

## Séries entières

Exercice 1. Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Une série entière. On suppose qu'elle diverge pour  $z = 3 + 4i$  et qu'elle converge pour  $z = 5i$ . Quel est son rayon de convergence ?

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+3)! z^n; & \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n; & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n; & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n; & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n; & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}; & \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n \end{aligned}$$

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1) 2^n z^n; & f_2(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n} z^n; & f_3(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ f_4(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} z^n; & f_5(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} z^n; & f_6(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n} \\ f_7(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}; & f_8(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n; & f_9(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4.

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$$

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.
2. Étudier la convergence en  $-R$  et en  $R$ .

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

Développer les fonctions suivantes en séries entières de  $x$  :

1.  $f: x \rightarrow \frac{1}{(1-x)(2+x)}$

2.  $f: x \rightarrow \frac{1}{1+x+x^2}$

3.  $f: x \rightarrow \ln(x^2 + x + 1)$

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

Soit  $f$  définie sur  $] -1, 1[$  par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .
2. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $(1-x^2)y' - xy = 1$ .
3. Déterminer le développement en série entière de  $f$  sur  $] -1, 1[$ .

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8.

1. Déterminer  $f$  solution de l'équation différentielle  $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$
2. Reconnaître  $f$ .

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

Soit  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif. On note  $f$  sa somme sur  $] -R, R[$ .

1. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients  $a_n$  pour que  $f$  satisfasse l'équation différentielle

$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$$

2. On suppose ces conditions vérifiées. Déterminer les  $a_n$  lorsque  $a_0 = 1$ .
3. Quelle est la valeur de  $R$  ? Quelle est la fonction  $f$  obtenue ?

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

On considère la série complexe de somme

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

Où les  $a_n$  sont définis par :

$$a_0 = 1, a_1 = 3, \text{ et } \forall n \geq 2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à  $\frac{1}{4}$ .
2. Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R$

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3. En déduire la valeur de  $R$ , ainsi que l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

On définit la suite  $(a_n)$  par  $a_0 = 1$  et par la relation de récurrence

$$2a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$$

Et on pose  $b_n = \frac{a_n}{n!}$

1. Montrer que  $|a_n| \leq \frac{n!}{2^n}$ , en déduire que le rayon de convergence de la série entière de terme général  $b_n x^n$  n'est pas nul.
2. On appelle  $S(x)$  la somme de cette série, calculer  $S'(x)$  en fonction de  $S(x)$ .
3. En déduire  $S(x)$

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12. Intégration

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Allez à : [Correction exercice 12](#)

## Corrections

Correction exercice 1.

La série entière diverge pour  $z = 3 + 4i$  donc son rayon de convergence  $R \leq |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

La série entière converge pour  $z = 5i$  donc son rayon de convergence  $R \geq |5i| = 5$

Donc  $R = 5$

Allez à : [Exercice 1](#)

Correction exercice 2.

- $a_n = (-1)^n (n+3)!$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+4)!}{(n+3)!} = n+4 \rightarrow +\infty$$

Donc  $R = 0$

Allez à : [Exercice 2](#)

- $a_n = n^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n \rightarrow +\infty$$

Donc  $R = 0$

Allez à : [Exercice 2](#)

- $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)! n! n!}{(n+1)! (n+1)! (2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)! n! n!}{(n+1)n! (n+1)n! (2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \rightarrow 4$$

Donc  $R = \frac{1}{4}$

Allez à : [Exercice 2](#)

- $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}}{\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}} = \frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n) \ln(n+2)}$$

Il est presque évident que la limite est 1, on va quand même faire un effort

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \sim \ln(n)$$

De même

$$\ln(n+2) \sim \ln(n)$$

Donc

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \frac{(\ln(n))^2}{\ln(n) \ln(n)} = 1 \rightarrow 1$$

$$\text{Donc } R = \frac{1}{1} = 1$$

Allez à : **Exercice 2**

- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+o(1)} \rightarrow e$$

$$\text{Donc } R = \frac{1}{e}$$

Allez à : **Exercice 2**

- $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ , notons que  $1 + \frac{(-1)^n}{n} \geq 0$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{(-1)^n + o(1)}$$

Cette expression n'a pas de limite, on voit bien qu'il va falloir séparer les  $n$  pairs et les  $n$  impairs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p} (x^2)^p + x \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} (x^2)^p$$

