

Quelques mots sur les singularités

Notes — Les modélisations basées sur la mécanique des milieux continus conduisent, dans un certain nombre de cas particuliers, à des contraintes « infinies » en certains points : les singularités. Ces valeurs infinies sortent du domaine de validité de la plupart des modélisations et, dans le cadre des simulations par éléments finis, pourraient mener un concepteur peu averti à des erreurs d'analyse.

24.1 Qu'est-ce qu'une singularité ?

Comme nous l'avons vu au cours de ce document, la mise en œuvre de la mécanique des milieux continus conduit à la construction d'un problème mathématique dont la solution est constituée d'un champ des déplacements et d'un champ des contraintes. Concernant le problème continu (i.e. non discrétisé, i.e. tel que présenté à la partie II), ces champs sont généralement des fonctions spatiales relativement régulières.

Cependant, dans certains cas, il existe des points où la solution n'est pas entièrement définie : ces points sont nommés **singularités**. D'une manière très pragmatique, la contrainte et la déformation tendent vers l'infini lorsque l'on s'approche du point singulier. Le déplacement, quant à lui, garde généralement une valeur finie. Nous avons par exemple abordé cela au chapitre 20 : la contrainte tend vers l'infini au voisinage de la pointe d'une fissure.

Il est important de noter que les singularités ne proviennent ni d'erreurs de calcul, ni d'erreurs dans l'application de la théorie, ni de modèles physiques spécialisés : elles proviennent de la mécanique des milieux continus (ou, plus généralement, de toute autre théorie physique basée sur la notion de milieu continu), et leur existence est prédite par l'étude mathématique de ces théories.

24.2 Singularités et éléments finis

En pratique, la plupart des simulations de mécanique des milieux continus sont basées sur la méthode des éléments finis. Or, celle-ci, comme toute méthode numérique, a la fâcheuse et dangereuse habitude de toujours retourner des valeurs finies, ce qui masque par conséquent la présence éventuelle de singularités.

En effet, un solveur éléments finis ne calcule les contraintes et déformations qu'aux points d'intégration (ou points de Gauß) des éléments, qui sont situés à l'intérieur des éléments. Or, dans une simulation par éléments finis, les points singuliers sont toujours des nœuds du maillage, et sont donc situés au bord des éléments. Les contraintes ne sont donc jamais calculées aux points singuliers, et ne présentent pas de valeurs infinies qui permettraient de détecter la singularité. **Ce que l'on observe ressemble plutôt à une simple concentration de contraintes** et les valeurs obtenues n'ont souvent rien de choquant à première vue.

C'est pourquoi il est indispensable de savoir quand ces singularités doivent se produire afin d'être en mesure d'effectuer les corrections nécessaires et ainsi redonner du sens à l'analyse effectuée.

24.3 Quand les singularités se produisent-elles ?

Si les singularités avaient la gentillesse de ne se produire que dans certains cas particuliers bien spécifiques, elles ne constitueraient alors pas vraiment un problème. Malheureusement, c'est loin d'être le cas, et de nombreux modèles courants de lois de comportements ou de conditions aux limites conduisent à des singularités. Même en restant dans le cadre de l'élasticité linéaire, on trouve des cas fréquents conduisant à des singularités, parmi lesquels les plus fréquemment rencontrés sont :

- les modèles comportant un **angle rentrant** (i.e. inférieur à 180° entre deux faces extérieures). Une fissure peut d'ailleurs être considérée comme un angle rentrant d'angle nul ;
- les modèles de **lois comportements discontinues**, comme à l'interface entre deux matériaux (dont nous avons souvent parlé tout au long de ce document) ;
- les modèles de chargements contenant des **efforts ponctuels**, qui est de loin le cas le plus fréquemment rencontré.

En tout honnêteté, il est difficile de nier le fait que ces trois cas sont vraiment couramment employés, ce qui permet de prendre toute la mesure du problème : on observe régulièrement des dimensionnements réalisés à partir de contraintes calculées au fond d'un angle rentrant ou sous une force ponctuelle, alors que les valeurs de ces contraintes n'y sont absolument pas fiables...

Cette liste n'est naturellement pas exhaustive et il existe d'autres cas pouvant entraîner des singularités, comme la présence d'**encastremements** ou de déplacements imposés dans certaines configurations géométriques particulières. **Inversement, et contrairement à ce que d'aucuns croient, les théories des poutres, plaques et coques présentent généralement moins de cas singuliers que la mécanique des milieux continus tridimensionnels (car certains de ces aspects peuvent être pris en compte dans la construction du modèle).**

24.4 Comment éviter les singularités

Nous avons vu que les singularités proviennent de limitations intrinsèques de la mécanique des milieux continus : cette dernière donne des résultats non valides en présence d'un certain nombre de configurations. Cela signifie que ces configurations n'appartiennent pas au domaine de validité de la mécanique des milieux continus tridimensionnelle, et que leur emploi peut donc mener à des résultats non pertinents (en l'occurrence, singuliers).

Schématiquement, la singularité provient du fait que la mécanique des milieux continus postule l'existence d'une densité volumique d'énergie, et s'accommode donc mal du caractère « ponctuel » de ces modèles (angle ponctuel, force ponctuelle, interface d'épaisseur nulle) qui conduit à des densités d'énergie infinies. Pour éviter la singularité, il faut donc utiliser des modèles non ponctuels comme :

- remplacer un angle rentrant par un congé de raccordement possédant un rayon de courbure non nul ;
- remplacer une discontinuité entre lois de comportement par une zone de transition dans laquelle les paramètres varient de façon continue ;
- remplacer une force ponctuelle par une pression de contact appliquée sur une surface non nulle...

Ces configurations ne créent pas de singularités, mais de simples concentrations de contraintes : les contraintes et les déformations restent finies dans leur voisinage. **Dans les faits, leur usage est indispensable à chaque fois que l'objectif de la simulation est de calculer une contrainte ou une déformation localisée dans la zone incriminée.**

24.5 Singularités et pertinence d'un résultat

Le problème des configurations suggérées pour éviter les singularités est qu'elles sont plus riches, qu'elles demandent plus d'informations que les modélisations ponctuelles. Or, le concepteur ne dispose pas toujours de ces informations, notamment aux premiers stades de la conception d'un produit, et peut donc être tenté d'utiliser un modèle plus simple, quitte à violer le domaine de validité de la mécanique des milieux continus.

En réalité, il peut même être tout à fait légitime d'utiliser un modèle « non valide » (entraînant des singularités), à condition d'avoir la certitude que ces singularités perturberont peu le résultat que l'on cherche à calculer.

C'est typiquement le cas lorsque le résultat est une quantité située suffisamment loin de la zone singulière : les singularités sont des anomalies très localisées, et leur effet direct décroît rapidement avec la distance. La singularité n'influe alors sur le résultat que par le biais des redistributions de contraintes, et cette influence est souvent (mais pas toujours !) négligeable.

En tout état de cause, il appartient au concepteur d'évaluer le caractère gênant ou non d'une singularité à l'aide de son expérience et de son esprit critique.

