Calcul différentiel et intégral.

10 décembre 2009

Table des matières

Première partie

Fonctions de deux variables

Crédits Bibliographiques.

Ce cours a été réalisé à partir des notes du cours de F. Le Roux et T. Ramond.

Frédéric Leroux et Thierry Ramond, *Calculus PCST.* Disponible à l'adresse :

http ://mahery.math.u-psud.fr/ leroux/ENSEIGNEMENT/2006/MATH151/CoursPCST06-5.pdf

J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès, cours de mathématiques, Analyse.

James Stewart, *Fonctions de plusieurs variables.* Analyse concepts et contextes Volume 2. De Boeck.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction.

Comment apparaissent les fonctions de plusieurs variables ?

Les fonctions sont utilisées pour modéliser certains phénomènes naturels ; mais pour cela les fonctions d'une variable ne suffisent pas, on a souvent besoin de fonctions de plusieurs variables.

Si vous voulez décrire le temps qu'il fait sur terre, à un moment donné (fixés), vous allez modéliser les grandeurs "pression" et "température" par des fonctions de deux variables : $P(x, y)$ et $T(x, y)$ qui varie en fonction de la position (x, y) (par exemple, x représente longitude et y la latitude).

Bien sûr, pour être plus précis, il faudra introduire la variable altitude z ; pour décrire l'évolution de P et T au cours du temps, vous aurez besoin d'une quatrième variable, et P et T seront des fonctions de 4 variables (x, y, z, t). Nous commençons par étudier les fonctions qui dépendent de deux variables seulement. Pour celà, il est important de bien se repérer dans le plan et l'espace.

1.2 Le plan et l'espace euclidien

1.2.1 Le plan

Pour situer un point dans le plan, vous avez besoin de 2 données qui s'obtiennent après le choix d'un repère cartésien $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{i}, \vec{j})$.

On dit que un point M a pour *coordonnées (cartésiennes)* (x, y) dans $\mathcal{R}_0$ si :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.}$$

De cette manière, le plan s'identifie à l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\ \}$. Notons que le couple (x, y) représente aussi les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{R}_0$.

Si on se donne deux vecteurs $\vec{u_1} = (x_1, y_1)$ et $\vec{u_2} = (x_2, y_2)$ dans le plan, on peut définir leur *produit scalaire* par la formule

$$\boxed{\vec{u_1}.\vec{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2.}$$

La *longueur* d'un vecteur, on dit aussi sa *norme*, est alors définie par la formule

$$\boxed{||\vec{u_1}|| = \sqrt{\vec{u_1}.\vec{u_1}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.}$$

Il y a une autre formule pour le produit scalaire :

$$\vec{u_1}.\vec{u_2} = ||\vec{u_1}||\;||\vec{u_2}|| \cos\alpha$$

où α est l'angle entre les deux vecteurs. Si aucun des deux vecteurs n'est nul, on déduit de cette formule, quand le produit scalaire s'annule :

$$\begin{aligned} \vec{u_1}.\vec{u_2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \tfrac{\pi}{2} (\text{ modulo } \pi) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{les deux vecteurs sont orthogonaux.} \end{aligned}$$

La distance entre deux points M et N du plan est donnée par

$$\boxed{d(M, N) = ||\vec{MN}|| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.}$$

Un autre moyen pour se repérer dans le plan est fourni par les coordonnées polaires. Un point M du plan est repéré par sa distance à l'origine $r = ||\vec{OM}||$ et l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ (ou $[-\pi, \pi[$) entre la demi-droite $[OM)$ et la demi-droite $[Ox)$. Le couple (r, θ) s'appelle *coordonnées polaires* du point M. Ces coordonnées sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les formules

$$\boxed{\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}}$$

On peut aussi voir les coordonnées polaires en identifiant le plan à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes z et écrivant z sous forme trigonométrique. Ainsi $r = |z|$ et $\theta = \text{Arg}(z)$.

1.2.2 L'espace.

Le paragraphe précédent se généralise à l'espace.

Pour situer un point dans l'espace, vous avez besoin de 3 données qui s'obtiennent après le choix d'un repère cartésien $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On dit que un point M a pour *coordonnées (cartésiennes)* (x, y, z) dans $\mathcal{R}_0$ si :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.}$$

Le triplet (x, y, z) représente aussi les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{R}_0$.

L'espace s'identifie ainsi à $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ $\}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$ est défini par :

$$\boxed{\vec{u_1}.\vec{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

La distance entre deux points M et N de l'espace est donnée par :

$$\boxed{d(M, N) = ||\overrightarrow{MN}|| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}.}$$

Dans l'espace, l'analogue des coordonnées polaires s'appelle "*coordonnées sphériques*".

Un point M de l'espace est repéré par sa distance à l'origine $r = ||O\vec{M}||$, l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ (ou $[-\pi, \pi[$) entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{i}$, P étant le projeté orthogonal de M sur le plan $(0, x, y)$ et l'angle $\Phi \in [0, \pi[$ entre les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{k}$. Le triplet (r, θ, Φ) s'appelle *coordonnées sphériques* du point M. Ces coordonnées sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les formules

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} x & = r\cos\theta\sin\Phi \\ y & = r\sin\theta\sin\Phi \\ z & = r\cos\Phi \end{array}\right.}$$

1.3 Fonctions de deux variables

1.3.1 Définitions. Fonction, domaine de définition, image

Une *fonction de deux variables* est une règle f (le plus souvent donnée comme formule de calcul) qui à tout couple (x, y) de réels d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ fait correspondre un unique nombre réel z noté $f(x, y)$. L'ensemble D est appelé *domaine de définition* de f.

L'ensemble des valeurs prises par f càd $\{f(x, y)$, lorsque (x, y) décrit D $\}$ est appelé *l'image de* f.

Le plus souvent, comme dans le cas des fonctions d'une variable, on donne f par une formule de calcul sans préciser son domaine de définition, celui est entendu comme étant l'ensemble des couples de réels pour lesquels cette formule a un sens.

Exemples :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.
2. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ est une fonction définie pour $x \neq 0$, c-à-d sur le plan privé de la droite d'équation $x = 0$.
3. $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est une fonction définie sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

1.3.2 Questions

Au vu de l'étude des fonctions d'une variable, on peut s'interroger sur les moyens d'étude des fonctions de deux variables : représentation graphique ; limite, continuité ; fonction dérivée, tableau de variation ; tangente au graphe et position du graphe par rapport à sa tangente ; extrema ...

1.3.3 Graphe

Définition 1.3.3.1 (graphe)**.** Soit f une fonction de deux variables, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On appelle *graphe de f ou surface représentative de f,* l'ensemble des points (x, y, z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $z = f(x, y)$. On écrit

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \ \ avec \ \ (x, y) \in D_f\}.$$

Tracé du graphe.

– Se rappeler comment on faisait en une variable (pour chaque x sur son axe, on s'élève d'une hauteur $y = f(x)$).

– En deux variables : pour chaque point (x, y) sur le plan des variables, on s'élève d'une hauteur $z = f(x, y)$. Plus précisément, sur la figure, on dessine le plan (Oxy) ("plan des variables") ; au dessus de chaque point (x, y) dans ce plan, on place le point de hauteur $z = f(x, y)$. Autrement dit, si on imagine que le graphe est le dessin d'un relief, la fonction f est la fonction altitude (x, y étant latitude et longitude). Le plan (Oxy) est le plan d'altitude $z = 0$, graphe de la fonction $(x, y) \mapsto 0$; pour une carte du relief, il correspond au niveau de la mer.

Exemple de graphes

1. *Fonctions affines.* Comme en une variable, les fonctions de deux variables les plus simples sont les *fonctions affines*, c'est à dire les fonctions de la forme :

   $$(x, y) \mapsto ax + by + c$$

   où a, b, c sont des constantes. Leur graphes sont des plans. Réciproquement, tout plan non vertical est le graphe d'une fonction affine.

   Exercice.*Tracer les graphes des fonctions $f_1(x, y) = x+y$ et $f_2(x, y) = -2x+y+2$.*

2. *La demi-sphère unité supérieure .*
   C'est le graphe de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
3. *Le paraboloïde de révolution à une nappe.*
   C'est le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Déjà, le tracé des graphes de ces fonctions simples est difficile. Beaucoup plus difficile que pour les fonctions d'une variable : difficulté du dessin (représentation de la 3D), et surtout la lacune d'une notion équivalente au tableau de variation des fonctions d'une variable.

Pour s'aider, on peut étudier l'intersection du graphe avec certains plans :
- les plans horizontaux par exemples : ils decoupent le graphe en tranche.
- certains plans verticaux.

On a aussi parfois recours à d'autres modes de représentation graphique (que la 3D). Pour la température, on trace les isothermes, courbes sur lesquelles la température est constante. Pour les cartes géographique représentant le relief, à la place d'une carte en trois dimension (pas pratique à plier), on trace les courbes d'altitude constante.

1.4 Traces

Définition 1.4.0.2. Soit f une fonction de deux variables. On appelle :
- *trace horizontale de* f un sous-ensemble du graphe de f (donc de $\mathbb{R}^3$) de la forme :

$$H_h = \{(x, y, h) \text{ tels que } f(x, y) = h\} = Grf \cap \{z = h\}$$

- *trace verticale de* f un sous-ensemble du graphe de f (donc de $\mathbb{R}^3$) de la forme :

$$U_a = Grf \cap \{x = a\}$$

ou

$$V_b = Grf \cap \{y = b\}$$

Exemples Quelles sont les traces horizontales, les traces verticales sur les plans $x = 0$ et $y = 0$ de la fonction $x^2 + y^2$?

Même questions pour les fonctions suivantes.

