Vade-mecum de l'étudiant en réseaux de Petri

par Stéphane MARIEL

Avant Propos

Les réseaux de Petri, quoique peu à la mode, ne sont pas préhistoriques, on les doit aux travaux du mathématicien allemand Carl Adam Petri dans les années 60.

Ils ont surtout été étudiés en Europe et au MIT et sont à l'origine du GRAFCET utilisé dans l'industrie française et maintenant européenne.

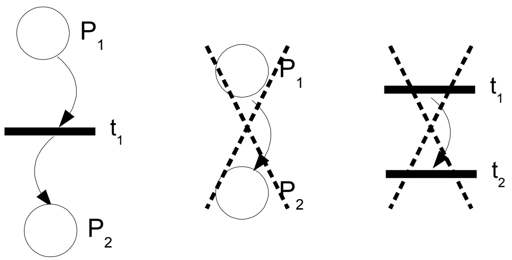
Ils devraient aussi faire leur apparition dans la prochaine version de la norme UML (2) et sont aussi parfois utilisés dans l'industrie du jeu vidéo.

I. Notations et règles de franchissement

1. Places, transitions et arcs

Un réseau de Petri est :

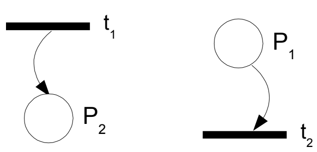
- un graphe,
- formé de deux types de noeuds appelés places et transitions reliés par des arcs orientés,
- et biparti, c'est-à-dire qu'un arc relie alternativement une place à une transition et une transition à une place.



Lorsqu'une place est reliée à une transition par un arc : $P_i \rightarrow t_j$, on parle de place en entrée de t_j.

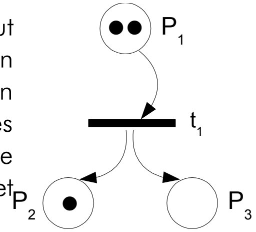
Lorsqu'une transition est reliée à une place par un arc $t_j \rightarrow P_i$, on parle de place en sortie de t_j.

Une transition sans place en entrée est une transition source, une transition sans place en sortie est une transition puits.



2. Marquages

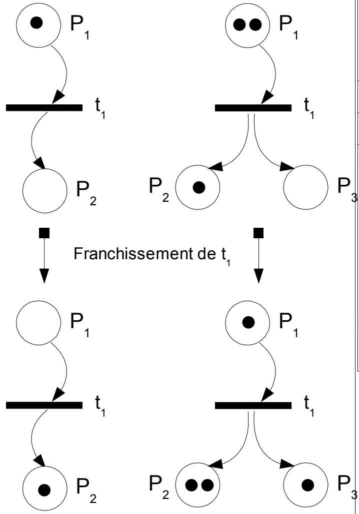
Chaque place d'un réseau de Petri peut contenir une ou plusieurs marques (on parle aussi de jetons). La configuration complète du réseau, avec toutes les marques positionnées, forme le marquage et définit l'état du réseau (et donc l'état du système modélisé).



Dans la suite on traitera principalement des réseaux marqués, et de l'évolution des marquages.

3. Franchissement de transitions

Pour rendre compte de l'évolution du système modélisé, les réseaux de Petri intègrent un formalisme permettant de passer d'un marquage à un autre : c'est le franchissement des transitions.



Une transition est franchissable si chacune des places en entrée comporte au moins un jeton.

Pour les transitions franchissables, on définit le franchissement effectif selon les règles suivantes :

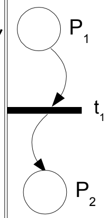
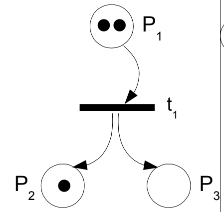
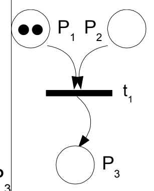
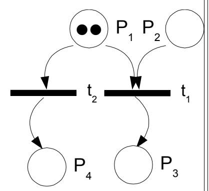
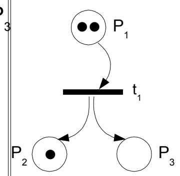
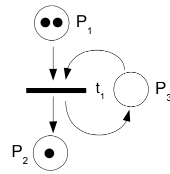
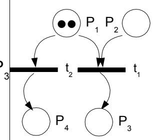
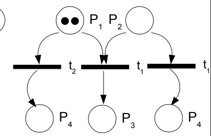
- le franchissement est une opération indivisible (atomique),
- un jeton est consommé dans chaque place en entrée,
- un jeton est produit dans chaque place en sortie.