24.6 Conclusion

Nous espérons avoir pu mettre en évidence les points suivants :

- En mécanique des milieux continus, de nombreuses modélisations courantes mènent à des contraintes infinies en un ou plusieurs points : angles rentrants dans les modèles géométriques, discontinuités dans les modèles de comportements des matériaux, efforts ponctuels dans les modèles de chargement...
- Ces contraintes infinies sont prédites par les mathématiques, mais sortent du domaine de validité de la mécanique des milieux continus.
- Dans les simulations par éléments finis, les contraintes restent finies au voisinage des singularités, mais leur valeur n'est pas pertinente pour autant : elle dépend uniquement de la taille et de la forme des éléments et augmente indéfiniment lorsque l'on raffine le maillage.
- Un concepteur qui ignore l'existence de ces singularités risque donc de dimensionner une pièce par rapport à un résultat non fiable, sauf s'il prend la peine de raffiner successivement le maillage, ce qui permet de diagnostiquer le problème (vous savez, la fameuse étude de convergence que l'on fait toujours tant que l'on est élève ingénieur et que l'on a tendance à oublier, ou à négliger par la suite).
- Si l'on souhaite simuler l'état de contraintes au voisinage de la région singulière, il est nécessaire de modéliser celle-ci plus finement pour faire disparaître la singularité. Cela nécessite généralement des connaissances supplémentaires sur le produit, son environnement ou le comportement de ses matériaux dans la région concernée.
- Si l'état de contraintes ou de déformations au voisinage de la singularité ne fait pas partie des objectifs du calcul, alors celle-ci n'est pas gênante. Mieux vaut néanmoins être conscient du problème pour ne pas en tirer de fausses conclusions...

Nous réitérons ce que nous avons déjà dit : la plupart des ingénieurs pratiquant le calcul sont conscients que ces problèmes de singularités existent. Nous n'avons donc fait ici que rappeler des choses connues... et c'est très bien ainsi si c'est le cas.

Conclusion

En guise de conclusion à ce document, nous souhaitons synthétiser les problèmes qui peuvent survenir lors d'un calcul et ouvrir sur quelques perspectives.

Sur la fiabilité des résultats

La fiabilité d'un résultat dépend de celle de toute la chaîne d'approximation réalisées depuis la modélisation du phénomène physique jusqu'à l'obtention des résultats numériques fournis par le programme de calcul. Nombre de ces problèmes ont été mentionnés au cours de ce document. Rappelons les ici :

erreurs de modélisation : aussi bien au niveau du choix des équations mathématiques décrivant le phénomène, que de la représentativité des conditions aux limites choisies. Mais au-delà même, il est nécessaire de se rappeler que les modèles mathématiques ne fonctionnent bien qu'avec les plus simples des situations, ou avec des situations complexes ne dépendant que quelques facteurs dominants simples. La plupart des modèles sont des modèles linéaires, mais mêmes ceux-ci peuvent dissimuler de la complexité : le chaos linéaire existe et les simulations numériques d'un tel système peuvent conduire à des résultats qui peuvent surprendre si l'on n'en est pas averti (voir la linéarisation du pendule double, ou la suite logistique). En d'autres termes, et pour bien insister, la réalité physique que l'on se propose de modéliser, repose sur des propriétés qui ne sont pas connues exactement, dont les lois de probabilité ne sont pas forcément connues non plus, où tous les phénomènes sont non-linéaires et où ils sont tous couplés. Les mathématiques proposent des modèles simplifiés correspondant aux situations les plus simples (voire même n'ayant pas d'existence réelle), et **il est du ressort de l'ingénieur, et c'est en cela que son travail est plus compliqué que celui du mathématicien, de savoir juger de la pertinence de tel ou tel modèle retenu pour modéliser la problématique considérée**¹ ;

erreurs de discrétisation : elles sont liées aux choix des méthodes numériques (méthode des éléments finis ou autre), aux problèmes d'intégration, de représentation du domaine...

erreurs de verrouillage numérique : elles concernent des problèmes survenant lors du traitement de paramètres introduits dans le calcul tels que les pas de temps, des modes parasites, des instabilités numériques...

incertitudes des données : connaissance approximative des lois de comportement, des efforts, des liaisons... Il faut alors procéder à une approche fiabiliste ;

erreurs d'arrondis : la manière dont un ordinateur traite un nombre est soumise à des contraintes (représentation en base 2 par exemple, approximation à n décimales...). Ces erreurs, mêmes infimes, peuvent dans certains cas se cumuler pour aboutir à un résultat faux.

Lorsque cela est possible, on n'hésitera donc pas à effectuer des comparaisons avec des essais, ce que l'on nomme **recalage calcul-essais**.

Quelques perspectives

Le calcul scientifique d'une manière générale, et la méthode des éléments finis en particulier, sont utilisés de manière intensive dans tous les secteurs.

Toute amélioration de la performance des méthodes numériques est donc un enjeu majeur : rapidité, précision, fiabilité...

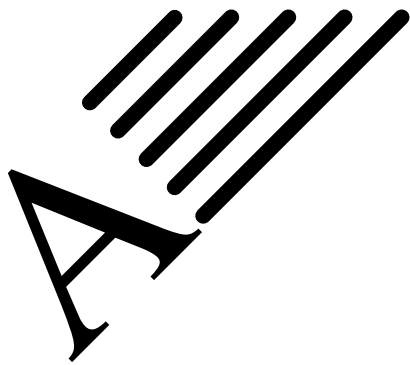
1. "The scientist describes what is ; the engineer creates what never was.", Theodore von Kármán (1881 - 1963)

On pourra citer le développement de codes de calculs parallèles, ou l'amélioration des techniques d'optimisation par les algorithmes génétiques.

Nous avons parlé des modèles multi-échelle essentiellement pour les matériaux, mais le développement de modèles pour les structures minces (plaques, coques) rentre dans cette catégorie... et si les théories de plaques sont aujourd'hui assez bien maîtrisées (d'un point de vue théorique et dans les codes), il reste des problèmes ouverts concernant les coques minces.

Les problèmes inverses constituent également un défi d'intérêt. Ils permettent par exemple de remonter aux caractéristiques d'un matériau (qui seront utilisées dans d'autres calculs), à partir d'essais sur un échantillon. C'est également souvent la seule voie d'identification des paramètres et comportement pour tout ce qui concerne la biomécanique et la modélisation du corps humain en général, car il n'est pas possible d'effectuer des mesures réelles.

Enfin, et peut-être surtout, les modèles développés aujourd'hui se veulent de plus en plus réalistes. Il devient alors indispensable de coupler des modèles numériques différents, ce qui n'est possible que si, au préalable, on a su établir des passerelles, des lieux de travail commun, entre des spécialistes de plusieurs disciplines.



Interpolation et approximation

L'**interpolation** est une opération consistant à approcher une courbe qui n'est connue que par la donnée d'un nombre fini de points (ou une fonction à partir de la donnée d'un nombre fini de valeurs).