1. la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ (selle de cheval, ou col de montagne ou hyperboloïde à une nappe) ;
2. la fonction $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$ (une presqu'ile avec une montagne, et la mer d'équation $z = 0$) ;
3. la fonction $f(x, y) = \sin(x)\sin(y) - y$ (un champ de bosse) ;
4. la fonction $f(x, y) = \sin(xy)$.

En pratique. Pour donner l'allure du graphe d'une fonction de 2 variables : on dessine quelques traces horizontales et une (ou deux traces verticales) sur laquelle s'appuient les traces horizontales.

Exemples Donner l'allure du graphe de la fonction $x^2 + y^2$?

1.5 Lignes de niveau

Définition 1.5.0.3. Soit f une fonction de deux variables, et h un nombre réel. On appelle *ligne de niveau de* f *de hauteur* h l'ensemble des points (x, y) du plan (Oxy) en lesquels f prend la valeur h :

$$L_h = \{(x, y) \text{ tels que } f(x, y) = h\}.$$

Exemples Quelles sont les lignes de niveau de la fonction $x^2 + y^2$?

1.6 Lien entre lignes de niveau et traces horizontales.

Soit h une hauteur donnée. La ligne de niveau h est la projection sur le plan $(0xy)$ de la trace horizontale obtenue en intersectant le plan horizontal d'équation $z = h$ avec le graphe de f.

Un danger

Attention, pour chacun des objets graphiques introduit, on doit bien savoir où il se situe :

- le dessin du graphe de f est un dessin dans l'espace (dimension 3) muni des coordonnées (x, y, z) ;
- les traces horizontales et verticales sont des courbes de l'espace ;
- le dessin des lignes de niveau se situe dans le plan horizontal $(0xy)$ (muni des coordonnées (x, y)) ;

Chapitre 2

Limites, continuité.

2.1 Limites

Pour définir la notion de limite, on s'inspire de ce qui est fait pour les fonctions d'une variable : une fonction a pour limite le réel l en un point A du plan si, à condition de choisir M assez proche de A, le nombre $f(M)$ est proche de l. Le sens de "proche" sera précisé à l'aide de la distance euclidienne dans le plan.

Hypothèses générales du paragraphe : Soit f une fonction de deux variables et $A = (a, b)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f est définie au voisinage de A –c'est à dire qu'il existe un disque $D_{A,\delta} = \{M/d(A, M) < \delta\}$ avec $\delta > 0$ contenu dans $\mathcal{D}_f$ – sauf peut-être en A.

Définition

Définition 2.1.0.4 (limite finie)**.** Soit l un réel.

> On dit que f a pour *limite* l *au point* $A = (a, b)$ si pour toute précision $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :
> pour tout point $M = (x, y) \neq (a, b)$ tel que $d(M, A) < \delta$, le nombre $f(M)$ est dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

On note $\lim\limits_{M \to A} f(M) = l$ ou $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$ ou encore $\lim\limits_{(a,b)} f = l$.

Définition 2.1.0.5 (limite infinie)**.** .

> On dit que f a pour *limite* $+\infty$ *au point* $A = (a, b)$ si pour tout $\omega > 0$ (grand) , il existe $\delta > 0$ tel que :
> pour tout point $M = (x, y) \neq (a, b)$ tel que $d(M, A) < \delta$, le nombre $f(M)$ est supérieur à ω.

On note $\lim\limits_{M \to A} f(M) = +\infty$ ou $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{(a,b)} f = +\infty$.

En pratique, on ne sert pas de cette définition : pour calculer une limite, on écrit la fonction en somme, produit, quotient de fonctions usuelles, et on utilise les théorèmes d'opérations, de comparaisons. Les énoncés sont tout à fait similaires aux énoncés déjà vus en une variables.

2.1.1 Propriétés des limites.

Opérations sur les limites

Theorem 2.1.1.1. *Soient f et g deux fonctions de deux variables qui admettent une limite finie au point (a,b), alors :*

- *la somme $f+g$ admet une limite au point (a,b) et $\lim\limits_{(a,b)}(f+g) = \lim\limits_{(a,b)} f + \lim\limits_{(a,b)} g$,*
- *le produit $f.g$ admet une limite au point (a,b) et $\lim\limits_{(a,b)}(f.g) = \lim\limits_{(a,b)} f. \lim\limits_{(a,b)} g$,*
- *le quotient f/g admet une limite au point (a,b) et $\lim\limits_{(a,b)}(f/g) = \lim\limits_{(a,b)} f / \lim\limits_{(a,b)} g$ dès que $\lim\limits_{(a,b)} g \neq 0$.*

Propriétés. En particulier : en un point de leur domaine de définition, les fonctions polynômes, les fonctions fractions rationnelles ont pour limite leur valeur en ce point.

Le théorème ci-dessus reste valable pour des limites infinies avec les **conventions usuelles** : $1/0_+ = +\infty$, $1/0_- = -\infty$,$\infty \times \infty = \infty$(avec règle de multiplication des signes) et $1/\infty = 0$.
Les formes indéterminées sont les mêmes que celle vues pour les fonctions d'une variable : $0/0$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $\infty - \infty$.

Exemple. La limite en $(0,0)$ de la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ présente la forme indeterminée $0/0$.

2.1.2 Comparaison et règle des gendarmes.

Theorem 2.1.2.1. *Soient f et g deux fonctions de deux variables qui admettent une limite au point (a,b) et telles que $f(x,y) \leq g(x,y)$ au voisinage du point (a,b) alors :*

- *Règle de comparaison : $\lim\limits_{(a,b)} f \leq \lim\limits_{(a,b)} g$,*
- *Règle des gendarmes : si de plus $\lim\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{(a,b)} g$ et que h est une fonction de deux variables telle que $f(x,y) \leq h(x,y) \leq g(x,y)$ au voisinage du point (a,b) alors $\lim\limits_{(a,b)} h = \lim\limits_{(a,b)} f$.*

Exemple. Montrer que la limite en $(0,0)$ de la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^4}$ est 0.

2.1.3 Composition

La composition pose problème (compatibilité des ensembles de départ et d'arrivée). Il y a deux façons de composer une fonction de deux variables : à la source ou bien au but.

Composition au but

Theorem 2.1.3.1. *Soient f une fonction de deux variables et φ une fonction d'une variable. Supposons*

- *que la fonction f est définie au voisinage de (a,b) sauf peut-être en (a,b) et $\lim\limits_{(a,b)} f = l$;*
- *que la fonction φ est définie au voisinage de l et $\lim\limits_{l} \varphi = L$;*

alors la fonction composée $\varphi \circ f : (x,y) \mapsto \varphi(f(x,y))$ est une fonction de deux variables définie au voisinage de (a,b) et $\lim\limits_{(a,b)} \varphi \circ f = L$

Exemples. Calculer la limite en $(0,0)$ des fonctions de deux variables définies par $f(x,y) = \arctan(x+y)$ et $g(x,y) = \frac{\sin(x+y^2)}{x+y^2}$.

Composition à la source

Définition 2.1.3.2 (Courbe paramétrée ; Courbe géométrique)**.**
Une *courbe paramétrée* dans le plan $(0xy)$ est une application

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ll} [\tau_1, \tau_2] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

L'image $\{(x(t), y(t)),$ lorsque t décrit $[\tau_1, \tau_2]\ \}$ d'une courbe paramétrée du plan est une *courbe (géométrique)* du plan.

Proposition 2.1.3.3. Hypothèses :

- *f est une fonction de deux variables définie au voisinage d'un point (a,b) sauf peut-être en (a,b) et $\lim\limits_{(a,b)} f = l$,*
- *$\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ est une courbe paramétrée dans le plan (Oxy) définie au voisinage de t_0 et $\lim\limits_{t \to t_0} \gamma(t) = (a,b)$.*

Conclusion : *la fonction composée $f \circ \gamma : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est définie au voisinage de t_0 et a pour limite l en t_0.*

2.1.4 Limites le long d'un chemin. Critères de non existence d'une limite

Définition 2.1.4.1 (Chemin du plan)**.** On appelle *chemin de $\mathbb{R}^2$ (ou dans le plan (Oxy))* une courbe paramétrée

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ll} I = [\alpha, \beta] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

continue (i.e. les deux fonctions d'une variable $x(t)$ et $y(t)$ sont continues sur I).

Définition 2.1.4.2 (Limite le long d'un chemin). Soit $\gamma : \begin{cases} I = [\alpha, \beta] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (x(t), y(t)) \end{cases}$ un chemin tel que $\gamma(\alpha) = (a, b)$

On appelle *limite* de f au point (a, b) le long du chemin γ la limite lorsqu'elle existe

$$\lim_{t \to \alpha} f(x(t), y(t)).$$

Comme conséquence de la propriété de composition à la source, on a que si f a pour une limite l en (a, b), alors f a des limites au point (a, b) le long de tous les chemins passant par (a, b) et ces limites sont toutes égales à l. Ceci est surtout utile comme critère de non existence de limite :

Proposition 2.1.4.3 (Critère de non existence d'une limite.). *Si on a trouvé deux chemins γ_1 et γ_2 par (a, b) tels que les limites de f en (a, b) le long de ces chemins ne sont pas égales alors la fonction f n'a pas de limite au point (a, b).*

Exemple La fonction de deux variables définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $(0, 0)$.

En effet, choisissons deux chemins qui aboutissent à $(0, 0)$:
$\gamma_1(t) = (t, 0)$ et $\gamma_2(t) = (t, t)$.
La limite de f le long de γ_1 est $\lim\limits_{t \to 0} f(t, 0) = 0$ et
la limite de f le long de γ_2 est $\lim\limits_{t \to 0} f(t, t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$.
Ces limites sont différentes, on peut donc en conclure que f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Remarque 2.1.4.4. En pratique, on cherche les limites le long de chemins rectilignes c'est-à-dire de la forme $(x(t), y(t)) = (\alpha t + a, \beta t + b)$ ou de chemins paraboliques c'est-à-dire de la forme $(x(t), y(t)) = (t^p + a, t^q + b)$, avec p et q entiers.