On pose

$$\alpha_p = a_{2p} = \left(1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p}\right)^{(2p)^2} = \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{4p^2}$$

$$\begin{aligned} \beta_p &= a_{2p+1} = \left(1 + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right)^{(2p+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p+1} = \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right) \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p} \end{aligned}$$

Cherchons les rayons de convergence de ces deux séries

$$\sqrt[n]{\alpha_p} = \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{4p} = e^{4p \ln\left(1 + \frac{1}{2p}\right)} = e^{4p\left(\frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)} = e^{2+o(1)} \rightarrow e^2$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général  $\alpha_p X^p$  est  $\frac{1}{e^2}$ , donc le rayon de convergence de la série entière de terme général  $\alpha_p x^{2p}$  est  $R_1 = \frac{1}{e}$ .

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{\beta_p} &= \left(\frac{2p}{2p+1} \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{4p+4} \\ &= \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{4p} \\ &\quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^4 = 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{4p} = e^{4p \ln\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)} = e^{4p\left(-\frac{1}{2p+1} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)} = e^{\frac{-4p}{2p+1} + o\left(\frac{1}{p}\right)} \rightarrow \frac{1}{e^2}$$

Donc  $\sqrt[p]{\beta_p} \rightarrow \frac{1}{e^2}$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général  $\beta_p X^p$  est  $e^2$ , donc le rayon de convergence de la série entière de terme général  $\alpha_p x^{2p}$  est  $R_2 = e$ .

La série entière de terme général  $a_n x^n$  est la somme de ces deux séries donc son rayon de convergence est

$$R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{e}$$

Allez à : **Exercice 2**

•

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} (z^3)^n$$

On va chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} X^n$$

$$a_n = \frac{(-2)^n}{n+1}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-2)^n}{n+1}\right|} = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$$

La série entière de terme général  $a_n X^n$  a pour rayon de convergence  $R = \frac{1}{1} = 1$

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} (z^3)^n$$

Converge pour  $|z^3| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$  et diverge pour  $|z^3| > 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

Son rayon de convergence est 1.

Allez à : **Exercice 2**

•  $a_n = (1+i)^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|(1+i)^{n+1}|}{|(1+i)^n|} = |1+i| = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général  $(1+i)^n z^n$  est  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1. Soit  $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (n)2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1)2^n\right|} = \frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n} = 2 \frac{n}{n-1} \rightarrow 2$$

Donc le rayon de convergence est  $R = \frac{1}{2}$

Allez à : **Exercice 3**

2. Soit  $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}n2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|} = \frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n} = 2\frac{n}{n-1} \rightarrow 2$$

Donc le rayon de convergence est  $R = \frac{1}{2}$ .

Allez à : **Exercice 3**

3. Soit  $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

Donc le rayon de convergence est  $R = +\infty$

$$f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$$

Allez à : **Exercice 3**

4. Soit  $a_n = e^{-n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = e^{n^2-(n+1)^2} = e^{-2n-1} \rightarrow 0$$

Donc le rayon de convergence est  $R = +\infty$ .

Ou

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{-n} \rightarrow 0$$

Allez à : **Exercice 3**

5. Soit  $a_n = \frac{n-1}{n^2+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n}{(n+1)^2+1}}{\frac{n-1}{n^2+1}} = \frac{n(n^2+1)}{((n+1)^2+1)(n-1)} \rightarrow 1$$

Donc le rayon de convergence est  $R = 1$ .

Allez à : **Exercice 3**

6. Soit  $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln(n)}{n^2}} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence est  $R = \frac{1}{1} = 1$ .

Allez à : **Exercice 3**

7.

$$f_7(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n} = z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} X^n$$

Avec  $x = z^2$

Soit  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right|} = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général  $\frac{(-1)^n}{n+1} X^n$  est  $R = \frac{1}{1}$

Et le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n}$  est  $R'^2 = R = 1$ , donc  $R' = 1$ .

Allez à : **Exercice 3**

8. Soit  $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\left| \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} \right|}{\left| \frac{(3n)!}{(n!)^3} \right|} = \frac{(3(n+1))!}{(3n)!} \times \frac{(n!)^3}{((n+1)!)^3} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \times \frac{(n!)^3}{((n+1)n!)^3} = \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(3n)!} \times \frac{(n!)^3}{(n+1)^3(n!)^3} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \\ &\rightarrow 3^3 = 27 \end{aligned}$$

Donc

$$R = \frac{1}{27}$$

Allez à : **Exercice 3**

9. Soit  $a_n = n^\alpha$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^\alpha \rightarrow 1$$

Donc le rayon de convergence est  $R = \frac{1}{1}$ .

