



Année Universitaire 2007-2008
Master 2 « Mathématiques et Applications »
Option : Analyse Numérique & Equations aux Dérivées Partielles

Méthode des Eléments de Frontière Accélérée en Mécanique de la Rupture 3D

Cédric Bellis

Responsables : Marc Bonnet
Stéphanie Chaillat

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problème considéré

L'idée de base des méthodes intégrales consiste à reformuler un problème régi par des équations aux dérivées partielles linéaires, sous la forme d'équations dont les supports géométriques coïncident avec la frontière du domaine.

On considère un problème aux limites sous sa forme générale, d'inconnue scalaire u dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u^D & \text{sur } \partial\Omega_U \\ \mathcal{T}^n u = t^D & \text{sur } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (1.1)$$

où u^D , t^D et f sont des données du problème et où interviennent les opérateurs aux dérivées partielles du second ordre \mathcal{L} , et du premier ordre \mathcal{T}^n sur la frontière $\partial\Omega$ de normale unitaire \underline{n} , liés par la relation :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathcal{T}^n u \, dS \quad (\text{formule de Stokes par exemple}) \quad (1.2)$$

1.2 Principe des méthodes intégrales

La méthode (voir [1] et [18]) consiste à utiliser un champ particulier G , appelé solution fondamentale et vérifiant, dans un domaine E , l'équation locale :

$$\text{Pour } \underline{x} \notin \partial\Omega \text{ et } \underline{y} \in E : \quad \mathcal{L}G(\underline{x}, \underline{y}) + \delta(\underline{y} - \underline{x}) = 0 \quad (1.3)$$

où $\delta(\underline{y} - \underline{x})$ représente une masse de Dirac au point \underline{x} .

En multipliant l'équation locale du problème 1.1 par G et l'équation 1.3 par u , il vient par intégration sur le domaine Ω et par différence :

$$\int_{\Omega} [G(\underline{x}, \underline{y})\mathcal{L}u(\underline{y}) - u(\underline{y})\mathcal{L}G(\underline{x}, \underline{y})] \, dV_y + \int_{\Omega} [f(\underline{y})G(\underline{x}, \underline{y}) - \delta(\underline{y} - \underline{x})u(\underline{y})] \, dV_y = 0 \quad (1.4)$$

Puis en utilisant la relation 1.2 et la définition de la masse de Dirac, on obtient la formule suivante :

$$\kappa(\underline{x})u(\underline{x}) = \int_{\Omega} f(\underline{y})G(\underline{x}, \underline{y}) \, dV_y + \int_{\partial\Omega} [G(\underline{x}, \underline{y})\mathcal{T}^n u(\underline{y}) - u(\underline{y})\mathcal{T}^n G(\underline{x}, \underline{y})] \, dV_y \quad (1.5)$$

où pour tout $\underline{x} \notin \partial\Omega$: $\kappa(\underline{x}) = 1$ si $\underline{x} \in \Omega$, et 0 sinon.

Dans cette *formule de représentation intégrale* le terme de volume est entièrement connu, et le terme de bord est, pour partie, donné par les conditions aux limites.

Cette relation permet de réaliser une quasi inversion du problème de départ puisque l'on peut remonter à la valeur du champ u dans Ω à partir de la connaissance de u et $\mathcal{T}^n u$ sur $\partial\Omega$. On a ainsi reformulé la résolution du problème initial dans Ω en une résolution sur sa frontière $\partial\Omega$.

Il faut noter que la formule de représentation intégrale n'est valable que pour $\underline{x} \notin \partial\Omega$, et certains termes présentent une singularité empêchant son utilisation pour un point de la frontière. Néanmoins par passage à la limite on va pouvoir formuler une équation intégrale permettant de déterminer les inconnues en u et $\mathcal{T}^n u$ sur la frontière.

1.3 Remarques

Le fonctionnement de la méthode est lié au caractère linéaire des opérateurs différentiels, puisqu'on utilise le principe de superposition des solutions. Les méthodes intégrales trouvent donc une grande variété d'applications dans les problèmes aux dérivées partielles linéaires de la physique : mécanique des solides, des fluides, thermique, acoustique, électromagnétisme, ...

Enfin, les solutions fondamentales, ou noyaux de Green, $G(\underline{x}, \underline{y})$ qui sont utilisées dans les méthodes intégrales sont définies sur un domaine E . Différentes méthodes vont se dégager selon l'espace choisi. Une infinité d'espaces peuvent être choisis, néanmoins on ne connaît de solutions analytiques que pour un petit nombre de cas ($E = \mathbb{R}^3$ solution de Kelvin ou E est un demi-plan de \mathbb{R}^3 pour la solution de Mindlin. Voir [1], [17] ou [19]). De façon générale le choix de cet espace est intimement lié au problème considéré.

1.4 Contexte et objectif

La méthode des éléments de frontière (BEM) permet la résolution numérique des équations issues des méthodes intégrales. Elle est tout particulièrement adaptée à l'étude de problèmes de fissuration 3D pour des structures à géométrie complexe dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture. L'utilisation de la méthode des éléments finis (FEM) nécessite souvent une préparation lourde des maillages, et la précision n'est pas toujours excellente pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contraintes. La méthode des éléments de frontière fournit au contraire une bonne précision et une grande simplicité de maillage (voir [20]). Néanmoins elle est limitée par la complexité de la résolution numérique due à l'inversion de matrices pleines.

L'objectif du travail présenté ici, est d'utiliser la méthode des éléments de frontière couplée à un algorithme visant à s'affranchir des difficultés émergeant numériquement de l'utilisation des méthodes intégrales et visant à réduire très significativement les coûts de calcul.

Chapitre 2

Représentation et équations intégrales pour l'élastostatique

Nous allons présenter ici comment les méthodes intégrales s'utilisent dans le cadre de l'élasticité linéaire statique.

2.1 Formulation du problème

On considère un problème d'élasticité linéaire classique dans un domaine tridimensionnel Ω avec des conditions aux limites prescrites sur le bord.

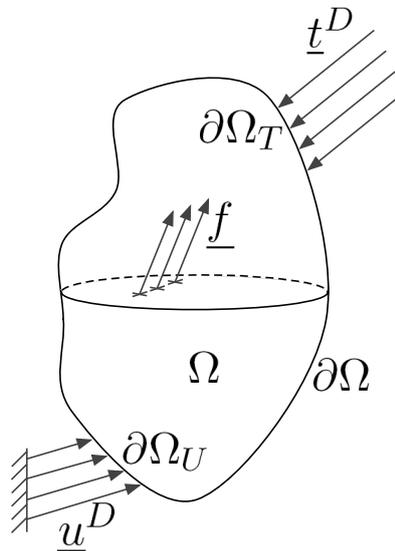


FIG. 2.1 – Support géométrique du problème

Sur ce domaine le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) + \underline{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{u} = \underline{u}^D & \text{sur } \partial\Omega_U \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \cdot \underline{n} = \underline{t}^D & \text{sur } \partial\Omega_T \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) = \underline{\underline{C}} : [\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^I] & \text{Relation de comportement dans } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur d'élasticité et $\underline{\underline{\varepsilon}}^I$ d'éventuelles déformations initiales.

Dans [3] ou [2] on introduit l'équation locale où le terme source est un effort ponctuel au point \underline{x} dans la direction \underline{e}_k dont on note \underline{v} la solution. Les déformations initiales étant nulles dans ce problème. On a donc le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Dans } \Omega \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) + \underline{f} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) = \underline{\underline{C}} : [\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^I] \end{cases} \\ \text{Dans } E \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) + \delta(\underline{y} - \underline{x}) \underline{e}_k = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) \end{cases} \end{cases} \quad (2.2)$$

En utilisant le procédé présenté dans le chapitre précédent on obtient l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} (\underline{v} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) - \underline{u} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) + \underline{f} \underline{v} - \delta(\underline{y} - \underline{x}) \underline{e}_k \underline{u}) \, dV = 0 \quad (2.3)$$

en utilisant la formule de Stokes, il vient :

$$\int_{\partial\Omega} (\underline{v} \underline{t}(\underline{u}) - \underline{u} \underline{t}(\underline{v})) \, dS - \int_{\Omega} (\underline{\nabla} \underline{v} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) - \underline{\nabla} \underline{u} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})) \, dV + \int_{\Omega} (\underline{f} \underline{v} - \delta(\underline{y} - \underline{x}) \underline{e}_k \underline{u}) \, dV = 0 \quad (2.4)$$

or en utilisant la relation de comportement et, par symétrie du tenseur du 4ème ordre $\underline{\underline{C}}$:

$$\underline{\nabla} \underline{v} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) - \underline{\nabla} \underline{u} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^I \quad (2.5)$$

Pour rappeler la dépendance de la solution fondamentale au point source \underline{x} et à la direction \underline{e}_k , on introduit alors les notations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{v}(\underline{y}) = \underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \\ \underline{t}(\underline{v})(\underline{y}) = \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})(\underline{y}) = \underline{\underline{\Sigma}}^k(\underline{x}, \underline{y}) \\ \underline{t}(\underline{u})(\underline{y}) = \underline{t}(\underline{y}) \end{cases} \quad (2.6)$$

On obtient alors la **formule de représentation intégrale du déplacement** :

$$\int_{\partial\Omega} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) - \underline{u}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) \, dS_y + \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\Sigma}}^k(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^I + \underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{f}(\underline{y}) \right) \, dV_y = \begin{cases} u_k(\underline{x}) \\ \text{si } \underline{x} \in \Omega \\ 0 \\ \text{si } \underline{x} \notin \operatorname{Adh}\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

Le déplacement au sein du matériau est donc exprimé à partir du déplacement et de la traction sur le bord, pour partie connus par les conditions limites, et pour partie inconnus. On souhaite donc avoir maintenant une expression donnant ces grandeurs sur la frontière.

2.2 Régularisation en déplacement

Les méthodes de régularisation permettent d'utiliser la formule 2.7 pour un point de la frontière $\partial\Omega$. Or l'expression analytique de la solution de Kelvin est bien connue (voir [2]) :

$$\begin{cases} U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [r_{,i}r_{,k} + (3-4\nu)\delta_{ik}] \\ T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} [3r_{,i}r_{,k}r_{,j} + (1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}(\underline{x}) - \delta_{ij}r_{,k})] n_j(\underline{y}) \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $r = |\underline{y} - \underline{x}|$.

Pour \underline{y} voisin du point source \underline{x} , on a alors $U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = O(\frac{1}{r})$ et $T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = O(\frac{1}{r^2})$. Ainsi le terme $T_i^k(\underline{x}, \underline{y})$ n'est pas intégrable si $\underline{x} \in \partial\Omega$ et présente une singularité en $\frac{1}{r}$. Il faut donc utiliser une technique de régularisation de cette intégrale.

Deux méthodes sont utilisées pour cela (voir [2]).

- La technique classique utilise l'intégrale en valeur principale de Cauchy (notée \int^\star), voir [3], [9] et [10]. Elle conduit pour un point \underline{x} pris sur la frontière, à l'**équation intégrale** suivante :

$$\boxed{c_{ki}(\underline{x})u_i(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) \right) dS_y - \int_{\partial\Omega}^\star \left(u \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y + \int_{\Omega} \left(\underline{\Sigma}^k(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{\varepsilon}^I + \underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{f} \right) dV_y} \quad (2.9)$$

où $c_{ki}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\delta_{ki}$ si la frontière est suffisamment régulière. Plus généralement l'expression de $c_{ki}(\underline{x})$ est connue pour une certaine régularité de la frontière (point anguleux par exemple). Rappelons que le calcul de la valeur principale de l'intégrale consiste à enlever un voisinage symétrique infinitésimal autour de la singularité du terme intégré. La mise en œuvre numérique de l'intégration en valeur principale de Cauchy est présentée par Guiggiani et al. dans [9] et [10].

- Une deuxième méthode qualifiée d'*indirecte* (voir [1]) est également utilisée. Elle consiste à utiliser un déplacement de solide rigide sur Ω (à condition que ce soit un domaine borné de \mathbb{R}^3), égal à $\underline{u}(\underline{x})$, le déplacement inconnu. Par différence avec la formule de représentation intégrale on obtient l'**équation intégrale** :

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) + (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y + \int_{\Omega} \left(\underline{\Sigma}^k(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{\varepsilon}^I + \underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{f}(\underline{y}) \right) dV_y = 0} \quad (2.10)$$

Cette équation est vraie pour tout $\underline{x} \notin \partial\Omega$. On montre que lors d'un passage à la limite sur la frontière du domaine, la singularité des termes intégrés est maintenant intégrable. Cette équation intégrale est donc valable pour tout point du domaine E .

2.3 Représentation des contraintes

2.3.1 Dans le domaine Ω

Comme nous allons le voir plus loin, certains problèmes demandent des formulations qui empêchent la résolution d'équations intégrales en déplacement. Pour les résoudre, on a besoin d'utiliser une représentation des gradients ou des contraintes sur la frontière. L'équation (2.7) s'étend pour un point intérieur à Ω par simple dérivation, puisque les termes intégrés sont tous dérivables dans le domaine. Notons que les termes intégrés sont toujours singuliers, et leur singularité ayant même été augmentée par dérivation. Néanmoins, en réalisant une intégration par parties sur la frontière du domaine, on aboutit à des expressions qui ne font intervenir que des termes singuliers en $|\underline{y} - \underline{x}|^{-2}$. Si l'on se place dans le cas d'un domaine sans déformation initiale. En utilisant la loi de Hooke, on obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \kappa u_{k,l}(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left(D_{lb}u_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) - t_a(\underline{y})U_{a,l}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y \\ &\quad - \int_{\Omega} f_a(\underline{y})U_{a,l}^k(\underline{x}, \underline{y}) dV_y \\ \kappa \sigma_{ij}(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left(D_{lb}u_a(\underline{y})C_{ijkl}\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) - t_a(\underline{y})\Sigma_{ij}^a(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y \\ &\quad - \int_{\Omega} f_a(\underline{y})\Sigma_{ij}^a(\underline{x}, \underline{y}) dV_y \end{aligned} \quad (2.11)$$

Où l'opérateur différentiel tangentiel D est tel que $D_{ij}(\cdot) = n_i(\cdot)_{,j} - n_j(\cdot)_{,i}$, et la notation pour la dérivation d'une fonction de deux variables est $g_{,l}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial g(\underline{x}, \underline{y})}{\partial y_l}$

2.3.2 Sur la frontière $\partial\Omega$

Si le point source est situé sur la frontière $\partial\Omega$, la singularité des termes intégrés empêche leur expression directe en ce point. On doit donc, comme nous l'avons fait pour passer de la formule de représentation intégrale aux équations intégrales, effectuer une régularisation des équations. Après ces opérations effectuées (voir [1]), on obtient les équations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_{k,l}(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left([D_{lb}u_a(\underline{y}) - D_{lb}u_a(\underline{x})]\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y - [t_a(\underline{y}) - t_a(\underline{x})]U_{a,l}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y \\ &\quad + D_{lb}u_a(\underline{x})A_{ab}^k(\underline{x}, \partial\Omega) - t_a(\underline{x})B_{al}^k(\underline{x}, \partial\Omega) - \int_{\Omega} f_a(\underline{y})U_{a,l}^k(\underline{x}, \underline{y}) dV_y \\ \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left(C_{ijkl}[D_{lb}u_a(\underline{y}) - D_{lb}u_a(\underline{x})]\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y - [t_a(\underline{y}) - t_a(\underline{x})]\Sigma_{ij}^a(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y \\ &\quad + D_{lb}u_a(\underline{x})C_{ijkl}A_{ab}^k(\underline{x}, \partial\Omega) - t_a(\underline{x})A_{ij}^a(\underline{x}, \partial\Omega) - \int_{\Omega} f_a(\underline{y})U_{a,l}^k(\underline{x}, \underline{y}) dV_y \end{aligned} \quad (2.12)$$

Il apparaît ici des termes résiduels qui s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_{ij}^k(\underline{x}, S) = \int_S \Sigma_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y \\ B_{il}^k(\underline{x}, S) = \int_S U_{i,l}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y \end{cases} \quad (2.13)$$

Chapitre 3

Méthodes intégrales pour la mécanique de la rupture 3D

Plus particulièrement ici, nous allons chercher à voir comment les méthodes intégrales s'utilisent en mécanique de la rupture 3D. Rappelons tout d'abord les équations de la mécanique de la rupture tridimensionnelle.