On peut aussi paramétrer certains chemins par l'une des variables x ou y : le chemin γ_2 de l'exemple ci-dessus peut-être décrit comme le chemin $x = y$. Dans ce cas le limite de f en $(0, 0)$ le long de ce chemin est $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x)$.

Plus généralement, on peut considérer comme chemin le graphe $y = \phi(x)$ d'une fonction continue d'une variable. Dans ce cas le limite de f en $(a, \phi(a))$ le long de ce chemin est $\lim\limits_{x \to a} f(x, \phi(x))$.

2.1.5 Application des coordonnées polaires au calcul de limites.

Un des avantages du passage en polaires dans une limite en $(0, 0)$ est de changer la limite sur les deux variables x et y en une limite sur la seule variable r :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \to 0} f(r \cos\theta, r \sin\theta).$$

On conclut de la manière suivante :

– si la limite obtenue ne dépend pas θ, alors cette limite est la limite en $(0, 0)$ de f,

– si la limite obtenue dépend pas θ (comme dans l'exemple ci-dessous), alors f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Exemples. Reprenons l'exemple précédent $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et remplaçons

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

On obtient $f(x,y) = \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$. La limite lorsque $r \to 0$ dépend clairement de θ, on retrouve bien que f n'a pas limite en $(0,0)$

Considérons maintenant la fonction $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. La même méthode donne :

$$g(x,y) = \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin\theta.$$

Maintenant, la limite lorsque $r \to 0$ est 0 (ne dépend pas de θ), on en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

2.2 Continuité

Définitions

Définition 2.2.0.1 (Continuité)**.** Soit $A = (a,b)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage de A. On dira que f est *continue au point A* si $\lim\limits_A f = f(A)$.

Soit D un sous-ensemble de D_f, on dit que f est *continue sur D* si f est continue en tout point (x,y) de D (ceci suppose que f est définie au voisinage de tout point de D).

Opérations

Pour établir la continuité d'une fonction de deux variables, le principe est le même que pour les fonctions d'une variable. On décompose la fonction en somme, produit, quotient de fonctions qu'on sait être continues, et on utilise les théorèmes d'opérations. Les énoncés sont tout à fait similaires aux énoncés déjà vus en une variable.

Theorem 2.2.0.2. *La somme, le produit de deux fonctions continues sont des fonctions continues ; le quotient d'une fonction continue par une fonction continue qui ne s'annule pas est une fonction continue. La composée de deux fonctions continues est continue.*

En particulier : les fonctions polynômes, les fonctions fractions rationnelles en deux variables sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\begin{cases} f(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$, n'est pas continue en $(0,0)$.

2.2.1 Composition

Composition à la source

Soient $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée dans le plan (Oxy) continue en t_0 et f une fonction de deux variables continue en $\gamma(t_0)$ alors $f \circ \gamma$ est continue en t_0.

Composition au but

Soient f une fonction de deux variables continue en (a, b) et φ une fonction d'une variable définie au voisinage de $f(a, b)$ et continue en $f(a, b)$ alors la fonction composée $\varphi \circ f : (x, y) \mapsto \varphi(f(x, y))$ est une fonction de deux variables continue en (a, b).

Chapitre 3

Dérivées partielles

Dans toute cette section, on considère une fonction f *définie au voisinage du point* (a, b) de $\mathbb{R}^2$ (on rappelle que cela signifie que son ensemble de définition contient un petit disque centré au point (a, b)).

3.1 Fonctions partielles

Beaucoup de problèmes concernant les fonctions de plusieurs variables peuvent se ramener à des problèmes concernant les fonctions d'une seule variable. Pour cela, on utilise les *fonctions partielles*, qui sont obtenues en fixant la valeur de l'une des variables.

Définition 3.1.0.1 (Fonctions partielles)**.** On appelle *fonctions partielles* au point (a, b) les deux fonctions

$$f_1 : x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(a, y)$$

Exemple Si l'on reprend la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$, qu'on se place au point $(0, 0)$, la première fonction partielle est $x \mapsto f(x, 0) = x^2$ (on a fixé $y = 0$) : son graphe est une parabole, d'équation $z = x^2$ dans le plan (Oxz). Où voit-on cette parabole sur le dessin représentant le graphe de f ? Fixer $y = 0$ revient à se placer dans le plan vertical (Oxz) (plan d'équation $y = 0$, justement).

Dans le plan vertical d'équation $y = 0$*, muni des coordonnées* (x, z)*, le graphe de la fonction partielle* $z = f(x, 0)$ *est la trace du graphe de* f*.*

Attention les fonctions partielles (mêmes si la notation ne le signifie pas) dépendent du point (a, b).

Test Donner les fonctions partielles de $f(x, y) = x^2 + y^2$ au point $(1, 2)$.

3.2 Le problème

Lorsqu'on veut des informations sur le comportement d'une fonction $f(x)$ dépendant d'**une seule variable** au voisinage d'un point, on peut calculer sa dérivée, qui nous donne une approximation de f par une fonction affine (DL à l'ordre 1). Graphiquement, cela revient à approcher le graphe de f par sa tangente.

Peut-on décrire une théorie similaire pour les fonctions de **deux variables** ? La réponse est affirmative. On va encore pouvoir approcher $f(x, y)$, au voisinage d'un point, par une fonction affine ; on obtiendra cette approximation affine en calculant les *dérivées partielles* de f au point considéré. Le graphe de l'approximation affine sera le plan tangent au graphe de f.

3.3 Dérivées partielles

3.3.1 Dérivées partielles en un point (a, b)

On considère les deux fonctions partielles

$$f_1 : x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(a, y).$$

Définition 3.3.1.1. On appelle *dérivée partielle par rapport à x [resp. à y] de f au point* (a, b) le nombre réel noté $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et défini par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_1'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(a + x, b) - f(a, b)}{x}$$

$$\left[\text{resp. } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_2'(b) = \lim_{y \to 0} \frac{f(a, b + y) - f(a, b)}{y}\right]$$

Attention au sens des différents symboles :

- a, b sont des nombres, (a, b) est un point du plan ;
- "x" dans l'expression $\frac{\partial}{\partial x}$ est un symbole, il signifie qu'on dérive suivant la première variable, qui est souvent notée x (mais pas toujours).
- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ est un nombre ;

3.3.2 Dérivées partielles sur un domaine.

On dit que f admet des dérivées partielles sur un domaine D si f est définie au voisinage de tout point (x, y) de D et admet des dérivées partielles en chacun des points (x, y) de D. On définit sur D deux fonctions de deux variables notées respectivement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Ces fonctions s'appellent respectivement (fonctions) *dérivées partielles de f*.

Attention x et y signifient deux choses différentes dans ces formules : les symboles de dérivation et les coordonnées du point où l'on calcule les dérivées partielles. On devrait comme dans le paragraphe précédent ne pas utiliser les mêmes notations mais pour des raisons pratiques (de calcul et notation) il est plus pertinent de conserver cette confusion.

En pratique : lorsque f est donnée par une formule en (x, y) valable dans un ouvert (ensemble qui contient un petit disque centré en chacun de ses points) les dérivées partielles se calculent de la manière suivante :

1- Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on regarde y comme une constante et dérive $f(x, y)$ comme une fonction de la variable x seule.

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, on regarde x comme une constante et dérive $f(x, y)$ comme une fonction de la variable y seule.

Exemples Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

a. $f(x, y) = xy + \sin(xy^2)$.

b. $f(x, y) = xy + \arctan \frac{y}{x}$.

2- Maintenant lorsqu'au voisinage d'un point particulier (spécial) (a, b), la fonction f n'est pas définie par une seule formule (valable pour le point et pour tous ses points voisins) alors on peut avoir recours à la définition (avec la limite du taux d'accroissement) pour établir l'existence et calculer les dérivées partielles en (a, b).

Exemple. Reprenons la fonction définie par : $\begin{cases} f(x,y) & = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) & = 0 \end{cases}$ et calculons ses dérivées partielles.

Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, elles se calculent comme indiqué dans le 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Au point $(0, 0)$ elles se calculent comme indiqué dans le 2 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Cet exemple montre que l'existence de dérivées partielles pour f n'implique pas la continuité de f.

Remarque 3.3.2.1. La notation des dérivées partielles sous forme de "fraction" est utile en particulier lorsqu'on énonce la règle de composition (voir les chapitres 9 , 10 et 11), mais elle est aussi trompeuse :

Exemple. Considerons la relation des gaz parfaits $PV = kT$ qui fait intervenir les trois variables pression, volume et température.

Considérons T comme fonction de P et V, on écrit $T = \frac{PV}{k}$ on en déduit $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{k}$.

Considérons P comme fonction de T et V, on écrit $P = \frac{kT}{V}$ on en déduit $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{kT}{V^2}$.

Considérons V comme fonction de P et T, on écrit $V = \frac{kT}{P}$ on en déduit $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{k}{P}$.

On a
$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{V}{k}(-\frac{kT}{V^2})\frac{k}{P} = -\frac{kT}{PV} = -1,$$
alors que la simplification de ce produit comme si les symboles de dérivées partielles representaient des fractions, donne comme résultat 1.

3.3.3 Fonctions de classe C^1.

Définition 3.3.3.1. On dira qu'une fonction f est *de classe* C^1 sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ si les fonctions dérivées partielles de f existent et sont continues sur D.

Par exemple, les polynômes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, les fractions rationnelles sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition.

Remarque 3.3.3.2. Une somme, un produit, un quotient (lorsqu'il est bien défini) une composée de fonctions C^1 est encore une fonction C^1.

