

Méthode des éléments finis : élasticité plane

Yves Debard

Université du Mans
Master Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

24 mars 2006 – 29 mars 2011

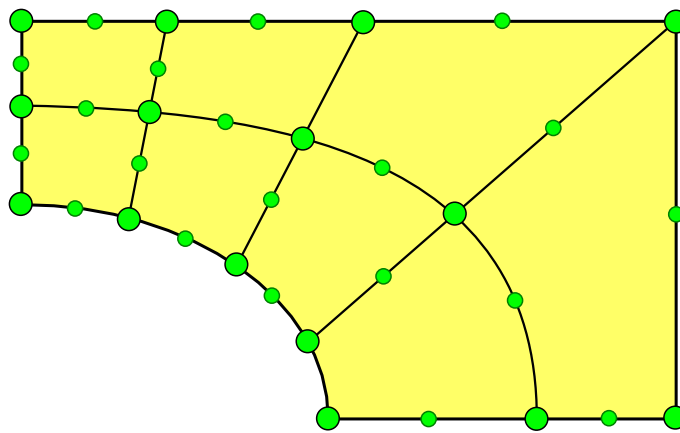


Table des matières

1	Rappels	1
1.1	Hypothèse contraintes planes	1
1.2	Hypothèse déformations planes	3
2	Forme différentielle	4
3	Forme intégrale faible	5
4	Forme discrétisée : éléments finis	7
4.1	Discrétisation du domaine : maillage	7
4.2	Représentation élémentaire (ou locale) du champ de déplacements	8
4.3	Représentation globale du champ de déplacements	8
4.4	Discrétisation de la forme intégrale faible	9
4.5	Problèmes particuliers	10
4.5.1	Problème stationnaire	10
4.5.2	Modes propres de vibration	11
4.6	Mise en œuvre pratique : calculs élémentaires et assemblage	11
5	Problème élastostatique : énergie potentielle et méthode de Ritz	12
5.1	Calcul des variations	12
5.2	Énergie potentielle	13
5.3	Méthode de Ritz et éléments finis	14
6	Calculs élémentaires : éléments isoparamétriques	15
6.1	Élément isoparamétrique : définition	15
6.1.1	Représentation de la géométrie	15
6.1.2	Maillage conforme	16
6.1.3	Représentation du champ de déplacements	16
6.2	Bibliothèque d'éléments	17
6.2.1	Triangle à 3 nœuds	17
6.2.2	Triangle à 6 nœuds	18
6.2.3	Quadrangle à 4 nœuds	19
6.2.4	Quadrangle à 8 ou 9 nœuds	20
6.3	Calcul des matrices et des vecteurs élémentaires	21
6.3.1	Transformation des dérivées	21
6.3.2	Transformation des intégrales	21
6.3.3	Évaluation numérique des intégrales	22
6.3.4	Calcul des matrices	23
6.3.5	Calcul des vecteurs	23
6.4	Qualité du jacobien.	25
A	Programmes Maple	27
A.1	tri3_int : triangle à 3 nœuds	27
A.2	tri6_int : triangle à 6 nœuds	27
A.3	quad4_int : quadrangle à 4 nœuds	28
A.4	quad8_int : quadrangle à 8 nœuds	28
A.5	quad9_int : quadrangle à 9 nœuds	29
A.6	Qualité du jacobien : quadrangle à 4 nœuds	29
A.7	Qualité du jacobien : triangle à 6 nœuds	30
	Références	32

Introduction

Dans ce texte nous présentons la résolution d'un problème d'élasticité plane par la méthode des éléments finis.

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Les déplacements et les déformations sont petits.
- Le comportement du matériau est élastique et linéaire.
- Le matériau est homogène et isotrope. E , ν , α et ρ sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation et la masse volumique du matériau.

Le repère $\{O; x, y, z\}$ est un repère orthonormé. \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires des axes.

1 Rappels

1.1 Hypothèse contraintes planes

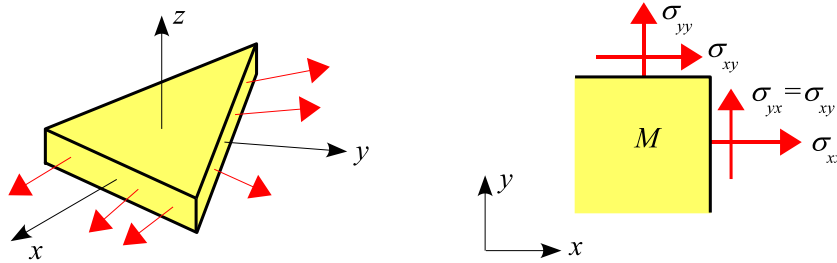


Figure 1 – *Plaque sollicitée dans son plan*

Un solide (figure 1) est en état de contraintes planes par rapport au plan $\{O; x, y\}$, s'il existe un repère $\{O; x, y, z\}$, tel qu'en tout point M du solide, le tenseur des contraintes soit de la forme :

$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{matrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1.1)$$

où σ_{xx} , σ_{yy} et $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ sont indépendants de z . L'axe \vec{k} est donc, pour tous les points du solide, direction principale et la contrainte principale associée est nulle.

Dans la formule (1.1), $\vec{T}(M, \vec{n})$ est le vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M .

Le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha \Delta T \quad (1.2)$$

où ΔT est la variation de température.

La loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \quad (1.3)$$

où :

– $\{\varepsilon\}$ est le vecteur déformation :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

La figure (2) montre la signification des composantes ε_{xx} , ε_{yy} et γ_{xy} du tenseur des déformations.

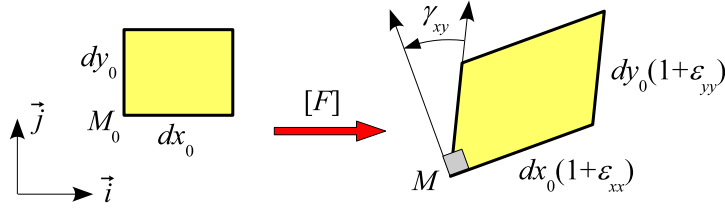


Figure 2 – Transformation d'un rectangle infiniment petit

– $\{\sigma\}$ est le vecteur contrainte :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

– $[D]$ est la matrice des coefficients élastiques :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

– $\{\varepsilon_{th}\}$ représente les déformations d'origine thermique :

$$\{\varepsilon_{th}\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements suivant x et y :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

1.2 Hypothèse déformations planes

Un solide est en état de déformations planes par rapport au plan $\{O; x, y\}$, s'il existe un repère $\{O; x, y, z\}$, lié au solide, tel qu'en tout point du solide, le champ de déplacements soit de la forme :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Le tenseur des contraintes est alors de la forme :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E \alpha \Delta T \quad (1.11)$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \quad (1.12)$$

où :

– $\{\varepsilon\}$ est le vecteur déformation :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

– $\{\sigma\}$ est le vecteur contrainte :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

– $[D]$ est la matrice des coefficients élastiques :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.15)$$

λ et μ sont les coefficients de **Lamé** du matériau.

– $\{\varepsilon_{th}\}$ représente les déformations d'origine thermique :

$$\{\varepsilon_{th}\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

2 Forme différentielle

Le solide V limité par la frontière S est soumis à :

- un champ de forces volumiques : $\{f_V\} = \begin{Bmatrix} f_{Vx} \\ f_{Vy} \end{Bmatrix}$
- des déplacements imposés sur la frontière S_u : $\{u_P\} = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \end{Bmatrix}$
- des forces surfaciques sur la frontière : $S_\sigma = S - S_u$: $\{f_\sigma\} = \begin{Bmatrix} f_{\sigma x} \\ f_{\sigma y} \end{Bmatrix}$

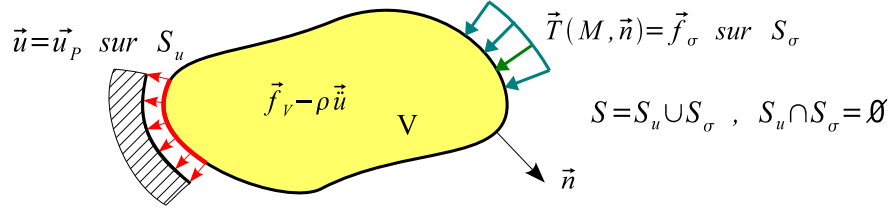


Figure 3 – Charges et conditions aux limites

Résoudre un problème d'élasticité plane consiste à chercher un champ de déplacements :

$$\{u(x, y; t)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} \quad (2.1a)$$

tel que :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_{Vx} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_{Vy} \end{cases} \quad (2.1b)$$

en tout point du solide avec :

- les relations cinématiques :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.1c)$$

- la loi de comportement (ou loi constitutive) :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \quad (2.1d)$$

- les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \end{Bmatrix} \quad \text{sur } S_u \quad , \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\sigma x} \\ f_{\sigma y} \end{Bmatrix} \quad \text{sur } S_\sigma \quad (2.1e)$$

$S = S_u \cup S_\sigma$, $S_u \cap S_\sigma = \emptyset$

où S est la surface du solide et $\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$ la normale unitaire à S dirigée vers l'extérieur de V .

