b=0}^{m-1} y_i^b y_{i+1}^{m-1-b} \right)^2 \\ &= -(y_{i+1} - q^2 y_i)(y_{i+1} - q^{-2} y_i) \left(\sum_{b=0}^{m-1} y_i^b y_{i+1}^{m-1-b} \right)^2 \\ &= - \left((y_{i+1} - q^2 y_i) \sum_{b=0}^{m-1} y_i^b y_{i+1}^{m-1-b} \right) \cdot \left((y_{i+1} - q^{-2} y_i) \sum_{b=0}^{m-1} y_i^b y_{i+1}^{m-1-b} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.6.71})$$

Soit $r := x_i/x_{i+1}$. Sous l'hypothèse (II.6.66), nous calculons

$$\sum_{b=0}^{m-1} y_i^b y_{i+1}^{m-1-b} = m x_i^{m-1} P_{i+1} + \alpha \left(\tilde{x}_i x_{i+1}^{m-1} \sum_{b=0}^{m-1} b r^b + \tilde{x}_{i+1} x_i^{m-1} \sum_{b=0}^{m-1} b r^{-b} \right) + O(\alpha^2) \quad (\text{II.6.72})$$

et

$$\begin{cases} y_{i+1} - q^2 y_i &= x_{i+1} - x_i + \alpha \left((x_{i+1} \tilde{x}_{i+1} - x_i \tilde{x}_i) - x_i \right) + O(\alpha^2), \\ y_{i+1} - q^{-2} y_i &= x_{i+1} - x_i + \alpha \left((x_{i+1} \tilde{x}_{i+1} - x_i \tilde{x}_i) + x_i \right) + O(\alpha^2). \end{cases} \quad (\text{II.6.73})$$

En écrivant $x_{i+1} - x_i = x_{i+1}(1 - r)$ ou $x_{i+1} - x_i = -x_i(1 - r^{-1})$, et utilisant l'identité

$$(1 - \mathbf{c}) \sum_{b=0}^{m-1} b \mathbf{c}^b = m(P - 1) \quad (\text{II.6.74})$$

(où $P := \frac{1}{m} \sum_{b=0}^{m-1} \mathbf{c}^b$ est le projecteur), valide pour un générateur \mathbf{c} du groupe cyclique C_m à m éléments, nous trouvons

$$\begin{cases} (y_{i+1} - q^2 y_i) \sum_{b=0}^{m-1} y_i^b y_{i+1}^{m-1-b} &= m \alpha (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i - P_{i+1}) + O(\alpha^2), \\ (y_{i+1} - q^{-2} y_i) \sum_{b=0}^{m-1} y_i^b y_{i+1}^{m-1-b} &= m \alpha (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i + P_{i+1}) + O(\alpha^2). \end{cases} \quad (\text{II.6.75})$$

Substituant (II.6.75) dans (II.6.71), divisant par $(m\alpha)^2$ et prenant la limite $\alpha \rightarrow 0$, nous retrouvons le résultat (II.6.57) du point de vue perturbatif.

3. Les éléments j_i vérifiant $j_i^m = 1$, les équations caractéristiques pour les éléments j_i ne sont pas significatives au niveau classique. Il est facile d'obtenir l'équation caractéristique pour \tilde{j}_i partant de l'équation caractéristique pour J_i . Soit A_0 un opérateur semi-simple sur un espace vectoriel V . Considérons une perturbation de A_0 de la forme

$$A = A_0 + A_0 A_1 \alpha + O(\alpha^2), \quad (\text{II.6.76})$$

où A_1 est aussi semi-simple et les opérateurs A_0 et A_1 commutent. Soit τ une valeur propre de A_0 et V_τ l'espace propre correspondant. L'opérateur $A(\alpha)$ sur l'espace V_τ a, jusqu'à l'ordre α^2 , la forme $\tau \text{Id} + \tau A_1$, et ses valeurs propres sont $\tau + \tau s_l \alpha$ où $\{s_l\}$ est l'ensemble des valeurs propres de la restriction de A_1 à V_τ .

Dans la situation particulière où $A_0 = j_i$, $A_1 = \tilde{j}_i$ et $A = J_i$, le spectre de A est, en général, un sous-ensemble de $\{v_l q^{2\eta}, l = 1, \dots, m \text{ and } \eta \in [1 - i, i - 1]\}$. Nous prenons tout d'abord la limite $v_l \rightarrow \xi_l, l = 1, \dots, m$. Ensuite $\xi_l q^{2\eta} = \xi_l + \xi_l \eta \alpha + O(\alpha^2)$ (car $q^2 = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$) ainsi le spectre de l'opérateur \tilde{j}_i est un sous-ensemble de $[1 - i, i - 1]$ et nous retrouvons la Proposition II.36 d'un point de vue perturbatif.