3.4 Dérivées directionnelles.

Les dérivées partielles décrivent le comportement de la fonction f lorsqu'on fait des déplacements horizontaux ou verticaux. Il n'y a "a priori" aucune raison de privilégier ces deux directions et l'on peut étudier la manière dont la fonction f varie lorsqu'on effectue des déplacements rectilignes dans des directions obliques : on en tire la notion de dérivées directionnelles.

On rappelle que la droite passant par le point (a, b) et ayant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{V} = (\alpha, \beta)$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= \alpha t + a \\ y &= \beta t + b \end{cases}$$

Etudier la fonction f le long de cette droite c'est considérer la fonction composée (et d'une variable) $F : t \mapsto f(\alpha t + a, \beta t + b)$.

Définition 3.4.0.3. On appelle *dérivée directionnelle de f au point* (a, b) le nombre réel noté $\frac{\partial f}{\partial \vec{V}}(a, b)$ et défini par

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{V}}(a, b) = F'(0) = \frac{d}{dt}\left(f(\alpha t + a, \beta t + b)\right)_{t=0}.$$

Remarque 3.4.0.4. Cas particuliers : $\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

Exemple. Calculer la dérivée en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\vec{V} = (1, 1)$ de la fonction $f(x, y) = x + y$.
C'est par définition
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{V}}(0, 0) = \frac{d}{dt}\left(f(t, t)\right)_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(2t\right)_{t=0} = 2.$$

Chapitre 4

Différentiabilité, différentielle d'une fonction de deux variables

4.1 Différentiabilité en un point.

Dans toute cette section, on considère une fonction f *définie au voisinage du point* $A = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$.

4.1.1 Définition

Définition 4.1.1.1. On dit que f est *d*ifférentiable en (a, b) si il existe des nombres réels c, d tels que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - (f(a,b) + c(x-a) + d(y-b))}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0}$$

La forme linéaire $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto cx + dy \end{array} \right.$ est appelée la *différentielle* de f en (a, b) et est notée $df_{(a,b)}$.

4.1.2 Propriétés, plan tangent

Theorem 4.1.2.1. *Si f est différentiable en (a, b) (avec c et d comme dans la définition ci-dessus) alors :*

- *f est continue en (a, b),*
- *f admet des dérivées directionnelles en (a, b) suivant tout vecteur $\vec{V}$ du plan et $\frac{\partial f}{\partial \vec{V}}(a, b) = df_{(a,b)}(\vec{V})$.*
- *En particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = c$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = d$,*
- *le graphe de f admet un plan tangent en $(a, b, f(a, b))$ et ce plan a pour équation $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - a)$.*

Exemple. Pour la surface d'équation $z = \sin(x+y)$, le plan tangent en $(0,0)$ a pour équation $z = x+y$ (cf dessin).

4.1.3 Condition nécessaire et suffisante de différentiabilité.

Theorem 4.1.3.1. *La fonction f est différentiable en (a,b) si et seulement si*
- *f admet des dérivées partielles en (a,b) et*
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - (f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x_a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$

4.1.4 Condition suffisante de différentiabilité.

Proposition 4.1.4.1 (Théorème.)**.** *Soit f une fonction définie au voisinage du point (a,b). Si f est C^1 en (a,b) alors f est différentiable en (a,b) et sa différentielle en (a,b) s'écrit*

$$df_{(a,b)}(\vec{V}) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).x_{\vec{V}} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y_{\vec{V}}$$

4.1.5 En pratique.

4.2 Différentiabilité sur un domaine. Différentielle.

Définition 4.2.0.1. On dit que f est *d*ifférentiable sur D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ si f est définie au voisinage de tout point M de D et est différentiable en tout M de D.
L'application dite *f*orme différentielle $\left\{\begin{array}{ll} D & \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ (x,y) & \mapsto df_{(x,y)} \end{array}\right.$ est appelée la *différentielle* de f sur D et est notée df.
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications (formes) linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.0.2 (Théorème.)**.** *Soit f une fonction qui est de classe C^1 sur un domaine D alors f est différentiable sur D et sa différentielle s'écrit*

$$df_{(x,x)}(\vec{V}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).x_{\vec{V}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y_{\vec{V}}$$

4.3 Vecteur et champ gradient.

Soit f une fonction différentiable au point $A = (a,b)$. La formule de la dérivée directionnelle suivant $\vec{V}$, vue ci-dessus, peut s'écrire comme un produit scalaire :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{V}}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).x_{\vec{V}} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y_{\vec{V}} =< \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right), \vec{V} > .$$

Ce qui nous conduit à la définition du gradient.

Définition 4.3.0.3. Soit f une fonction admettant des dérivées partielles au point $A = (a, b)$. On appelle (vecteur) *gradient* de f en (a, b) le vecteur dont les coordonnées sont les dérivées partielles de f :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{(a,b)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

Le gradient est parfois noté $\nabla_{(a,b)} f$.

Définition 4.3.0.4 (gradient)**.** Lorsque f admet des dérivées partielles en tout point de D, on appelle *champ gradient* de f sur D, l'application :

$$(x, y) \mapsto \overrightarrow{\text{grad}}_{(x,y)} f$$

4.3.1 Gradient et lignes de niveau

Proposition 4.3.1.1 (Propriété de composition au départ)**.**

Soit f une fonction définie et différentiable sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\gamma : \begin{cases} I & \to D \\ t & \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{cases}$ *une courbe paramétrée définie, dérivable I et dont l'image est contenue dans D (ainsi la fonction composée $F(t) = f \circ \gamma(t) = f(x(t), y(t))$ est bien définie sur l'intervalle I).*

Alors $F = f \circ \gamma$ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par :

$$(f \circ \gamma)'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = < grad_{\gamma(t)} f, (x'(t), y'(t)) >$$

est le produit scalaire des deux vecteurs $(x'(t), y'(t))$ (vecteur vitesse de la courbe) et de
$(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)))$ (le gradient de f au point $\gamma(t)$).

Remarque 4.3.1.2.

1. Le cas particulier le plus simple est $(x(t), y(t)) = (t, 0)$. Dans ce cas, $f \circ \gamma(t) = f(t, 0) = f_1(t)$ est la première fonction partielle de f en $(0, 0)$, et on retrouve simplement la définition de la première dérivée partielle :

$$f_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0).$$

2. Supposons maintenant que $y(t)$ est la fonction nulle ; on a alors $f \circ M(t) = f(x(t), 0) = f_1(x(t))$, qui est une fonction composée de deux fonctions *d'une seule variable* ; on retrouve alors la formule de dérivation en une variable,

$$(f \circ \gamma)'(t) = (f_1 \circ x)'(t) = x'(t).f_1'(x(t)) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), 0).$$

On constate expérimentalement que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau : ci-dessous, on a tracé simultanément, dans le plan (Oxy) (plan des variables), des lignes de niveau et des vecteurs gradient de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Les lignes de niveau sont les cercles centrés en $(0, 0)$ et le champ gradient est $(x, y) \mapsto 2(x, y)$: c'est un champ radial.

Proposition 4.3.1.3. *Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.*

Le gradient indique la direction dans laquelle la fonction f augmente le plus vite (ceci signifie dans le cas d'une carte géographique : le gradient indique la ligne de plus grande pente).

En effet, si $\vec{v}$ est un vecteur de norme 1, alors le produit scalaire

$$\vec{v}.\mathrm{grad}_{(x,y)} f = ||\mathrm{grad}_{(x,y)} f|| \cos\alpha$$

où α est l'angle entre les deux vecteurs, et la valeur de ceci est maximum lorsque $\cos\alpha = 1$, c'est-à-dire $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand $\vec{v}$ est colinéaire au gradient, de même sens.

Exemple Un surfeur se déplace sur les vagues dont la surface suit l'équation $z = f(x, y) = \sin(x + y)$. La position du surfeur en fonction du temps (longitude x et latitude y), est donnée par la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t)) = (t^2, t^3 - 3t)$. L'altitude du surfeur en fonction du temps est alors donnée par la fonction composée $f(x(t), y(t))$.

1. Quelle est l'altitude du surfeur en fonction du temps ?
2. Quel est le vecteur vitesse au temps t ?
3. Quel angle fait, au temps t, l'axe de sa planche avec l'horizontale ? (on admet que la planche est tangente aux vagues).

Exemple On reprend la montagne d'équation $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$. En exemple, on avait calculé les dérivées partielles de f au point $(1, 1/2)$. On a donc $\mathrm{grad}_{(1,\frac{1}{2})} f = (-1/2, -2)$. La ligne de plus grande pente est donc vers le Sud-Sud-Ouest. Une bille posée en ce point roulerait vers le NNE.

Test : vérifier la cohérence avec le dessin des lignes de niveau de cette "montagne".

Démonstration de la proposition Reprennons d'abord l'exemple $f(x, y) = x^2+y^2$, nous avons vu que la ligne de niveau h est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{h}$ en particulier elle admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{h}\cos t \\ y(t) &= \sqrt{h}\cos t \end{aligned}$$

On a $f(x(t), y(t)) = h$. Dérivons cette relation en $t = 0$.

Appliquons la propriété de composition pour le terle de gauche : $\frac{d}{dt}$ Supposons que les lignes de niveau peuvent être décrites par des courbes paramétrées : la ligne de niveau h a une représentation paramétrique $\gamma(t)$.

1. Écrire la relation qui traduit l'hypothèse "$\gamma(t)$ est incluse dans une ligne de niveau de f".
2. Dériver cette relation en $t = 0$.
3. Conclure.

Chapitre 5

Formule et inégalité des accroissements finis. Application au calcul d'incertitudes.

5.1 Rappels pour les fonctions d'une variable réelle

Theorem 5.1.0.4 (Le théorème des accoissements finis)**.** *Soient $\alpha < \beta$ deux réels. Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $]\alpha, \beta[$.*
Alors, il existe $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha)$.