3.1 Mécanique de la rupture 3D

On considère ici un solide élastique fissuré auquel on attache un repère lié au front de la fissure. Il est bien connu (voir [13]) que les champs de déformations et de contraintes sont singuliers au voisinage de la pointe de la fissure. Néanmoins on peut donner une expression asymptotique de ces champs. En réunissant les champs de déplacement obtenus dans les cas plans (mode I et II) et

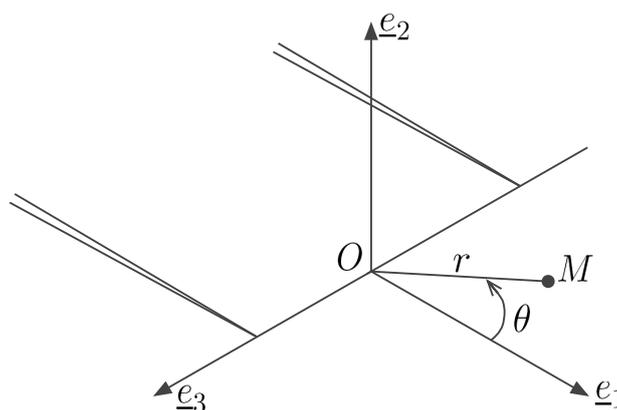


FIG. 3.1 – Fissure droite tridimensionnelle

antiplan (mode III) on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_r = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(5 - 8\nu) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-5 + 8\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ u_\theta = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-7 + 8\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-7 + 8\nu) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (3.1)$$

Ces équations prises en $\theta = \pm\pi$ permettent d'obtenir les facteurs d'intensité des contraintes grâce au saut de déplacement ϕ à travers la fissure.

$$\begin{cases} \phi_2 = u_r(r, +\pi) - u_r(r, -\pi) = \frac{4(1-\nu)}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \\ \phi_1 = u_\theta(r, +\pi) - u_\theta(r, -\pi) = \frac{4(1-\nu)}{\mu} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \\ \phi_3 = u_3(r, +\pi) - u_3(r, -\pi) = \frac{4}{\mu} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \end{cases} \quad (3.2)$$

Ces équations sont valables dans la limite $r \rightarrow 0$. Elles permettent d'accéder à des valeurs mécaniquement pertinentes pour l'analyse des phénomènes de rupture dans les solides :

- Facteurs d'intensité des contraintes
- Critère de propagation de fissure
- Critère de rupture
- Champs de déformations et de contraintes

3.2 Equations intégrales en mécanique de la rupture 3D

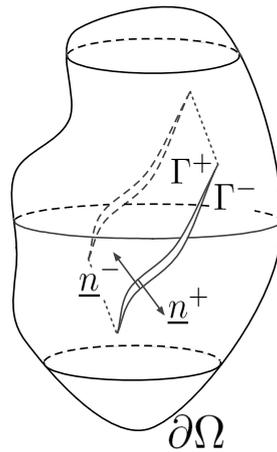


FIG. 3.2 – Solide fissuré

3.2.1 Nécessité d'une formulation en équations intégrales mixtes

On considère un solide élastique fissuré sans déformations initiales ni forces volumiques. Les lèvres sont notées Γ^+ et Γ^- et le reste de la frontière $\partial\Omega$ est noté S de sorte que $\partial\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup S$. Si l'on utilise la formule de représentation intégrale 2.7 pour un point intérieur à Ω on obtient :

$$\begin{aligned} u_k(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) - \underline{u}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y \\ &= \int_S \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) - \underline{u}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) - \underline{u}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y \end{aligned} \quad (3.3)$$

or par convention on choisit l'orientation des normales telle que $\underline{n} = -\underline{n}^+ = \underline{n}^-$. Ainsi sur la fissure on a comme égalités :

$$\begin{aligned} \text{Sur } \Gamma^+ &\begin{cases} \underline{t}(\underline{y}) = \underline{\sigma n}^+ = -\underline{\sigma n} \\ \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\Sigma}^k \underline{n}^+ = -\underline{\Sigma}^k \underline{n} \end{cases} \\ \text{Sur } \Gamma^- &\begin{cases} \underline{t}(\underline{y}) = \underline{\sigma n}^- = \underline{\sigma n} \\ \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\Sigma}^k \underline{n}^- = \underline{\Sigma}^k \underline{n} \end{cases} \end{aligned} \quad \text{et continuité des déplacements } \underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \text{ et } \underline{u}(\underline{y}) \quad (3.4)$$

Ainsi on obtient l'équation :

$$u_k(\underline{x}) = \int_S \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) - \underline{u}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y + \int_{\Gamma} \underline{\phi}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y \quad (3.5)$$

où $\underline{\phi}(\underline{y})$ représente le saut de déplacement $\underline{u}(\underline{y})^+ - \underline{u}(\underline{y})^-$ à travers la fissure. Si l'on considère le même solide Ω soumis aux mêmes chargements mais en l'absence de fissure, on peut établir que le champ de déplacement $\tilde{u}^k(\underline{x})$ vérifie au même point \underline{x} :

$$\tilde{u}_k(\underline{x}) = \int_S \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) - \tilde{\underline{u}}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y \quad (3.6)$$

Par différence entre les équations 3.5 et 3.6 on trouve que la perturbation de déplacement $\Delta \underline{u} = \underline{u} - \tilde{\underline{u}}$, introduite par la présence de la fissure, est solution de l'équation linéaire homogène :

$$\Delta u_k(\underline{x}) = \int_{\Gamma} \underline{\phi}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y - \int_S \Delta \underline{u}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y \quad (3.7)$$

Cette équation admet donc une infinité de solution, et par conséquent, l'équation 3.5 admet également une infinité de solutions.

La formulation en équations intégrales de déplacement du problème de rupture n'est donc pas soluble. Il va donc falloir établir des formulations utilisant des équations intégrales en traction sur les lèvres de la fissure. On peut distinguer, parmi différentes méthodes, celles qui utilisent à la fois des équations intégrales en déplacement et en traction.

3.2.2 Méthode des discontinuités de déplacement

On considère ici un solide élastique Ω , de frontière extérieure $\partial\Omega$ et contenant une fissure Γ . Cette méthode, présentée dans [1], consiste à utiliser des équations intégrales en traction pour des

points situés sur la fissure, et en déplacement pour des points sur la frontière extérieure du solide. On considère que l'équilibre élastique du corps est atteint grâce à des efforts \underline{T}^\pm appliqués sur les lèvres Γ^\pm de la fissure.

L'idée consiste à construire deux sous domaines fictifs Ω^+ et Ω^- intérieurs à Ω et délimités par une surface fictive $\tilde{\Gamma}$ prolongeant les lèvres de la fissure.

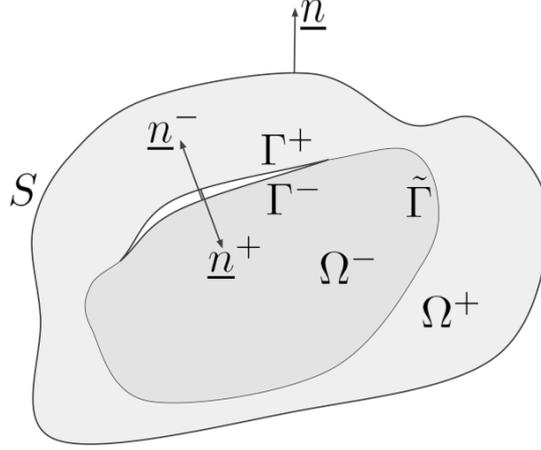


FIG. 3.3 – Domaines fictifs

La formule de représentation intégrale 2.7 est prise pour le domaine Ω^- en un point de la frontière extérieure $\partial\Omega$, ainsi que l'équation intégrale en déplacement 2.10 pour le domaine Ω^+ et au même point de $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega^-} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}^-(\underline{y}) - \underline{u}^-(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y = 0 \\ \int_{\partial\Omega^+} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}^+(\underline{y}) + (\underline{u}^-(\underline{x}) - \underline{u}^+(\underline{y})) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Or $\partial\Omega^+ = \partial\Omega \cup \Gamma \cup \tilde{\Gamma}$ et $\int_{\Gamma \cup \tilde{\Gamma}} \underline{u}^+(\underline{x}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y = 0$ car on intègre sur une surface fermée

En additionnant ensuite ces deux relations et sachant qu'on a continuité des tractions et des déplacements à travers $\tilde{\Gamma}$, on obtient alors :

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{t}(\underline{y}) + (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y + \int_{\Gamma} \left(\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y}) \underline{S}(\underline{y}) - \underline{\phi}(\underline{y}) \underline{T}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y = 0} \quad (3.9)$$

où $\underline{S}(\underline{y}) = \underline{T}^+(\underline{y}) + \underline{T}^-(\underline{y})$ et on rappelle que dans cette équation le point \underline{x} est pris sur la frontière extérieure $\partial\Omega$. Notons également que compte tenu du sens conventionnel d'orientation des normales, $\underline{S}(\underline{y})$ représente le saut de vecteur contrainte.

Pour établir les formulations en traction, l'équation intégrale 2.12 régularisée en contrainte est prise pour un point de la fissure Γ et ceci, pour les deux domaines Ω^+ et Ω^- . Compte tenu du sens

d'orientation des normales, l'addition membre à membre de ces formules conduit à l'équation :

$$\boxed{
\begin{aligned}
T_i^\pm(\underline{x}) &= -n_j^\pm(\underline{x})C_{ijkl} \left(A_{ab}^k(\underline{x}, \Gamma)D_{lb}\phi_a(\underline{x}) + \int_{\Gamma} [D_{lb}\phi_a(\underline{y}) - D_{lb}\phi_a(\underline{x})] \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y \right) \\
&\quad -n_j^\pm(\underline{x}) \left(A_{ij}^k(\underline{x}, \Gamma)S_k(\underline{x}) + \int_{\Gamma} [S_k(\underline{y}) - S_k(\underline{x})] \Sigma_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y \right) \\
&\quad -n_b^\pm(\underline{x}) \int_{\partial\Omega} \left(D_{lb}u_a(\underline{y})C_{ijkl}\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) - t_k(\underline{y})\Sigma_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y
\end{aligned}
} \tag{3.10}$$

où le point \underline{x} est ici pris sur la fissure Γ . Notons qu'en pratique (cas d'une fissure fermée, comme d'une fissure ouverte) le saut de vecteur contrainte normal \underline{S} est nul.

Ces deux équations, l'une prise sur la frontière extérieure du domaine, et l'autre prise sur la fissure, vont permettre de résoudre le problème de mécanique de la rupture.

3.2.3 Méthode de discontinuité duale

Parmi les autres méthodes existantes pour traiter ce problème, on peut citer également la méthode de discontinuité duale (DDM) présentée dans [12] ou [20]. L'idée dans cette méthode est d'utiliser sur une lèvres de la fissure, une équation intégrale en déplacement, et sur l'autre lèvres, une équation intégrale en traction.

Pour établir les équations intégrales, il est proposé dans [20] de différencier l'équation intégrale 2.9, et d'utiliser le tenseur de Hooke. Les singularités des termes qui apparaissent dans les intégrales sont alors contournées par l'utilisation de l'intégrale par valeur principale de Cauchy. On obtient alors pour le terme de traction :

$$\frac{1}{2}t_i(\underline{x}) = \frac{1}{2}C_{ijkl}u_{k,l}(\underline{x})n_j = \int_{\partial\Omega \cup \Gamma}^{\star} n_j \left[u_a(\underline{y})C_{abkl}\Sigma_{ij,l}^k(\underline{x}, \underline{y})n_b - t_a(\underline{y})\Sigma_{ij}^a(\underline{x}, \underline{y}) \right] dS_y \tag{3.11}$$

En formulant cette équation pour les lèvres Γ^+ et Γ^- de la fissure, on peut obtenir le saut de traction sur la fissure comme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(t_i^+ - t_i^-)(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} n_j \left[u_a(\underline{y})C_{abkl}\Sigma_{ij,l}^k(\underline{x}, \underline{y})n_b - t_a(\underline{y})\Sigma_{ij}^a(\underline{x}, \underline{y}) \right] dS_y \\
&\quad + \int_{\Gamma}^{\star} n_j \phi_a(\underline{y})C_{abkl}\Sigma_{ij,l}^k(\underline{x}, \underline{y})n_b \, dS_y
\end{aligned} \tag{3.12}$$

en utilisant les conventions et les notations précédemment utilisées. Le terme intégré en traction sur la fissure Γ étant nul puisque on a $\underline{t}^+(\underline{x}) + \underline{t}^-(\underline{x}) = 0$ (fissure fermée).

En reprenant l'équation intégrale 2.9 en déplacement sur les lèvres de la fissure (voir paragraphe 3.2.1) on établit de même que la moyenne en déplacement sur la fissure vérifie :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(u_k^+ + u_k^-)(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left[t_a(\underline{y})U_a^k(\underline{x}, \underline{y}) - u_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y})n_b \right] dS_y \\
&\quad - \int_{\Gamma}^{\star} \phi_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y})n_b \, dS_y
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Au final la résolution par cette méthode consiste à utiliser l'équation intégrale 2.9 pour des points de la surface externe $\partial\Omega$ du solide, l'équation 3.12 pour l'une des lèvres de la fissure et sur l'autre lèvres,

la dernière équation 3.13. Cette méthode permet donc de contourner l'impossibilité de résoudre un problème seulement exprimé en déplacement.

3.2.4 Cas d'un solide infini

Regardons maintenant de plus près le cas qui nous intéresse : une fissure dans un solide élastique infini. Nous allons voir comment s'écrivent dans ce cas les équations intégrales, puis quelle est la formulation par la méthode des discontinuités de déplacement.