Remarque : en pratique, il y a une partition de la surface S pour chaque composante du déplacement.

– les conditions initiales à l'instant $t = t_0$:

$$\begin{cases} u(x, y; t_0) \\ v(x, y; t_0) \end{cases} = \begin{cases} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{u}(x, y; t_0) \\ \dot{v}(x, y; t_0) \end{cases} = \begin{cases} \dot{u}_0(x, y) \\ \dot{v}_0(x, y) \end{cases} \quad (2.1f)$$

Le vecteur $\{r\} = \begin{cases} r_x \\ r_y \end{cases}$ dont les composantes sont :

$$\begin{cases} r_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - f_{Vx} \\ r_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - f_{Vy} \end{cases} \quad (2.2)$$

est le **résidu** de l'équation (2.1). Il est nul si le champ de déplacements $\{u(x, y; t)\} = \begin{cases} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{cases}$ est solution de cette équation.

3 Forme intégrale faible

Pour résoudre l'équation (2.1) par la méthode des éléments finis, nous utilisons la **méthode des résidus pondérés**. Multiplions le résidu

$$\{r\} = \begin{cases} r_x \\ r_y \end{cases} \quad (3.1)$$

par un champ de déplacements arbitraire

$$\{u^*\} = \begin{cases} u^* \\ v^* \end{cases} \quad (3.2)$$

puis intégrons sur le domaine V :

$$\mathcal{W}(u, u^*) = \int_V \{u^*\}^T \{r\} dV = \int_V (u^* r_x + v^* r_y) dV = 0 \quad \forall \{u^*\} \quad (3.3)$$

Intégrons par parties la quantité

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) u^* dV$$

puis utilisons le théorème de la divergence (ou théorème d'Ostrogradski). Il vient :

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) u^* dV \\ &= \int_V \left(\frac{\partial(u^* \sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u^* \sigma_{xy})}{\partial y} \right) dV - \int_V \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) dV \\ &= \int_S u^* (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) dS - \int_V \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) dV \end{aligned} \quad (3.4)$$

Imposons la condition $u^* = 0$ sur S_u . La première intégrale se réduit à :

$$\int_{S_\sigma} u^* f_{\sigma x} dS \quad (3.5)$$

De même :

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) v^* dV = \int_{S_\sigma} v^* f_{\sigma y} dS - \int_V \left(\sigma_{xy} \frac{\partial v^*}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) dV \quad (3.6)$$

En portant les expressions (3.4), (3.5) et (3.6) dans l'équation (3.3), vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u, u^*) = & \int_V \rho \{u^*\}^T \{\ddot{u}\} dV + \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \\ & - \int_V \{u^*\}^T \{f_V\} dV - \int_{S_\sigma} \{u^*\}^T \{f_\sigma\} dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

où l'on a posé :

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v^*}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x}, \quad \{\ddot{u}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (3.8)$$

$\{\varepsilon^*\}$ est le champ de déformations virtuelles induit par le champ de déplacements virtuels $\{u^*\}$.

La forme intégrale faible d'un problème d'élasticité s'écrit finalement :

Trouver le champ de déplacements

$$\{u(x, y; t)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} \quad (3.9a)$$

tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u, u^*) = & \int_V \rho \{u^*\}^T \{\ddot{u}\} dV + \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \\ & - \int_V \{u^*\}^T \{f_V\} dV - \int_{S_\sigma} \{u^*\}^T \{f_\sigma\} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.9b)$$

$\forall \{u^*\} \text{ tel que } \{u^*\} = \{0\} \text{ sur } S_u$

où :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9c)$$

avec :

– les relations cinématiques :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.9d)$$

– la loi de comportement (ou loi constitutive) :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}) \quad (3.9e)$$

– les conditions aux limites :

$$\{u\} = \{u_P\} \quad \text{sur } S_u \quad (3.9f)$$

– les conditions initiales :

$$\{u(x, y; t_0)\} = \{u_0(x, y)\}, \quad \{\dot{u}(x, y; t_0)\} = \{\dot{u}_0(x, y)\}, \quad \{\dot{u}\} = \frac{\partial}{\partial t} \{u\} \quad (3.9g)$$

Remarques :

- Les fonctions $\{u\}$ et $\{u^*\}$ doivent être suffisamment régulières pour que les expressions ci-dessus aient un sens.
- La fonction $\{u^*\}$ est appelée **champ de déplacements virtuels**.
- Le champ de déplacements $\{u\}$ est dit **cinématiquement admissible** (CA).
- La formulation intégrale (3.9) est l'expression du principe des travaux virtuels.
- Dans l'équation (3.3) la fonction $\{u\}$ doit être dérivable deux fois et une fois dans l'équation (3.9). Ces équations sont dites respectivement **forme intégrale forte** et **forme intégrale faible** de l'équation différentielle (2.1).
- Sous certaines conditions de régularité, les formulations (2.1) et (3.9) sont équivalentes.

4 Forme discrétisée : éléments finis

La solution analytique de l'équation (3.9) est en général inaccessible. On est donc conduit à chercher une solution approchée par une méthode numérique : la méthode des éléments finis. Cette méthode est un cas particulier de la **méthode de Galerkin** : le champ de déplacements cherché $\{u\}$ et les fonctions test $\{u^*\}$ appartiennent au même espace de dimension finie.

4.1 Discrétisation du domaine : maillage

Le domaine V est décomposé en sous-domaines V^e de forme géométrique simple (les **éléments**) reliés entre eux en des points appelés **nœuds** (figure 4). Cette opération s'appelle **maillage**.

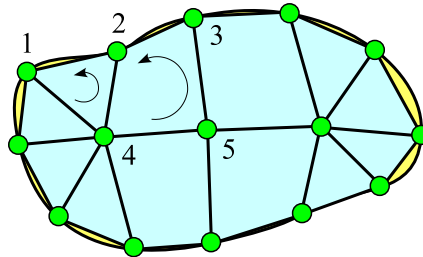


Figure 4 – *Domaine plan discrétisé en 12 éléments (8 triangles, 4 quadrangles) reliés entre eux par 15 nœuds*

Le maillage est défini par deux tables :

- La **table des nœuds** contient les coordonnées des nœuds.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	...

- La **table des éléments** contient, pour chaque élément, le type (triangle à trois nœuds, quadrangle à quatre nœuds, ...) et les numéros des nœuds dans le sens trigonométrique.

TRI3	QUAD4	...
1	4	...
4	5	...
2	3	...
—	2	...

4.2 Représentation élémentaire (ou locale) du champ de déplacements

Le champ déplacements dans chaque élément est défini en fonction des déplacements des nœuds de l'élément : l'**approximation est dite nodale**. Dans l'élément (e) (figure 5) :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^e(x, y) & 0 & \dots & N_{n^e}^e(x, y) & 0 \\ 0 & N_1^e(x, y) & \dots & 0 & N_{n^e}^e(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e(t) \\ v_1^e(t) \\ \vdots \\ u_{n^e}^e(t) \\ v_{n^e}^e(t) \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{u(x, y; t)\} = \{N^e(x, y)\}^T \{u^e(t)\} \quad (4.2)$$

où

- n^e est le nombre de nœuds de l'élément.
- les fonctions $N_i^e(x, y)$ sont les **fonctions d'interpolation élémentaires**.
- la matrice $[N^e(x, y)]$ est la matrice d'interpolation élémentaire.
- le vecteur $\{u^e(t)\}$ regroupe les composantes des déplacements des nœuds de l'élément (e).