Ainsi, l'interpolation numérique sert souvent à « faire émerger une courbe parmi des points ». Il s'agit de toutes les méthodes développées afin de mieux prendre en compte les erreurs de mesure, i.e. d'exploiter des données expérimentales pour la recherche de lois empiriques. Nous citerons par exemple la **régression linéaire** et la **méthode des moindres carrés** souvent bien maîtrisées. On demande à la solution du problème d'interpolation de **passer par les points prescrits**, voire, suivant le type d'interpolation, de vérifier des propriétés supplémentaires (de continuité, de dérivabilité, de tangence en certains points...). Toutefois, parfois on ne demande pas à ce que l'approximation passe exactement par les points prescrits. On parle alors plutôt d'approximation.

Histoire

Le jour du Nouvel An de 1801, l'astronome italien Giuseppe Piazzi a découvert l'astéroïde Cérès (il a suivi sa trajectoire jusqu'au 14 février 1801).

Durant cette année, plusieurs scientifiques ont tenté de prédire sa trajectoire sur la base des observations de Piazzi (à cette époque, la résolution des équations non linéaires de Kepler de la cinématique est un problème très difficile). La plupart des prédictions furent erronées ; et le seul calcul suffisamment précis pour permettre au baron Franz Xaver von Zach (astronome allemand) de localiser à nouveau Cérès à la fin de l'année, fut celui de Gauß, (alors âgé de 24 ans). Gauß avait déjà réalisé l'élaboration des concepts fondamentaux en 1795, lorsqu'il avait 18 ans. Mais sa méthode des moindres carrés ne fut publiée qu'en 1809, lorsqu'elle parut dans le tome 2 de ses travaux sur la Mécanique céleste *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Le mathématicien français Adrien-Marie Legendre a développé indépendamment la même méthode en 1805. Le mathématicien américain Robert Adrain a publié en 1808 une formulation de la méthode.



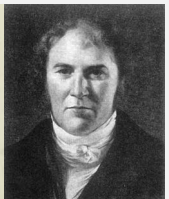
Piazzi



Gauß



Legendre



Adrain

En 1829, Gauß a pu donner les raisons de l'efficacité de cette méthode : celle-ci est optimale à l'égard de bien des critères. Cet argument est maintenant connu sous le nom de **théorème de Gauß-Markov**.



Markov

Ce théorème dit que dans un modèle linéaire dans lequel les erreurs ont une espérance nulle, sont non corrélées et dont les variances sont égales, le meilleur estimateur linéaire non biaisé des coefficients est l'estimateur des moindres carrés. Plus généralement, le meilleur estimateur linéaire non biaisé d'une combinaison linéaire des coefficients est son estimateur par les moindres carrés. *On ne suppose pas* que les erreurs possèdent une loi normale, ni qu'elles sont indépendantes (seulement non corrélées), ni qu'elles possèdent la même loi de probabilité.

L'**approximation** étant l'utilisation de méthodes permettant d'approcher une fonction mathématique par une suite de fonctions qui convergent dans un certain espace fonctionnel, on voit donc que ce qui a été fait dans la deuxième partie ressort bien de cela : on cherche une fonction généralement notée u qui n'est pas connue explicitement mais solution d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles, et l'on cherche à construire une suite de problèmes plus simples, que l'on sait résoudre à chaque étape, et telle que la suite des solutions correspondantes converge vers la solution cherchée. L'approximation peut servir aussi dans le cas où

la fonction considérée est connue : on cherche alors à la remplacer par une fonction plus simple, plus régulière ou ayant de meilleures propriétés. L'intégration numérique sera détaillée un peu plus au chapitre B. Ce sont les méthodes d'approximation numériques qui sont utilisées.

Pour en revenir à l'interpolation, la méthode des éléments finis est en elle-même une méthode d'interpolation (globale, basée sur des interpolations locales). On peut citer quelques méthodes d'interpolation telle que l'interpolation linéaire (dans laquelle deux points successifs sont reliés par un segment), l'interpolation cosinus (dans laquelle deux points successifs sont considérés comme les pics d'un cosinus. L'interpolation cubique ou spline (dans laquelle un polynôme de degré 3 passe par quatre points successifs : selon le type de continuité demandée plusieurs variantes existent) et de manière générale, l'interpolation polynomiale, est abordée ci-dessous.

Faisons d'emblée une **mise en garde** : la plus connue des interpolations polynomiale, l'interpolation lagrangienne (approximation par les polynômes de Lagrange, découverte initialement par Waring et redécouverte par Euler) peut fort bien diverger même pour des fonctions très régulières. C'est le phénomène de Runge : contrairement à l'intuition, **l'augmentation du nombre de points d'interpolation ne constitue pas nécessairement une bonne stratégie d'approximation avec certaines fonctions (même infiniment dérivables).**

Dans le cas où l'on travaille sur le corps des complexes, une méthode d'approximation d'une fonction analytique par une fonction rationnelle est l'approximant de Padé. Cela correspond à un développement limité qui approche la fonction par un polynôme. Tout comme les développements limités forment une suite appelée série entière, convergeant vers la fonction initiale, les approximants de Padé sont souvent vus comme une suite, s'exprimant sous la forme d'une fraction continue dont la limite est aussi la fonction initiale. En ce sens, ces approximants font partie de la vaste théorie des fractions continues. Les approximants offrent un développement dont le domaine de convergence est parfois plus large que celui d'une série entière. Ils permettent ainsi de prolonger des fonctions analytiques et d'étudier certains aspects de la question des séries divergentes. En théorie analytique des nombres, l'approximant permet de mettre en évidence la nature d'un nombre ou d'une fonction arithmétique comme celle de la fonction zêta de Riemann. Dans le domaine du calcul numérique, l'approximant joue un rôle, par exemple, pour évaluer le comportement d'une solution d'un système dynamique à l'aide de la théorie des perturbations. L'approximant de Padé a été utilisé pour la première fois par Euler pour démontrer l'irrationalité de e , la base du logarithme népérien. Une technique analogue a permis à Johann Heinrich Lambert de montrer celle de π .

A.1 Quelques bases polynomiales

A.1.1 Motivation

Histoire

Lorsque l'on souhaite approximer une courbe par une autre, recourir aux polynômes semble une voie naturelle.

Les séries de fonctions sont apparues à la fin du XVII^e siècle, lorsque Isaac Newton puis Brook Taylor décomposèrent des fonctions en séries (entières, donc sur \mathbb{C}) pour le calcul d'intégrales. Ce n'est qu'en 1821 que Cauchy fournira les critères précis de convergence dans ses notes de cours de Polytechnique *Analyse algébrique*, différents autres types de convergence étant introduits jusqu'en 1840.

La richesse de cette théorie vient de ce qu'elle permet d'étudier des fonctions qui ne s'expriment pas à l'aide de fonctions connues, comme le sont certaines solutions d'équations différentielles.