Equations dans le domaine $\Omega \setminus \Gamma$

Le solide Ω considéré admet donc pour seule frontière, la surface Γ de la fissure. Pour pouvoir appliquer ce qui a été fait jusqu'à présent, on peut considérer que ce cas est un cas limite du solide borné où la frontière extérieure S serait rejeté à l'infini. Quel que soit le noyau de Green utilisé, celui-ci tend vers 0 à l'infini. On peut donc passer à la limite dans l'équation 3.5, pour obtenir pour un point $\underline{x} \notin \Gamma$:

$$u_k(\underline{x}) = \int_{\Gamma} \phi_i(\underline{y}) T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y \quad (3.14)$$

Pour obtenir le terme en contrainte, il nous faut dériver par rapport à la variable \underline{x} , ce qui conduit, après manipulations, à l'expression :

$$\sigma_{ij}(\underline{x}) = -C_{ijkl} \int_{\Gamma} D_{lb} \phi_a(\underline{y}) \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) dS_y \quad (3.15)$$

Formulation sur la fissure Γ

Dans la méthode des discontinuités de déplacement, on souhaite obtenir une formulation qui utilise des équations en traction sur les lèvres de la fissure. Il faut donc régulariser l'équation en contrainte obtenue puisque celle-ci est toujours singulière pour $\underline{x} = \underline{y}$. La méthode présentée ici utilise cette fois le calcul de l'intégrale en valeur principale de Cauchy.

On décompose tout d'abord la surface de la fissure en deux surfaces complémentaires : $\Gamma = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$

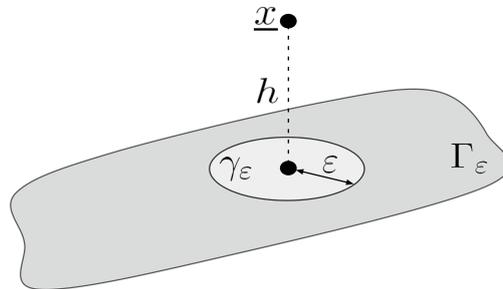


FIG. 3.4 – Passages à la limite vers la surface

Pour obtenir un terme régularisé sur la surface de la fissure, on réalise deux passages à la limite successifs. Le premier consiste à faire tendre h vers 0. On décompose pour cela l'intégrale 3.15 de la façon suivante :

$$\sigma_{ij}(\underline{x}) = -C_{ijkl} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{lb}\phi_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y - C_{ijkl} \int_{\gamma_\varepsilon} D_{lb}\phi_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y \quad (3.16)$$

Or analytiquement on montre que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} C_{ijkl} \int_{\gamma_\varepsilon} D_{lb}\phi_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y = 0 \quad (3.17)$$

Ainsi on s'est affranchi de la singularité du terme intégré lorsque \underline{x} tend vers un point de la fissure dans l'intégrale sur γ_ε . La contrainte peut donc être directement exprimée en un point de Γ comme une intégrale sur Γ_ε :

$$\text{Pour } \underline{x} \in \Gamma : \sigma_{ij}(\underline{x}) = -C_{ijkl} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{lb}\phi_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y \quad (3.18)$$

Enfin en passant à la limite dans l'expression 3.18 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on retrouve la définition même de l'intégrale en valeur principale de Cauchy sur la surface Γ :

$$\text{Pour } \underline{x} \in \Gamma : \sigma_{ij}(\underline{x}) = - \int_{\Gamma}^{\star} C_{ijkl} D_{lb}\phi_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y \quad (3.19)$$

Le système d'équation à résoudre est donc construit par l'équation en traction sur la fissure :

$$\boxed{\text{Pour } \underline{x} \in \Gamma : t_i(\underline{x}) = -n_j(\underline{x}) \int_{\Gamma}^{\star} C_{ijkl} D_{lb}\phi_a(\underline{y})\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y} \quad (3.20)$$

Le déplacement ou la contrainte pourront ensuite être calculés au sein du solide grâce aux expressions régulières 3.14 ou 3.15.

Problème de référence et méthode des discontinuités de déplacement

Le problème de référence que nous traiterons est celui d'une fissure circulaire plane et d'épaisseur nulle dans un solide infini. Une contrainte σ_2^∞ est imposée à l'infini. Enfin, notons que le saut de déplacement $\underline{\phi}$ est nul sur le front de fissure $\partial\Gamma$.

La résolution est faite par la méthode des discontinuités de déplacement. Comme nous l'avons présenté dans la section 3.2.2 la méthode consiste à imposer les tractions \underline{T}^+ et \underline{T}^- sur les lèvres Γ^+ et Γ^- en ayant pris la normale $\underline{n} = \underline{n}^-$ pour référence. Le chargement symétrique du problème impose de prendre :

$$\begin{cases} \underline{T}^+ = -\underline{\sigma}^\infty \underline{n}^+ = \sigma_2^\infty \underline{n} \\ \underline{T}^- = -\underline{\sigma}^\infty \underline{n}^- = -\sigma_2^\infty \underline{n} \end{cases} \quad (3.21)$$

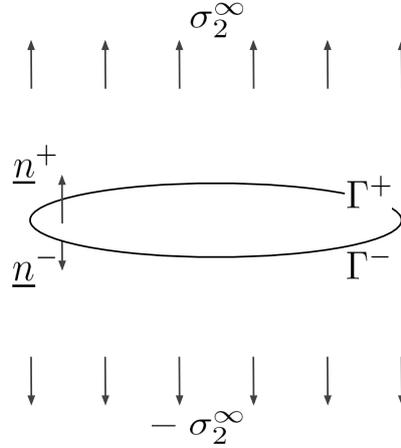


FIG. 3.5 – Problème de référence

On obtient ainsi d'après l'équation 3.20 sur les équations en traction suivantes :

$$\begin{cases} T_i^+(\underline{x}) = \sigma_2^\infty n_i(\underline{x}) = n_j(\underline{x}) \int_{\Gamma}^{\star} C_{ijkl} D_{lb} \phi_a(\underline{y}) \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y \\ T_i^-(\underline{x}) = -\sigma_2^\infty n_i(\underline{x}) = -n_j(\underline{x}) \int_{\Gamma}^{\star} C_{ijkl} D_{lb} \phi_a(\underline{y}) \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y \end{cases} \quad (3.22)$$

Par différence entre ces deux équations, le problème que l'on résout par la méthode des éléments de frontière est :

$$\text{Pour } \underline{x} \in \Gamma : \sigma_2^\infty n_i(\underline{x}) = n_j(\underline{x}) \int_{\Gamma}^{\star} C_{ijkl} D_{lb} \phi_a(\underline{y}) \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y$$

(3.23)

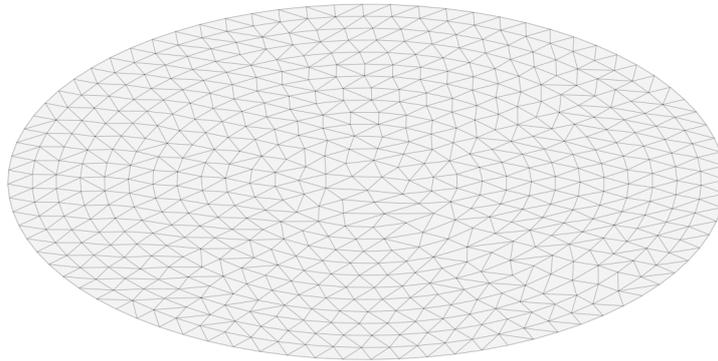


FIG. 3.6 – Maillage de la fissure

Chapitre 4

Méthode des éléments de frontière

4.1 Généralités

La méthode des éléments de frontière est une méthode de discrétisation du support géométrique des équations intégrales. En ceci, elle est tout à fait similaire à la méthode des éléments finis hormis le fait que la discrétisation est cette fois uniquement portée par la frontière du domaine. Par contre à la différence de la méthode des éléments finis, pour laquelle la formulation matricielle est obtenue en utilisant une formulation variationnelle et des fonctions tests, ici l'idée essentielle est de vérifier exactement les équations intégrales en des points de collocation. On parle de *méthode de collocation* (voir [1]).

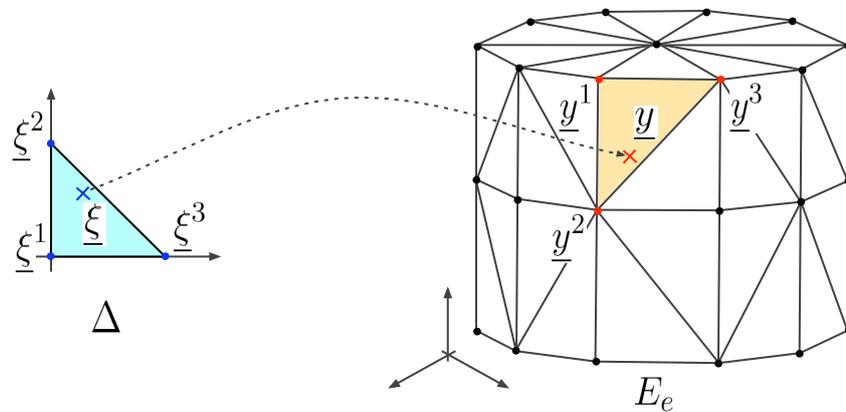


FIG. 4.1 – Maillage triangulaire et paramétrisation sur un cylindre

- Discrétisation géométrique : On considère une discrétisation de la frontière en N_N nœuds, et en N_E éléments. Un point \underline{y} d'un élément E_e de la géométrie réelle est l'image d'un point $\underline{\xi}$ d'un élément de référence Δ :

$$\underline{\xi} \in \Delta \rightarrow \underline{y}(\underline{\xi}) \in E_e \quad \text{où } 1 \leq e \leq N_E \quad (4.1)$$

Cette paramétrisation se fait grâce aux fonctions de forme φ , propres à chaque nœud, numéroté localement dans l'élément E_e de 1 à N_e :

$$\underline{\xi} \in \Delta \rightarrow \underline{y}(\underline{\xi}) = \sum_{m=1}^{N_e} \varphi_m(\underline{\xi}) \underline{y}^m \quad (4.2)$$

où \underline{y}^m est le vecteur des coordonnées du nœud m dans l'éléments réel courant. De façon globale, on numérote par $m(e, p)$ un nœud numéroté localement par p dans l'élément E_e .

- Interpolation : Pour ce qui est de l'interpolation des inconnues du problème, on utilise une représentation isoparamétrique. Cela signifie que les points d'interpolation et de discrétisation géométrique sont les mêmes, et les fonctions de forme et d'interpolation sont également égales. On obtient ainsi les champs de déplacement et de traction discrétisés, respectivement $\tilde{\underline{u}}(\underline{y})$ et $\tilde{\underline{t}}(\underline{y})$ selon :

$$\tilde{\underline{u}}(\underline{y}) = \sum_{k=1}^{N_N} \varphi_k(\underline{\xi}) \underline{u}^k \quad \text{et} \quad \tilde{\underline{t}}(\underline{y}) = \sum_{k=1}^{N_N} \varphi_k(\underline{\xi}) \underline{t}^k \quad (4.3)$$

où \underline{u}^k et \underline{t}^k sont respectivement le déplacement et la traction au nœud numéroté par k .

- Intégration : On précise enfin que l'évaluation des intégrales sur un élément réel est ramenée sur l'élément de référence via :

$$\int_{E_e} f(\underline{y}) \, dS_y = \int_{\Delta} f(\underline{\xi}) J(\underline{\xi}) \, dS_{\xi} \quad (4.4)$$

où $J(\underline{\xi})$ est le jacobien de la transformation 4.2 au point d'intégration \underline{y} .

Il faut noter, comme on l'a vu jusqu'à présent, que la méthode des équations intégrales fait apparaître des intégrales singulières. L'intégration utilisée pour les fonctions régulières est alors l'approximation usuelle de Gauss ramenée à l'élément de référence. Pour ce qui concerne les termes singuliers d'autres techniques sont à utiliser. Nous le verrons plus loin.

4.2 Collocation des équations intégrales

La collocation des équations intégrales consiste donc à vérifier exactement ces équations en certains points. On notera ces points de collocation \underline{x}^c . Le choix des points de collocation doit respecter le fait que les quantités intégrées doivent être continues. De façon générale, les points de collocation coïncident avec les points de discrétisation spatiale du domaine. On rappelle ici le principe de la méthode de résolution par les équations intégrales. Elle consiste à utiliser l'équation intégrale 2.9 ou 2.10 pour un point \underline{x} de la frontière pour aboutir à la connaissance du déplacement et de la traction en ce point. Puis on utilise les formules de représentation intégrale du déplacement ou des contraintes au sein du solide (respectivement équations 2.7 et 2.11) afin de finir la résolution complète du problème.

Pour un point de collocation donné \underline{x}^c sur la frontière, on distingue deux types d'éléments : ceux qui le contiennent et les autres. On notera $I(\underline{x}^c)$ le premier ensemble d'éléments et $\bar{I}(\underline{x}^c)$ le second

(les ensembles sont complémentaires). Enfin l'antécédent du point de collocation est noté $\underline{\eta}$ dans l'élément de référence.

On considère par exemple l'équation 2.10, pour les champs interpolés et pour une force volumique nulle :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in I(\underline{x}^c)} \sum_{p=1}^{N_e} \int_{E_e} \left(\varphi_p(\underline{\xi}) \underline{t}^{m(e,p)} \underline{U}^k(\underline{x}^c, \underline{y}) + (\varphi_p(\underline{\eta}) - \varphi_p(\underline{\xi})) \underline{u}^{m(e,p)} \underline{T}^k(\underline{x}^c, \underline{y}) \right) J(\underline{\xi}) \, dS_{\xi} \quad + \\ \sum_{e \in \bar{I}(\underline{x}^c)} \sum_{p=1}^{N_e} \int_{E_e} \left(\varphi_p(\underline{\xi}) \underline{t}^{m(e,p)} \underline{U}^k(\underline{x}^c, \underline{y}) - \varphi_p(\underline{\xi}) \underline{u}^{m(e,p)} \underline{T}^k(\underline{x}^c, \underline{y}) \right) J(\underline{\xi}) \, dS_{\xi} \quad - \quad (4.5) \\ \sum_{e \in \bar{I}(\underline{x}^c)} \sum_{p=1}^{N_e} \varphi_p(\underline{\eta}) \underline{u}^{m(e,p)} \int_{E_e} \underline{T}^k(\underline{x}^c, \underline{y}) J(\underline{\xi}) \, dS_{\xi} = 0 \end{aligned}$$

On peut dès à présent noter que la première série d'intégrales présente des singularités et nécessite donc des techniques d'intégration particulières, alors que les intégrales suivantes sont régulières.

En formant le vecteur des déplacements $\{u_i^m\}$ et des traction $\{t_i^m\}$ nodaux pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $m \in \{1, \dots, N_N\}$, l'équation précédente peut se mettre sous forme matricielle :

$$[A]\{u\} + [B]\{t\} = 0 \quad (4.6)$$

En formant le vecteur $\{X\}$ des inconnues nodales mixtes en déplacement et en traction, ainsi que le vecteur $\{Y\}$ des données associées à la multiplication matricielle par $[A]$ et $[B]$, on obtient un système du type :

$$[K]\{X\} = \{Y\} \quad (4.7)$$

Si ce système matriciel est similaire à celui vu dans la méthode des éléments finis, le vecteur des inconnues et le vecteur au second membre contiennent à la fois des termes de déplacement et de traction.