Proposition 5.1.0.5 (Conséquence : l'inégalité des accroissements finis)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in C^1(I)$. Soient $\alpha < \beta$ deux points de I. Alors*
- $\mathcal{M} := \sup\limits_{t \in [\alpha,\beta]} |f'(t)|$ existe (est fini) et
- pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, on a $|f(x) - f(\alpha)| \leq \mathcal{M}|x - \alpha|$.

Remarque 5.1.0.6. Application. Démontrer les inégalités suivantes :
- $|\sin x| \leq |x|$
- $|\ln(1 + x)| \leq |x|$

5.2 Cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et classe C^1

Theorem 5.2.0.7 (Formule des accoissements finis)**.**
Hypothèses. *Soit f une fonction définie et différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $A = (a, b)$ un point intérieur de D.*
Conclusion. *Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tels que le segment entre (a, b) et $(a + h, b + k)$ est contenu dans D, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que*

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + \theta k).h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + \theta h, b + \theta k)k.$$

Proposition 5.2.0.8 (Conséquence : l'inégalité des accroissements finis)**.**
Hypothèses. *Soit* f *une fonction définie et* C^1 *sur* $D \subset \mathbb{R}^2$*. Soit* $A = (a, b)$ *un point intérieur de* D*.*
Conclusion.

- $\max\limits_{(x,y)\in D} |\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)|$ *et* $\max\limits_{(x,y)\in D} |\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)|$ *existent (sont finis) et*
- *pour tout* $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ *tels que le segment, noté* I*, entre* (a, b) *et* $(a + h, b + k)$ *est contenu dans* D *:*

$$|f(a + h, b + k) - f(a, b)| = \max_{(x,y)\in I} |\frac{\partial f}{\partial x}.||h| + \max_{(x,y)\in I} |\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)|.|k|$$

5.3 Application au calcul d'incertitude.

5.3.1 Principe du calcul d'incertitude :

-On sait mesurer à l'aide d'appareils certaines grandeurs physiques (dimension, pression, volume, poids ...) et on dispose d'une formule (de calcul) qui exprime une autre grandeur physique en fonction de celles que l'on a pu mesurer.

Par exemple : on mesure la pression et le volume d'un gaz parfait et on dispose de la formule $PV = kT$*, (k étant une constante) pour trouver sa température.*

- Les constructeurs des appareils de mesure indiquent la précision de leurs appareils de mesure : il peut s'agir d'une précision abosolue (c'est à dire exprimée comme une quantité en l'unité de mesure) ou d'une précision relative (c'est à dire exprimée comme un pourcentage : la précision absolue est alors calculée en multipliant la mesure avec le pourcentage). Dans tous les cas, on connait l'erreur maximale commise sur la mesure.

Dans l'exemple : on connait les précisions absolues sur P *et* V*, on les note* ΔP *et* ΔV*.*

- Notre but est de donner une valeur approchée de la grandeur physique fonction des autres et surtout de donner une précision pour cette valeur approchée.

Autrement dit, nous devons trouver une majoration la quantité : valeur absolue de la différence entre la valeur exacte (inconnue) et la valeur mesurée (plus précisément : la valeur calculée à partir des mesures des variables dont est fonction la grandeur physique) de la grandeur physique (dans l'exemple la température).

Cette quantité s'appelle *incertitude absolue* ou *erreur absolue*.

Une majoration de l'incertitude absolue est ce qu'on appelle *une précision*. *Faire un calcul d'incertitude* c'est obtenir une précision.

Dans l'exemple, la quantité à majorer est $\Delta T := |T_{exacte} - T_{mesurée}|$.

5.3.2 Calcul théorique de l'incertitude absolue sur la température dans l'exemple des gaz parfaits.

Posons :
$\delta P = P_{\text{exacte}} - P_{\text{mesurée}}$: l'erreur de mesure sur la pression. On a $|\delta P| \leq \Delta P$.

$\delta V = V_{\text{exact}} - P_{\text{mesuré}}$: l'erreur de mesure sur le volume. On a $|\delta V| \leq \Delta V$.

$$\Delta T = |\frac{1}{k}\,(P_{\text{exacte}}V_{\text{exact}} - P_{\text{mesurée}}V_{\text{mesuré}})\,|.$$

$$= |\frac{1}{k}\,(P_{\text{mesurée}} + \delta P)(V_{\text{mesuré}} + \delta V) - P_{\text{mesurée}}V_{\text{mesuré}})\,|$$

$$= \frac{1}{nR}|\,(\delta P.V_{\text{mesuré}} + \delta V.P_{\text{mesurée}} + \delta P.\delta V)\,|$$

On majore ensuite (grossièrement) la valeur absolue d'une somme par la somme des valeurs absolues et les erreurs par les précisions absolues. :

$$\Delta T \leq \frac{1}{k}\,(V_{\text{mesuré}}\Delta P + P_{\text{mesurée}}\Delta V + \Delta P.\Delta V)$$

5.3.3 Estimation de l'incertitude sur la température dans l'exemple à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

Principe : l'erreur absolue est majorée à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

En effet, considérons T comme fonction des deux variables P et V. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$(*)\Delta T = |T_{\text{exacte}} - T_{\text{mesurée}}| = |T(P_{\text{exacte}}, V_{\text{exact}}) - T(P_{\text{mesurée}}, V_{\text{mesuré}})|$$

$$\leq max|\frac{\partial T}{\partial P}|\delta P + max|\frac{\partial T}{\partial V}|\delta V \ ,$$

Les max étant pris sur les intervalles $P_{\text{mesurée}} - \Delta P \leq P \leq P_{\text{mesurée}} + \Delta P$ et $V_{\text{mesuré}} - \Delta V \leq V \leq V_{\text{mesuré}} + \Delta V$. (Notons qu'il suffit de faire une majoration des valeurs absolues des dérivées partielles sur ces intervalles.)

Le calcul des dérivées partielles de T nous donne :

$\frac{\partial T}{\partial P}(P,V) = \frac{1}{k}V$ et $\frac{\partial T}{\partial V}(P,V) = \frac{1}{k}P$.

Ainsi, $\left|\frac{\partial T}{\partial P}(P,V)\right| \leq \frac{1}{k}(V_{\text{mesuré}} + \Delta V)$ et $\left|\frac{\partial T}{\partial V}(P,V)\right| \leq \frac{1}{k}|(P_{\text{mesuré}} + \Delta P)$.

En reportant ces majorations dans $(*)$, on obtient :

$$(*)\Delta T \leq \frac{1}{k}\left(V_{\text{mesuré}}\Delta P + P_{\text{mesurée}}\Delta V + 2\Delta P\Delta V\right)$$

On voit que la différence par rapport au calcul théorique est de $\Delta P\Delta V$, donc minime.

5.3.4 En général

Pour obtenir une précision sur une grandeur physique, on applique le résultat suivant :

Theorem 5.3.4.1. *(Mathématique)*
Hypothéses :
-(1)- f est une fonction de deux variables C^1 définie au voisinage d'un point donné $(x_{\text{mesuré}}, y_{\text{mesuré}})$ et Δx et Δy sont deux nombres positifs donnés.
-(2)- $x_{\text{mesuré}} - \Delta x \leq x_{\text{exact}} \leq x_{\text{mesuré}} + \Delta x$,
-(3)- $y_{\text{mesuré}} - \Delta y \leq y_{\text{exact}} \leq y_{\text{mesuré}} + \Delta y$.

Conclusion :

$$\Delta f = |f(x_{\text{exact}}, y_{\text{exact}}) - f(x_{\text{mesuré}}, y_{\text{mesuré}})| \leq max|\frac{\partial f}{\partial x}|\Delta x + max|\frac{\partial f}{\partial y}|\Delta y \quad .$$

Les max étant pris sur les intervalles définis en (2) et (3). (Notons qu'il suffit de faire une majoration des valeurs absolues des dérivées partielles sur ces intervalles.)

En physique, on a tendance à priviligier la connaissance de l'ordre de grandeur de l'erreur sur la mesure d'une grandeur physique à une majoration de cette erreur. On appliquera alors le résultat suivant :

Theorem 5.3.4.2. *(Physique)*
Hypothéses : *Les mêmes que ci-dessus*

Conclusion :

$$\Delta f \sim |\frac{\partial f}{\partial x}(x_{\text{mesuré}}, y_{\text{mesuré}})|\Delta x + |\frac{\partial f}{\partial y}(x_{\text{mesuré}}, y_{\text{mesuré}})|\Delta y \quad .$$

5.3.5 Application numérique. Exemple

On veut estimer l'aire d'un terrain rectangulaire, dont on a mesuré les dimensions :
- sa longueur $L = 100m$
- sa largeur $L = 60m$.

On sait aussi que les dimensions sont mesurées avec une précision de 5% de la quantité mesurée. Par conséquent, $\Delta L = 5\% \times 100 = 5m$ et $\Delta l = 5\% \times 60 = 3m$.

L'aire de terrain calculée à partir de ces mesures est donc $A_{mes} = 6000m^2$.

Majoration de l'incertitude absolue ΔA de A :

- Par calcul direct :
Par hypothèses :$95 \leq L \leq 105$ et $57 \leq l \leq 63$.
Donc $5415 = 95 \times 57 \leq L \times l \leq 105 \leq 63 = 6615$
D'où $-585 = 5415 - 6000 \leq L \times l - 6000 \leq 105 \leq 6615 - 6000 = 615$
On en déduit la précision absolue $\Delta A \leq 615m^3$, on a donc une précision relative de la mesure de l'aire $\frac{\Delta A}{A_{mes}} = \frac{615}{6000} = 10,25\%$.