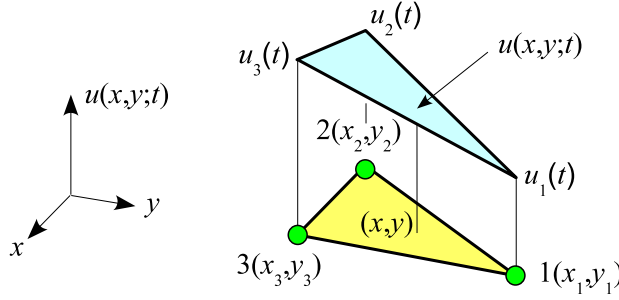


Figure 5 – Champ de déplacements dans un élément à trois nœuds

4.3 Représentation globale du champ de déplacements

Le champ de déplacements a pour expression sur l'ensemble du domaine V :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & \dots & N_n(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & \dots & 0 & N_n(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \\ v_n(t) \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{u(x, y; t)\} = [N(x, y)] \{U(t)\} \quad (4.4)$$

où

- n est le nombre de nœuds du maillage.
- les fonctions $N_i(x, y)$ sont les **fonctions d'interpolation** (ou **fonctions de forme**).
- $[N(x, y)]$ est la **matrice d'interpolation**.
- $\{U(t)\}$ est le **vecteur des déplacements nodaux**.

4.4 Discrétisation de la forme intégrale faible

De l'expression du champ de déplacements sur le domaine :

$$\{u(x, y, t)\} = [N(x, y)] \{U(t)\} \quad (4.5)$$

on déduit :

$$\{\ddot{u}\} = [N] \{\ddot{U}\} \quad (4.6a)$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\} \quad \text{avec} \quad [B] = [B_1 \quad \dots \quad B_i \quad \dots \quad B_n] \quad , \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.6b)$$

$$\{u^*\} = [N] \{U^*\} \quad , \quad \{u^*\}^T = \{U^*\}^T [N]^T \quad (4.6c)$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B] \{U^*\} \quad , \quad \{\varepsilon^*\}^T = \{U^*\}^T [B]^T \quad (4.6d)$$

En portant ces relations dans l'équation (3.9b), il vient :

$$\mathcal{W}(\{U\}, \{U^*\}) = \{U^*\}^T \left([M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} - \{F\} \right) \quad (4.7)$$

où :

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad (4.8)$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (4.9)$$

$$\{F\} = \int_V [N]^T \{f_V\} dV + \int_{S_\sigma} [N]^T \{f_S\} dS + \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV \quad (4.10)$$

$[M]$ est la **matrice de masse** (kg).

$[K]$ est la **matrice de rigidité** (N/m).

$\{F\}$ est le **vecteur force équivalent aux charges réparties** (N).

$\{U\}$ est le **vecteur des déplacements nodaux** (m).

$\{\ddot{U}\}$ est le **vecteur des accélérations nodales** (m/s²).

Remarques :

- les matrices $[M]$ et $[K]$ sont par construction symétriques (car la matrice des coefficients élastiques $[D]$ est symétrique).
- dans l'équation (4.7), il convient d'ajouter la contribution de l'amortissement : $\{U^*\}^T [C] \{\dot{U}\}$ où $[C]$ est la **matrice d'amortissement** (kg/s) et $\{\dot{U}\}$ le **vecteur des vitesses nodales** (m/s).

Effectuons une **partition des degrés de liberté** en déplacements inconnus (L) et imposés (non nuls : P , nuls : S) ([1], [14], [15]) :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} = ? \\ \{U_P\} \neq \{0\} \\ \{U_S\} = \{0\} \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U^*\} = \begin{Bmatrix} \{U_L^*\} \\ \{U_P^*\} = \{0\} \\ \{U_S^*\} = \{0\} \end{Bmatrix} = \{\delta U\} \quad (4.11a)$$

$\{\delta U\}$ est une variation quelconque du vecteur $\{U\}$.

Cette partition induit une partition de $[M]$, $[C]$, $[K]$ et $\{F\}$:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LP}] & [M_{LS}] \\ [M_{PL}] & [M_{PP}] & [M_{PS}] \\ [M_{SL}] & [M_{SP}] & [M_{SS}] \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] & [K_{LS}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] & [K_{PS}] \\ [K_{SL}] & [K_{SP}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \quad (4.11b)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{LL}] & [C_{LP}] & [C_{LS}] \\ [C_{PL}] & [C_{PP}] & [C_{PS}] \\ [C_{SL}] & [C_{SP}] & [C_{SS}] \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix} \quad (4.11c)$$

La forme faible discrétisée s'écrit finalement :

Trouver $\{U_L(t)\}$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\{U_L\}, \{U_L^*\}) = & \{U_L^*\}^T \left([[M_{LL}] \quad [M_{LP}]] \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_L\} \\ \{\ddot{U}_P\} \end{Bmatrix} + [[C_{LL}] \quad [C_{LP}]] \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_L\} \\ \{\dot{U}_P\} \end{Bmatrix} \right. \\ & \left. + [[K_{LL}] \quad [K_{LP}]] \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} - \{F_L\} \right) = 0 \quad \forall \{U_L^*\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec les conditions initiales $\{U_L(t_0)\} = \{U_{L,0}\}$, $\{\dot{U}_L(t_0)\} = \{\dot{U}_{L,0}\}$

Les déplacements nodaux inconnus $\{U_L(t)\}$ sont donc les solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} [M_{LL}]\{\ddot{U}_L\} + [C_{LL}]\{\dot{U}_L\} + [K_{LL}]\{U_L\} \\ = \{F_L\} - [M_{LP}]\{\ddot{U}_P\} - [C_{LP}]\{\dot{U}_P\} - [K_{LP}]\{U_P\} \end{aligned} \quad (4.13a)$$

avec les conditions initiales :

$$\{U_L(t_0)\} = \{U_{L,0}\}, \quad \{\dot{U}_L(t_0)\} = \{\dot{U}_{L,0}\} \quad (4.13b)$$

Remarque : par construction, les matrices $[K_{LL}]$ et $[M_{LL}]$ sont symétriques.

4.5 Problèmes particuliers

4.5.1 Problème stationnaire

Dans un problème stationnaire, l'équation (4.13) se réduit à :

$$[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}]\{U_P\} = \{\bar{F}_L\} \quad (4.14)$$

Si le nombre de liaisons est suffisant, la matrice $[K_{LL}]$ n'est pas singulière ($\det[K_{LL}] \neq 0$) et les déplacements inconnus sont égaux à :

$$\{U_L\} = [K_{LL}]^{-1} \{\bar{F}_L\} \quad (4.15)$$

Les déplacements étant connus, les actions de liaison sont égales à :

$$\{A\} = \begin{bmatrix} [K_{PL}] & [K_{PP}] \\ [K_{SL}] & [K_{SP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{F_P\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

4.5.2 Modes propres de vibration

Les **modes propres de vibration** de la structure sont les solutions de l'équation :

$$[M_{LL}]\{\ddot{U}_L\} + [K_{LL}]\{U_L\} = 0 \quad (4.17)$$

En posant :

$$\{U_L(t)\} = \{\tilde{U}_L\} \sin \omega t \quad (4.18)$$

où $\{\tilde{U}_L\}$ est indépendant du temps, il vient :

$$[K_{LL}]\{\tilde{U}_L\} = \omega^2 [M_{LL}]\{\tilde{U}_L\} \quad (4.19)$$

où ω est une pulsation propre de la structure et $\{\tilde{U}_L\}$ le vecteur propre associé.

Les pulsations propres sont les solution de l'équation :

$$\det ([K_{LL}] - \omega^2 [M_{LL}]) = 0 \quad (4.20)$$

4.6 Mise en œuvre pratique : calculs élémentaires et assemblage

Dans la pratique, $[M]$, $[K]$ et $\{F\}$ sont construits **élément par élément**. Cette opération s'appelle **assemblage**.