Il est aussi important de noter que la matrice $[K]$ est de taille $3N_N \times 3N_N$ et elle est totalement remplie a priori. En effet aucune des intégrales n'est éliminée lors de la collocation et l'interpolation grâce aux fonctions de forme. Cela va donc accroître considérablement les coûts de stockage et d'inversion de cette matrice, et nécessiter des techniques particulières.

4.3 Eléments particuliers de l'implémentation numérique

Mentionnons ici deux éléments particuliers dans la mise en œuvre numérique de cette méthode.

4.3.1 Element en pointe de fissure

Le champ de déplacement est bien connu en pointe de fissure et il dépend au premier ordre en \sqrt{r} (voir 3.1). La surface de la fissure est discrétisée en utilisant des fonctions de forme usuelles. Néanmoins pour l'élément en pointe de fissure, on utilise des éléments particuliers, "crack tip element", qui permettent de prendre en compte la particularité des champs dans cette zone.

En se référant à la littérature, on peut citer deux méthodes :

- Une première méthode qualifiée de directe, consiste à modifier les fonctions de forme sans changer la géométrie des éléments. Les fonctions de forme doivent directement contenir la singularité asymptotique des champs en pointe de fissure. On peut se référer à [14] ou [20] pour l'utilisation de ce type d'éléments.
- Une deuxième méthode consiste à modifier la position des nœuds d'un élément quadratique, en plaçant, relativement à la pointe de fissure, un nœud à une longueur égale au quart de la longueur de l'élément. On parle de "quarter-point elements". Cette modification est faite sans toucher aux fonctions de forme. Il a été démontré que cette modification conduit à des fonctions de forme dont l'allure reproduit la courbe $(\frac{r}{L})^{\frac{1}{2}}$, où L est la longueur maximale dans l'élément.

Il est néanmoins remarqué dans [8] que la précision est moindre pour le calcul de K_{II} et K_{III} que pour le mode d'ouverture K_I . Gray et al. ont donc proposé de modifier l'élément en pointe de fissure en forçant le développement asymptotique du déplacement d'ouverture de la fissure sur la frontière, à ne comporter que les termes prédits par la théorie, à savoir :

$$\Delta u_k(r, \theta) = a_k(\theta)r^{\frac{1}{2}} + b_k(\theta)r^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (\text{pas de terme d'ordre 1}) \quad (4.8)$$

Cette contrainte est portée sur la modification des fonctions de forme de l'élément en pointe de fissure.

Ces méthodes permettent d'augmenter significativement la précision du calcul des facteurs d'intensité des contraintes, et particulièrement en mode mixte.

4.3.2 Techniques de calcul des intégrales singulières

Mentionnons ici le caractère crucial d'un calcul numérique correct des intégrales singulières. En effet par la méthode de collocation on construit une matrice dont les termes proches de la diagonale sont ceux qui sont relatifs au calcul d'intégrales sur des éléments proches du point de collocation. Le terme diagonal étant lui même relatif à l'intégration sur l'élément qui contient le point de collocation. Ainsi toutes ces intégrations sont singulières. Les termes proches de la diagonale tendent ainsi à dominer les autres termes de la matrice. La résolution du système linéaire sera donc facilitée par la construction d'une matrice à diagonale dominante. En contre partie, le résultat sera donc sensible aux variations des valeurs de ces termes. Il est donc primordial de calculer correctement les intégrales des termes singuliers.

Les techniques de calcul de ces intégrales sont nombreuses, et dépendent du type de singularité des termes intégrés. Globalement, ces techniques consistent à utiliser des changements de variables qui permettent de diminuer la singularité de l'intégrande. On se ramène ainsi par changement du système de coordonnées à des intégrales, certes singulières, mais connues ou qui peuvent être facilement approchées (voir [1]).

Enfin, il convient d'utiliser, lors de la mise en œuvre de la méthode multipôle rapide, une technique d'intégration adaptée. Il semble que l'intégration par valeurs principales de Cauchy soit la plus satisfaisante. Nous y reviendrons.

Chapitre 5

Méthode multipôle rapide : FMM

5.1 Motivations

L'inversion d'un système matriciel $[K]\{X\} = \{Y\}$ par une méthode itérative repose sur le calcul du résidu à l'étape n du calcul : $\{r\}_n = \{Y\} - [K]\{X\}_n$, où $\{X\}_n$ est le vecteur calculé à cette étape. Le coût limitant de l'algorithme est alors le coût du produit matrice-vecteur, qui, pour une matrice pleine de taille N , est proportionnel à N^2 . Dans la méthode des éléments de frontière la matrice $[K]$ est en l'occurrence pleine et non symétrique. C'est ce qui fait le coût de calcul par cette méthode.

Le principe de la méthode consiste à réorganiser le calcul du produit $[K]\{X\}$ grâce à la structure particulière des équations intégrales et au principe de leur discrétisation.

Voyons plus en détail l'origine du temps de calcul de ce produit matrice-vecteur. Si on se réfère à l'équation intégrale discrétisée 4.5, il apparaît que les termes du produit sont issus de la discrétisation d'intégrales du type

$$f(\underline{x}) = \int_S G(\underline{x}, \underline{y}) \psi(\underline{y}) \, dS_y \quad (5.1)$$

où ψ est une fonction quelconque, et G est une fonction liée à la solution fondamentale utilisée (voir chapitre 1).

Lors de la construction du maillage support de la discrétisation du problème, on utilise usuellement comme points de collocation \underline{x} les nœuds du maillage, et pour \underline{y} les points d'intégration des éléments (points de Gauss). Pour chaque point \underline{x} , le calcul de $f(\underline{x})$ nécessite de parcourir tous les points d'intégration du maillage : on calcule au point de collocation l'influence de tous les *pôles* \underline{y} , et ce calcul d'influence doit être réitéré pour chaque point. Le produit matrice-vecteur issu de cette méthode fait intervenir une matrice pleine et non symétrique. Le coût de calcul est alors en $O(N^2)$.

L'idée de la méthode multipôle rapide (voir [4]) est de permettre une accélération significative en utilisant une organisation des calculs "par paquets".

La méthode multipôle a été introduite typiquement pour traiter les problèmes d'influence d'une multitude de sources ou pôles (points d'intégration) sur un ensemble de points d'observation (point de collocation). L'application de cette méthode s'étend à une large classe de problèmes : électrostatique, électromagnétisme, gravitation, chimie, biologie,...

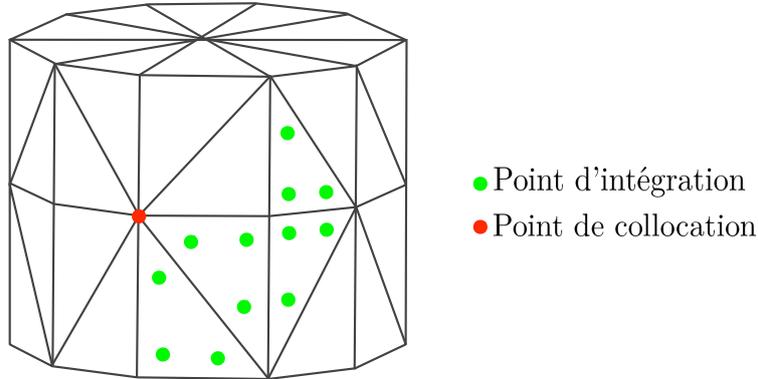


FIG. 5.1 – Point de collocation et points d'intégration pour un maillage triangulaire à 3 nœuds

Cette méthode est maintenant largement utilisée dans la pratique numérique des équations intégrales (voir [18]).

5.2 Principe

5.2.1 Développement de la solution fondamentale

On souhaite organiser le calcul "par paquets", en regroupant l'influence de points sources lointains. L'idée (voir [4] ou [18]) consiste à utiliser un développement du terme $G(\underline{x}, \underline{y})$ par rapport à des points de référence et permettant de découpler les variables \underline{x} et \underline{y} . Le développement tel qu'il est présenté dans [17] peut s'exprimer sous la forme générale suivante :

$$G(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_n^m(\hat{\underline{x}}) \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} O_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0) J_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}}) \quad (5.2)$$

où les termes I_n^m et O_n^m vont dépendre de la solution fondamentale utilisée.

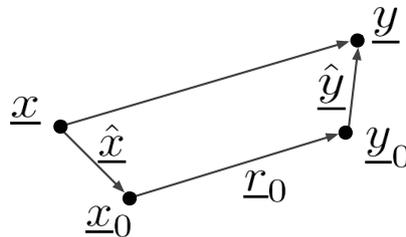


FIG. 5.2 – Points du développement multipôle

Dans le problème que nous étudions, la solution fondamentale est celle de Kelvin (voir équations

B.2). Cette solution dépend de termes en $\frac{1}{r} = \frac{1}{|\underline{y}-\underline{x}|}$. On peut donc donner un des développements donné par la littérature (voir [16] ou [18]) pour la fonction de Green :

$$G(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{|\underline{y}-\underline{x}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m(\hat{\underline{x}}) \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \overline{S_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0)} R_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}}) \quad (5.3)$$

$$\text{avec} \begin{cases} R_a^b(\underline{r}) = \frac{1}{(a+b)!} P_a^b(\cos \theta) e^{ib\phi} \rho^a \\ S_a^b(\underline{r}) = (a-b)! P_a^b(\cos \theta) e^{ib\phi} \frac{1}{\rho^{a+1}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \bar{z} \text{ désignant le conjugué de } z \\ \text{et } \underline{r} = (\rho, \theta, \phi) \text{ en coordonnées sphériques} \end{array} \quad (5.4)$$

Ce développement fait ici apparaître les fonctions associées de Legendre P_a^b (annexe C). Les fonctions R_a^b et S_a^b sont appelées *harmoniques solides*. On trouve également d'autres développements, voir par exemple [20] où un développement en série de Taylor complexe est utilisé.

On pourra se référer à l'annexe B pour le développement détaillé de la solution de Kelvin.

Ce type de développement n'est néanmoins valable que sous les conditions suivantes :

$$\begin{cases} |\hat{\underline{x}}| < |\underline{x}_0 - \underline{y}| \\ |\hat{\underline{y}}| < |\underline{y}_0 - \underline{x}| \end{cases} \quad (5.5)$$

De plus pour la mise en œuvre numérique, la sommation à l'infini doit être tronquée à un certain ordre p , que nous prendrons égal pour les deux séries. On peut alors majorer l'erreur commise lors de la troncature :

$$\left| G(\underline{x}, \underline{y}) - \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n R_n^m(\hat{\underline{x}}) \sum_{n'=0}^p \sum_{m'=-n'}^{n'} \overline{S_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0)} R_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}}) \right| \leq \frac{1}{R(\alpha-1)\alpha^{p+1}} \quad (5.6)$$

$$\text{avec} \begin{cases} |\hat{\underline{x}}| < R \text{ et } |\underline{r}_0 + \hat{\underline{x}}| > \alpha R \\ |\hat{\underline{y}}| < R \text{ et } |\underline{r}_0 + \hat{\underline{y}}| > \alpha R \end{cases} \quad (5.7)$$

Le développement multipôle ne sera donc possible que pour les points d'intégration qui vérifient les conditions 5.7. Dans le calcul des intégrales du type 5.1, on va ainsi mettre en œuvre la méthode multipôle pour les points d'intégration situés suffisamment loin du point de collocation courant. Pour les points d'intégration trop proches, une intégration usuelle sera faite.

5.2.2 Calcul de l'influence des pôles

Voyons maintenant comment s'effectue le calcul de l'intégrale 5.1 via le développement multipôle (voir [17], [19] ou [21]). On postule ici que les points de référence \underline{x}_0 et \underline{y}_0 ont été correctement choisis. On a alors, en reprenant le développement 5.2 :

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= \int_S G(\underline{x}, \underline{y}) \psi(\underline{y}) \, dS_y \\ &= \int_S \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_n^m(\hat{\underline{x}}) \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} O_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0) J_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}}) \psi(\underline{y}) \, dS_y \end{aligned} \quad (5.8)$$

Etape 1 (M2M) : Calcul du moment multipôle

Cette étape consiste à calculer un terme source placé en \underline{y}_0 et équivalent à la distribution des sources sur la surface S . On qualifie de "moment multipôle" le terme résultant de l'influence des sources. Voir figure 5.3.

$$\begin{aligned}
 f(\underline{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_n^m(\hat{\underline{x}}) \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} O_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0) \underbrace{\int_S J_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}}) \psi(\underline{y}) \, dS_y}_{\text{Moment } M_{n'}^{m'}(\underline{y}_0, S)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_n^m(\hat{\underline{x}}) \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} O_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0) M_{n'}^{m'}(\underline{y}_0, S)
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

On qualifie ce processus de M2M : *Multipole to Multipole*. Rappelons qu'il s'agit ici d'une étape locale, puisque le "diamètre" de la surface S doit respecter les conditions 5.7.

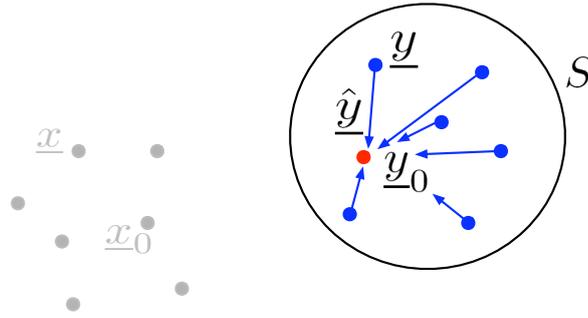


FIG. 5.3 – Calcul du moment multipôle des points de S par rapport à \underline{y}_0

Etape 2 (M2L) : Transfert

Il s'agit maintenant de calculer l'influence en \underline{x}_0 d'une source placée en \underline{y}_0 . Ce processus est qualifié de M2L : *Multipole to Local*. Voir figure 5.4.

$$\begin{aligned}
 f(\underline{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_n^m(\hat{\underline{x}}) \underbrace{\sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} O_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0) M_{n'}^{m'}(\underline{y}_0, S)}_{\text{Coefficient local } L_n^m(\underline{x}_0, S)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_n^m(\hat{\underline{x}}) L_n^m(\underline{x}_0, S)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Cette étape de transfert fait intervenir des points de référence \underline{x}_0 et \underline{y}_0 distants.