-A l'aide de l'inégalité des accroissements finis :

(Mathématique)

$$\Delta A \leq \max \frac{\partial A}{\partial L}.\Delta L + \max \frac{\partial A}{\partial l}.\Delta l = \max l.\Delta L + \max L.\Delta l = 63 \times 5 + 105 \times 3 = 630m^3$$

(Physique)

$$\Delta A \sim \frac{\partial A}{\partial L}(100, 60).\Delta L + \frac{\partial A}{\partial l}(100, 60).\Delta l = 60 \times 5 + 100 \times 3 = 600m^3.$$

Chapitre 6

Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Hypothèses générales : Soit f une fonctions de deux variables définie et admettant des dérivées partielles premières au voisisnage d'un point (a, b).

6.1 Définitions.

1. On dit que f admet des dérivées partielles secondes en (a, b) si les fonctions dérivées partielles premières de f admettent des dérivées partielles premières en (a, b). Autrement dit, si :
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b)$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$,
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b)$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$,
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b)$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ et
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b)$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$,

existent. Les 4 quantités définies ci-dessus sont appelées les *dérivées partielles secondes* de f en (a, b).

2. On dit que f admet des dérivées partielles secondes sur D (un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$) si f admet des dérivées partielles secondes en tout point de D. On peut alors définir sur D, les *fonctions dérivées partielles secondes* de f : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

3. On dit que f est de *classe* C^2 sur D si f admet des dérivées partielles secondes continue sur D.

6.2 Le théorème de Schwarz

Hypothèses : f est C^2 sur D.

Conclusion : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur D.
Vérifier la conclusion pour $f(x, y) = x^2 y + x^3 - xy$.
La réciproque de ce théorème est fausse, voir l'exercice 2b de la feuille III.

6.3 Formule de Taylor d'une fonction de 2 variables à l'ordre 2.

6.3.1 Rappel en une variable.

Enoncé.

Theorem 6.3.1.1. *(Formule de Taylor-Young en a à l'ordre n)*
Soit $n \geq 2$ un entier et f une fonction d'une variable.
Hypothéses : *f est définie et de classe C^n au voisinage de a*

Conclusion : *Il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a et tendant vers 0 en a telle que :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$$

Cette formule s'appelle aussi développement limité à l'ordre n de f en a.

Applications

Au calcul de limites.
A l'étude locale : Equation de la tangente et position d'un graphe par rapport à sa tangente.

6.3.2 En deux variables

Enoncé.

Theorem 6.3.2.1. *(Formule de Taylor de f en (a, b) à l'ordre 2)*
Soit $n \geq 2$ un entier et f une fonction de 2 variables.
Hypothéses : *f est définie et de classe C^2 au voisinage de (a, b)*

Conclusion : *Il existe une fonction ϵ définie au voisinage de (a, b) et tendant vers 0 en (a, b) telle que :*

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)$$
$$+\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)\epsilon(x,y)$$

Ecrire la formule de Taylor en $(0, 0)$ à l'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = e^{xy}$.

Applications.

$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$ est l'équation du plan tangent au graphe de f au dessus du point (a,b).

La position du graphe de f par rapport à ce plan tangent est alors donné par le signe de polynome quadratique

$$Q(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \right)$$

, au voisinage de (a,b) (le point (a,b) exclu).

Plus précisément :

si $Q(x,y) > 0$ alors le graphe de f est au dessus de son plan tangent,

si $Q(x,y) < 0$ alors le graphe de f est au dessous de son plan tangent,

si $Q(x,y)$ change de signe alors le graphe de f traverse son plan tangent.

L'étude du signe de Q est analogue à celle faite dans le cas particulier où le plan tangent est horizontal dans la section suivante.

6.4 Extrema, points critiques

6.4.1 Définitions, propriétés, exemples

On a les mêmes définitions qu'en une variable.

Définition 6.4.1.1. On dit que la fonction f atteint au point (x_0, y_0) son *maximum* [resp. *minimum*] sur l'ensemble D ou que (x_0, y_0) est un maximum [resp. *minimum*] de f sur D si

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad \text{[resp. } f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$

pour tout point (x,y) de D.

On dit que f a un maximum [resp. *minimum*] local en (x_0, y_0) (ou que (x_0, y_0) est un maximum [resp. *minimum*] local de f) si l'inégalité précédente est valable pour tous les points (x,y) dans un voisinage du point (x_0, y_0) (et peut-être pas pour tous les points de D).

On dit que f a un extremum [resp. *extremum local*] en (x_0, y_0) (ou que (x_0, y_0) est un *extremum* [resp. *extremum local* de f) si (x_0, y_0) est un maximum ou minimum [resp. maximum ou minimum local] de f.

Exemples : comme une variable, $x^2(y^3 - 3y)$ a un max local, un min local, pas de max ou min absolu.

Définition 6.4.1.2. On dit que le point (x_0, y_0) est un *point critique* de la fonction f si le vecteur gradient en ce point est nul ; autrement dit, les deux dérivées partielles y sont nulles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0.$$

Graphiquement, cela signifie que le plan tangent au graphe de f au point (x_0, y_0) est horizontal.

Theorem 6.4.1.3. *Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage d'un point (x_0, y_0). Si (x_0, y_0) est un extremum local de f, alors c'est un point critique.*

Exemples, contre-exemples

- on a les mêmes contrexemples à la réciproque qu'en une variable ; par exemple pour $f(x, y) = x^3$, 0 est point critique mais pas un minimum ni un maximum (cf figure, graphe de gauche).
- on a aussi des contrexemples plus intéressants : par exemple $f(x, y) = x^2 - y^2$. Ici, on a le point $(0, 0)$ est un point critique, 0 est un maximum pour la fonction partielle en x et un minimum pour la fonction partielle en y (cf figure, graphe de droite). Un tel point est appelé un *point selle*.
- Exercice : à partir du graphe, trouver les points critiques de $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$. Retrouver ceci par le calcul. Identifier les maxima, mininima, les points critiques non extrema.

6.4.2 Classification des points critiques d'une fonction C^2.

Théorème de classification des points critiques d'une fonction C^2.
Hypothèses et notations :
Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 au voisinage d'un de ses points critiques (x_0, y_0).
On introduit les notations de Monge :

- $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$
- $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$
- $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$

Conclusions :

1. Si $\Delta = rt - s^2 < 0$ alors f a un point-selle ou col en (x_0, y_0) (ni min, ni max, cf $f(x, y) = xy$ en $(0, 0)$),
2. Si $\Delta = rt - s^2 > 0$ alors f admet un extremum local (strict) en (x_0, y_0) :
   (a) si $r < 0$ alors f admet un maximum local (strict) en (x_0, y_0) (cf $f(x, y) = -x^2 - y^2$ en $(0, 0)$) ;
   (b) si $r > 0$ alors f admet un minimum local (strict) en (x_0, y_0) (cf $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(0, 0)$) ;
3. (Hors programme) Si $\Delta = rt - s^2 = 0$: on ne peut pas donner de conclusion général. Il faut étudier localement le comportement de f au voisinage (x_0, y_0), en utilisant au besoin des dérivées partielles d'ordre supérieur.

Exercice d'application

Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume fixé, trouver ceux dont la paroi a une surface minimale, et ceux qui ont la surface maximale.

Pour simplifier, on prend $V = 1$. La hauteur h s'exprime alors en fonction de la largeur ℓ et de la profondeur p, $h = \frac{1}{\ell p}$. La surface vaut alors $2(p\ell + \frac{1}{p} + \frac{1}{\ell})$.

Cela conduit à minimiser $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ pour $x, y > 0$. Le calcul donne que le seul point critique est obtenu pour $x = y = 1$; on a $f(1,1) = 3$.

Est-ce un minimum, ou un maximum ? Ca pourrait aussi être un point selle, ou juste un minimum ou maximum local mais pas global ! Peut-être n'y a-t-il pas de minimum ni de maximum...

Le point trouvé correspond à un minimum de f "Preuve" : Si $x < 1/3$, par exemple, on voit facilement que $f(x,y) > 3$. De même si $y < 1/3$. Et aussi pour $y \geq 1/3$ et $x > 9$; de même, pour $x \geq 1/3$ et $y > 9$. Ces cas couvrent tous les points (x,y) hors du carré

$$C = \{(x,y) \text{ tels que } \frac{1}{3} \leq x \leq 9 \text{ et } \frac{1}{3} \leq x \leq 9\}.$$

(Vérifier ceci en faisant un dessin). Autrement dit, il reste juste à montrer que $(1,1)$ est un minimum dans ce carré C.

Si on veut un argument analytique et non pas graphique, il faut utiliser un raisonnement, et un "gros" théorème (existence d'un minimum pour une fonction continue sur un carré).

Remarquons que f n'a pas de maximum : il n'y a pas de boite à surface maximale, parce qu'on peut produire une boite de volume 1 avec une surface aussi grande qu'on veut...

(Autre argument : il n'y a qu'un point critique !).

Chapitre 7

C^1-difféomorphisme et Théorème d'inversion locale.

7.1 Difféomorphismes.

7.1.1 Rappels : injections, surjections , bijections.

Définition 7.1.1.1. Soient D et D' deux ensembles et f une application $f : D \to D'$.

Soit M un point de D, le point $M' = f(M)$ de D' est appelé *l'image* de M et M est appelé un *antécédent* de M'.

– f est dite *injective* si tout point M' de D' admet au plus un antécédent dans D. Autrement dit,
  - si pour M, N deux points de D on a
  $$f(M) = f(N) \Rightarrow M = N,$$
  ou encore
  - si étant donné un point V de D' fixé (mais quelconque), l'équation $f(X) = V$ a au plus une solution $X \in D$.

– f est dite *surjective* si tout point M' de D' admet au moins un antécédent dans D. Autrement dit,
  - si étant donné $V \in D'$ l'équation $f(X) = V$ a au moins une solution $X \in D$.