Le **théorème de Taylor (1715)** (théorème 66) montre qu'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approximée par une fonction polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. En présentant cette formule, Taylor propose une méthode de développement en série, mais il se préoccupe peu de la nature du reste ; il faut attendre ses successeurs pour la caractériser rigoureusement. On désigne par **théorèmes de Taylor** ou formules de Taylor plusieurs résultats et expressions pour le reste $R_n(x)$, parfois renforcé par quelques hypothèses supplémentaires : Taylor-Young, Taylor-Lagrange, Taylor-Cauchy, Taylor avec reste intégral.



Taylor

Remarque. L'usage de chacune des formules de Taylor dépend du but recherché.

La formule de Taylor-Young précise seulement le comportement d'une expression lorsque h tend vers 0 ; elle est donc purement locale au voisinage du point a considéré. À l'ordre 1 (i.e. $k = 1$) elle se réduit à la définition de la différentielle. Pour $k = 2$ elle montre que le terme en $o(\|h\|)$ est en fait en $O(\|h\|^2)$ dès que la fonction est deux fois différentiable en a .

La formule avec reste intégral est la plus précise. On l'utilisera chaque fois que l'on a besoin d'informations détaillées sur le reste, notamment sur sa dépendance par rapport aux variables ou à d'éventuels paramètres.

La majoration de Taylor-Lagrange sera utilisée pour évaluer l'accroissement entre deux points, non nécessairement proches l'un de l'autre.

Théorème 66 — Développement en série de Taylor. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $a \in I$, E un espace vectoriel normé et $f : I \rightarrow E$ une fonction dérivable en a jusqu'à l'ordre n . Alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (\text{A.1})$$

définit un reste $R_n(x)$ dont le comportement s'apparente au monôme $(x-a)^{n+1}$.

Le **théorème d'approximation de Weierstrass** en analyse réelle dit que toute fonction continue définie sur un segment peut être approchée uniformément par des fonctions polynômes. Le théorème de Stone-Weierstrass généralise ce résultat aux fonctions continues définies sur un espace compact et à valeurs réelles, en remplaçant l'algèbre des polynômes par une algèbre de fonctions qui sépare les points et contient au moins une fonction constante non nulle.

L'interpolation polynomiale consiste donc à trouver un polynôme passant par un ensemble de points donnés. Nous verrons qu'il est également possible de demander à ce que ce polynôme satisfasse à d'autres conditions.

A.1.2 Orthogonalité

Une **suite de polynômes orthogonaux** est une suite infinie de polynômes $P_0(x), P_1(x), \dots$ à coefficients réels, dans laquelle chaque $P_n(x)$ est de degré n , et telle que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux pour un produit scalaire de fonctions donné. Le produit scalaire de fonctions le plus simple est l'intégrale du produit de ces fonctions sur un intervalle borné :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (\text{A.2})$$

Plus généralement, on peut ajouter une **fonction de poids** $\varpi(x)$ dans l'intégrale. On notera bien que sur l'intervalle d'intégration $]a, b[$, la fonction poids $\varpi(x)$ doit être à valeurs finies et strictement positives, et l'intégrale du produit de la fonction poids par un polynôme doit être finie (voir espaces L^p). Par contre, les bornes a et b peuvent être infinies. Il vient alors :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\varpi(x)dx \quad (\text{A.3})$$

La norme associée est définie par $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Le produit scalaire fait de l'ensemble de toutes les fonctions de norme finie un espace de Hilbert. L'intervalle d'intégration est appelé **intervalle d'orthogonalité**.

A.1.3 Base naturelle

On rappelle que $1, X, \dots, X^n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ en tant que polynômes échelonnés.

A.1.4 Polynômes de Lagrange

Connaissant $n+1$ points $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ d'abscisses **distinctes**, le **polynôme de Lagrange** est l'unique polynôme de degré n passant tous les points. Ce polynôme est trivialement défini par :

$$L(x) = \sum_{j=0}^n y_j \left(\prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \quad (\text{A.4})$$

Si l'on note :

$$L(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x) \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_i - x_n} \quad (\text{A.6})$$

alors, on remarque que :

- l_i est de degré n pour tout i ;
- $l_i(x_j) = \delta_{ij}, 0 \leq i, j \leq n$, i.e. $l_i(x_i) = 1$ et $l_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$

On en déduit immédiatement que $\forall i, L(x_i) = y_i$ qui est bien la propriété recherchée par construction.

A.1.5 Polynômes d'Hermite

Les **polynômes d'Hermite** sont définis sous la forme dite *probabiliste* :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \quad (\text{A.7})$$

ou sous la forme dite *physique* :

$$\widehat{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (\text{A.8})$$

Les deux définitions sont liées par la propriété d'échelle suivante :

$$\widehat{H}_n(x) = 2^{n/2} H_n(x\sqrt{2}) \quad (\text{A.9})$$

Les premiers polynômes d'Hermite sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} H_0 = 1 & \widehat{H}_0 = 1 \\ H_1 = x & \widehat{H}_1 = 2x \\ H_2 = x^2 - 1 & \widehat{H}_2 = 4x^2 - 2 \\ H_3 = x^3 - 3x & \widehat{H}_3 = 8x^3 - 12x \\ H_4 = x^4 - 6x^2 + 3 & \widehat{H}_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5 = x^5 - 10x^3 + 15x & \widehat{H}_5 = 32x^5 - 160x^3 + 120x \\ H_6 = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 & \widehat{H}_6 = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 \end{array} \quad (\text{A.10})$$

H_n est un polynôme de degré n . Ces polynômes sont orthogonaux pour la mesure μ de densité :

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(x) \quad (\text{A.11})$$

avec $\varphi(x)$ la densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (moyenne nulle, écart-type égal à 1). Ils vérifient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) \varphi(x) dx = n! \delta_{nm} \quad (\text{A.12})$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker. C'est pour ces intéressantes propriétés que cette base a été choisie en mécanique stochastique... on utilise alors la jolie expression de **base de chaos polynomial**. Pour une application à la prise en compte de l'aléa dans la méthode des éléments finis, voir le chapitre 22. Ces polynômes forment une base orthogonale de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{C}, \mu)$ des fonctions boréliennes telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \varphi(x) dx < +\infty \quad (\text{A.13})$$

dans lequel le produit scalaire est donné par l'intégrale :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} \varphi(x) dx \quad (\text{A.14})$$

Des propriétés analogues sont vérifiées par les polynômes de Hermite sous leur forme physique.