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

Cette série entière converge pour  $|X| < R$  et diverge pour  $|X| > R$ , autrement dit cette série converge pour  $|z^2| < R$  et diverge pour  $|z^2| > R$  donc le rayon de convergence est  $\sqrt{R}$ .

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

1. Si  $|x| < 1$

$$\left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \right| \leq x^n$$

Et la série de terme général  $x^n$  converge.

Si  $|x| > 1$

$$\left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}} |x|^n = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{n \ln|x|} \rightarrow +\infty$$

Le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc la série diverge

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général  $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$  a pour rayon de convergence  $R = 1$ .

2. Si  $x = 1$

La série numérique de terme général  $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$  qui est le terme général d'une suite de Riemann diverge avec  $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ , la série diverge.

Si  $x = -1$

$(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  est le terme général d'une série alternée, manifestement la suite  $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$  est décroissante car si on pose

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sin\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Alors

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cos\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) < 0$$

De plus elle tend vers 0, d'après le TSSA, la série de terme général  $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  est convergente.

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

Dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux rayons de convergence (pourtant il y aurait à dire) donc les égalités seront à l'intérieur du rayon de convergence que l'on espérera non nul.

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(2+x)} &= \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}}{2+x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2^n}\right) x^n \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{a}{x-j} + \frac{\bar{a}}{x-j^2} \\ a &= \left[ \frac{1}{x-j^2} \right]_{x=j} = \frac{1}{j-j^2} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{-\frac{i\sqrt{3}}{3}}{x-j} + \frac{\frac{i\sqrt{3}}{3}}{x-j^2} = -\frac{i\sqrt{3}}{3} \frac{1}{j(xj^2-1)} + \frac{i\sqrt{3}}{3} \frac{1}{j^2(xj-1)} = -\frac{ij^2\sqrt{3}}{3} \frac{1}{xj^2-1} + \frac{ij\sqrt{3}}{3} \frac{1}{xj-1} \\ &= \frac{ij^2\sqrt{3}}{3} \frac{1}{1-xj^2} - \frac{ij\sqrt{3}}{3} \frac{1}{1-xj} = \frac{ij^2\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (xj^2)^n - \frac{ij\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (xj)^n \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (ij^2(j^2)^n - ij(j^2)^n) x^n = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1}) x^n \end{aligned}$$

On peut arranger  $i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1}$

$$\begin{aligned} i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1} &= i((j^2)^n - j^n) = i\left(e^{-i\frac{2(n+1)\pi}{3}} - e^{i\frac{2(n+1)\pi}{3}}\right) = i\left(-2i\pi \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\pi \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) x^n$$

3.  $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$  entraîne que



$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} (2x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) x^n$$

D'après la question précédente, alors

$$f'(x) = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) x^n \right)$$

Dans la première somme on pose  $n' = n + 1$ ,  $n = 0 \Rightarrow n' = 1$ ,

$$f'(x) = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \sum_{n'=1}^{+\infty} 2 \sin\left(\frac{2n'\pi}{3}\right) x^{n'} + \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) x^n \right)$$

Puis on change  $n'$  en  $n$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) x^n \right) \\ &= 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \left( 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) \right) x^n \right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(x) = f(0) + 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) x + 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 2 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On a  $f(0) = 0$  et on fait un changement de variable  $n' = n + 1$ , puis on rechange  $n'$  par  $n$

$$f(x) = -2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} x + 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \left( 2 \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right) \frac{x^n}{n}$$

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1.

$$X \rightarrow (1-X)^{-\frac{1}{2}}$$

Est une fonction qui admet un développement en série entière sur  $|X| < 1$ , donc

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Est une fonction qui admet un développement en série entière sur  $|x^2| < 1$ , donc sur  $|x| < 1$

$$x \rightarrow \arcsin(x)$$

A pour dérivée  $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  qui admet un développement en séries entières sur  $|x| < 1$  donc

$\arcsin$  admet un développement en séries entières sur  $|x| < 1$ , pour finir le produit de deux séries admettant des développements en séries entières sur  $|x| < 1$  admet un développement en séries entières sur  $|x| < 1$ .