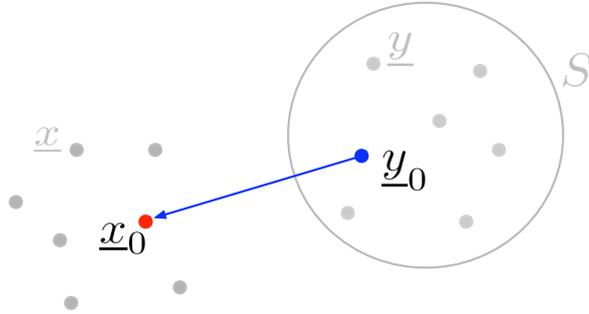


FIG. 5.4 – Etape de transfert

Etape 3 (L2L) : Fin

Pour l'étape finale, il faut redistribuer, au point de collocation, l'information alors située au point de référence \underline{x}_0 . C'est le processus L2L : *Local to Local*. L'information au point de référence \underline{x}_0 peut être redistribuée à tout un ensemble de points de collocation situés à proximité de celui-ci. Voir figure 5.5.

$$f(\underline{x}) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_n^m(\hat{x}) L_n^m(\underline{x}_0, S)}_{\text{Information localisée en } \underline{x}} \quad (5.11)$$

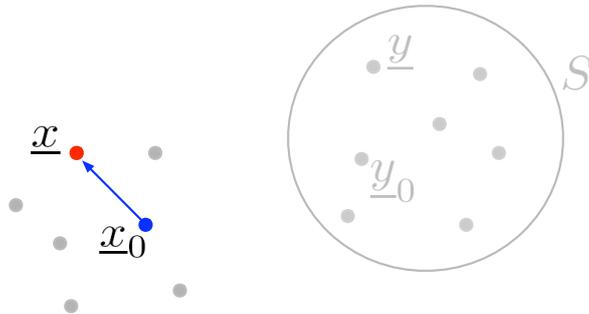


FIG. 5.5 – Etape finale : transfert au point de collocation

En résumé, la méthode multipôle nous a permis de condenser les effets d'une multitude de sources et de créer une source équivalente. L'effet de cette source est calculé en un point d'observation équivalent, et enfin redistribué localement aux points d'observation réels.

Dans la construction du produit matrice-vecteur du problème discrétisé, les termes seront donc calculés de façon accélérée en utilisant non plus les points d'intégration locaux, mais des points d'intégration fictifs équivalents permettant ainsi de traiter l'information par paquets.

5.3 Méthode multiniveau

L'objectif des algorithmes multipôle rapide est de systématiser le passage par points de référence. Nous présentons maintenant l'un d'eux, l'algorithme multiniveau. L'algorithme multipôle rapide multiniveau consiste à installer le maillage dans un ensemble de carré (en 2D) ou de cube (en 3D) de niveaux différents. On parle de cellules. Chaque niveau correspond à une dimension hiérarchique depuis le niveau 0 qui est une seule et même cellule englobant tout le maillage. La progression dans les niveaux se fait par division par 2 des dimensions de la cellule, et ce, jusqu'à une dimension paramétrée par le nombre de points de discrétisation dans la cellule de dernier niveau (voir figures 5.6 et 5.7). En outre, de façon systématique, les points de référence sont pris au centre des cellules.

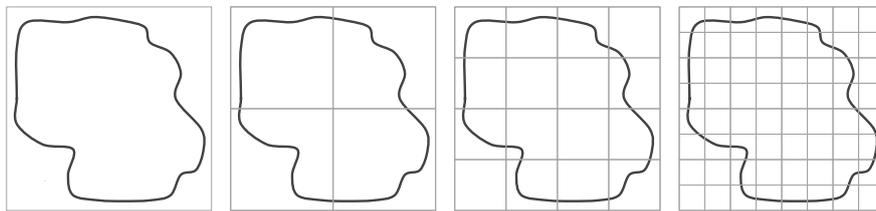


FIG. 5.6 – Construction des cellules de l'algorithme multiniveau : Niveaux 0 à 3

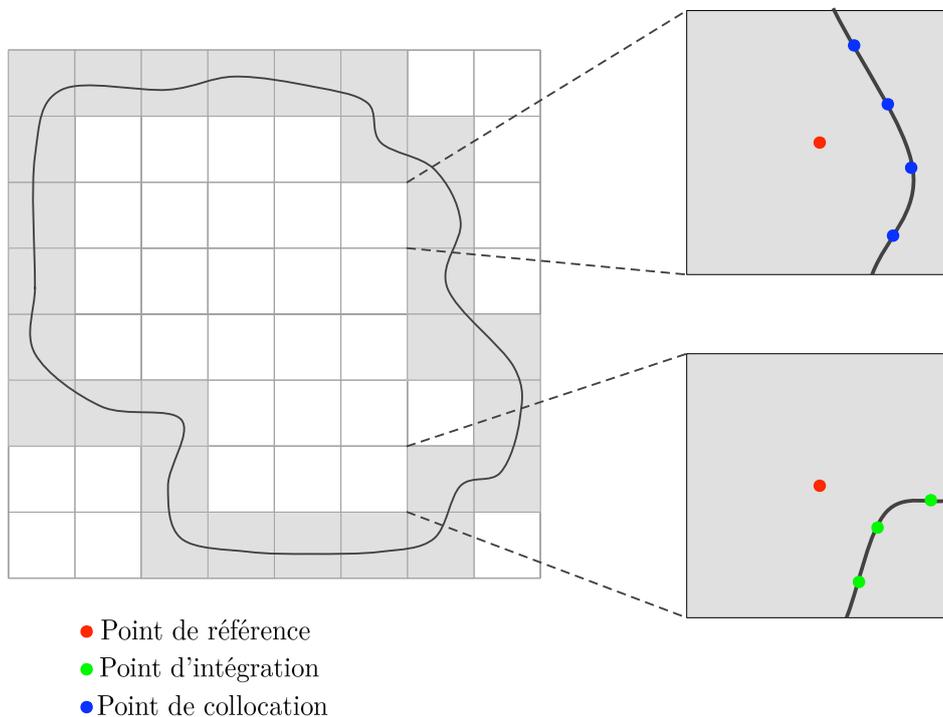


FIG. 5.7 – Dernier niveau

Il est donné dans [21] une description détaillée du fonctionnement de l'algorithme. Celui ci consiste à réaliser les étapes suivantes :

Etape 1 : Calcul des moments multipôle

Dans cette étape on calcule les moments multipôles pour les points sources situés dans les cellules de dernier niveau (figure 5.8).

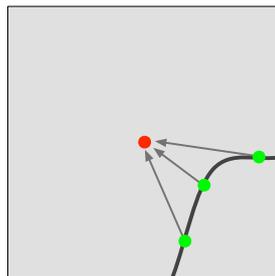


FIG. 5.8 – Etape 1

Etape 2 : Transfert vers les niveaux supérieurs

Les moments locaux sont "agrégés" vers les niveaux supérieurs et ce jusqu'aux cellules de niveau 2 (figure 5.9). Pour cela on utilise le processus **M2M**. Dans la littérature cette étape est qualifiée de **upward**.

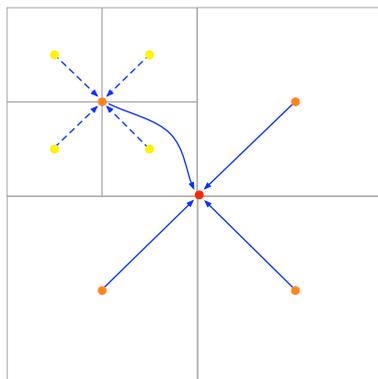


FIG. 5.9 – Etape 2

Etape 3 : Redescente vers les niveaux inférieurs

Maintenant que les influences des points sources ont été globalisées au niveau 2, il s'agit de construire leurs effets sur les points d'observation (points de collocation). Pour cela on utilise une

méthode de redescente dans la hiérarchie des cellules. Pour une cellule donnée, son moment est calculé à partir du moment de la cellule parente et des moments des cellules formant la liste d'interaction de la cellule considérée.

- La liste d'interaction d'une cellule courante est composée de l'ensemble des cellules de même niveau vérifiant deux conditions : ne pas être adjacente, ni par arrête, ni par sommet, et être issue d'une cellule parente elle même voisine de la cellule parente de la cellule courante (figure 5.10).

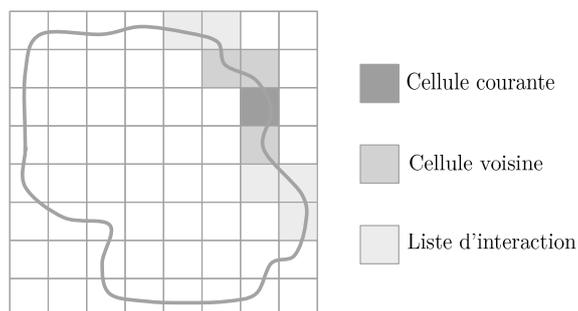


FIG. 5.10 – Désignation des cellules

- Dans l'étape de descente ou **downward** on considère une cellule C de niveau n . On utilise le processus de transfert **M2L** pour calculer le moment de la cellule parente C_p grâce aux cellules de niveaux $n - 1$ dans la liste d'interaction de C_p . Puis, le moment de C_p est transféré à la cellule C par processus **L2L**. Enfin on ajoute également les moments des cellules de niveau n formant la liste d'interaction de C . Ce processus est itéré jusqu'aux cellules de dernier niveau (figure 5.11).

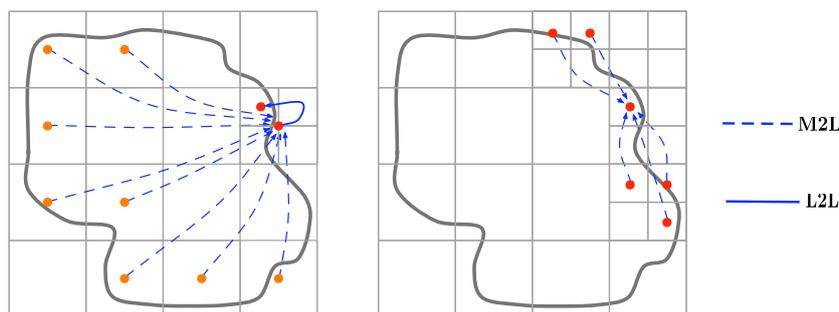


FIG. 5.11 – Etape 3

Etape 4 : Finalisation

Une fois que les moments des points de référence des cellules de dernier niveau ont été calculés, on transfère au point d'observation le moment du point de référence correspondant. On ajoute également les termes d'interaction proche, c'est-à-dire les termes d'intégration dans les cellules voisines (figure 5.12).

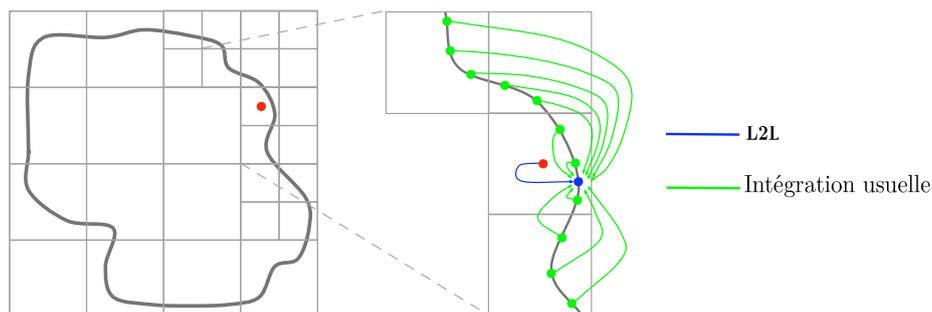


FIG. 5.12 – Etape 4

Complexité

Dans la méthode multipôle rapide multiniveau, dans le cas statique, la complexité est égale à $O(N)$ où N est le nombre de degrés de liberté du problème. On peut comparer cela à la proportionnalité en $O(N^{\frac{4}{3}})$ pour un algorithme mononiveau, ou à $O(N^2)$ pour la mise en œuvre directe de la méthode des équations intégrales. Les améliorations apportées d'une part par la méthode multipôle et d'autre part par la méthode multiniveau sont donc très significatives.

On peut en outre noter deux résultats remarquables : la complexité est indépendante, d'une part, de l'ordre de troncature du développement multipôle, et d'autre part du nombre maximum de DDL dans une cellule de dernier niveau (voir [17]).

La méthode multipôle rapide apporte donc une solution pratique très efficace à la mise en œuvre numérique des méthodes intégrales.

Chapitre 6

Mise en œuvre pratique

Nous allons détailler ici les différentes étapes de la mise en œuvre pratique de la méthode. Au cours de cette étude plusieurs logiciels et langage ont été utilisés : Cast3M et Medit pour le maillage et la visualisation, et le langage Fortran pour la programmation de la méthode elle-même.

6.1 Maillage et construction des cellules

Pour commencer il faut élaborer le maillage support des calculs. Etant donné la simplicité de la géométrie du problème étudié, le mailleur de Cast3M a largement suffi. La maillage produit étant alors traité avec une procédure en Fortran pour produire deux fichiers : l'un étant un fichier de maillage utilisable dans le logiciel de visualisation Medit, et l'autre étant un fichier de données destiné à être utilisé par l'algorithme de la méthode lui-même.

La première étape de la mise en œuvre de la méthode multipôle rapide est de construire les cellules subdivisant les degrés de liberté du maillage de base. Le critère d'arrêt vis à vis de la décroissance de la taille des cellules étant donné par un nombre minimal de degrés de liberté que l'on souhaite dans les cellules de dernier niveau. Notons que ce critère est un critère global. Ainsi

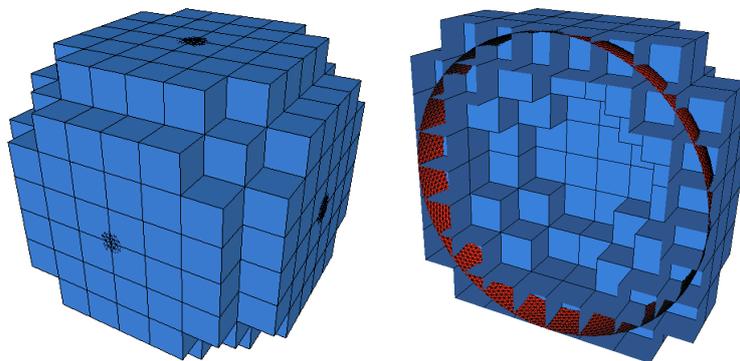


FIG. 6.1 – Cellules de dernier niveau relatives à une sphère

si la géométrie du maillage fait qu'une cellule particulière ne contient que peu de degrés de liberté alors cet algorithme de subdivision s'arrête tôt. Le nombre moyen de degré de liberté contenus au final dans les cellules peut donc être éloigné de l'objectif que l'on souhaiterait atteindre. Sur les figures on peut observer le maillage original auquel se superposent les cellules de dernier niveau générées par l'algorithme. La représentation de ces cellules est "fictive" dans la mesure où dans le code une cellule est simplement une collection d'éléments ainsi que de liens de *filiation* et de *parenté* (voir paragraphe 5.3).