– f est dite *bijective* si f est injective et surjective. Autrement dit,
  - si tout point M' de D' admet un unique antécédent dans D ou encore
  - si étant donné $V \in D'$ l'équation $f(X) = V$ a une unique solution $X \in D$ ou encore
  - s'il existe une application dite *réciproque* notée $f^{-1} : D' \to D$ telle que $f^{-1} \circ f(X) = X$, pour tout $X \in D$ et $f \circ f^{-1}(Y) = Y$, pour tout $Y \in D'$.

7.1.2 Difféomorphismes.

Soit D et D' deux sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un C^1-*difféomorphisme* de D dans D' si :

1. f est une bijection de D dans D',
2. f est de classe C^1 sur D,
3. la réciproque f^{-1} de f est de classe C^1 sur D'.

7.1.3 Exemples.

1. Une fonction d'une variable C^1 dont la dérivée est de signe constant sur un intervalle I réalise un C^1-difféomorphisme de I sur son image $f(I)$.
2. Les transformations affines de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de déterminant non nul.
3. Le passage en coordonnées polaires.

Contrairement au cas des fonctions d'une variable, dans le cas des fonctions de plusieurs variables on ne dispose pas de critère simple pour montrer qu'une fonction est un C^1-difféomorphisme. En fait, la propriété qui est difficle à établir est la bijectivité de f. On ne dispose que d'un résultat local appelé justement : "le Théorème d'inversion locale."

7.2 Théorème d'inversion locale.

7.2.1 Enoncé du Théorème.

Hypothèses. Soient $A \in \mathbb{R}^2$ un point et
$\Phi \left\{ \begin{array}{ll} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto (X(u,v), Y(u,v)) \end{array} \right.$, une fonction de classe C^1 tels que

$$|Jac_A f| \neq 0.$$

Conclusions.
Alors, il existe une boule $B(A, \delta)$ ($\delta > 0$) centrée en A telle que la restriction $B(A, \delta)$ de la fonction Φ est un C^1-difféomorphisme sur son image $\Phi(B(A, \delta))$.
Problème. on ne connait pas d'estimation sur la taille de δ.

7.2.2 Contre-exemple au théorème global

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
Calculer $f(0, 0)$ et $f(0, 2\pi)$, que peut-on dire sur la bijectivité de f.
Calculer la matrice jacobienne et le jacobien de f sur $\mathbb{R}^2$.
Conclure.

7.2.3 Un petit critère global.

Si on suppose que Φ est une bijection de D dans D' et que son jacobien ne s'annule jamais sur D alors Φ est un C^1-difféomorphisme de D dans D'.

Les changements de variables sont utiles pour résoudre des équations au dérivées partielles et calculer des intégrales multiples.

Chapitre 8

Equations aux dérivées partielles.

8.1 Généralités.

8.1.1 Définitions.

Soit p un entier, on appelle *équation aux dérivées partielles d'ordre* p une équation de la forme $F(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, ..., \frac{\partial^p f}{\partial y^{p-k} \partial x^k}) = 0$ où f est une fonction de N variables.

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. *Une solution sur D de cette EDP* est une fonction f de classe C^p sur D qui vérifie l'équation.

8.1.2 Motivation.

Les équations aux dérivées partielles interviennent pour traduire certains phénomènes physiques : propagation des ondes, magnétisme ...

La plus célèbre est l'*Equation de Laplace :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Les solutions de cette équations sont appelées *fonctions harmoniques.*

Exemple 8.1.2.1. Montrer que la fonction $f(x, y) = e^x \sin y$ est harmonique. (Autrement dit calculer ses dérivées partielles d'ordre 2 et montrer qu'elles satisfont l'équation de Laplace).

Il n'existe pas de méthode théorique générale pour trouver les solutions d'une EDP sauf dans certains cas particuliers comme les EDP linéaires à coeffcients constants ou certaines EDP qui se ramènent après changement de variables à des intégrations simples. Nous allons en voir quelques exemples.

8.2 Changement de variables dans une EDP.

Pour simplifier, nous ne considérons que des EDP d'ordre 1 ou 2 et dont les inconnues sont des fonctions de deux variables.

8.2.1 Problématique-Méthode-Exemple.

Hypothèses.

(1) f est une fonction en les variables (x, y) qui vérifie une EDP (E).

Par exemple :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2x$$

(2) Un changement de variables de $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \underset{\Phi}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \underset{\Phi}{\longmapsto} & (u = \mathcal{U}(x,y), v = \mathcal{V}(x,y)) \end{array} \right.$$

Par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \underset{\Phi}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \underset{\Phi}{\longmapsto} & (u = \mathcal{U}(x,y) = x, v = \mathcal{V}(x,y) = x + 2y) \end{array} \right.$$

But. On veut écrire l'EDP (E') en les variables (u, v) que vérifie la fonction F définie par la relation $f(x, y) = F(\mathcal{U}(x, y), \mathcal{V}(x, y))$.

Pour celà, nous devons exprimer comme fonctions de u et v les quatités suivantes :

(i) x et y s'ils apparaissent c dans (E), dans l'exemple $2x$ apparait dans le second membre ;

(ii) toutes les dérivées partielles de f en focntion de x et y qui apparaisseet dans (E), dans l'exemple on a $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Pour (i), il faut inverser le système, c'est à dire à partir de l'expression de u et v en fonction de x et y, nous devons trouver l'expression de x et y en fonction de u et v. Dans l'exemple :

$$\left\{ \begin{array}{cc} u = & x \\ v = & x + 2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x = & u \\ 2y = & v - x = v - u \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x = & u \\ y = & \frac{v-u}{2} \end{array} \right\}.$$

En particulier, $2x = 2u$

Pour (ii), nous allons appliquer **la règle de composition des dérivées partielles** vue dans le chapitre précédent (attention nous voulons exprimer les dérivées partielles de f en fonctions de celles de F, par rapprot à la formule vue, il faut échanger les rôles de F et f et de u_k et x_i), cette règle s'écrit de manière condensée :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dans l'exemple on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Ensuite, on remplace dans (E), on trouve une EDP (E') en les variables (u, v) qui est satisfaite par la fonction F.

Dans l'exemple :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}) - 2\frac{\partial F}{\partial v} = 2(\frac{\partial F}{\partial u}).$$

$$2x = 2u$$

Finalement

$$(E') : 2\frac{\partial F}{\partial u} = 2u.$$

L'intéret d'un changement de variable est d'obtenir une équation (E') plus facile à résoudre que (E). C'est ce qui se produit dans l'exemple : l'équation (E') ne fait intervenir que la variable u, elle se résoud par une intégration "usuelle" en la variable u (attention les constantes d'intégration sont des fonctions de la variable v seule) :

$$F(u, v) = \frac{U^2}{2} + g(v),$$

où g est une fonction quelconque C^1 de v.

Ensuite pour conclure, on remplace u et v par leurs expressions en x et y, la fonction f ainsi obtenue est une solution de (E). Dans l'exemple :

$$f(x, y) = F(u, v) = F(x, x + 2y) = \frac{x^2}{2} + g(x + 2y).$$

8.2.2 Autres exemples.

On considère :

(1) l'EDP d'ordre 2 :

$$(E) : x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

(2) le changement de variables :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \underset{\Phi}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \underset{\Phi}{\longmapsto} & (u = \frac{x}{y}, v = xy) \end{array} \right.$$

Ecrire l'EDP (E') obtenue après ce changement de variables.

8.3 Exemples.

Deuxième partie

Généralisations du calcul différentiel aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Chapitre 9

Courbes paramétrées dans le plan et l'espace.

Motivations, exemples. L'exemple basique de courbe est la trajectoire décrite par un objet (disons une bille) assimilée à un point matériel (son centre de gravité) qui se déplace au cours du temps t sur un plan ou dans l'espace. Il est par exemple possible que cet objet passe plusieurs fois au même endroit, ce qui interdit de décrire sa trajectoire sous la forme du graphe d'une fonction $y = f(x)$ ou $z = f(x, y)$.

Un autre exemple est donné par le mouvement des planètes du système solaire autour du soleil, régi par les trois Lois de Kepler.

9.1 Généralités

9.1.1 Courbes paramétrées et courbes géométriques

Définition 9.1.1.1. On appelle *courbe paramétrée dans* $\mathbb{R}^n$ une fonction $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Lorsque $t \mapsto \gamma(t)$ est une telle courbe paramétrée, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\mathcal{C} = \{\gamma(t)\ ,\ t \in I\}$$

est la courbe (on dit aussi *courbe géométrique*) associée.

La première loi de Kepler dit que la courbe géométrique tracée dans le plan de l'ecliptique par la terre est une ellipse, mais elle ne dit pas comment cette trajectoire est décrite. Les deux autres lois permettent de retrouver la paramétrisation de cette ellipse correspondant au mouvement de la terre.

Définition 9.1.1.2. *Le* domaine de définition *de γ est constitué de l'ensemble des valeurs pour lesquelles les fonctions coordonnées $x_1(t)$, ... et $x_n(t)$ sont bien définies.*

Une courbe paramétrée γ dite continue *si ses fonctions coordonnées $x_i(t)$ le sont.*

9.1.2 Exemples.

Paramétrisation des droites.

Exemple 9.1.2.1. La droite (AB) a pour représentation paramétrique :

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB},$$

ou encore :

$$\begin{cases} x_1(t) & = x_1^A + t\alpha_1 \\ & \vdots \\ x_n(t) & = x_n^A + t\alpha_n \end{cases}$$

où x_i^A représente la i-iéme coordonnées du point A et α_i la i-iéme coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Hélice.