De l'expression du champ de déplacements dans l'élément (e) :

$$\{u(x, y; t)\} = [N^e(x, y)] \{u^e(t)\} \quad (4.21)$$

on déduit :

$$\{u^*\} = [N^e] \{u^{e*}\} \quad , \quad \{u^*\}^T = \{u^{e*}\}^T [N^e]^T$$

$$\{\ddot{u}\} = [N^e] \{\ddot{u}^e\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B^e] \{u^e\} \quad , \quad [B^e] = [\begin{array}{cccc} B_1^e & \dots & B_i^e & \dots & B_{n^e}^e \end{array}] \quad , \quad B_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B^e] \{u^{e*}\} \quad , \quad \{\varepsilon^*\}^T = \{u^{e*}\}^T [B^e]^T$$

En portant ces expressions dans l'équation (3.9b), il vient :

$$\mathcal{W}(\{U\}, \{U^*\}) = \sum_e \{u^{e*}\}^T ([m^e] \{\ddot{u}^e\} + [k^e] \{u^e\} - \{f^e\}) \quad (4.23)$$

où :

$$[m^e] = \int_{V^e} \rho [N^e]^T [N^e] dV \quad (4.24)$$

$$[k^e] = \int_{V^e} [B^e]^T [D] [B^e] dV \quad (4.25)$$

$$\{f^e\} = \int_{V^e} [N^e]^T \{f_V\} dV + \int_{S_g^e} [N^e]^T \{f_S\} dS + \int_{V^e} [B^e]^T [D] \{\varepsilon_{ih}^e\} dV \quad (4.26)$$

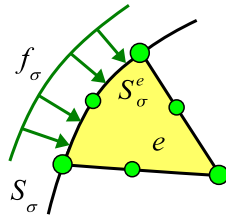


Figure 6 – Éléments finis

Dans ces formules, V^e représente le volume de l'élément (e) et S_σ^e la partie de S_σ qui appartient à la frontière de l'élément (e) (figure 6).

Les matrices et les vecteurs élémentaires sont évaluées numériquement.

L'équation (3.9b) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\{U\}, \{U^*\}) &= \sum_e \{U^*\}^T \left([M^e] \{\ddot{U}\} + [K^e] \{U\} - \{F^e\} \right) \\ &= \{U^*\}^T \left(\sum_e [M^e] \{\ddot{U}\} + \sum_e [K^e] \{U\} - \sum_e \{F^e\} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

d'où :

$$[M] = \sum_e [M^e] \quad , \quad [K] = \sum_e [K^e] \quad , \quad \{F\} = \sum_e \{F^e\} \quad (4.28)$$

Dans les matrices $[M^e]$ et $[K^e]$ et dans le vecteur $\{F^e\}$, obtenus par expansion respectivement de $[m^e]$, $[k^e]$ et $\{f^e\}$, les seuls termes non nuls sont les termes associés aux degrés de liberté de l'élément (e).

Remarques :

- La partition des degrés de liberté est effectuée avant la phase d'assemblage.
- Dans le logiciel « **RDM** » seuls les blocs de matrice (LL) et (LP) sont assemblés.

5 Problème élastostatique : énergie potentielle et méthode de Ritz

Si le problème est indépendant du temps, la forme intégrale faible (3.9) se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u, u^*) &= \int_V \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV \\ &\quad - \int_V \{u^*\}^T \{f_V\} dV - \int_{S_\sigma} \{u^*\}^T \{f_\sigma\} dS = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$\forall \{u^*\}$ tel que $\{u^*\} = \{0\}$ sur S_u

5.1 Calcul des variations

Le problème fondamental du calcul des variations consiste à chercher la fonction $u(x)$ qui rend stationnaire la **fonctionnelle** (ou « fonction de fonctions ») :

$$\mathcal{J}(u) = \int_a^b F \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right) dx \quad (5.2)$$

ce qui s'écrit :

$$\delta \mathcal{J} = 0 \quad \forall \delta u \quad (5.3)$$

Les principales propriétés de l'opérateur variation δ sont ([2, 9, 17]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^2(u) = \delta(\delta u) = 0 \\ \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \\ \delta F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots \\ \delta(F + G) = \delta F + \delta G \\ \text{où } F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) \text{ et } G(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) \text{ sont deux fonctionnelles de } u \\ \delta(F G) = \delta F G + F \delta G \quad (\text{règle de Leibniz}) \\ \delta(F^n) = n F^{n-1} \delta F \\ \delta(c F) = c \delta F \quad \text{où } c \text{ est une constante} \\ \delta \int F dx = \int \delta F dx \end{array} \right. \quad (5.4)$$

5.2 Énergie potentielle

Considérons la fonctionnelle :

$$E_{\text{pot}}(\{u\}) = E_{\text{def}}(\{u\}) - W_{\text{ext}}(\{u\}) \quad (5.5)$$

où :

- $\{u\}$ est un champ de déplacements cinématiquement admissible.
- $E_{\text{def}}(\{u\})$ est l'énergie de déformation du champ de déplacements $\{u\}$:

$$E_{\text{def}}(\{u\}) = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV \quad (5.6)$$

- $W_{\text{ext}}(\{u\})$ est travail des forces appliquées pour le déplacement $\{u\}$:

$$W_{\text{ext}}(\{u\}) = \int_V \{u\}^T \{f_V\} dV + \int_{S_\sigma} \{u\}^T \{f_\sigma\} dS \quad (5.7)$$

- $E_{\text{pot}}(\{u\})$ est l'énergie potentielle du système pour le déplacement $\{u\}$.

La condition de stationnarité (5.3) s'écrit :

$$\delta E_{\text{pot}} = \delta E_{\text{def}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \{\delta u\} \quad (5.8)$$

soit :

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{pot}} = & \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV \\ & - \int_V \{\delta u\}^T \{f_V\} dV - \int_{S_\sigma} \{\delta u\}^T \{f_\sigma\} dS = 0 \quad \forall \{\delta u\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

où

- $\{\delta u\}$ est une variation quelconque du champ de déplacements (en particulier : $\{\delta u\} = \{0\}$ sur S_u).

$$- \{\delta \varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \varepsilon_{yy} \\ \delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Cette équation est identique à (5.1) si on choisit $\{u^*\} = \{\delta u\}$.

La seconde variation de la fonctionnelle est égale à :

$$\delta^2 E_{\text{pot}} = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\delta \varepsilon\} dV \quad (5.10)$$

La matrice $[D]$ étant définie positive, on en déduit :

$$\delta^2 E_{\text{pot}} > 0 \quad \forall \{\delta u\} \llcorner \{0\} \quad (5.11)$$

De plus

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\} + \{\delta u\}) &= E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\}) + \delta E_{\text{pot}}|_{\{u\}=\{u_{\text{exact}}\}} + \frac{1}{2} \delta^2 E_{\text{pot}} \\ &= E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\}) + \frac{1}{2} \delta^2 E_{\text{pot}} > E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\}) \quad \forall \{\delta u\} \llcorner \{0\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Le champ de déplacements $\{u\} = \{u_{\text{exact}}\} + \{\delta u\}$ étant cinématiquement admissible (CA), on en déduit :

$$E_{\text{pot}}(\{u_{\text{CA}}\}) \geq E_{\text{pot}}(\{u_{\text{exact}}\}) \quad \forall \{u_{\text{CA}}\} \quad (5.13)$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Parmi l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles, le champ de déplacements exact est celui qui minimise l'énergie potentielle.

5.3 Méthode de Ritz et éléments finis

Si on restreint la recherche de la solution aux champs de déplacements définis au paragraphe (4.3), l'énergie potentielle discrétisée est égale à :

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(\{U\}) &= \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{F\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

et la condition de stationnarité s'écrit :

$$\delta E_{\text{pot}}(\{U_L\}) = \{\delta U_L\}^T \left(\begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_L \\ U_P \end{Bmatrix} - \{F_L\} \right) = 0 \quad \forall \{\delta U_L\} \quad (5.15)$$

d'où :

$$[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}] \{U_P\} \quad (5.16)$$

Cette équation est identique à celle obtenue au paragraphe (4.5.1).

6 Calculs élémentaires : éléments isoparamétriques

6.1 Élément isoparamétrique : définition

À chaque élément réel, on associe un **élément de référence** (figure 7).