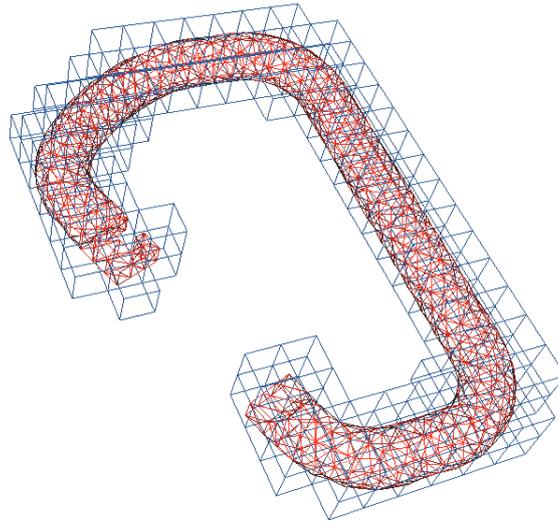


FIG. 6.2 – Cellules de dernier niveau relatives à un mousqueton d'escalade

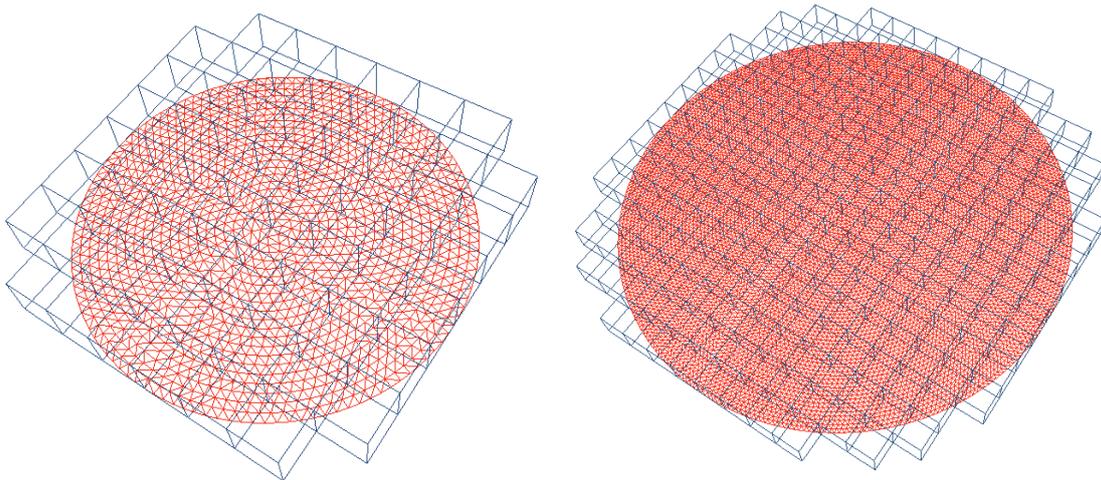


FIG. 6.3 – Cellules de dernier niveau relatives à la fissure étudiée pour différents maillages

seul et même indice i .

La méthode utilisée pour résoudre cette équation est la méthode itérative GMRES. Dans le principe, cette méthode est fondée sur la minimisation itérative du résidu $\{r\}_n = \{\sigma\} - [A]\{\phi\}_n$ où $\{\phi\}_n$ est un vecteur candidat à l'itération n . On constate donc que la matrice $[A]$ n'intervient que dans l'expression de son produit avec un vecteur représentant la solution approchée au problème. La méthode consiste donc à calculer le résidu de l'équation 6.1 où ϕ y désignerait une solution approchée à une itération donnée. C'est ici dans l'accélération de ce calcul qu'intervient la méthode multipôle rapide (voir chapitre 5).

6.2.2 Interactions proches et interactions lointaines

On peut tout d'abord rappeler que la condition d'écriture du développement multipôle " \underline{y} suffisamment loin de \underline{x} " est automatisée dans l'algorithme par la construction des cellules. On utilise en particulier ce développement pour toutes les cellules non voisines d'une cellule donnée, l'intégration n'étant alors plus singulière. Pour les cellules voisines, comme nous l'avons vu, c'est une intégration singulière en valeur principale de Cauchy qui est pratiquée.

Si l'on note $I_i(\underline{x}) = \alpha \int_{\Gamma}^{\star} D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \left[\lambda \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{r} \right) n_i(\underline{y}) + \mu \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \right) n_k(\underline{y}) \right] dS_y$ alors on peut décomposer l'intégrale en deux parties : $I_i(\underline{x}) = I_i^{\text{proche}}(\underline{x}) + I_i^{\text{FMM}}(\underline{x})$ avec :

$$\begin{cases} I_i^{\text{proche}}(\underline{x}) = \alpha \sum_{C \in \mathcal{V}(C_x)} \int_{\Gamma \cap C}^{\star} D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \left[\lambda \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{r} \right) n_i(\underline{y}) + \mu \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \right) n_k(\underline{y}) \right] dS_y \\ I_i^{\text{FMM}}(\underline{x}) = \alpha \sum_{C \notin \mathcal{V}(C_x)} \int_{\Gamma \cap C} D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \left[\lambda \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{r} \right) n_i(\underline{y}) + \mu \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \right) n_k(\underline{y}) \right] dS_y \end{cases} \quad (6.3)$$

Où C_x désigne la cellule contenant le point de collocation \underline{x} et $\mathcal{V}(C_x)$ l'ensemble de ses cellules voisines.

Le terme d'interactions lointaines I^{FMM} est traité par la méthode multipôle rapide, alors que le terme d'interactions proches I^{proche} est traité par la méthode des éléments de frontière usuelle.

Remarque importante : Il faut ici faire une remarque importante concernant le choix des points de collocation. Les quantités qui figurent dans les intégrales que nous écrivons doivent être continues. Or dans le cas de l'utilisation d'éléments finis linéaires les gradients sont continus dans les éléments et discontinus à la frontière entre éléments. On ne peut donc pas faire de collocation aux nœuds du maillage. Il faut que les points de collocation appartiennent aux éléments.

6.2.3 Algorithme de la partie multipôle

Résumons maintenant les différentes étapes dans le calcul qui sont traitées par la méthode multipôle multiniveau et qui ont été présentées à la section 5.3. On pourra se référer à la présentation donnée dans [19] pour l'électromagnétisme.

Pour commencer considérons le fonctionnement de l'algorithme sur 2 niveaux uniquement, qu'on peut schématiser comme sur la figure 6.4.

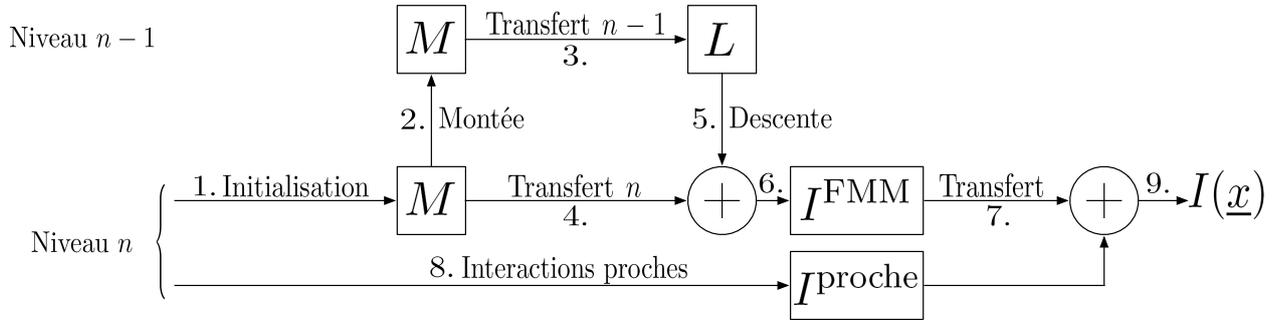


FIG. 6.4 – Algorithme sur les deux derniers niveaux

L'algorithme fonctionne donc de la façon suivante :

1. **Initialisation** au niveau n , c'est-à-dire calcul des moments multipôles de l'ensemble des cellules de ce niveau. Le moment multipôle M d'une cellule C sur la frontière Γ du domaine, représente l'influence des sources situées dans $\Gamma \cap C$ sur l'extérieur. On parle aussi de *fonctions de radiations*.
2. **Montée** au niveau supérieur pour calculer les moments multipôles des cellules parentes.
3. **Transfert $n - 1$** pour calculer les coefficients locaux L des cellules au niveau $n - 1$. Pour une cellule C' , le coefficient local représente l'influence des points sources de Γ loin de C' sur $\Gamma \cap C'$.
4. **Transfert n** pour calculer les coefficients locaux des cellules de niveau n et situées dans la liste d'interaction.
5. **Descente** vers le niveau n pour calculer le coefficient local d'une cellule à partir du coefficient de la cellule parente.
6. **Sommation** des coefficients locaux.
7. **Transfert** au point de collocation du coefficient local exprimé au centre de la cellule de dernier niveau.
8. **Interactions proches** pour les cellules voisines, c'est-à-dire intégration usuelle.
9. **Sommation finale** des influences lointaines et proches.

Dans l'algorithme multiniveau l'idée consiste à répéter ce schéma sur un grand nombre de niveaux de façon à accélérer encore le calcul. Cette accélération provient du fait que plus le nombre de niveaux est grand, plus le nombre de points sources dans les cellules de derniers niveau est faible. Le calcul des moments au dernier niveau est donc rapide et on profite alors pleinement du principe de découpage des degrés de liberté du maillage. La méthode permet alors de traiter efficacement les informations par paquets et donc de conduire rapidement au terme $I^{\text{FMM}}(\underline{x})$ en accélérant le produit matrice-vecteur équivalent.

En développant un nombre plus important de niveaux, l'algorithme peut se schématiser comme sur la figure 6.5.

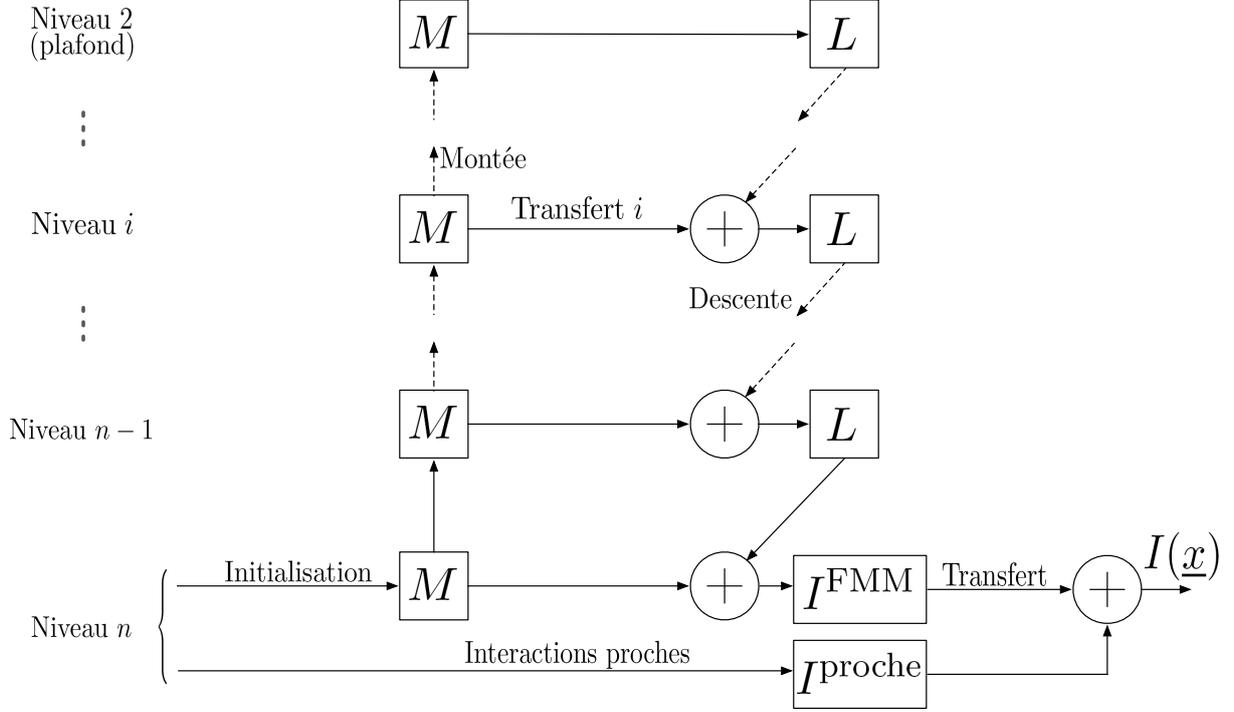


FIG. 6.5 – Algorithme multiniveau

6.2.4 Calcul des moments - Processus M2M

On se place ici dans le cas d'interactions éloignées. On considère donc une cellule C de centre \underline{y}_0 qui ne contient pas le point de collocation \underline{x} . Le terme $\frac{1}{r}$ n'est donc plus singulier. L'influence des points sources contenus dans cette cellule est donné par le moment multipôle d'expression :

$$\text{Pour tout } (n', m') \in \{0, \dots, p\} \times \{-n', \dots, n'\} :$$

$$M_{n'}^{m'}(\underline{y}_0, \Gamma \cap C) = \alpha \int_{\Gamma \cap C} D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \left[\lambda \frac{\partial R_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}})}{\partial y_k} n_i(\underline{y}) + \mu \frac{\partial R_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}})}{\partial y_i} n_k(\underline{y}) \right] dS_y \quad (6.4)$$

Où les dérivées des harmoniques solides peuvent être calculées facilement d'après les relations écrites en annexe B.

Sous forme discrétisée on obtient alors :

$$M_{n'}^{m'}(\underline{y}_0, \Gamma \cap C) = \alpha \sum_{E_e \in C} \sum_{p=1}^3 \int_{E_e} D_{ak} \varphi_p(\underline{\xi}) \phi_a^{m(e,p)} \left[\lambda \frac{\partial R_{n'}^{m'}(\hat{y})}{\partial y_k} n_i(\underline{y}) + \mu \frac{\partial R_{n'}^{m'}(\hat{y})}{\partial y_i} n_k(\underline{y}) \right] dS_y \quad (6.5)$$

où $m(e, p)$ désigne le numéro global du nœud numéroté par p dans l'élément triangulaire E_e . Les intégrales régulières qui apparaissent ici sont calculées par intégration numérique par la méthode de Gauss.

Précisons la notation $E_e \in C$ qui désigne un élément E_e comme appartenant à la cellule C . Comme la construction des cellules est systématique, certains éléments sont contenus dans plusieurs cellules. Il a été choisi de désigner un élément par son centre. Ainsi $E_e \in C$ lorsque le centre de l'élément est situé dans la cellule. L'idée est schématisée figure 6.6.

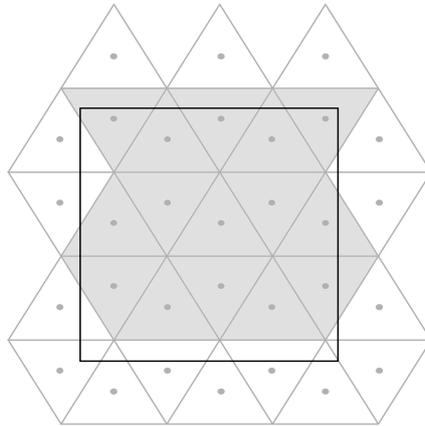


FIG. 6.6 – Éléments définis comme étant dans la cellule (ici en noir).