4. Réseaux particuliers

Le graphe associé à un réseau de Petri peut être très complexe. Un certain nombre de situations présente un intérêt particulier :

1. les graphes d'états
Dans ce cas chaque transition ne dispose que d'une place en entrée et une place en sortie.
2. les réseaux sans conflits
Dans lesquels chaque place n'a qu'une transition en sortie.
3. les réseaux dits simples
Réseaux avec conflits mais dans lequel chaque transition n'intervient au plus que dans une situation de conflit.
4. les réseaux purs
Dans cette situation aucune place n'est à la fois en entrée et en sortie de la même transition.

Le tableau suivant illustre les définitions précédentes :

Graphe d'états		*Sans conflits*	
Possible	Impossible	Possible	Impossible
			
Pur		Simple	
Possible	Impossible	Possible	Impossible
			

II. Propriétés des réseaux de Petri

Dans la suite on appellera M_0 le marquage initial. Et $*M_0$ l'ensemble des marquages accessibles à partir du marquage M_0 initial.

On notera la franchissabilité d'une transition t_j à partir d'un marquage M_i comme suit: $M_i[t_j>$

Si le marquage résultant est M'_i alors on notera : $M_i[t_j>M'_i$

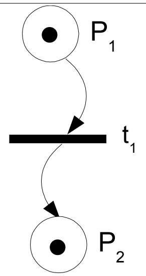
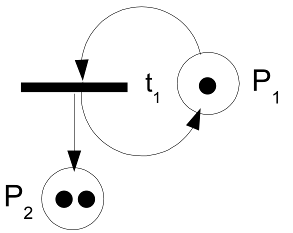
Cette notation est extensible aux séquences de transitions. On note dans ce cas la franchissabilité de la séquence comme suit : $M_i[t_jt_k>$

Par ailleurs on définit une notion d'ordre sur les marquages en définissant la notion de couverture. Un marquage M' couvre un marquage M (on dit aussi : M' est supérieur à M) si le nombre de marques dans chaque place du réseau $M'(P_i)$ pour M' est supérieur au nombre de marques pour chaque place $M(P_i)$ dans M. Soit :

$$M' \geq M \Leftrightarrow \forall P_i M'(P_i) \geq M(P_i)$$

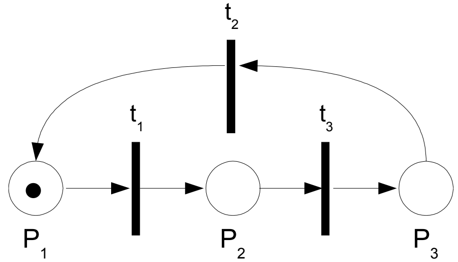
1.Réseaux bornés et/ou binaires

Attention : cette propriété, comme les suivantes, est définie pour un marquage M_0 donné. Sa validité pour un autre marquage n'est en rien garantie.
Une place est dite bornée pour un marquage initial M_0 si il existe un entier k tel que pour tous les marquages accessibles depuis M_0 et pour toutes les places du réseau, le nombre de jetons dans chaque place est inférieur à k. La place est dite k-borné.
Un réseau dont toutes les places sont bornées est lui même borné.
Enfin un réseau 1-borné (chaque place contient au maximum un jeton) est dit sauf ou binaire.

Réseau borné	*Réseau non borné*
	

2.Vivacité

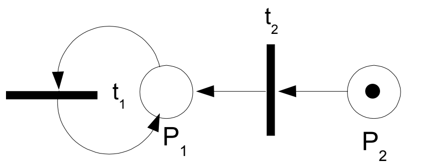
La vivacité porte sur les transitions. Une transition t_i est dite vivante pour un marquage initial M_0 si depuis tout marquage accessible il est possible de trouver une séquence de transitions amenant à franchir t_i. Dans un tel réseau il sera toujours possible de re-franchir t_i, peu importe les transitions déjà franchies. La vivacité est donc une propriété très forte.
Un réseau dont toutes les transitions sont vivantes est dit vivant.



Exemple de réseau vivant

3.Quasi-vivacité

La quasi-vivacité va définir une propriété moins contraignante que la vivacité. Là ou la vivacité exige que la transition soit franchissable à partir de tout marquage, la quasi-vivacité impose juste l'existence d'une séquence de transition permettant de franchir t_i, depuis le seul marquage initial.