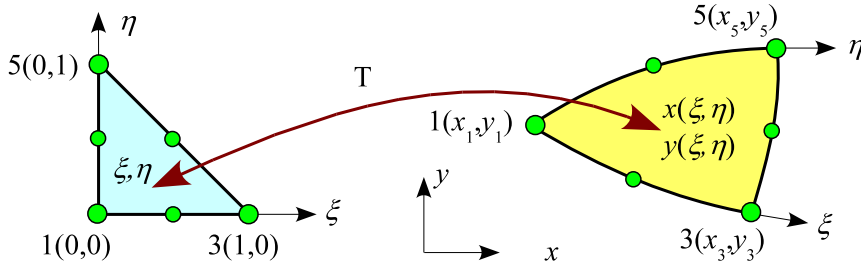


Figure 7 – Transformation géométrique

6.1.1 Représentation de la géométrie

La transformation géométrique (figure 7) qui fait passer de l'élément de référence à l'élément réel possède les propriétés suivantes :

- elle est de la forme :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad , \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (6.1)$$

où :

- n est le nombre de nœuds de l'élément.
- ξ et η sont les coordonnées d'un point de l'élément de référence.
- $x(\xi, \eta)$ et $y(\xi, \eta)$ sont les coordonnées d'un point de l'élément réel.
- x_i et y_i sont les coordonnées du i^{e} nœud de l'élément.
- les $N_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme

La **matrice jacobienne** de la transformation est :

$$\begin{aligned} [J(\xi, \eta)] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.2)$$

- elle est **nodale** : un nœud de l'élément de référence devient un nœud de l'élément réel (les deux éléments possèdent donc le même nombre de nœuds) :

$$x_i = x(\xi_i, \eta_i) = \sum_{j=1}^n N_j(\xi_i, \eta_i) x_j \quad , \quad y_i = y(\xi_i, \eta_i) = \sum_{j=1}^n N_j(\xi_i, \eta_i) y_j \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

où (ξ_i, η_i) sont les coordonnées du i^e nœud de l'élément de référence. On en déduit :

$$N_j(\xi_i, \eta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (6.4)$$

- une frontière de l'élément de référence devient une frontière de l'élément réel.
- elle est **bijective** : le **déterminant de la matrice jacobienne ne doit pas changer de signe sur l'élément**. Nous imposerons la condition :

$$\det [J(\xi, \eta)] = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} > 0 \quad (6.5)$$

ce qui implique que l'élément de référence et l'élément réel soient numérotés dans le même sens (en général positif).

6.1.2 Maillage conforme

La transformation géométrique doit assurer la continuité de la géométrie entre les éléments (figure 8).

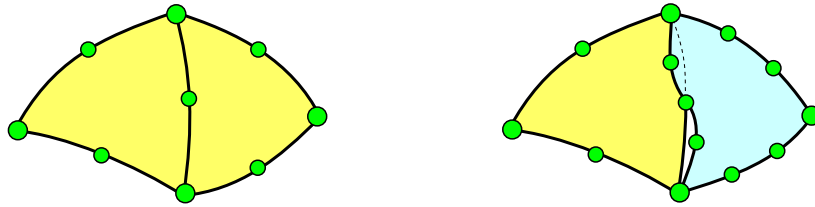


Figure 8 – *Maillage conforme (à gauche) et non conforme (à droite)*

Si deux éléments ont une arête commune :

- les deux éléments doivent avoir le même nombre de nœuds sur l'arête.
- les coordonnées d'un point de l'arête ne doivent dépendre que des coordonnées des nœuds de l'arête ; elles se réduisent à :

$$x(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_a} N_i^a(\alpha) x_i \quad , \quad y(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_a} N_i^a(\alpha) y_i \quad , \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.6)$$

où n_a est le nombre de nœuds situés sur l'arête et les $N_i^a(\alpha)$ sont les fonctions d'interpolation de l'élément à une dimension et n_a nœuds (figure 15) et (§ 6.2.2 : transformation d'une arête).

6.1.3 Représentation du champ de déplacements

Les fonctions $N_i(\xi, \eta)$ qui définissent la transformation géométrique sont les **fonctions d'interpolation** pour le champ de déplacements (élément isoparamétrique) :

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \quad , \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i \quad (6.7)$$

où u_i et v_i sont les déplacements du nœud i .

Critère de complétude : pour que la solution « éléments finis » converge vers la solution exacte quand la taille des éléments tend vers zéro, l'élément doit pouvoir représenter un champ de déplacements qui

correspond à des déformations nulles (mouvement de corps rigide) ou constantes. Considérons donc le champ de déplacements :

$$u(x, y) = a_x + b_x x + c_x y \quad , \quad v(x, y) = a_y + b_y x + c_y y \quad (6.8)$$

d'où les valeurs nodales :

$$u_i = a_x + b_x x_i + c_x y_i \quad , \quad v_i = a_y + b_y x_i + c_y y_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (6.9)$$

Le champ de déplacements sur x s'écrit sous forme paramétrique (équation 6.7) :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) (a_x + b_x x_i + c_x y_i) \\ &= a_x \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) + b_x \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i + c_x \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (6.10)$$

En utilisant les relations (6.1), il vient :

$$u(x, y) = a_x \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) + b_x x + c_x y \quad (6.11)$$

On retrouve le champ de déplacements (6.8) si :

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) = 1 \quad (6.12)$$

Cette condition est vérifiée par les éléments décrits ci-dessous.

Remarque : si le maillage est conforme, le champ de déplacement est continu entre les éléments.

6.2 Bibliothèque d'éléments

6.2.1 Triangle à 3 nœuds

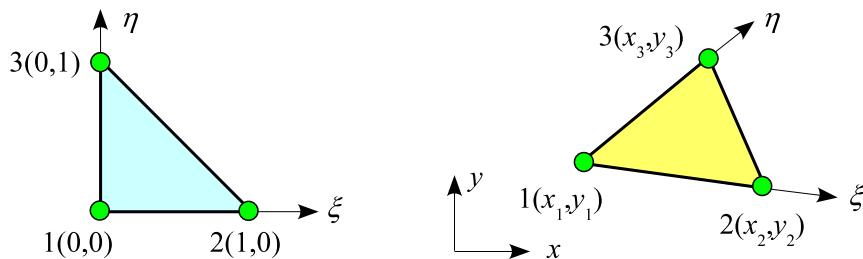


Figure 9 – Triangle à 3 nœuds

La transformation géométrique est de la forme :

$$x(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = [P(\xi, \eta)] \{A\} \quad (6.13)$$

$[P(\xi, \eta)]$ est la base polynomiale de la transformation.

La transformation est nodale d'où :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(0,0) \\ x(1,0) \\ x(0,1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = [C] \{A\} \quad (6.14)$$

On en déduit :

$$x(\xi, \eta) = [P] [C]^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Il vient pour les fonctions d'interpolation et leurs dérivées (programme **tri3_int**) :

$$[N]^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

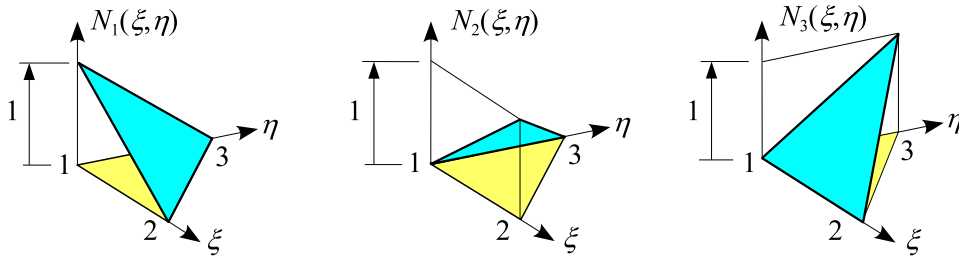


Figure 10 – Triangle à 3 nœuds : fonctions d'interpolation

Matrice jacobienne de la transformation : elle est égale à (équation (6.2)) :

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

d'où son déterminant :

$$\det[J(\xi, \eta)] = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 2A \quad (6.18)$$

où A est l'aire de l'élément réel.