Pour un ordre de troncature p , on est donc amené à calculer $(p + 1)^2$ moments pour chaque cellule. On calcul donc numériquement un vecteur de moments multipôles à $(p + 1)^2$ composantes pour chaque cellule de dernier niveau. Si l'on se réfère à l'algorithme décrit sur la figure 6.5, on constate que ce vecteur des moments intervient seulement dans le terme de transfert aux cellules de même niveau et dans le terme de montée. On ne le stocke donc en mémoire que le temps de ces deux opérations.

$$\left[\begin{array}{c} M_0^0 \\ \vdots \\ M_i^{-i} \\ M_i^{-i+1} \\ \vdots \\ M_i^0 \\ \vdots \\ M_i^{i-1} \\ M_i^i \\ \vdots \\ M_p^p \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Moment d'ordre } 0 \\ \\ \\ \\ \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 2i + 1 \text{ moments d'ordre } i \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-ième moment d'ordre } p \end{array} \right.$$

6.2.5 Calcul des coefficients locaux - Processus M2L

Le moment local d'une cellule C_0 relativement à une cellule C est donnée par la relation :

$$\text{Pour tout } (n, m) \in \{0, \dots, p\} \times \{-n, \dots, n\}$$

$$L_n^m(\underline{x}_0, \Gamma \cap C) = \sum_{n'=0}^p \sum_{m'=-n'}^{n'} \overline{S_{n'+n}^{m'+m}(r_0)} M_{n'}^{m'}(\underline{y}_0, \Gamma \cap C) \quad (6.6)$$

Ce terme représente l'influence des sources contenues dans la cellule C de centre \underline{y}_0 , c'est-à-dire de son moment sur la cellule C_0 de centre \underline{x}_0 . Les centres des cellules étant liés par la relation :

$$\underline{r}_0 = \underline{y}_0 - \underline{x}_0.$$

Ici encore nous avons à calculer $(p+1)^2$ coefficients locaux pour constituer le vecteur des coefficients locaux d'une cellule C_0 relativement à une cellule dont on a déjà calculé les moments. Numériquement on réalise cette opération en multipliant le vecteur des moments calculé à l'étape précédente par une matrice que nous appelons *matrice de transfert*, notée $[\mathbb{T}(r_0)]$.

$$\begin{bmatrix} L_0^0 \\ \vdots \\ L_j^{-j} \\ L_j^{-j+1} \\ \vdots \\ L_j^0 \\ \vdots \\ L_j^{j-1} \\ L_j^j \\ \vdots \\ L_p^p \end{bmatrix} = [\mathbb{T}(r_0)] \begin{bmatrix} M_0^0 \\ \vdots \\ M_i^{-i} \\ M_i^{-i+1} \\ \vdots \\ M_i^0 \\ \vdots \\ M_i^{i-1} \\ M_i^i \\ \vdots \\ M_p^p \end{bmatrix}$$

où la matrice de transfert s'exprime de la façon suivante :

$$[\mathbb{T}(r_0)] = \begin{bmatrix} \overline{S_0^0} & \dots & \overline{S_i^{-i}} & \overline{S_i^{-i+1}} & \dots & \overline{S_i^0} & \dots & \overline{S_i^{-1}} & \overline{S_i^i} & \dots & \overline{S_p^p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{S_j^{-j}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{-i-j}} & \overline{S_{i+j}^{-i-j+1}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{-j}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{i-j-1}} & \overline{S_{i+j}^{i-j}} & \dots & \overline{S_{p+j}^{p-j}} \\ \overline{S_j^{-j+1}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{-i-j+1}} & \overline{S_{i+j}^{-i-j+2}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{-j+1}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{i-j}} & \overline{S_{i+j}^{i-j+1}} & \dots & \overline{S_{p+j}^{p-j+1}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{S_j^0} & \dots & \overline{S_{i+j}^{-i}} & \overline{S_{i+j}^{-i+1}} & \dots & \overline{S_{i+j}^0} & \dots & \overline{S_{i+j}^{i-1}} & \overline{S_{i+j}^i} & \dots & \overline{S_{p+j}^p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{S_j^{j-1}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{-i+j-1}} & \overline{S_{i+j}^{-i+j}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{j-1}} & \dots & \overline{S_{i+j}^{i+j-2}} & \overline{S_{i+j}^{i+j-1}} & \dots & \overline{S_{p+j}^{p+j-1}} \\ \overline{S_j^j} & \dots & \overline{S_{i+j}^{-i+j}} & \overline{S_{i+j}^{-i+j+1}} & \dots & \overline{S_{i+j}^j} & \dots & \overline{S_{i+j}^{i+j-1}} & \overline{S_{i+j}^{i+j}} & \dots & \overline{S_{p+j}^{p+j}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{S_p^p} & \dots & \overline{S_{i+p}^{-i+p}} & \overline{S_{i+p}^{-i+p+1}} & \dots & \overline{S_{i+p}^p} & \dots & \overline{S_{i+p}^{i+p-1}} & \overline{S_{i+p}^{i+p}} & \dots & \overline{S_{p+p}^{p+p}} \end{bmatrix}$$

On remarque qu'une fois fixé l'ordre de troncature, cette matrice de transfert n'est une fonction que de la distance r_0 . Utilisée dans le processus M2L, c'est-à-dire lors de transferts à un niveau donné, cette matrice est donc calculée grâce aux positions entre les centres de deux cellules éloignées.

Pour avoir les coefficients locaux totaux, $L_n^m(\underline{x}_0)$, de la cellule C_0 il faut ensuite sommer tous les coefficients locaux $L_n^m(\underline{x}_0, \Gamma \cap C)$ où C parcourt l'ensemble des cellules de même niveau situées dans la liste d'interaction $\mathcal{A}(C_0)$ de C_0 .

$$\forall (n, m) \in \{0, \dots, p\} \times \{-n, \dots, n\} \quad L_n^m(\underline{x}_0) = \sum_{C \in \mathcal{A}(C_0)} L_n^m(\underline{x}_0, \Gamma \cap C) \quad (6.7)$$

6.2.6 Calcul du terme de descente - Processus L2L

Pour calculer le terme de descente d'une cellule parente, dont on connaît le vecteur des coefficients locaux, vers une cellule fille, on utilise la relation :

$$I^{\text{distribué}}(\underline{x}) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n R_n^m(\hat{x}) L_n^m(\underline{x}_0) \quad (6.8)$$

Ce terme reçoit l'exposant "*distribué*" car cette relation est la même dans le calcul de distribution au dernier niveau du coefficient local relatif au centre \underline{x}_0 d'une cellule vers un point \underline{x} de collocation. On change en quelque sorte la localité de l'information au sein d'une même cellule, d'un niveau hiérarchique donné vers un niveau inférieur.

6.2.7 Détails du calcul des interactions proches

Le terme d'interaction proche est :

$$I_i^{\text{proche}}(\underline{x}) = \alpha \sum_{C \in \mathcal{V}(C_x)} \int_{\Gamma \cap C}^{\star} D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \left[\lambda \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{r} \right) n_i(\underline{y}) + \mu \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \right) n_k(\underline{y}) \right] dS_y \quad (6.9)$$

Dans cette somme, il faut distinguer les cellules voisines de la cellule C_x où l'intégration est pratiquée numériquement par la méthode de Gauss et la cellule C_x elle-même où l'intégration doit être faite en valeurs principales de Cauchy. Or dans le cas étudié on peut trouver une expression analytique à cette dernière intégrale (voir annexe D).

Conclusions

Au cours de cette étude, nous avons présenté la méthode des équations intégrales dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture ainsi que sa mise en œuvre numérique. La méthode des éléments de frontière (BEM) présente des avantages tout à fait intéressants par rapport à la méthode des éléments finis (FEM) pour un certain type de problèmes. En outre l'amélioration apportée par l'algorithme multipôle rapide (FMM) est déterminante et pallie les difficultés numériques apparaissant dans les modèles BEM. On peut ainsi aborder la résolution de problèmes de grandes tailles (de l'ordre de quelques millions de DDL) même sur un PC classique.

L'algorithme FMM ouvre également d'autres perspectives. On peut envisager l'enrichissement de bases FEM dans des configurations géométriques assez générales par le calcul de solutions exactes, ou également le calcul rapide de résidus sur une structure complète pour estimer la qualité d'une solution via une formulation indépendante du modèle FEM. On peut également l'utiliser pour une homogénéisation numérique dans le cadre de la simulation de matériaux composites 3D.

Cette étude a constitué un apprentissage de méthodes nouvelles (méthodes intégrales, FMM) en vue de développements et d'applications dans un contexte différent lors d'une thèse portant sur la propagation d'ondes 3D et l'inversion de type contrôle non destructif.

Annexe A

Cas d'une fissure plane

On développe ici une simplification de l'équation générale d'une fissure, dans le cas où celle-ci est plane. Dans le cas général on a :

$$\text{Pour } \underline{x} \in \Gamma : \sigma_2^\infty n_i(\underline{x}) = n_j(\underline{x}) \int_\Gamma^\star C_{ijkl} D_{lb} \phi_a(\underline{y}) \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y \quad (\text{A.1})$$

En utilisant une intégration par partie on peut écrire que :

$$\int_\Gamma D_{lb} \phi_a(\underline{y}) \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y = \int_\Gamma \phi_a(\underline{y}) D_{bl} \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) \, dS_y$$

car sur le bord de la fissure $\phi|_{\partial\Gamma} = 0$. De plus $D_{bl} \Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) = \Sigma_{ab,l}^k(\underline{x}, \underline{y}) n_b(\underline{y})$ car $\Sigma_{ab,b}^k(\underline{x}, \underline{y}) = 0$. De plus $\Sigma_{ab,l}^k(\underline{x}, \underline{y}) n_b(\underline{y}) = (\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) n_b(\underline{y}))_{,l}$.

Rappelons alors que la contrainte s'exprime comme :

$$\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} [3r_{,a} r_{,k} r_{,b} + (1-2\nu)(\delta_{ak} r_{,b} + \delta_{bk} r_{,a}(\underline{x}) - \delta_{ab} r_{,k})]$$

Or précisément dans un cas plan $r_{,\alpha} n_\alpha = \frac{r_\alpha}{r} n_\alpha = 0$ puisque la normale sortante \underline{n} est localement normale au vecteur \underline{r} qui est lui contenu dans le plan. Ainsi on a la simplification :

$$\Sigma_{ab}^k(\underline{x}, \underline{y}) n_b(\underline{y}) = \frac{-(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \underbrace{\left[n_k \frac{r_b}{r^3} - n_a \frac{r_k}{r^3} \right]}_{D_{ka} \frac{1}{r}}$$

Si on pose $A = \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)}$, on se ramène alors à l'expression :

$$\text{Pour } \underline{x} \in \Gamma : \sigma_2^\infty n_i(\underline{x}) = -A n_j(\underline{x}) \int_\Gamma^\star C_{ijkl} D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{1}{r} \right) \, dS_y \quad (\text{A.2})$$

Notons que l'argument qui a permis d'établir cette expression est le fait que localement (c'est-à-dire au point \underline{y}) le vecteur \underline{n} est normal à \underline{r} . C'est le cas bien sûr si la fissure est plane, mais c'est aussi le cas si la fissure est discrétisée par des éléments triangulaires et que le point de collocation \underline{x}

appartient à cet élément.

On peut chercher à simplifier encore cette expression en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{1}{r} \right) n_j(\underline{x}) &= (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} - \mu \delta_{ik} \delta_{jl} - \mu \delta_{il} \delta_{jk}) \frac{-r_l}{r^3} n_j(\underline{x}) \\ &= -\lambda \frac{r_k}{r^3} n_i(\underline{x}) - \mu \frac{r_i}{r^3} n_k(\underline{x}) \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation suivante :

$$\text{Pour } \underline{x} \in \Gamma : \sigma_2^\infty n_i(\underline{x}) = \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_\Gamma^\star D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \left[\lambda \frac{r_k}{r^3} n_i(\underline{x}) + \mu \frac{r_i}{r^3} n_k(\underline{x}) \right] dS_y$$

Notons enfin qu'on peut écrire la normale au point \underline{x} ou au point \underline{y} indifféremment. On obtient alors, en contractant les dérivations :

$$\boxed{\text{Pour } \underline{x} \in \Gamma : \sigma_2^\infty n_i(\underline{x}) = \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_\Gamma^\star D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \left[\lambda \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{r} \right) n_i(\underline{y}) + \mu \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \right) n_k(\underline{y}) \right] dS_y} \quad (\text{A.3})$$

Annexe B

Solution fondamentale de Kelvin

La solution fondamentale de Kelvin est définie comme la réponse d'un solide élastique isotrope infini à l'application d'une force ponctuelle :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) + \delta(\underline{y} - \underline{x}) \underline{e}_k = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Solutions dont l'expression a été donnée :

$$\begin{cases} U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [r_{,i}r_{,k} + (3-4\nu)\delta_{ik}] \\ T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} [3r_{,i}r_{,k}r_{,j} + (1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}(\underline{x}) - \delta_{ij}r_{,k})] n_j(\underline{x}) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Etant donné que l'on connaît un développement en série pour le terme $\frac{1}{r}$, nous allons essayer d'exprimer la solution de Kelvin au moyen de celui-ci (voir [16]).

On pose $A = 16\pi\mu(1-\nu)$.

Développement du déplacement

On peut écrire $\frac{r_{,i}r_{,k}}{r} = \frac{r_{,i}r_k}{r^2} = r_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right)$ donc :

$$U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{A} \left[r_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + (3-4\nu) \frac{\delta_{ik}}{r} \right] \quad (\text{B.3})$$

En reprenant alors le développement de la fonction de Green (équation 5.3) on peut écrire le développement du déplacement de Kelvin en séries d'harmoniques solides :

$$U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[(3-4\nu)\delta_{ik} R_n^m(\hat{\underline{x}}) + r_k \frac{\partial}{\partial x_i} R_n^m(\hat{\underline{x}}) \right] \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (-1)^{n'} \overline{S_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0)} R_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}}) \quad (\text{B.4})$$

Développement du vecteur contrainte

Le vecteur contrainte est défini par $T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = C_{ijab} \frac{\partial}{\partial y_b} U_a^k(\underline{x}, \underline{y}) n_j(\underline{y}) = \Sigma_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y}) n_j(\underline{y})$ et le vecteur $\underline{r} = \hat{\underline{x}} + \underline{r}_0 + \hat{\underline{y}}$. Ainsi d'après le développement du déplacement, la contrainte s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y}) &= \frac{C_{ijab}}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial R_n^m}{\partial x_a}(\hat{\underline{x}}) \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (-1)^{n'} \overline{S_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0)} \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial y_b} R_{n'}^{m'}(\hat{\underline{y}}) \\ &+ \frac{1}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[(3-4\nu) \delta_{ak} R_n^m(\hat{\underline{x}}) + r_k \frac{\partial R_n^m}{\partial x_a}(\hat{\underline{x}}) \right] \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (-1)^{n'} \overline{S_{n'+n}^{m'+m}(\underline{r}_0)} \frac{\partial R_{n'}^{m'}}{\partial y_b}(\hat{\underline{y}}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Harmoniques solides et fonctions de Legendre

On rappelle que le lien entre les fonctions de Legendre et les harmoniques solides (complexes) est donné par :

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \{-a, \dots, 0, \dots, a\} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_a^b(\underline{r}) = \frac{1}{(a+b)!} P_a^b(\cos \theta) e^{ib\phi} \rho^a \\ S_a^b(\underline{r}) = (a-b)! P_a^b(\cos \theta) e^{ib\phi} \frac{1}{\rho^{a+1}} \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

Où \underline{r} est exprimé en coordonnées sphériques $\underline{r} = (\rho, \theta, \phi)$.