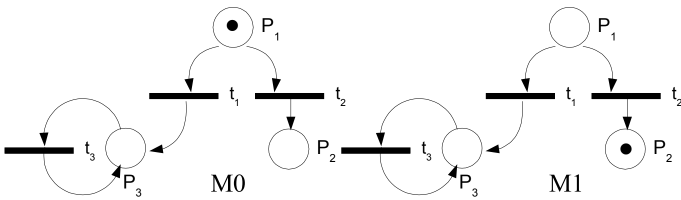


T2 est quasi vivante

Un réseau dont toutes les transitions sont quasi-vivantes est dit quasi-vivant.
On peut donc dire de manière simple qu'un tel réseau ne comporte pas de branches mortes pour le marquage initial, il existe toujours au moins un moyen de franchir chaque transition en partant de M_0.

4.Blocage

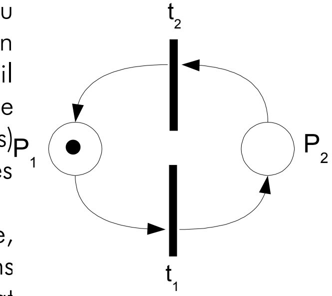
Un blocage correspond à un marquage du réseau de Petri pour lequel plus aucune transition n'est franchissable.
Un réseau est dit sans blocage si aucun marquage de l'ensemble des marquages accessibles $^*M_0$ n'est un blocage.



M1 est un blocage

5.État d'accueil et réseaux ré-initialisables

Un état d'accueil pour un réseau et son marquage initial est un marquage particulier M_a tel qu'il existe un chemin (une séquence de transitions franchissables) menant à M_a pour tous les marquages accessibles.
Il est donc toujours possible, quelques soient les transitions déjà franchies, de revenir à l'état d'accueil en franchissant de nouvelles transitions.



Réseau réinitialisable

Si M_0 s'avère être un état d'accueil, alors le réseau est dit réinitialisable.

6.Composantes conservatives & invariants

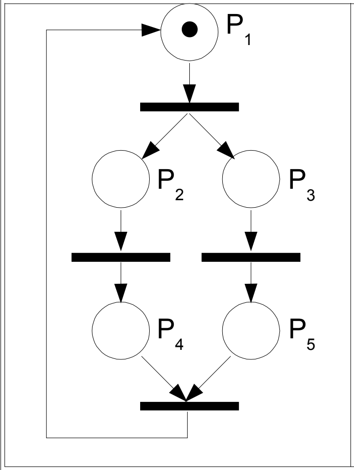
Un invariant de marquage est une propriété du marquage d'un ensemble de places du réseau.
On est en présence d'un invariant de marquage si, pour un ensemble donné de places, il existe une combinaison linéaire des marques présentes dans les places de valeur constante quelque soit l'évolution du réseau (et donc pour tous les marquages accessibles).
Il existe donc dans ce cas un vecteur V dit de pondération :

$$V = (\alpha_{1,} \alpha_{2,} \ldots, \alpha_n)$$

Et l'invariant de marquage résulte de la propriété suivante :

$$\forall M \in {}^*M_{0,} \quad \sum \alpha_i . M(P_i) = c^{te}$$

Seules certaines places interviennent dans l'invariant de marquage (on a pour ces places : q_i non nul), l'ensemble des places en question forme une composante conservative notée P(V).



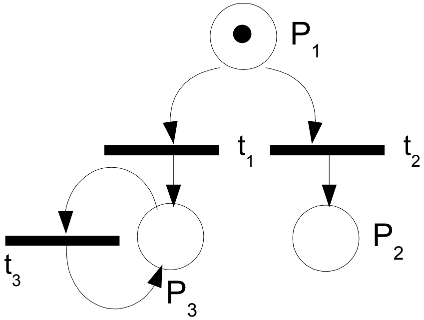
Dans le réseau ci-contre, on peut trouver deux invariants de marquages :
1. m(P1)+m(P2)+m(P4) = 1
2. m(P1)+m(P3)+m(P5) = 1
Invariants correspondants à deux composantes conservatives :
1. { P1, P2, P4}
2. { P1, P3, P5}

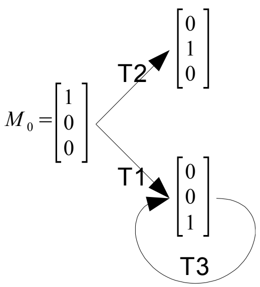
III.Graphe des marquages et de couverture

Jusqu'à présent aucune méthode n'a été proposée pour déterminer les propriétés d'un réseau. Ce premier chapitre va présenter les méthodes « graphiques », le suivant les méthodes fondées sur l'algèbre linéaire.