6.2.2 Triangle à 6 nœuds

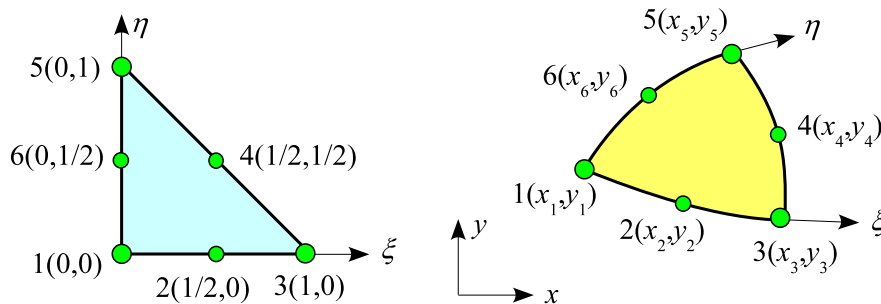


Figure 11 – Triangle à 6 nœuds

Base polynomiale :

$$[P(\xi, \eta)] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \xi\eta] \quad (6.19)$$

Fonctions d'interpolation ($\lambda = 1 - \xi - \eta$) (programme **tri6_int**) :

$$[N]^T = \begin{bmatrix} \lambda(2\lambda - 1) \\ 4\xi\lambda \\ \xi(2\xi - 1) \\ 4\xi\eta \\ \eta(2\eta - 1) \\ 4\eta\lambda \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 - 4\lambda \\ 4(\lambda - \xi) \\ -1 + 4\xi \\ 4\eta \\ 0 \\ -4\eta \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 - 4\lambda \\ -4\xi \\ 0 \\ 4\xi \\ -1 + 4\eta \\ 4(\lambda - \eta) \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Transformation d'une arête : considérons l'arête de l'élément de référence passant par les nœuds 3, 4 et 5 ; elle est définie par $\lambda = 1 - \xi - \eta = 0$ d'où $\eta = 1 - \xi$ avec $0 \leq \xi \leq 1$; elle devient dans l'élément réel la courbe d'équation paramétrique :

$$x(\xi) = [0 \quad 0 \quad \xi(2\xi - 1) \quad 4\xi(1 - \xi) \quad (1 - \xi)(1 - 2\xi) \quad 0] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \xi(2\xi - 1)x_3 + 4\xi(1 - \xi)x_4 + (1 - \xi)(1 - 2\xi)x_5$$

$$y(\xi) = \xi(2\xi - 1)y_3 + 4\xi(1 - \xi)y_4 + (1 - \xi)(1 - 2\xi)y_5 \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

d'où en posant $\xi = (1 - \alpha)/2$:

$$x(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x_3 + (1 - \alpha^2) x_4 + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} x_5 = \bar{N}_1(\alpha) x_3 + \bar{N}_2(\alpha) x_4 + \bar{N}_3(\alpha) x_5$$

$$y(\alpha) = \bar{N}_1(\alpha) y_3 + \bar{N}_2(\alpha) y_4 + \bar{N}_3(\alpha) y_5 \quad , \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

Les $\bar{N}_i(\alpha)$ sont les fonctions d'interpolation de l'élément isoparamétrique à une dimension et trois nœuds. Si le nœud 4 est au milieu des nœuds 3 et 5, la transformation se réduit à :

$$x(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{2} x_3 + \frac{1 + \alpha}{2} x_5 \quad , \quad y(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{2} y_3 + \frac{1 + \alpha}{2} y_5$$

Remarque : le champ de déplacements des points de l'arête est :

$$u(\alpha) = \bar{N}_1(\alpha) u_3 + \bar{N}_2(\alpha) u_4 + \bar{N}_3(\alpha) u_5 \quad , \quad v(\alpha) = \bar{N}_1(\alpha) v_3 + \bar{N}_2(\alpha) v_4 + \bar{N}_3(\alpha) v_5$$

Il ne dépend que des déplacements des nœuds de l'arête (élément conforme).

6.2.3 Quadrangle à 4 nœuds

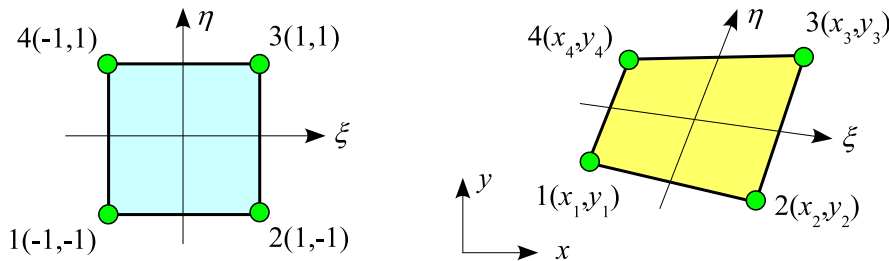


Figure 12 - Quadrangle à 4 nœuds

Base polynomiale :

$$[P(\xi, \eta)] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \quad (6.21)$$

Fonctions d'interpolation (programme **quad4_int**) :

$$[N]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) \\ (1-\eta) \\ (1+\eta) \\ -(1+\eta) \end{bmatrix} \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\xi) \\ -(1+\xi) \\ (1+\xi) \\ (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

6.2.4 Quadrangle à 8 ou 9 nœuds

Quadrangle à 8 nœuds :

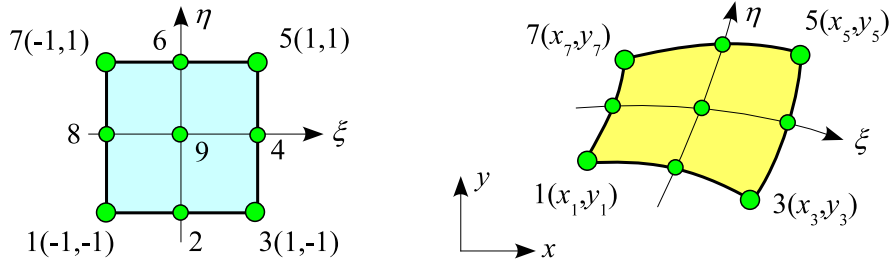


Figure 13 – Quadrangle à 8 ou 9 nœuds

Base polynomiale :

$$[P(\xi, \eta)] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2] \quad (6.23)$$

Fonctions d'interpolation (programme **quad8_int**) :

$$[N]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\ 2(1-\xi^2)(1-\eta) \\ -(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \\ 2(1+\xi)(1-\eta^2) \\ -(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \\ 2(1-\xi^2)(1+\eta) \\ -(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\ 2(1-\xi)(1-\eta^2) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta)(2\xi+\eta) \\ -4(1-\eta)\xi \\ (1-\eta)(2\xi-\eta) \\ 2(1-\eta^2) \\ (1+\xi)(2\xi+\eta) \\ -4(1+\eta)\xi \\ (1+\eta)(2\xi-\eta) \\ 2(1-\eta^2) \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(\xi+2\eta) \\ -2(1-\xi^2) \\ -(1+\xi)(\xi-2\eta) \\ -4(1+\xi)\eta \\ (1+\xi)(\xi+2\eta) \\ 2(1-\xi^2) \\ -(1-\xi)(\xi-2\eta) \\ -4(1-\xi)\eta \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Quadrangle à 9 nœuds :

Base polynomiale :

$$[P(\xi, \eta)] = [\dots \quad \xi^i \eta^j \quad \dots] \quad i, j = 0, \dots, 2 \quad (6.26)$$

Fonctions d'interpolation (programme **quad9_int**) :

$$[N]^T = \begin{bmatrix} L_1(\xi) & L_1(\eta) \\ L_2(\xi) & L_1(\eta) \\ L_3(\xi) & L_1(\eta) \\ L_3(\xi) & L_2(\eta) \\ L_3(\xi) & L_3(\eta) \\ L_2(\xi) & L_3(\eta) \\ L_1(\xi) & L_3(\eta) \\ L_1(\xi) & L_2(\eta) \\ L_2(\xi) & L_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right]^T = \begin{bmatrix} DL_1(\xi) & L_1(\eta) \\ DL_2(\xi) & L_1(\eta) \\ DL_3(\xi) & L_1(\eta) \\ DL_3(\xi) & L_2(\eta) \\ DL_3(\xi) & L_3(\eta) \\ DL_2(\xi) & L_3(\eta) \\ DL_1(\xi) & L_3(\eta) \\ DL_1(\xi) & L_2(\eta) \\ DL_2(\xi) & L_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]^T = \begin{bmatrix} L_1(\xi) & DL_1(\eta) \\ L_2(\xi) & DL_1(\eta) \\ L_3(\xi) & DL_1(\eta) \\ L_3(\xi) & DL_2(\eta) \\ L_3(\xi) & DL_3(\eta) \\ L_2(\xi) & DL_3(\eta) \\ L_1(\xi) & DL_3(\eta) \\ L_1(\xi) & DL_2(\eta) \\ L_2(\xi) & DL_2(\eta) \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

où :

$$[L(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{\xi(\xi-1)}{2} & 1-\xi^2 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{bmatrix}, \quad [DL(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{2\xi-1}{2} & -2\xi & \frac{2\xi+1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

6.3 Calcul des matrices et des vecteurs élémentaires

6.3.1 Transformation des dérivées

Les dérivées d'une fonction $f(x, y)$ par rapport à ξ et η sont :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

On en déduit l'expression des dérivées de f par rapport à x et y :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

avec

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}, \quad \det[J] = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \quad (6.31)$$

6.3.2 Transformation des intégrales

La surface infinitésimale $d\xi d\eta$ au point (ξ, η) de l'élément de référence se transforme en la surface dA au point $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ de l'élément réel.