A.1.6 Polynômes de Legendre

On appelle équation de Legendre l'équation :

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + n(n+1)y = 0 \quad (\text{A.15})$$

On définit le **polynôme de Legendre** P_n par :

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right) + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad P_n(1) = 1 \quad (\text{A.16})$$

La manière la plus simple de les définir est par la formule de récurrence de Bonnet : $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et :

$$\forall n > 0, \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (\text{A.17})$$

Les premiers polynômes de Legendre sont :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Le polynôme P_n est de degré n . La famille $(P_n)_{n \leq \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes à degrés étagés, elle est donc une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. On remarquera la propriété suivante :

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (\text{A.19})$$

qui donne en particulier $P_n(-1) = (-1)^n$ et $P_{2n+1}(0) = 0$. Les polynômes orthogonaux les plus simples sont les polynômes de Legendre pour lesquels l'intervalle d'orthogonalité est $[-1; 1]$ et la fonction poids est simplement la fonction constante de valeur 1 : ces polynômes sont orthogonaux par rapport au produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)dx \quad \langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n \quad (\text{A.20})$$

De plus, comme $(P_n)_{n \leq N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, on a $P_{N+1} \in (\mathbb{R}_N[X])^\perp$:

$$\forall Q \in \mathbb{R}_N[X], \quad \int_{-1}^1 P_{N+1}(x)Q(x)dx = 0 \quad (\text{A.21})$$

Le carré de la norme, dans $L^2([-1; 1])$, est :

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}. \quad (\text{A.22})$$

Ces polynômes peuvent servir à décomposer une fonction holomorphe, une fonction lipschitzienne ou à retrouver l'intégration numérique d'une fonction par la méthode de quadrature de Gauß-Legendre (voir chapitre B).

A.1.7 Polynômes de Tchebychev

Les **polynômes de Tchebychev** servent pour la convergence des interpolations de Lagrange. Ils sont également utilisés dans le calcul de filtres de Tchebychev en électronique analogique.

Les polynômes de Tchebychev constituent deux familles de polynômes (notés T_n pour la première espèce et U_n pour la seconde) définis sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par les relations trigonométriques :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \quad (\text{A.23})$$

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} \quad (\text{A.24})$$

Ces deux suites sont définies par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2}(X) = 2X P_{n+1}(X) - P_n(X) \quad (\text{A.25})$$

et les deux premiers termes :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{pour la suite } T \quad (\text{A.26})$$

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2X \quad \text{pour la suite } U \quad (\text{A.27})$$

Chacune de ces deux familles est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à un produit scalaire de fonctions assorti d'une pondération spécifique.

Propriétés des polynômes de Tchebychev de première espèce

$$\forall n > 0, \quad T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (\text{A.28})$$

Les polynômes T_n sont orthogonaux pour le produit scalaire suivant :

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \pi/2 & \text{si } n = m \neq 0. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

$$\forall n, \quad T_n(1) = 1, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x) \quad (\text{A.30})$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de première espèce sont :

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= x \\ T_2 &= 2x^2 - 1 \\ T_3 &= 4x^3 - 3x \\ T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6 &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ T_7 &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\ T_8 &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\ T_9 &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Propriétés des polynômes de Tchebychev de seconde espèce

$$\forall n \geq 0, \quad U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} \quad (\text{A.32})$$

Les polynômes U_n sont orthogonaux pour le produit scalaire suivant :

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi/2 & \text{si } n = m \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n, \quad U_n(1) = n + 1 \quad (\text{A.33})$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de deuxième espèce sont :

$$\begin{aligned} U_0 &= 1 \\ U_1 &= 2x \\ U_2 &= 4x^2 - 1 \\ U_3 &= 8x^3 - 4x \\ U_4 &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\ U_5 &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\ U_6 &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 \\ U_7 &= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x \\ U_8 &= 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1 \\ U_9 &= 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

A.1.8 Polynômes de Laguerre

Les [polynômes de Laguerre](#) apparaissent en mécanique quantique dans la partie radiale de la solution de l'équation de Schrödinger pour un atome à un électron. Ces polynômes sont les solutions de l'équation de Laguerre :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (\text{A.35})$$

qui est une équation différentielle linéaire du second ordre possédant des solutions non singulières si et seulement si n est un entier positif.

Traditionnellement notés L_0, L_1, \dots ces polynômes forment une suite de polynômes qui peut être définie par la formule de Rodrigues :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n). \quad (\text{A.36})$$

Ils sont orthogonaux les uns par rapport aux autres pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx \quad (\text{A.37})$$

Cette propriété d'orthogonalité revient à dire que si X est une variable aléatoire distribuée exponentiellement avec la fonction densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

alors $E(L_n(X), L_m(X)) = 0$ si $n \neq m$.

Les premiers polynômes de Laguerre sont :

$$\begin{aligned}
 L_0 &= 1 \\
 L_1 &= -x + 1 \\
 L_2 &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \\
 L_3 &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) \\
 L_4 &= \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24) \\
 L_5 &= \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120) \\
 L_6 &= \frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

Il existe des polynômes de Laguerre généralisés dont l'orthogonalité peut être liée à une densité de probabilité faisant intervenir la fonction Gamma. Ils apparaissent dans le traitement de l'oscillateur harmonique quantique. Ils peuvent être exprimés en fonction des polynômes d'Hermite.

A.1.9 Polynômes de Bernstein

Les **polynômes de Bernstein** permettent de donner une démonstration constructive du théorème de Stone-Weierstrass. Dans le cadre de ce cours, nous les présentons surtout car ils sont utilisés dans la formulation générale des courbes de Bézier. Pour un degré n , il y a $n + 1$ polynômes de Bernstein B_0^n, \dots, B_n^n définis, sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad \text{où les } \binom{n}{i} \text{ sont les coefficients binomiaux.} \tag{A.40}$$

Ces polynômes présentent quatre propriétés importantes :

— Partition de l'unité :

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1, \quad \forall u \in [0; 1] \tag{A.41}$$

— Positivité :

$$B_i^n(u) \geq 0, \quad \forall u \in [0; 1], \quad \forall i \in 0, \dots, n \tag{A.42}$$

— Symétrie :

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u), \quad \forall u \in [0; 1], \quad \forall i \in 0, \dots, n \tag{A.43}$$

— Formule de récurrence :

$$B_i^n(u) = \begin{cases} (1-u)B_i^{n-1}(u), & i = 0 \\ (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u), & \forall i \in 1, \dots, n-1, \\ uB_{i-1}^{n-1}(u), & i = n \end{cases} \quad \forall u \in [0; 1] \tag{A.44}$$

On notera la grande ressemblance de ces polynômes avec la loi binomiale.

A.2 Interpolation polynomiale

A.2.1 Interpolation de Lagrange

Dans la version la plus simple ([interpolation lagrangienne](#)), on impose simplement que le polynôme passe par tous les points donnés. On obtient les polynômes de Lagrange tels que présentés juste avant. Le théorème de l'unicité (voir paragraphe 12.1.1) précise qu'il n'existe qu'un seul polynôme de degré n au plus défini par un ensemble de $n + 1$ points.

L'[erreur d'interpolation](#) lors de l'approximation d'une fonction f (donnée par les points $(x_i, y_i = f(x_i))$) par un polynôme de Lagrange p_n est donnée par une formule de type Taylor-Young : Si f est $n + 1$ fois continûment différentiable sur $I = [\min(x_0, \dots, x_n), \max(x_0, \dots, x_n)]$, alors :

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \text{avec} \quad \xi \in I \quad (\text{A.45})$$

Dans le cas particulier où $x_i = x_0 + ih$ (points uniformément répartis), il se produit en général une [aggravation catastrophique de l'erreur d'interpolation](#), connue sous le nom de [phénomène de Runge](#) lorsque l'on augmente le nombre de points pour un intervalle $[x_0, x_n]$, donné (on a alors $\xi \in]-1, 1[$).