Appendice II.A Exemples

Dans cet Appendice, nous illustrons la construction des représentations irréductibles des algèbres $H(m, 1, n)$ sur plusieurs exemples avec $m = 2$ et n petit. Pour ces exemples, nous écrivons les formules (II.4.8)-(II.4.9) et (II.4.16)-(II.4.17) de la Section II.4.

1. La représentation de $H(2, 1, 2)$ correspondant à la 2-partition (\square, \square) .

La dimension de cette représentation est 2. Nous choisissons la base

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}\right)}, \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{X}_{\left(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}\right)}.$$

Les formules (II.4.8)-(II.4.9) prennent la forme

$$\left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right) \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right), \quad \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right) \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right)$$

et

$$(\tau - v_1) \mathcal{X}_1 = 0, \quad (\tau - v_2) \mathcal{X}_2 = 0.$$

Les matrices correspondant à l'action (II.4.16)-(II.4.17) des générateurs de $H(2, 1, 2)$ dans la base ci-dessus sont données par :

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -(q - q^{-1}) \frac{v_2}{v_1 - v_2} & \frac{qv_1 - q^{-1}v_2}{v_1 - v_2} \\ \frac{qv_2 - q^{-1}v_1}{v_2 - v_1} & -(q - q^{-1}) \frac{v_1}{v_2 - v_1} \end{pmatrix}, \quad \tau \mapsto \text{diag}(v_1, v_2). \quad (\text{II.A.1})$$

Dans la base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\}$, la matrice de Gram du produit scalaire ω -sesquilinéaire invariant est

$$\text{diag} \left(\frac{q^{-1}v_1 - qv_2}{v_1 - v_2}, \frac{qv_1 - q^{-1}v_2}{v_1 - v_2} \right).$$

2. La représentation de $H(2, 1, 3)$ correspondant à la 2-partition $\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \right)$.

La représentation est de dimension 3 et nous choisissons la base

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right), \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right), \quad \mathcal{X}_3 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right).$$

Les formules (II.4.8)-(II.4.9) prennent la forme

$$\left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}} \right) \mathcal{X}_1 = 0, \quad \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2} \right) \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3 \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1} \right),$$

$$\left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1} \right) \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_2 \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2} \right),$$

$$\left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2} \right) \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}} \right), \quad \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}} \right) \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2} \right),$$

$$\left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}} \right) \mathcal{X}_3 = 0,$$

et

$$(\tau - v_1)\mathcal{X}_1 = 0, \quad (\tau - v_1)\mathcal{X}_2 = 0, \quad (\tau - v_2)\mathcal{X}_3 = 0.$$

Les matrices correspondant à l'action (II.4.16)-(II.4.17) des générateurs de $H(2, 1, 3)$ dans la base ci-dessus sont données par :

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2} & \frac{qv_1-q^{-1}v_2}{v_1-v_2} \\ 0 & \frac{qv_2-q^{-1}v_1}{v_2-v_1} & -\frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2} & \frac{v_1q^{-1}-q^{-1}v_2}{v_1q^{-2}-v_2} & 0 \\ \frac{qv_2-v_1q^{-3}}{v_2-v_1q^{-2}} & -\frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\tau \mapsto \text{diag}(v_1, v_1, v_2).$$

Dans la base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3\}$, la matrice de Gram du produit scalaire ω -sesquilinéaire invariant est

$$\text{diag} \left(\frac{q^{-2}v_1 - q^2v_2}{v_1 - v_2}, 1, \frac{qv_1 - q^{-1}v_2}{q^{-1}v_1 - qv_2} \right).$$

3. La représentation de $H(2, 1, 4)$ correspondant à la 2-partition $\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \square\square \right)$.

La représentation est de dimension 6 et nous choisissons la base

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right), \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \right), \quad \mathcal{X}_3 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right), \quad \mathcal{X}_4 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \right),$$

$$\mathcal{X}_5 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right), \quad \mathcal{X}_6 := \mathcal{X} \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right).$$