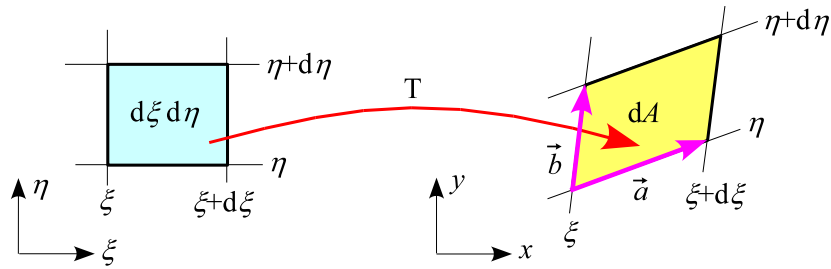


Figure 14 – Transformation des surfaces

On a la relation :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{k} dA \quad (6.32)$$

soit

$$\{a\} \wedge \{b\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi \wedge \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta = \{k\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta = \{k\} dA \quad (6.33)$$

d'où :

$$dA = \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (6.34)$$

L'intégrale sur l'élément réel

$$\int_V f(x, y) dV \quad (6.35)$$

devient donc sur l'élément de référence

$$\int_A t f(x, y) dA = \int_{A_{ref}} t f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (6.36)$$

où t est l'épaisseur supposée constante de l'élément.

Remarques :

– on a la relation

$$\int_{A_{ref}} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta = A \quad (6.37)$$

où A est l'aire de l'élément réel.

– si l'épaisseur de l'élément est variable et donnée par ses valeurs nodales t_i , on a :

$$t(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) t_i \quad (6.38)$$

6.3.3 Évaluation numérique des intégrales

Les intégrales sont évaluées par intégration numérique ([2, 3, 9, 15]) :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{npi} w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{quadrangle}) \quad (6.39)$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{npi} w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (\text{triangle}) \quad (6.40)$$

où :

- npi est le nombre de points d'intégration.
- ξ_i et η_i sont les coordonnées du i^e point d'intégration.
- w_i est le poids du i^e point d'intégration.

6.3.4 Calcul des matrices

La matrice de rigidité est égale à :

$$\begin{aligned}
 [k] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_{A_{ref}} t [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
 &\approx \sum_{i=1}^{npi} t [B(\xi_i, \eta_i)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_i)] \det [J(\xi_i, \eta_i)] w_i
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

où :

$$[B] = [B_1 \quad \dots \quad B_i \quad \dots \quad B_n] \quad \text{avec} \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{6.42}$$

De même, la matrice de masse s'écrit :

$$\begin{aligned}
 [m] &= \int_V \rho [N]^T [N] dV = \int_{A_{ref}} t \rho [N(\xi, \eta)]^T [N(\xi, \eta)] \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
 &\approx \sum_{i=1}^{npi} t \rho [N(\xi_i, \eta_i)]^T [N(\xi_i, \eta_i)] \det [J(\xi_i, \eta_i)] w_i
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

où :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_i & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_i & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \tag{6.44}$$

6.3.5 Calcul des vecteurs

Force volumique

Le vecteur force dû à une force volumique est égal à :

$$\begin{aligned}
 \{f\} &= \int_V [N]^T \{f_V\} dV = \int_{A_{ref}} t [N(\xi, \eta)]^T \{f_V\} \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
 &\approx \sum_{i=1}^{npi} t [N(\xi_i, \eta_i)]^T \begin{Bmatrix} f_{Vx} \\ f_{Vy} \end{Bmatrix} \det [J(\xi_i, \eta_i)] w_i
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

Gradient thermique

Le vecteur force dû à gradient thermique est égal à :

$$\begin{aligned}
 \{f_{th}\} &= \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_{th}\} dV = \int_{A_{ref}} t [B(\xi, \eta)]^T [D] \{\varepsilon_{th}\} \det [J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
 &\approx \sum_{i=1}^{npi} t [B(\xi_i, \eta_i)]^T [D] \{\varepsilon_{th}\} \det [J(\xi_i, \eta_i)] w_i
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

Force surfacique

Le champ de déplacements des points situés sur la frontière d'un élément est égal à (élément conforme (§ 6.1.2)) :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) x_i \quad , \quad y(\xi) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) y_i \quad (6.47a)$$

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) u_i \quad , \quad v(\xi) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) v_i \quad (6.47b)$$

où n est le nombre de nœuds situés sur la frontière et les $\bar{N}_i(\xi)$ sont les fonctions d'interpolation de l'élément de référence à une dimension et n nœuds (figure 15).

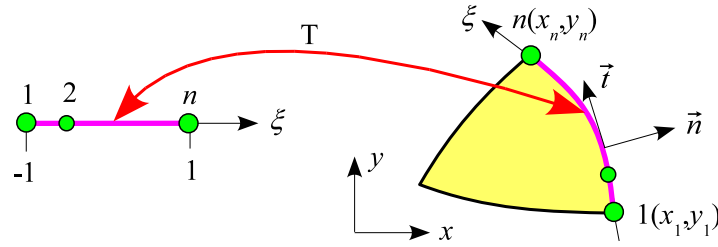


Figure 15 - Transformation des frontières

On en déduit :

$$dx = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} x_i \right) d\xi = J_x d\xi \quad , \quad dy = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} y_i \right) d\xi = J_y d\xi \quad (6.48)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} d\xi = J_s d\xi \quad (6.49)$$

d'où l'expression des composantes des vecteurs \vec{n} et \vec{t} (\vec{n} est la normale unitaire à S_σ dirigée vers l'extérieur de l'élément ; \vec{t} est le vecteur unitaire tangent à S_σ) :

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J_s} \begin{Bmatrix} J_x \\ J_y \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J_s} \begin{Bmatrix} J_y \\ -J_x \end{Bmatrix} \quad (6.50)$$

Le vecteur force dû à une force surfacique d'intensité \vec{f}_σ appliquée sur l'une des frontières d'un élément est égal à :

$$\begin{aligned} \{f\} &= \int_{S_\sigma} [N] \{f_\sigma\} dS = \int_{S_\sigma} [\bar{N}]^T \{f_\sigma\} dS = \int_{-1}^1 t [\bar{N}(\xi)]^T \{f_\sigma(\xi)\} J_s(\xi) d\xi \\ &\approx \sum_{i=1}^{npi} t [\bar{N}(\xi_i)]^T \{f_\sigma(\xi_i)\} J_s(\xi_i) w_i \end{aligned} \quad (6.51)$$

où :

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 & \dots & \bar{N}_i & 0 & \dots & \bar{N}_n & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & \dots & 0 & \bar{N}_i & \dots & 0 & \bar{N}_n \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Pour une force perpendiculaire à la surface d'intensité p : $\vec{f}_\sigma = p \vec{n}$, l'expression ci-dessus se réduit à :

$$\{f\} \approx \sum_{i=1}^{npi} t [\bar{N}(\xi_i)]^T p(\xi_i) \begin{Bmatrix} J_y(\xi_i) \\ -J_x(\xi_i) \end{Bmatrix} w_i \quad (6.53)$$

6.4 Qualité du jacobien.

La condition $\det [J] > 0$ impose certaines conditions à la géométrie d'un élément.

Exemple 1 : considérons le quadrangle à 4 nœuds représenté sur la figure (16).

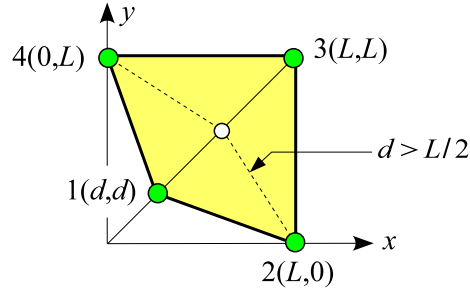


Figure 16 – Quadrangle à 4 nœuds

La matrice jacobienne est égale à (équations (6.2) et (6.22)) (programme § A.6) :

$$\begin{aligned}
 [J] &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & d \\ L & 0 \\ L & L \\ 0 & L \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2L - d(1-\eta) & -d(1-\eta) \\ -d(1-\xi) & 2L - d(1-\xi) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

d'où

$$8 \det [J] = 2L^2 - dL(2 - \xi - \eta)$$

$\det [J]$ est minimal pour $\xi = \eta = -1$:

$$\min(\det [J]) = L(L - 2d)/4$$

La condition $\det [J] > 0$ dans tout l'élément impose donc : $d < L/2$.