Remarque : Le passage des coordonnées cartésiennes $\underline{r} = (x, y, z)$ aux coordonnées sphériques se fait grâce aux relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

Dérivées des harmoniques solides

Précisons enfin comment se calculent les dérivées des harmoniques solides qui figurent dans le développement de la solution fondamentale. On utilise pour cela la relation de récurrence qui est donné dans [21]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z_1} R_n^m(\underline{z}) = \frac{1}{2} (R_{n-1}^{m-1}(\underline{z}) - R_{n-1}^{m+1}(\underline{z})) \\ \frac{\partial}{\partial z_2} R_n^m(\underline{z}) = \frac{i}{2} (R_{n-1}^{m-1}(\underline{z}) + R_{n-1}^{m+1}(\underline{z})) \\ \frac{\partial}{\partial z_3} R_n^m(\underline{z}) = R_{n-1}^m(\underline{z}) \end{array} \right. \quad (\text{B.8})$$

Annexe C

Fonctions de Legendre

Les fonctions associées de Legendre interviennent dans les développements utilisés dans la méthode multipôle. Elles se définissent grâce aux polynômes de Legendre.

Polynôme de Legendre

Le polynôme de Legendre d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (\text{C.1})$$

Ces polynômes étant bien connus, on peut les exprimer plus rapidement via deux types de relations :

- La formule de Rodrigues : $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$
- Une relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_n(x) = \frac{1}{n} [(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)] \\ P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Fonctions associées

Les fonctions de Legendre associées d'ordre $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ sont définies sur $[-1; 1]$ par :

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (\text{C.3})$$

où l'on notera que m désigne un indice et non un exposant.

D'après la formule de Rodrigues : $P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n$

Enfin, dans le développement de la fonction de Green 5.3 on utilise des indices négatifs pour m , or on a la relation :

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (\text{C.4})$$

Annexe D

Intégration singulière analytique sur l'élément triangulaire

Nous détaillons ici l'intégration analytique du terme d'interaction sur l'élément qui contient le point de collocation. L'intégration, écrite dans le cas général en valeur principale de Cauchy, peut en fait se simplifier et avoir une expression analytique dans le cas d'éléments triangulaires. Nous avons dit que la collocation est faite en des points intérieurs aux éléments. Il y a donc pour chaque point de collocation, qu'une seule intégrale singulière à calculer.

Si l'on considère l'élément T du maillage contenant un point de collocation X_c , l'intégrale à calculer est la suivante :

$$I_i(X_c, T) = \alpha \int_T^\star D_{ak} \phi_a(\underline{y}) \left[\lambda \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{r} \right) n_i(\underline{y}) + \mu \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \right) n_k(\underline{y}) \right] dS_y \quad (\text{D.1})$$

Or dans le cas d'une interpolation linéaire le gradient du déplacement est constant dans l'élément. La géométrie étudiée étant de plus plane, le terme $D_{ak} \phi_a(\underline{y}) n_{i/k}(\underline{x})$ peut donc sortir de l'intégrale. Le problème consiste donc à calculer analytiquement l'intégrale type suivante :

$$I(j) = \int_T^\star \frac{1}{y_j} \left(\frac{1}{r} \right) dS_y = \int_T^\star \frac{-r_j}{r^3} dS_y \quad (\text{D.2})$$

Cas $j = 3$

Dans le cas où l'indice j désigne la normale à la fissure, on sait que r_3 est nul car \underline{r} est un vecteur contenu dans la plan.

Ainsi :

$$I(3) = 0 \quad (\text{D.3})$$

Cas $j = 1$ ou 2

On se place dans un système de coordonnées polaire (r, θ) dont l'origine est au point de collocation X_c et l'axe des abscisses est défini par le projeté de X_c sur le coté P_2P_3 du triangle.

En coordonnées polaires on a :

$$\begin{cases} r_1 = y_1 - x_1 = r \cos \theta \\ r_2 = y_2 - x_2 = r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

En exprimant l'intégrale en valeur principale de Cauchy grâce à un petit paramètre ε destiné à tendre vers 0, on se ramène au calcul de l'intégrale :

$$I(j) = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^{f(\theta)} \frac{-r_j}{r^2} dr d\theta \quad (\text{D.5})$$

où la fonction f permet de décrire l'élément triangulaire.

On décompose ensuite l'intégrale sur trois domaines I , II et III dans l'élément T définis sur la figure D.1 :

$$I(j) = \int_I^{\star} \frac{-r_j}{r^3} dS_y + \int_{II}^{\star} \frac{-r_j}{r^3} dS_y + \int_{III}^{\star} \frac{-r_j}{r^3} dS_y \quad (\text{D.6})$$

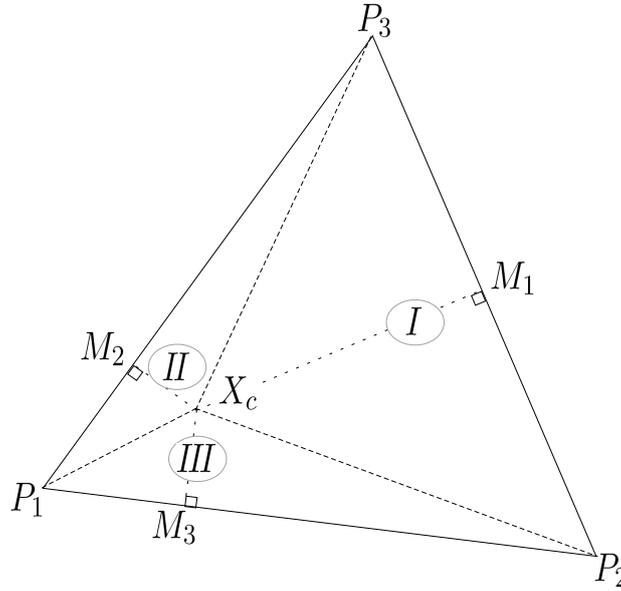


FIG. D.1 – Éléments triangulaire et domaines types définis sur T

Pour définir les domaines I , II et III , on définit les angles et les distances suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{X_c M_1}, \overrightarrow{X_c P_3}) = \alpha_1 \\ (\overrightarrow{X_c M_1}, \overrightarrow{X_c M_2}) = \alpha_2 \\ (\overrightarrow{X_c M_1}, \overrightarrow{X_c P_1}) = \alpha_3 \\ (\overrightarrow{X_c M_1}, \overrightarrow{X_c M_3}) = \alpha_4 \\ (\overrightarrow{X_c M_1}, \overrightarrow{X_c P_2}) = \alpha_5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_c M_1 = H_1 \\ X_c M_2 = H_2 \\ X_c M_3 = H_3 \end{array} \right. \quad (D.7)$$

Cas $j = 1$

Dans le cas où $j = 1$ on a alors $r_1 = r \cos \theta$, d'où :

$$I(1) = \int_T^\star \frac{-r \cos \theta}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \cos \theta [\ln r]_\varepsilon^{f(\theta)} d\theta \quad (D.8)$$

Or d'après la description des domaines on peut écrire :

$$\begin{aligned} I(1) = & - \int_{\alpha_5 - 2\pi}^{\alpha_1} \cos \theta \ln \left(\frac{H_1}{\cos \theta} \right) d\theta - \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \cos \theta \ln \left(\frac{H_2}{\cos(\theta - \alpha_2)} \right) d\theta \\ & - \int_{\alpha_3}^{\alpha_5} \cos \theta \ln \left(\frac{H_3}{\cos(\theta - \alpha_4)} \right) d\theta - \int_0^{2\pi} \cos \theta \ln \varepsilon d\theta \end{aligned} \quad (D.9)$$

$$\text{Or } \int_0^{2\pi} \cos \theta \ln \varepsilon d\theta = 0$$

Ainsi on obtient :

$$\boxed{I(1) = - \int_{\alpha_5 - 2\pi}^{\alpha_1} \cos \theta \ln \left(\frac{H_1}{\cos \theta} \right) d\theta - \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \cos \theta \ln \left(\frac{H_2}{\cos(\theta - \alpha_2)} \right) d\theta - \int_{\alpha_3}^{\alpha_5} \cos \theta \ln \left(\frac{H_3}{\cos(\theta - \alpha_4)} \right) d\theta} \quad (D.10)$$

Cas $j = 2$

Dans le cas où $j = 2$ on a alors $r_2 = r \cos \theta$, d'où :

$$I(1) = \int_T^\star \frac{-r \sin \theta}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \sin \theta [\ln r]_\varepsilon^{f(\theta)} d\theta \quad (D.11)$$

Or d'après la description des domaines on peut écrire :

$$\begin{aligned} I(1) = & - \int_{\alpha_5 - 2\pi}^{\alpha_1} \sin \theta \ln \left(\frac{H_1}{\cos \theta} \right) d\theta - \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \sin \theta \ln \left(\frac{H_2}{\cos(\theta - \alpha_2)} \right) d\theta \\ & - \int_{\alpha_3}^{\alpha_5} \sin \theta \ln \left(\frac{H_3}{\cos(\theta - \alpha_4)} \right) d\theta - \int_0^{2\pi} \sin \theta \ln \varepsilon d\theta \end{aligned} \quad (D.12)$$

Or quelque soit ε : $\int_0^{2\pi} \sin \theta \ln \varepsilon d\theta = 0$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
 I(2) = & - \int_{\alpha_5 - 2\pi}^{\alpha_1} \sin \theta \ln \left(\frac{H_1}{\cos \theta} \right) d\theta - \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \sin \theta \ln \left(\frac{H_2}{\cos(\theta - \alpha_2)} \right) d\theta \\
 & - \int_{\alpha_3}^{\alpha_5} \sin \theta \ln \left(\frac{H_3}{\cos(\theta - \alpha_4)} \right) d\theta
 \end{aligned}
 \tag{D.13}$$

Résumé

Les expressions que nous avons établies dans cette annexe sont analytiques. En effet nous avons ramené l'intégrale en valeur principale de Cauchy à trois intégrales parfaitement définies. Ces intégrales ont également des expressions analytiques que nous n'avons pas détaillé ici.

Reste que pour l'élément triangulaire T considéré, les intégrales dépendent des angles α_i et des longueurs H_j . Or ces longueurs et ces angles sont facilement calculables à partir des coordonnées des sommets P_1 , P_2 et P_3 du triangle ainsi que du point de collocation X_c .

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Problème considéré	2
1.2	Principe des méthodes intégrales	2
1.3	Remarques	3
1.4	Contexte et objectif	3
2	Représentation et équations intégrales pour l'élastostatique	4
2.1	Formulation du problème	4
2.2	Régularisation en déplacement	6
2.3	Représentation des contraintes	7
2.3.1	Dans le domaine Ω	7
2.3.2	Sur la frontière $\partial\Omega$	7
3	Méthodes intégrales pour la mécanique de la rupture 3D	8
3.1	Mécanique de la rupture 3D	8
3.2	Equations intégrales en mécanique de la rupture 3D	9
3.2.1	Nécessité d'une formulation en équations intégrales mixtes	10
3.2.2	Méthode des discontinuités de déplacement	10
3.2.3	Méthode de discontinuité duale	12
3.2.4	Cas d'un solide infini	13
4	Méthode des éléments de frontière	16
4.1	Généralités	16
4.2	Collocation des équations intégrales	17
4.3	Éléments particuliers de l'implémentation numérique	18
4.3.1	Element en pointe de fissure	18
4.3.2	Techniques de calcul des intégrales singulières	19
5	Méthode multipôle rapide : FMM	20
5.1	Motivations	20
5.2	Principe	21
5.2.1	Développement de la solution fondamentale	21
5.2.2	Calcul de l'influence des pôles	22
5.3	Méthode multiniveau	25

6	Mise en œuvre pratique	29
6.1	Maillage et construction des cellules	29
6.2	Organisation du calcul	31
6.2.1	Expression matricielle et méthode de résolution itérative	31
6.2.2	Interactions proches et interactions lointaines	32
6.2.3	Algorithme de la partie multipôle	32
6.2.4	Calcul des moments - Processus M2M	34
6.2.5	Calcul des coefficients locaux - Processus M2L	36
6.2.6	Calcul du terme de descente - Processus L2L	37
6.2.7	Détails du calcul des interactions proches	37
A	Cas d'une fissure plane	39
B	Solution fondamentale de Kelvin	41
C	Fonctions de Legendre	43
D	Intégration singulière analytique sur l'élément triangulaire	44
	Bibliographie	50

Bibliographie

- [1] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. Wiley, 1999.
- [2] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Elastic and Plastic Problems*, volume 2. Wiley, 2004.
- [3] M. Bonnet. Méthodes intégrales. M2 TACS, 2007.
- [4] H. Cheng, L. Greengard, and V. Rokhlin. A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, 1999.
- [5] M. Fischer, U Gauger, and L. Gaul. A multipole galerkin boundary element method for acoustics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2003.
- [6] A. Frangi and G. Novati. BEM–FEM coupling for 3D fracture mechanics applications. *Computational Mechanics*, 2003.
- [7] A. Frangi, G. Novati, R. Springhetti, and M. Rovizzi. 3D fracture analysis by the symmetric galerkin BEM. *Computational Mechanics*, 2002.
- [8] L.J. Gray, A.-V. Phan, H. Paulino, and T. Kaplan. Improved quarter-point crack tip element. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003.
- [9] M. Guiggiani and A. Gigante. A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method. *Journal of Applied Mechanics*, 1990.
- [10] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T.J. Rudolph, and F.J. Rizzo. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary equations. *Journal of Applied Mechanics*, 1992.
- [11] P. Havé. *Méthodes Multipôles Rapides pour l'électromagnétisme : Parallélisme et Basses Fréquences*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - P6, 2004.
- [12] K. Kolk, W. Weber, and G. Kuhn. Investigation of 3D crack propagation problems via fast BEM formulations. *Comput Mech*, 2005.
- [13] J.-B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes, 2003.
- [14] S. Li, M.E. Mear, and L. Xiao. Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1998.
- [15] Y.J. Liu, N. Nishimura, and Y. Otani. A fast boundary element method for the analysis of fiber-reinforced composites based on a rigid-inclusion model. *Journal of Applied Mechanics*, 2005.
- [16] M. Margonari and M. Bonnet. Fast multipole method applied to elastostatic BEM–FEM couplings. *Computers and Structures*, 2005.

- [17] N. Nemitz. *Méthode multipôle rapide et sensibilité topologique pour l'identification approchée de défauts à partir de données de type acoustique*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [18] N. Nishimura. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl Mech Rev*, 2002.
- [19] G. Sylvand. *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : performances, parallélisation, applications*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [20] P.B. Wang and Z. H. Yao. Fast multipole DBEM analysis of fatigue crack growth. *Comput Mech*, 2005.
- [21] K-I Yoshida. *Applications of Fast Multipole Method to Boundary Integral Equation Method*. PhD thesis, Dept. of Global Environment Eng. Kyoto Univ., Japan, 2001.