Allez à : **Exercice 7**

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(x) \times (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \arcsin(x) \times \left(-\frac{1}{2}\right) (-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{1-x^2} + \arcsin(x) \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-x^2} + f(x) \frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(1-x^2)f'(x) = 1 + xf(x)$$

C'est bien ce que demandait de montrer l'énoncé.

Allez à : **Exercice 7**

3. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) - x^2 f'(x) + xf(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 1 \quad (*)$$

Le but va être un «  $x$  » dans chaque somme

Dans la seconde somme on pose  $n' = n + 1, n = 0 \Rightarrow n' = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n'=1}^{\infty} (n' - 1) a_{n'-1} x^{n'}$$

Puis on remplace  $n'$  par  $n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) a_{n-1} x^n$$

Dans la troisième somme on pose  $n' = n + 1, n = 0 \Rightarrow n' = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n'=1}^{\infty} a_{n'-1} x^{n'}$$

Puis on remplace  $n'$  par  $n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

On remplace tout cela dans (\*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

On réunit ces trois sommes à partir de  $n = 1$ , pour cela on va séparer le terme  $n = 0$  de la première somme des autres termes

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

Donc

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - (n-1) a_{n-1} - a_{n-1}) x^n = 1 \Leftrightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}) x^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 1, (n+1) a_{n+1} - n a_{n-1} = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$n \geq 1, \quad (n+1) a_{n+1} - n a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow n \geq 2, \quad n a_n - (n-1) a_{n-2} = 0 \quad (**)$$

On va distinguer  $n$  pair et  $n$  impair

- $n = 2p$

$$(**) \Leftrightarrow 2p a_{2p} = (2p-1) a_{2(p-1)}$$

Comme  $f(0) = 0$  on a  $a_0 = 0$ , puis par une récurrence très simple,  $a_{2p}$  est nul.

- $n = 2p + 1$

$$(**) \Leftrightarrow (2p+1) a_{2p+1} = 2p a_{2p-1} \Leftrightarrow a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1}$$

Comme on connaît  $a_1 = 1$ , on peut en déduire  $a_3 = \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} a_{2 \times 1 - 1} = \frac{2}{3} a_1, \text{etc...}$

Il reste à trouver la « formule » donnant  $a_{2p+1}$  pour tout  $p \geq 0$

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1}$$

Si on remplace  $p$  par  $p-1$

$$a_{2p-1} = \frac{2(p-1)}{2p-1} a_{2p-3}$$

Puis par  $p-2$

$$a_{2p-3} = \frac{2(p-2)}{2p-3} a_{2p-5}$$

Jusqu'à  $p=2$

$$a_5 = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 + 1} a_3$$

Puis  $p=1$

$$a_3 = \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} a_1$$

On n'a plus qu'à multiplier toutes ces égalités, les termes en «  $a_{2p-k}$  » s'éliminent

$$a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)(2p-1) \dots 5 \times 3} a_1$$

On peut améliorer ce résultat en multipliant en haut et en bas par

$$2p(2p-2) \dots 4 \times 2 = 2^p p!$$

De façon à « boucher » les trous en bas pour reconstituer  $(2p+1)!$

$$a_{2p+1} = \frac{2^p p! 2^p p!}{(2p+1)2p(2p-1)(2p-2) \dots 5 \times 4 \times 3 \times 2} a_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} a_1$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

Il faut quand même vérifier que cette égalité est valable sur tout  $] -1, 1[$ , pour cela il faut trouver le rayon de convergence de la série, reprendre  $\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$  c'est assez maladroit, il vaut mieux reprendre l'égalité

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1} \Leftrightarrow \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \frac{2p}{2p-1} \rightarrow 1$$

Donc  $R = \frac{1}{1} = 1$ .

Ce n'est pas exactement  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  mais pour une série lacunaire (qui a des trous, c'est-à-dire les  $a_{2p}$  ici) c'est bien ainsi que cela marche.

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

1. On pose

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \Rightarrow f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ \Rightarrow f''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

Pour obtenir un  $x^n$  dans  $x^2 f''(x)$  on va utiliser la première expression de la dérivée seconde.

Pour obtenir un  $x^n$  dans  $xf'(x)$  on va utiliser la première expression de la dérivée.