Pour limiter le [phénomène de Runge](#), i.e. pour minimiser l'oscillation des polynômes interpolateurs, on peut utiliser les abscisses de Tchebychev au lieu de points équirépartis pour interpoler. Dans ce cas, on peut montrer que l'erreur d'interpolation décroît lorsque n augmente. On peut aussi préférer utiliser des splines pour approximer la fonction f (ce sont des polynômes par morceaux définis plus bas). Dans ce cas, pour améliorer l'approximation, on augmente le nombre de morceaux et non le degré des polynômes.

A.2.2 Interpolation par Spline

Une [spline](#) est une fonction définie par morceaux par des polynômes. Comme mentionné au dessus, la méthode des splines est souvent préférée à l'interpolation polynomiale, car on obtient des résultats similaires en se servant de polynômes ayant des degrés inférieurs, tout en évitant le phénomène de Runge. De plus, leur simplicité d'implémentation les rend très populaires et elles sont fréquemment utilisées dans les logiciels de dessin.

Une courbe spline est une fonction polynomiale par morceaux définie sur un intervalle $[a; b]$ divisé en sous intervalles $[t_{i-1}; t_i]$ tels que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$. On la note $S : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Sur chaque intervalle $[t_{i-1}; t_i]$ on définit un polynôme $P_i : [t_{i-1}; t_i] \rightarrow \mathbb{R}$. Cela entraîne pour une spline à k intervalles : $S(t) = P_1(t), t_0 \leq t < t_1, S(t) = P_2(t), t_1 \leq t < t_2, \dots, S(t) = P_k(t), t_{k-1} \leq t \leq t_k$.

Le [degré de la spline](#) est défini comme étant celui du polynôme $P_i(t)$ de plus haut degré. Si tous les polynômes ont le même degré, on dit que la spline est uniforme. Dans le cas contraire, elle est non uniforme.

Tout polynôme étant C^∞ , la [continuité d'une spline](#) dépend de la continuité au niveau de la jointure des courbes polynômes. Si $\forall i$ tel que $1 \leq i \leq k$ et $\forall j$ tel que $0 \leq j \leq n$ l'égalité suivante est vérifiée :

$$P_i^{(j)}(t_i) = P_{i+1}^{(j)}(t_i) \quad (\text{A.46})$$

alors la spline est C^n .

A.2.3 Interpolation d'Hermite

L'[interpolation d'Hermite](#) consiste à chercher un polynôme qui non seulement prend les valeurs fixées en les abscisses données, mais dont également la dérivée, donc la pente de la courbe, prend une valeur imposée en chacun de ces points. Naturellement, il faut pour cela un polynôme de degré supérieur au polynôme de Lagrange.

On peut aussi imposer encore la valeur des dérivées secondes, troisièmes, etc. en chaque point. La démarche de l'interpolation newtonienne utilisant les différences divisées est particulièrement adaptée pour construire ces polynômes.

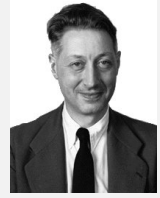
A.3 Méthodes d'approximation

A.3.1 Courbe de Bézier

Histoire

Pierre Bézier (ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers en 1930 et de l'École Supérieure d'Électricité en 1931, docteur en mathématiques de l'université de Paris en 1977) est connu pour son invention des courbes et surfaces de Bézier, couramment utilisées en informatique.

Entré chez Renault en 1933, il y fera toute sa carrière jusqu'en 1975 au poste de directeur des méthodes mécaniques. Il y conçoit, en 1945, des machines transferts pour la ligne de fabrication des Renault 4CV, et, en 1958, l'une des premières machines à commande numérique d'Europe, une fraiseuse servant aux maquettes. Sa préoccupation était de créer un moyen simple et puissant pour modéliser des formes et faciliter la programmation des machines à commande numérique. Le problème auquel il s'attaque est celui de la modélisation des surfaces en trois dimensions, les commandes numériques se contentant jusqu'alors de courbes en deux dimensions. La solution qu'il cherche est celle d'une interface intuitive accessible à tout utilisateur. Il décide de considérer classiquement les surfaces comme une transformation de courbes. Son exigence de s'adapter au dessinateur et non de contraindre le dessinateur à devenir calculateur, l'amène à une inversion géniale, déduire le calcul à partir du dessin et non le dessin à partir du calcul. Il invente alors la poignée de contrôle, curseur de déplacement des courbes d'un dessin informatisé transmettant automatiquement les variations de coordonnées au processeur. Ces poignées de contrôle sont toujours utilisées aujourd'hui.



Bézier

Les courbes de Bézier sont des courbes polynomiales paramétriques. Elles ont de nombreuses applications dans la synthèse d'images et le rendu de polices de caractères (Pierre Bézier a travaillé sur les deux sujets). Ses recherches aboutirent à un logiciel, Unisurf, breveté en 1966. Il est à la base de tous les logiciels créés par la suite. Les concepts de CAO et de CFAO venaient de prendre forme. Ultérieurement, l'un des développeurs d'Apple, John Warnock, réutilise les travaux de Pierre Bézier pour élaborer un nouveau langage de dessin de polices : Postscript. Il crée ensuite en 1982, avec Charles M. Geschke, la société Adobe pour lancer un logiciel de dessin dérivé de ces résultats : Illustrator.

Notons que les splines existaient avant Bézier, mais leur défaut était de changer d'aspect lors d'une rotation de repère, ce qui les rendait inutilisables en CAO. Bézier partit d'une approche géométrique fondée sur la linéarité de l'espace euclidien et la théorie, déjà existante, du barycentre : si la définition est purement géométrique, aucun repère n'intervient puisque la construction en est indépendante. Les splines conformes aux principes de Bézier seront par la suite nommées B-splines.

Pour $n + 1$ points de contrôle (P_0, \dots, P_n) on définit une courbe de Bézier par l'ensemble des points :

$$b(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot P_i \quad \text{avec } t \in [0; 1] \quad (\text{A.47})$$

où les B_i^n sont les polynômes de Bernstein. La suite des points P_0, \dots, P_n forme le polygone de contrôle de Bézier.