Les formules (II.4.8)-(II.4.9) prennent la forme

$$\begin{aligned} \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}}\right) \mathcal{X}_1 &= 0, & \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right) \mathcal{X}_2 &= \mathcal{X}_4 \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right), \\ \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right) \mathcal{X}_3 &= \mathcal{X}_5 \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right), & \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right) \mathcal{X}_4 &= \mathcal{X}_2 \left(\sigma_1 + \frac{v_2}{(q-q^{-1})v_1-v_2}\right), \\ \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1}\right) \mathcal{X}_5 &= \mathcal{X}_3 \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2}\right), & \left(\sigma_1 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_2-v_2q^2}\right) \mathcal{X}_6 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2}\right) \mathcal{X}_1 &= \mathcal{X}_2 \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}}\right), & \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}}\right) \mathcal{X}_2 &= \mathcal{X}_1 \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2}\right), \\ \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_2-v_2q^2}\right) \mathcal{X}_3 &= 0, & \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}}\right) \mathcal{X}_4 &= 0, \\ \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1-v_2q^2}\right) \mathcal{X}_5 &= \mathcal{X}_6 \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2q^2-v_1}\right), & \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2q^2-v_1}\right) \mathcal{X}_6 &= \mathcal{X}_5 \left(\sigma_2 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1-v_2q^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_2-v_2q^2}\right) \mathcal{X}_1 &= 0, & \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2}\right) \mathcal{X}_2 &= \mathcal{X}_3 \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}}\right), \\ \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}}\right) \mathcal{X}_3 &= \mathcal{X}_2 \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2}\right), & \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2}\right) \mathcal{X}_4 &= \mathcal{X}_5 \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}}\right), \\ \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}}\right) \mathcal{X}_5 &= \mathcal{X}_6 \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2}\right), & \left(\sigma_3 + \frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_1-v_1q^{-2}}\right) \mathcal{X}_6 &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\tau - v_1)\mathcal{X}_1 &= 0, & (\tau - v_1)\mathcal{X}_2 &= 0, & (\tau - v_1)\mathcal{X}_3 &= 0, \\ (\tau - v_2)\mathcal{X}_4 &= 0, & (\tau - v_2)\mathcal{X}_5 &= 0, & (\tau - v_2)\mathcal{X}_6 &= 0. \end{aligned}$$

Les matrices correspondant à l'action (II.4.16)-(II.4.17) des générateurs de $H(2, 1, 4)$ dans la base ci-dessus sont données par :

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2} & 0 & \frac{qv_1-q^{-1}v_2}{v_1-v_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1-v_2} & 0 & \frac{qv_1-q^{-1}v_2}{v_1-v_2} & 0 \\ 0 & \frac{qv_2-q^{-1}v_1}{v_2-v_1} & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{qv_2-q^{-1}v_1}{v_2-v_1} & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2-v_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{(q-q^{-1})v_2}{v_1q^{-2}-v_2} & \frac{v_1q^{-1}-q^{-1}v_2}{v_1q^{-2}-v_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{qv_2-v_1q^{-3}}{v_2-v_1q^{-2}} & -\frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2-v_1q^{-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1-v_2q^2} & \frac{qv_1-v_2q}{v_1-v_2q^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_2q^3-q^{-1}v_1}{v_2q^2-v_1} & -\frac{(q-q^{-1})v_1}{v_2q^2-v_1} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2} & \frac{v_1q^{-1}-v_2q}{v_1q^{-2}-v_2q^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_2q^3-v_1q^{-3}}{v_2q^2-v_1q^{-2}} & -\frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(q-q^{-1})v_2q^2}{v_1q^{-2}-v_2q^2} & \frac{v_1q^{-1}-v_2q}{v_1q^{-2}-v_2q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v_2q^3-v_1q^{-3}}{v_2q^2-v_1q^{-2}} & -\frac{(q-q^{-1})v_1q^{-2}}{v_2q^2-v_1q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tau \mapsto \text{diag}(v_1, v_1, v_1, v_2, v_2, v_2).$$

Dans la base $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4, \mathcal{X}_5, \mathcal{X}_6\}$, la matrice de Gram du produit scalaire ω -sesquilinéaire invariant est $\text{diag}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ où

$$z_1 = \frac{(q^{-2}v_1-q^2v_2)(q^{-3}v_1-q^3v_2)}{(v_1-v_2)(q^{-1}v_1-qv_2)}, \quad z_2 = \frac{q^{-3}v_1-q^3v_2}{q^{-1}v_1-qv_2}, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = \frac{(qv_1-q^{-1}v_2)(q^{-3}v_1-q^3v_2)}{(q^{-1}v_1-qv_2)^2},$$

$$z_5 = \frac{qv_1-q^{-1}v_2}{q^{-1}v_1-qv_2}, \quad z_6 = \frac{(v_1-v_2)(qv_1-q^{-1}v_2)}{(q^{-1}v_1-qv_2)(q^{-2}v_1-q^2v_2)}.$$