Pour  $f(x)$  on n'a pas le choix

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + 4xf'(x) - (2 - x^2)f(x) - 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) - x^2 f(x) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pour les trois premières sommes tout va bien on a des «  $x^n$  », pour la dernière, c'est plus compliqué, on pose  $n' = n + 2$ ,  $n = 0 \Rightarrow n' = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n'=2}^{\infty} a_{n'-2} x^{n'}$$

Puis on remplace  $n'$  par  $n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

On remplace

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + 4xf'(x) - (2 - x^2)f(x) - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pour réunir ces quatre sommes en une seule, il va falloir partir de  $n = 2$ , donc isoler les termes en  $n = 0$  et  $n = 1$  dans les trois premières sommes

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n &= 0 \times (-1) \times a_0 x^0 + 1 \times 0 \times a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n &= 0 \times a_0 x^0 + 1 \times a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

On remplace

$$\begin{aligned} &x^2 f''(x) + 4xf'(x) - (2 - x^2)f(x) - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \left( a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^n \right) + 2 \left( a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \right) - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2})x^n + 4a_1 x + 2a_0 + 2a_1 x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} ((n^2 - n + 4n + 2)a_n - a_{n-2})x^n + 6a_1 x + 2a_0 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} ((n^2 + 3n + 2)a_n - a_{n-2})x^n + 6a_1 x + 2a_0 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} ((n+1)(n+2)a_n - a_{n-2})x^n + 6a_1 x + 2a_0 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2, (n+1)(n+2)a_n - a_{n-2} = 0 & (*) \\ 6a_1 = 0 \\ 2a_0 - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On va distinguer deux cas,  $n$  pair et  $n$  impair

- $n = 2p + 1$

$$(*) \Leftrightarrow (2p + 2)(2p + 3)a_{2p+1} = a_{2p-1}$$

Comme  $a_1 = 0$  tous les  $a_{2p+1}$  sont nuls.

- $n = 2p$

$$(*) \Leftrightarrow (2p + 1)(2p + 2)a_{2p} = a_{2(p-1)} \\ \Leftrightarrow a_{2p} = \frac{1}{(2p + 2)(2p + 1)} a_{2(p-1)}$$

Puis on remplace  $p$  par  $p - 1$

$$a_{2(p-1)} = \frac{1}{2p(2p - 1)} a_{2(p-2)}$$

Puis par  $p - 2$

$$a_{2(p-2)} = \frac{1}{(2p - 2)(2p - 3)} a_{2(p-3)}$$

Jusqu'à  $p = 2$

$$a_4 = \frac{1}{6 \times 5} a_2$$

Et enfin  $p = 1$

$$a_2 = \frac{1}{4 \times 3} a_0 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2}$$

On multiplie toutes ces lignes, les «  $a_{2(p-k)}$  » se simplifient

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p + 2)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 2)!} x^{2p}$$

Il faut quand même regarder où cette égalité est valable

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p + 2)(2p + 1)} a_{2(p-1)} \Leftrightarrow \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}} = \frac{1}{(2p + 2)(2p + 1)} \rightarrow 0$$

Donc  $R = +\infty$ .

Ce n'est pas exactement  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  mais pour une série lacunaire (qui a des trous, c'est-à-dire les  $a_{2p}$  ici) c'est bien ainsi que cela marche.

Allez à : **Exercice 8**

2. Si  $x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 2)!} x^{2p} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 2)!} x^{2p+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p}$$

En posant  $p' = p + 1$ , puis en renommant  $p'$  par  $p$ .

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p} = \frac{1}{x^2} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p} - 1 \right) = \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2}$$

Si  $x = 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 2)!} 0^{2p} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

1.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\Rightarrow f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Pour obtenir un «  $x^n$  » dans  $f'(x)$  on va prendre la seconde expression

Pour obtenir un «  $x^n$  » dans  $x f''(x)$  on va utiliser la seconde expression

$$x f''(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n$$

$$x f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

On pose  $n' = n + 1$ ,  $n = 0 \Rightarrow n' = 1$

$$x f(x) = \sum_{n'=1}^{\infty} a_{n'-1} x^{n'}$$

Puis on change  $n'$  en  $n$

$$x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

On remplace cela dans

$$x f''(x) + 2 f'(x) + x f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

On va pouvoir regrouper ces trois sommes à partir de  $n = 1$ , donc dans les deux premières on va isoler les termes pour  $n = 0$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n = 1 \times 0 \times a_1 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 \times a_1 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

On remplace

$$x f''(x) + 2 f'(x) + x f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 2 a_1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n + 2 a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)(n+2) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n + 2 a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 1, (n+1)(n+2) a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \\ 2 a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 1, a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 2, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

On va distinguer le cas  $n$  pair et le cas  $n$  impair.