Chaque point de la courbe peut être vu alors comme un barycentre des $n + 1$ points de contrôle pondérés d'un poids égal au polynôme de Bernstein. Les principales propriétés des courbes de Bézier sont les suivantes :

- la courbe est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle ;
- la courbe commence par le point P_0 et se termine par le point P_n , mais ne passe pas *a priori* par les autres points de contrôle ;
- $\overrightarrow{P_0 P_1}$ est le vecteur tangent à la courbe en P_0 et $\overrightarrow{P_{n-1} P_n}$ au point P_n ;
- une courbe de Bézier est C^∞ ;
- la courbe de Bézier est un segment si et seulement si les points de contrôle sont alignés ;
- chaque restriction d'une courbe de Bézier est aussi une courbe de Bézier ;
- si un arc de parabole et un segment de droite peuvent être décrits, ni un arc de cercle, ni un arc d'ellipse ou d'hyperbole ne peut être décrit par une courbe de Bézier. Pour une description exacte, il est nécessaire d'utiliser une courbe de Bézier rationnelle (Les courbes de Bézier rationnelles sont des courbes de Bézier définies dans l'espace homogène (avec une coordonnée supplémentaire appelée poids). L'espace homogène est intimement lié à la projection centrale et donc aux coniques. C'est son utilisation qui permet de

convertir une parabole (représentable exactement par une courbe de Bézier) en arcs d'ellipses ou en sections d'hyperboles) ;

- le contrôle de la courbe est global : modifier un point de contrôle modifie toute la courbe, et non pas un voisinage du point de contrôle ;
- pour effectuer une transformation affine de la courbe, il suffit d'effectuer la transformation sur tous les points de contrôle.

A.3.2 B-Spline

Une B-spline est une combinaison linéaire de splines positives à support compact minimal. Les B-splines sont la généralisation des courbes de Bézier, elles peuvent être à leur tour généralisées par les NURBS. Étant donné $m + 1$ points t_i dans $[0; 1]$ tels que $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1$, une courbe spline de degré n est une courbe paramétrique $S : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$, composée de fonctions B-splines de degré n :

$$S(t) = \sum_{i=0}^{m-n-1} b_{i,n}(t) \cdot P_i, \quad t \in [0; 1] \quad (\text{A.48})$$

où les P_i forment un polygone appelé **polygone de contrôle**. Le nombre de points composant ce polygone est égal à $m - n$. Les $m - n$ fonctions B-splines de degré n sont définies par récurrence sur le degré inférieur :

$$b_{j,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

$$b_{j,n}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+n} - t_j} b_{j,n-1}(t) + \frac{t_{j+n+1} - t}{t_{j+n+1} - t_{j+1}} b_{j+1,n-1}(t) \quad (\text{A.50})$$

Quand les points sont équidistants, les B-splines sont dites uniformes. C'est le cas des courbes de Bézier qui sont des B-splines uniformes, dont les points t_i (pour i entre 0 et m) forment une suite arithmétique de 0 à 1 avec un pas constant $h = 1/m$, et où le degré n de la courbe de Bézier ne peut être supérieur à m .

Par extension, lorsque deux points successifs t_j et t_{j+1} sont confondus, on pose $0/0 = 0$: cela a pour effet de définir une discontinuité de la tangente, pour le point de la courbe paramétré par une valeur de t , donc d'y créer un sommet d'angle non plat. Toutefois il est souvent plus simple de définir ce B-spline étendu comme l'union de deux B-splines définis avec des points distincts, ces splines étant simplement joints par ce sommet commun, sans introduire de difficulté dans l'évaluation paramétrique ci-dessus des B-splines pour certaines valeurs du paramètre t . Mais cela permet de considérer alors tout polygone simple comme une B-spline étendue.

La forme des fonctions de base est déterminée par la position des points. La courbe est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle. Une B-spline de degré n , $b_{i,n}(t)$ est non nulle dans l'intervalle $[t_i ; t_{i+n+1}]$:

$$b_{i,n}(t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } t_i \leq t < t_{i+n+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

En d'autres termes, **déplacer un point de contrôle ne modifie que localement l'allure de la courbe**. Par contre, les B-splines ne permettent pas de décrire un arc de courbe conique.

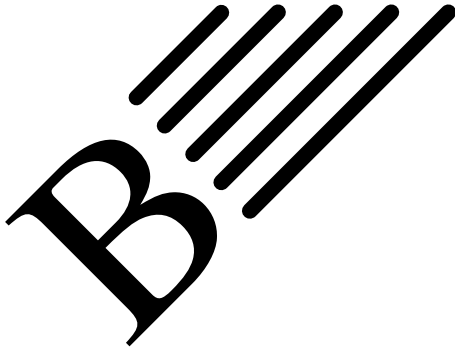
A.3.3 B-splines rationnelles non uniformes

Ces objets couramment nommés **NURBS**, pour Non-Uniform Rational Basis Splines, correspondent à une généralisation des B-splines car ces fonctions sont définies avec des points en coordonnées homogènes. Les coordonnées homogènes, introduites par Möbius, rendent les calculs possibles dans l'espace projectif comme les coordonnées cartésiennes le font dans l'espace euclidien. Ces coordonnées homogènes sont largement utilisées en infographie ou en CAO car elles permettent la représentation de scènes en trois dimensions. Les NURBS parviennent à ajuster des courbes qui ne peuvent pas être représentées par des B-splines uniformes. Ils permettent même une représentation exacte de la totalité des arcs coniques ainsi que la totalité des courbes et surfaces polynomiales, avec uniquement des paramètres entiers ou rationnels si les NURBS passent par un nombre limité mais suffisant de points définis dans un maillage discret de l'espace.

Les fonctions NURBS de degré d sont définies par la formule doublement récursive de Cox-de Boor (formulation trouvée de manière indépendante par M.G. Cox en 1971 et C. de Boor en 1972) :

$$\begin{cases} b_{j,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ b_{j,d}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+d} - t_j} b_{j,d-1}(t) + \frac{t_{j+d+1} - t}{t_{j+d+1} - t_{j+1}} b_{j+1,d-1}(t) \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

où les t_j sont des points. Lorsque plusieurs points t_j sont confondus, on peut encore poser $0/0 = 0$ comme pour les B-splines.



Intégration numérique

La méthode des éléments finis conduit à la discrétisation d'une formulation faible où la construction des matrices constitutives du système à résoudre nécessite le calcul d'intégrales. Dans certains cas particuliers, ou en utilisant des codes de calcul formel, ces intégrations peuvent être réalisées de manière exacte. Cependant, dans la plupart des cas et dans la plupart des codes de calcul, ces intégrations sont calculées numériquement. On parle alors de méthodes d'intégration numérique et de formules de quadrature.

B.1 Méthodes de Newton-Cotes

Soit à calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (\text{B.1})$$

L'idée consiste à construire un polynôme pour interpoler $f(x)$ et à intégrer ce polynôme. Plusieurs types de polynômes peuvent être utilisés pour cette interpolation. Les principales méthodes d'interpolations ont été détaillées au chapitre A.

Méthode des rectangles

La [méthode des rectangles](#) consiste à interpoler $f(x)$ par un polynôme de degré 0, i.e. par la constante valant, selon les variantes de la méthode, soit $f(a)$, soit $f((a+b)/2)$. Comme cette approximation est très brutale, il est possible de subdiviser l'intervalle $[a; b]$ en plusieurs intervalles et d'appliquer la méthode sur chacun des intervalles, i.e. d'approcher f par une fonction en escalier. Si l'on subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles égaux, il vient alors :

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad (\text{B.2})$$

où $h = (b-a)/n$ est la longueur de chaque sous intervalle et $x_i = a + ih$ le point courant.