Remarque : si $d = L/2$, les nœuds 1, 2 et 4 sont alignés. Si $d > L/2$, la transformation qui fait passer de l'élément de référence à l'élément réel génère des points en dehors du quadrangle réel (figure 17).

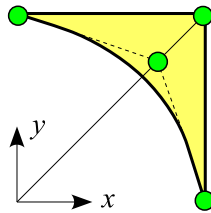


Figure 17 – Quadrangle à 4 nœuds : $d > L/2$

Exemple 2 : considérons le triangle à 6 nœuds représenté sur la figure (18).

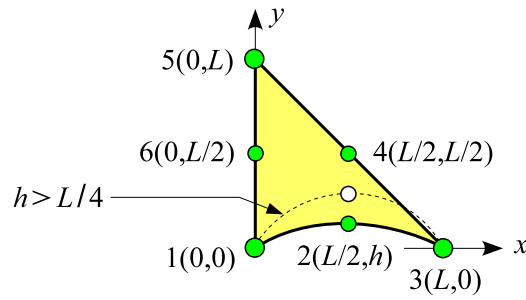


Figure 18 – Triangle à 6 nœuds à bords curvilignes

La matrice jacobienne est égale à (équations (6.2) et (6.20)) (programme § A.7) :

$$[J] = \begin{bmatrix} L & 4h(1 - 2\xi - \eta) \\ 0 & L - 4h\xi \end{bmatrix}$$

d'où

$$\det [J] = L(L - 4h\xi)$$

La condition $\det [J] > 0$ dans tout l'élément impose : $h < L/4$.

Remarque : si $h = L/4$, la parabole qui passe par les nœuds 1, 2 et 3 est tangente à la droite qui passe par les nœuds 3, 4 et 5.

On appelle qualité du jacobien la quantité :

$$q_J = \frac{\text{Aire de l'élément de référence}}{\text{Aire de l'élément réel}} \min(\det [J(\xi, \eta)]) \quad (6.54)$$

Remarques :

- La qualité du jacobien est comprise entre 0 et 1. La qualité maximale est 1 : dans ce cas, le déterminant du jacobien est constant dans l'élément.
- Dans la pratique, on se contente d'évaluer le déterminant du jacobien aux nœuds de l'élément.
- D'autres définitions sont possibles. On rencontre souvent celle-ci :

$$q_J = \frac{\min(\det [J(\xi, \eta)])}{\max(\det [J(\xi, \eta)])} \quad (6.55)$$

A Programmes Maple

Les programmes suivants sont dans le fichier `map_elas_2d.txt`.

A.1 tri3_int : triangle à 3 nœuds

```
restart:with(linalg):

n:=3;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta];
# coordonnées nodales

xi_nod:=[0,1,0]:
eta_nod:=[0,0,1]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);
```

A.2 tri6_int : triangle à 6 nœuds

```
restart:with(linalg):

n:=6;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*xi,eta*eta,xi*eta];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[0,1/2,1,1/2,0,0]:
eta_nod:=[0,0,0,1/2,1,1/2]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);
```

A.3 quad4_int : quadrangle à 4 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=4;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*eta];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[-1,1,1,-1]:
eta_nod:=[-1,-1,1,1]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);

```

A.4 quad8_int : quadrangle à 8 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=8;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*eta,xi^2,eta^2,xi^2*eta,xi*eta^2];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[-1,0,1,1,1,0,-1,-1]:
eta_nod:=[-1,-1,-1,0,1,1,1,0]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);

```


A.5 quad9_int : quadrangle à 9 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=9;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*eta,xi^2,eta^2,xi^2*eta,xi*eta^2,xi^2*eta^2];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[-1,0,1,1,1,0,-1,-1,0]:
eta_nod:=[-1,-1,-1,0,1,1,1,0,0]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);

```

A.6 Qualité du jacobien : quadrangle à 4 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=4;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*eta];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[-1,1,1,-1]:
eta_nod:=[-1,-1,1,1]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);
dN:=matrix([dNxi,dNeta]);

coord:=matrix([[d,d],[L,0],[L,L],[0,L]]);

J:=multiply(dN,coord):J:=simplify(%);
detJ:=det(J);

```

A.7 Qualité du jacobien : triangle à 6 nœuds

```

restart:with(linalg):

n:=6;

# base polynomiale

P:=(xi,eta)->[1,xi,eta,xi*xi,eta*eta,xi*eta];

# coordonnées nodales

xi_nod:=[0,1/2,1,1/2,0,0]:
eta_nod:=[0,0,0,1/2,1,1/2]:

# fonctions d'interpolation

C:=matrix([seq(P(xi_nod[i],eta_nod[i]),i=1..n)]);
N:=multiply(P(xi,eta),inverse(C));
N:=map(factor,N);
dNxi:=map(diff,N,xi);
dNeta:=map(diff,N,eta);
dN:=matrix([dNxi,dNeta]);

coord:=matrix([[0,0],[L/2,h],[L,0],[L/2,L/2],[0,L],[0,L/2]]);

J:=multiply(dN,coord):J:=simplify(%);
detJ:=det(J);

```

Références

- [1] J. H. ARGYRIS et H.-P. MLEJNEK – *Die methode der finiten elemente, Band I. Verschiebungsmethode in der statik*, Vieweg, 1986.
- [2] K.-J. BATHE – *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, 1996.
- [3] J.-L. BATOZ et G. DHATT – *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [4] M. BONNET et A. FRANGI – *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*, Éditions de l'École polytechnique, 2007.
- [5] L. CHEVALIER – *Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.
- [6] R. D. COOK, D. S. MALKUS et M. E. PLESHA – *Concepts and applications of finite element analysis*, 3 éd., Wiley, 1989.
- [7] M. A. CRISFIELD – *Finite elements and solution procedures for structural analysis*, Pineridge Press, 1986.
- [8] G. DHATT et G. TOUZOT – *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, 1984.
- [9] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS – *Méthode des éléments finis*, Hermès, 2005.
- [10] D. EUVRARD – *Résolution des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur. Différences finies, éléments finis, problèmes en domaines non bornés*, 3 éd., Masson, 1994.
- [11] F. FREY et J. JIROUSEK – *Traité du génie civil, Volume 6. Méthode des éléments finis*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2001.
- [12] R. H. GALLAGHER – *Introduction aux éléments finis*, Pluralis, 1976.
- [13] L. GALLIMARD et J.-P. PELLE (éds.) – *Estimateurs d'erreur pour les analyses éléments finis (revue européenne des éléments finis vol.12 n° 6/2003)*, Hermès, 2003.
- [14] T. J. HUGHES – *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*, Dover, 2000.
- [15] J.-F. IMBERT – *Analyse des structures par éléments finis*, 3 éd., Cépaduès, 1995.
- [16] P. LADEVÈZE et J.-P. PELLE – *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermès, 2001.
- [17] A. LE POURHIET – *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Une première approche*, Cépaduès, 1988.
- [18] R. H. MACNEAL – *Finite elements. Their design and performance*, Dekker, 1994.
- [19] N. OTTOSEN et H. PETERSSON – *Introduction to the finite element method*, Prentice Hall, 1992.
- [20] J.-P. PELLE, P. BECKERS et L. GALLIMARD – *Estimations des erreurs de discrétisation et analyses adaptatives. Application à l'automatisation des calculs éléments finis*, Cours IPSI, 1996.
- [21] A. PORTELA et A. CHARAFI – *Finite elements using Maple. A Symbolic Programming Approach*, Springer, 2002.
- [22] B. SZABÓ et I. BABUŠKA – *Finite element analysis*, Wiley, 1991.
- [23] P. THOMAS – *Éléments finis pour l'ingénieur. Grands principes et petites recettes*, Tec & Doc (Collection EDF R&D), 2006.
- [24] P. TROMPETTE – *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis*, Masson, 1992.
- [25] C. WIELGOZ – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.

- [26] O. C. ZIENKIEWICZ – *La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur*, Ediscience, 1973.
- [27] — , *The finite element method*, McGraw-Hill, 1977.
- [28] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR – *La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires*, AFNOR, 1989.
- [29] — , *The finite element method, Volume 1. The basis*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [30] — , *The finite element method, Volume 2. Solid mechanics*, Butterworth-Heinemann, 2000.