Exemple 9.1.2.2. On considère la courbe paramétrée de l'espace définie par

$$\begin{cases} x(t) & = \cos t \\ y(t) & = \sin t \\ z(t) & = t \end{cases}$$

9.1.3 Dérivabilité et vecteur tangent.

Définition 9.1.3.1. Une courbe de $\mathbb{R}^n$ est dite *dérivable* si la limite notée

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

existe.

Proposition 9.1.3.2. *Une courbe est dérivable si et seulement si ses fonctions coordonnées $x_i(t)$ le sont et on a*

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), ..., x_n'(t)).$$

Le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1'(t), ..., x_n'(t))$ est le vecteur tangent *à la courbe au point $\gamma(t)$.*

Remarque 9.1.3.3.
- Les propriétés de dérivations pour les sommes, produits se déduisent de celles pour les fonctions d'une variable.
- Lorsque les $x_i(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^p$ on dit que γ est de classe $\mathcal{C}^p$.

Nous verrons dans la partie II du cours (Calcul Intégral) comment déterminer la longueur d'une courbe et sa courbure.

Chapitre 10

Fonctions numériques de n variables.

Motivations, exemples. La météo vu en introduction du premier chapitre.

10.1 Généralités

10.1.1 Définitions

Définition 10.1.1.1. On appelle *fonction numérique de n variables réelles* une fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto f(x_1, ..., x_n) \end{array} \right.$$

Le *domaine de définition* de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ constitué de l'ensemble des valeurs des variables $x_1, ..., x_n$ pour lesquelles la formule de calcul qui définit f a un sens.

Le *graphe* de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ noté Grf défini par

$$Grf = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))\}.$$

10.1.2 Fonctions partielles et dérivées partielles.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1, ..., a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$.

Définition 10.1.2.1. Les *fonctions partielles* de f au point A sont les n fonctions de une variable définies en fixant toutes les variables sauf une, plus précisément ce sont les fonctions $f_i : x_i \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$.

Définition 10.1.2.2. La *dérivée partielle par rapport à la i-ème variable* de f au point A est –lorsqu'il existe– le nombre $f_i'(a_i)$; elle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, ..., a_n)$. C'est aussi la limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, ..., a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}.$$

10.1.3 Différentiabilité.

Soit $A = (a_1, ..., a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$. La définition suivante est équivalente à celle donnée dans le cas des fonctions de deux variables. Elle suppose que l'on sait déjà que f admet des dérivées partielles. Surtout elle a l'avantage de réduire la preuve de la différentiabilté au calul d'une limite.

Définition 10.1.3.1. Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles au point A est *différentiable* au point A si

$$\lim_{h\to O} \frac{f(a_1+h_1,...,a_n+h_n)-f(a_1,...,a_n) - (\frac{\partial f}{\partial x_1}(A).h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A).h_n)}{||h||} = 0,$$

où $O = (0, ..., 0)$, $h = (h_1, ..., h_n)$ et $||h|| := \sqrt{h_1^2 + ... + h_n^2}$.

10.1.4 Compostions des dérivées partielles.

Composition au but(*avec une fonction réelle.*)

Hypothèses.
$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \xrightarrow[f]{} \mathbb{R} \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) \underset{f}{\longmapsto} f(x_1, ..., x_n) \underset{\varphi}{\longmapsto} \varphi(f(x_1, ..., x_n)) \end{cases}$$

Les fonctions f et φ sont de classe C^1.

Conclusions. La fonction $F = \varphi \circ f : (x_1, ..., x_n) \mapsto \varphi(f(x_1, ..., x_n))$ est de classe C^1 et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \varphi'(f(x_1, ..., x_n))\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n).$$

Composition à la source (*avec une courbe paramétrée.*)

Hypothèses.
$$\begin{cases} \mathbb{R} \underset{\gamma}{\longmapsto} \mathbb{R}^n \xrightarrow[f]{} \mathbb{R} \\ t \underset{\gamma}{\longmapsto} (x_1(t), ..., x_n(t)) \underset{f}{\longmapsto} f(x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases}$$

Les fonctions f et γ sont de classe C^1.

Conclusions. La fonction $f \circ \gamma : t \mapsto f(\gamma(t))$ est de classe C^1 et

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(f(x_1(t), ..., x_n(t)\big) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), ..., x_n(t)).\frac{dx_1(t)}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), ..., x_n(t)).\frac{dx_d(t)}{dt} =$$
$$< \mathrm{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t) > .$$

Chapitre 11

Fonctions vectorielles de n variables.

Motivations, exemples. On considère un objet reperé par sa position (x, y, z) dans l'espace, on souhaite étudier simultanée plusieurs grandeurs physiques (Pression $P(x, y, z)$, Volume $V(x, y, z)$, Température $T(x, y, z)$...) associées à cet objet.

11.1 Généralités

11.1.1 Définitions

Définition 11.1.1.1. On appelle *fonctionvectorielle de n variables réelles* une fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^p \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto \big(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_p(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

La donnée de la fonction vectorielle f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est la donnée des p fonctions numériques f_i de n variables.

Le *domaine de définition* de f est l'intersection des domaines de définition des f_i.

La fonction f est *de classe C^k* si chacune de f_i est de classe C^k.

Le *graphe* de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+p}$ noté Grf défini par

$$Grf = \{(x_1, ..., x_n, (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_p(x_1, ..., x_n)\} .$$

11.2 Dérivées partielles, Matrice jacobienne, Déterminant Jacobien.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$de classe C^1 et $A = (a_1, ..., a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$. On peut calculer $n \times p$ dérivées partielles au point A :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(A)......., \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(A)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(A)......., \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(A)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(A), ..., \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(A)$$

On range ces $n \times p$ données dans un tableau.

Définition 11.2.0.2. La *(matrice) jacobienne* de f au point A est la matrice à p lignes et n colonnes dont les coefficients sont les dérivées partielles des f_i au point A.

Plus précisément, on écrit :

$$Jac_A f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & .... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(A) \\ \vdots & .... & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(A) & .... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(A) \end{pmatrix}$$

Lorsque $p = n$, cette matrice est une matrice carrée et son déterminant est appelé *le déterminant jacobien* de f au point A.On le note $|Jac_A f|$.

11.3 Différentiabilité.

Définition 11.3.0.3. La *différentiable* de f au point A est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est la jacobienne de f au point A.

11.4 Compostions des dérivées partielles.

Hypothèses.

$$\begin{cases} \mathbb{R}^p & \xrightarrow[\mathcal{X}]{} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{R} \\ U = (u_1, ..., u_n) & \underset{\mathcal{X}}{\longmapsto} & (x_1 = \mathcal{X}_1(U), ..., x_n = \mathcal{X}_n(U)) & \underset{\varphi}{\longmapsto} & f(\mathcal{X}(U)) = f\big(\mathcal{X}_1(U), ..., \mathcal{X}_n(U)\big) \end{cases}$$

Les fonctions f et $\mathcal{X}$ sont de classe C^1.

Conclusions.

La fonction $F = f \circ \mathcal{X} : (u_1, ..., u_p) \mapsto= f\big(\mathcal{X}_1(U), ..., \mathcal{X}_n(U)\big)$ est de classe C^1 et

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}(u_1, ..., u_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\mathcal{X}_1(U), ..., \mathcal{X}_n(U)\big)\frac{\partial \mathcal{X}_1(U)}{\partial u_k} + ... + .\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\mathcal{X}_1(U), ..., \mathcal{X}_n(U)\big)\frac{\partial \mathcal{X}_n(U)}{\partial u_k}$$

Si on identifie les variables x_i avec les fonctions $\mathcal{X}_i$ et qu'on ne précise plus les variables des fonctions f et F, cette règle de composition s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_k} + ... + .\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_k}$$

Une application importante de cette règle de composition des dérivées partielles est la résolution d' Equations aux Dérivées Partielles (EDP Voir le chapitre suivant).

11.5 Composition des différentielles. Jacobienne d'une fonction composée.

11.6 Difféomorphismes.

11.6.1 Rappels : injections, surjections , bijections.

Définition 11.6.1.1. Soient D et D' deux ensembles et f une application $f : D \to D'$.

Soit M un point de D, le point $M' = f(M)$ de D' est appelé *l'image* de M et M est appelé un *antécédent* de M'.

f est dite *injective* si tout point M' de D' admet au plus un antécédent dans D. Autrement dit,

si pour M, N deux points de D on a

$$f(M) = f(N) \Rightarrow M = N.$$

ou encore si étant donné $Y \in D'$ l'équation $f(X) = Y$ a au plus une solution $X \in D$.

f est dite *surjective* si tout point M' de D' admet au moins un antécédent dans D. Autrement dit,

si étant donné $Y \in D'$ l'équation $f(X) = Y$ a au moins une solution $X \in D$.

f est dite *bijective* si f est injective et surjective. Autrement dit,

si tout point M' de D' admet un unique antécédent dans D ou encore

si étant donné $Y \in D'$ l'équation $f(X) = Y$ a une unique solution $X \in D$.

11.6.2 Difféomorphismes.

Soit D et D' deux sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un C^1*-difféomorphisme* de D dans D' si :

1. f est une bijection de D dans D',
2. f est de classe C^1 sur D,
3. la réciproque f^{-1} de f est de classe C^1 sur D'.

11.6.3 Exemples.

1. Une fonction d'une variable C^1 dont la dérivée est de signe constant sur un intervalle I réalise un C^1-difféomorphisme de I sur son image $f(I)$.
2. Les transformations affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de déterminant non nul.
3. Le passage en coordonnées polaires.

Contrairement au cas des fonctions d'une variable, dans le cas des fonctions de plusieurs variables on ne dispose pas de critère simple pour montrer qu'une fonction est un C^1-difféomorphisme. En fait, la propriété qui est difficile à établir est la bijectivité de f. On ne dispose que d'un résultat local appelé justement : "le Théorème d'inversion locale."

Chapitre 12

Analyse vectorielle.