Méthode des trapèzes

La [méthode des trapèzes](#) consiste à interpoler $f(x)$ par un polynôme de degré 1, i.e. par la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. On obtient alors :

$$I \approx h \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (\text{B.3})$$

où $h = b - a$ est la longueur de l'intervalle, et l'erreur commise vaut $-\frac{h^3}{12} f''(w)$ pour un certain $w \in [a; b]$ (sous réserve que f soit 2 fois dérivable). L'erreur étant proportionnelle à f'' , la méthode est dite d'ordre 2, ce qui signifie qu'elle est exacte (erreur nulle) pour tout polynôme de degré inférieur ou égale à 1.

Comme cette approximation peut sembler un peu brutale, il est possible de subdiviser l'intervalle $[a; b]$ en plusieurs intervalles et d'appliquer cette formule sur chacun des intervalles, i.e. d'approcher f par une fonction affine continue par morceaux. Si l'on subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles égaux, il vient alors :

$$I \approx \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^n f(x_i) \quad (\text{B.4})$$

où $h = (b-a)/n$ est la longueur de chaque sous intervalle, $x_i = a + ih$ le point courant et l'erreur commise vaut $-\frac{h^3}{12n^2} f''(w)$ pour un certain $w \in [a; b]$.

Remarques.

- la [méthode de Romberg](#) permet d'accélérer la convergence de la méthode des trapèzes ;
- la méthode des trapèzes est une méthode de Newton-Cotes pour $n = 1$.

Méthode de Simpson

La [méthode de Simpson](#) consiste à interpoler $f(x)$ par un polynôme de degré 2, i.e. par la parabole passant par les points extrêmes $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et le point milieu $(c, f(c))$ avec $c = (a+b)/2$. On obtient alors :

$$I \approx \frac{h}{6} (f(a) + f(b) + f(c)) \quad (\text{B.5})$$

où $h = b-a$ est la longueur de l'intervalle, et l'erreur commise vaut $-\frac{h^5}{2^5 \cdot 90} f^{(4)}(w)$ pour un certain $w \in [a; b]$ (sous réserve que f soit quatre fois dérivable). L'erreur étant proportionnelle à $f^{(4)}$, la méthode est dite d'ordre 4, ce qui signifie qu'elle est exacte (erreur nulle) pour tout polynôme de degré inférieur ou égale à 3.

Comme dans le cas précédent, il est possible de subdiviser l'intervalle $[a; b]$ en plusieurs intervalles et d'appliquer cette formule sur chacun des intervalles. Si l'on subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles égaux, avec n pair, il vient alors :

$$I \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) \right) \quad (\text{B.6})$$

où $h = (b-a)/n$ est la longueur de chaque sous intervalle, $x_i = a + ih$ le point courant et l'erreur commise vaut $-\frac{nh^5}{180} f^{(4)}(w)$ pour un certain $w \in [a; b]$.

Remarques.

- la parabole interpolant f est trouvée en utilisant l'interpolation de Lagrange ;
- la méthode de Simpson est un cas particulier de celle de Newton-Cotes pour $n = 2$.

Méthode de Newton-Cotes

Les [formules de Newton-Cotes](#) se proposent également d'approximer l'intégrale I et découpant l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles identiques. On posera donc encore une fois $h = (b-a)/n$ la longueur de chaque sous intervalle, et $x_i = a + ih$ le point courant. La formule est :

$$I \approx \sum_{i=0}^n \varpi_i f(x_i) \quad (\text{B.7})$$

où les ϖ_i sont appelés [poids](#) ou [coefficients de la quadrature](#) et sont construits à partir des polynômes de Lagrange. La méthode de Newton-Cotes intègre exactement un polynôme de degré $n-1$ avec n points.

Remarque. Il est possible de construire une formule de Newton-Cotes de degré quelconque. Toutefois, une telle formule n'est pas inconditionnellement stable. C'est pourquoi, on se cantonnera aux plus bas degrés : $n = 0$ méthode du point médian (i.e. méthode des rectangle où la valeur est évaluée en milieu d'intervalle) ; $n = 1$ méthode des trapèzes ; $n = 2$ méthode de Simpson dite 1/3, i.e. celle présentée avant ; $n = 3$ méthode de Simpson 3/8 (il suffit de faire le calcul) ; $n = 4$ méthode de Boole. Lorsque le degré augmente, des instabilités apparaissent, dues au phénomène de Runge. En effet, avec certaines fonctions (même infiniment dérivables), l'augmentation du nombre n de points d'interpolation ne constitue pas nécessairement une bonne stratégie d'approximation. Carle Runge a montré qu'il existe des configurations où l'écart maximal entre la fonction et son interpolation augmente indéfiniment avec n . Pour remédier à cela on peut utiliser les abscisses de Tchebychev au lieu de points équirépartis pour interpoler, ou plus simplement utiliser des splines (i.e. des polynômes par morceaux), et donc augmenter le nombre de morceaux et non le degré des polynômes.

B.2 Méthodes de quadrature de Gauß

Le principe de la méthode reste le même que pour la méthode de Newton-Cotes, mais on va essayer d'améliorer un peu encore la qualité du résultat. Pour cela, on souhaite que :

$$I = \int_a^b \varpi(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \varpi_i f(x_i) \quad (\text{B.8})$$

où $\varpi(x) : (a ; b) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de pondération, qui peut assurer l'intégrabilité de f . Les ϖ_i sont appelés les poids ou coefficients de quadrature. Les x_i sont réels, distincts, uniques et sont les racines de polynômes orthogonaux (et non plus uniquement de Lagrange) pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\varpi(x)dx \quad (\text{B.9})$$

Ils sont appelés points ou nœuds de Gauß. Les poids et les nœuds sont choisis de façon à obtenir des degrés d'exactitude les plus grands possibles. Cette fois-ci $(a ; b)$ peut être n'importe quel type d'intervalle (fermé, ouvert, fini ou non).

Intégration sur un intervalle type

Intervalle $(a ; b)$	Fonction de pondération $\varpi(x)$	Famille de polynômes orthogonaux
$[-1 ; 1]$	1	Legendre
$] -1 ; 1 [$	$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$	Jacobi
$] -1 ; 1 [$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Tchebychev (premier type)
$] -1 ; 1 [$	$\sqrt{1-x^2}$	Tchebychev (second type)
\mathbb{R}^+	e^{-x}	Laguerre
\mathbb{R}	e^{-x^2}	Hermite

Tableau B.1: Polynômes et intégration

On rappelle que les nœuds sont déterminés comme les n racines du n ème polynôme orthogonal associé à la formule de quadrature. Les méthodes de quadrature de Gauß intègrent exactement un polynôme de degré $2n - 1$ avec n points.

Changement d'intervalle d'intégration

Si on intègre sur $(a ; b)$ au lieu de $(-1 ; 1)$, alors on fait un changement de variable. Finalement, on obtient l'approximation :

$$\frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \varpi_i f \left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2} \right) \quad (\text{B.10})$$

Remarques.