- Si  $n = 2p + 1$ , comme  $a_1 = 0$  tous les termes  $a_{2p+1} = 0$
- Si  $n = 2p$

$$\forall n \geq 2, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \Leftrightarrow \forall p \geq 1, a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{2p(2p+1)}$$

$$a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{2p(2p+1)}$$

On change  $p$  en  $p - 1$

$$a_{2(p-1)} = -\frac{a_{2(p-2)}}{(2p-2)(2p-1)}$$

En  $p - 2$

$$a_{2(p-2)} = -\frac{a_{2(p-3)}}{(2p-4)(2p-3)}$$

$p = 2$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \times 5}$$

$p = 1$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \times 3} = -\frac{1}{2 \times 3}$$

On multiplie ces  $p$  lignes, les  $a_{2(p-k)}$  s'éliminent

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$$

Allez à : **Exercice 9**

2.

$$|a_{2p}| = \frac{|a_{2(p-1)}|}{2p(2p+1)} \Leftrightarrow \frac{|a_{2p}|}{|a_{2(p-1)}|} = \frac{1}{2p(2p+1)} \rightarrow 0$$

Donc le rayon de convergence est  $R = +\infty$ .

Si  $x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p} = \frac{1}{x} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} = \frac{\sin(x)}{x}$$

Si  $x = 0$ ,

$$f(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = \frac{(-1)^0}{(2 \times 0 + 1)!} = 1$$

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

1. Montrons par récurrence que  $|a_n| < 4^n$

L'inégalité est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , supposons la vraie pour  $a_{n-2}$  et  $a_{n-1}$  alors

$$|a_n| = |3a_{n-1} - 2a_{n-2}| < 3|a_{n-1}| + 2|a_{n-2}| < 3 \times 4^{n-1} + 2 \times 4^{n-2} = 4^{n-2}(3 \times 4 + 2) \\ = 4^{n-2} \times 14 < 4^{n-2} \times 16 = 4^n$$

On pose  $b_n = 4^n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4 \rightarrow 4$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général  $b_n z^n$  est  $\frac{1}{4}$ , comme  $|a_n| < b_n$  le rayon de convergence de la série entière de terme général  $a_n z^n$  est supérieur ou égal à  $\frac{1}{4}$ .

2.

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n = 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n = \\ = 1 + 3z + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^n$$

Dans la première somme on pose  $n' = n - 1$ ,  $n = 2 \Rightarrow n' = 1$ , dans la deuxième on pose  $n'' = n - 2$ ,  $n = 2 \Rightarrow n'' = 0$

$$f(z) = 1 + 3z + 3 \sum_{n'=1}^{+\infty} a_{n'} z^{n'+1} - 2 \sum_{n''=0}^{+\infty} a_{n''} z^{n''+2}$$

Puis on change  $n'$  et  $n''$  en  $n$

$$f(z) = 1 + 3z + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+2} = 1 + 3z + 3z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\ = 1 + 3z + 3z \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - a_0 \right) - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \\ = 1 + 3z + 3z(f(z) - 1) - 2z^2 f(z) = 1 + 3zf(z) - 2z^2 f(z)$$

D'où l'on déduit que

$$f(z) - 3zf(z) + 2z^2 f(z) = 1$$

Ce qui équivaut à

$$f(z)(1 - 3z + 2z^2) = 1$$

Ou encore

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3.

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} \\ = - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$$

On pose  $\alpha_n = 1$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 \rightarrow 1$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général  $z^n$  est  $R_1 = \frac{1}{1} = 1$

On pose  $\beta_n = 2^n$

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \rightarrow 2$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général  $z^n$  est  $R_2 = \frac{1}{2}$



$$f(z) = - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1 + 2^{n+1}) z^n$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière de terme général  $(-1 + 2^{n+1})z^n$  est

$$R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{2}$$

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1.  $|a_n| \leq \frac{n!}{2^n}$  est vraie pour  $n = 0$ , supposons que l'inégalité est vraie pour tout  $k' \in \{0, 1, \dots, n\}$ , alors

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k!}{2^k} \frac{(n-k)!}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{k!}{2^k} \frac{(n-k)!}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{2^n} = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \frac{n!}{2^n} (n+1) = \frac{(n+1)!}{2^n} \end{aligned}$$

Puis on divise par 2

$$a_{n+1} \leq \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$$

Ce qui achève la récurrence.

$$|b_n| = \frac{|a_n|}{n!} \leq \frac{(n+1)!}{2^{n+1} n!} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

On pose

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \frac{\frac{n+2}{2^{n+2}}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \frac{n+2}{n+1} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général  $\alpha_n x^n$  est 2, comme  $|b_n| \leq \alpha_n$  le rayon de convergence de la série entière de terme général  $b_n x^n$  est supérieur ou égal à 2.

2.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

On pose  $n' = n - 1$  dans la somme,  $n = 1 \Rightarrow n' = 0$

$$S(x) = b_0 + \sum_{n'=0}^{+\infty} b_{n'+1} x^{n'+1}$$

Puis on change  $n'$  en  $n$

$$S(x) = b_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1} x^{n+1}$$

Cette petite manipulation permet de faire apparaître  $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n!}$  Ce qui est suggéré par l'énoncé puisque l'on a  $a_{n+1}$  en fonction d'autres «  $a_{k'}$  »

$$S(x) = \frac{a_0}{0!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} x^{n+1} \right)$$

Allons-y maintenant on peut dériver, on aurait pu le faire avant mais là, on est bien

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (n+1) \binom{n}{k} a_k a_{n-k} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} x^n \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} x^{n-k} x^k \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (n-k)!} a_k a_{n-k} x^{n-k} x^k \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^k a_{n-k} x^{n-k}}{k! (n-k)!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n b_k x^k b_{n-k} x^{n-k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \frac{1}{2} (S(x))^2
\end{aligned}$$

Car ces séries convergent absolument à l'intérieur du cercle de convergence.

3. Cela donne

$$\frac{S'(x)}{(S(x))^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{S(x)} = \frac{1}{2}x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Soit

$$S(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x + K}$$

Or

$$s(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = b_0 = \frac{a_0}{0!} = 1$$

Ce qui entraîne que  $K = -1$  et finalement

$$S(x) = \frac{-1}{\frac{1}{2}x - 1} = \frac{1}{2-x}$$

Allez à : **Exercice 11**

Correction exercice 12.

Il faut faire attention au fait que l'intégrale est une intégrale généralisée en 0, avec les règles de Riemann en 0 avec  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$$\sqrt{x} \frac{\ln(x)}{1+x^2} \rightarrow 0$$

Montre que l'intégrale est convergente

D'autre part

$$\forall x \in [0,1], \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Pour pouvoir appliquer la formule qui permet d'invertir les symboles  $\int$  et  $\sum$  il faut se placer sur un intervalle borné où la fonction est continue et où on peut appliquer la formule ci-dessus, on pose

$$I(\epsilon, X) = \int_{\epsilon}^X \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_{\epsilon}^X \left( \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \int_{\epsilon}^X \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \ln(x) \right) dx$$

C'est faisable mais pas simple du tout, alors on va faire autrement en faisant une intégration par partie de

$\int_{\epsilon}^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$	
$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$u(x) = \arctan(x)$
$v(x) = \ln(x)$	$v'(x) = \frac{1}{x}$
$\int_{\epsilon}^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = [\ln(x) \arctan(x)]_0^1 -$	$\int_{\epsilon}^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = [\ln(x) \arctan(x)]_{\epsilon}^1 - \int_{\epsilon}^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$$

On vérifie que ces trois termes sont bien convergents.

$$[\ln(x) \arctan(x)]_{\epsilon}^1 = \ln(1) \arctan(1) - \ln(\epsilon) \arctan(\epsilon) = -\ln(\epsilon) \arctan(\epsilon) \sim -\epsilon \ln(\epsilon) \rightarrow 0$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$$

Le développement en série entière de  $\arctan(x)$  est

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

On a un problème en  $x = 1$ , la série est alternée,  $\frac{1}{2n+1}$  tend vers 0 en étant décroissante donc la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge on a donc

$$\forall x \in ]-1,1], \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Et

$$\forall x \in ]-1,1], \quad \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

Il faut montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général  $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$  sur  $[0,1]$ . Il s'agit d'une série alternée, on va utiliser la majoration du reste du TSSA

$$\forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leq \frac{x^{2(n+1)}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général  $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$  sur  $[0,1]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 12**