1.Arbre et graphe des marquages accessibles

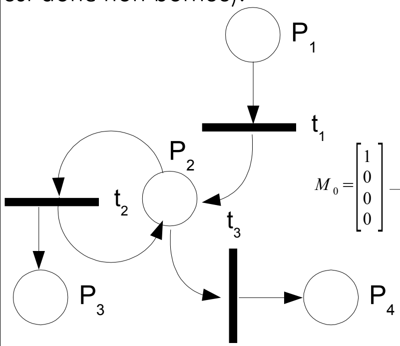
Première méthode : construire de manière exhaustive le graphe des marquages accessibles. Cette méthode est extrêmement simple.
Les noeuds du graphe sont formés des différents marquages de *M_0. On démarre avec le seul marquage initial, et l'on va construire les différents arcs et noeuds progressivement.
Pour chaque nouveau marquage on détermine l'ensemble des transitions franchissables et pour chaque transition de cet ensemble on ajoute un arc vers le nouveau marquage.
Si un marquage est déjà présent dans le graphe, on se contente de tracer l'arc.

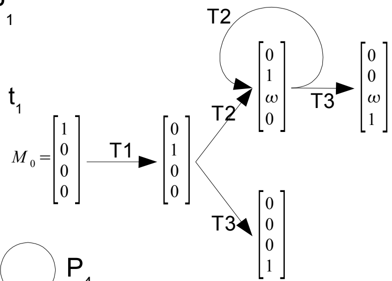




2.Arbre et graphe de couverture

L'inconvénient de la méthode précédente est rédhibitoire : tous les réseaux n'ont pas un graphe des marquages accessibles fini...
On propose donc une méthode alternative. Le mécanisme de construction est le même que pour le graphe des marquages accessibles. A ceci prêt que pour chaque nouveau marquage (noeud du graphe) ajouté, on vérifie s'il n'est pas supérieur à un marquage déjà présent sur au moins une séquence entre M_0 et le nouveau marquage.
Si tel est le cas tous les marquages de place supérieurs sont remplacés par ω. Ce symbole matérialise le fait que la place en question peut contenir autant de jetons que souhaité (elle est donc non bornée).





Dans la suite, les places non bornées le demeurent naturellement et ceci quelles que soient les transitions franchies, ainsi le symbole ω ne disparaît jamais.
Cette méthode produit le graphe de couverture, un graphe fini dans tous les cas.
Comme pour le graphe des marquages accessibles, on va pouvoir déduire de l'observation du graphe de couverture un certain nombre de propriétés pour le réseau de Petri.

IV.Algèbre linéaire et réseaux de Petri

Soit R un réseau de Petri non marqué, on peut décrire R au moyen de deux applications :

$$Pre: P\times T \rightarrow \{0,1\}$$
$$Post: P\times T \rightarrow \{0,1\}$$

ou P est l'ensemble des places et T l'ensemble des transitions.
$Pre(P_i,t_j)$ représente le poids de l'arc reliant P_i à t_j et $Post(P_i,t_j)$ représente le poids de l'arc reliant t_j à P_i.
Pre est appelée fonction d'incidence avant, et Post fonction d'incidence arrière
La valeur du poids est 1 lorsque l'arc existe et 0 sinon (cette définition est naturellement extensible aux réseaux généralisés).

1.Matrices d'incidence

Les ensembles P et T sont finis et discrets, on peut donc représenter les applications Pre et Post sous forme matricielle.
On définit ainsi W^- la matrice d'incidence avant comme suit :

$$[w^-_{i,j}] \ \ avec \ \ w^-_{i,j} = Pre(P_i, t_j)$$

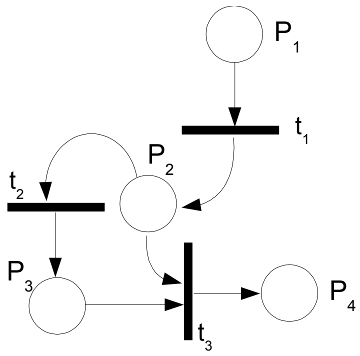
Et W^+ la matrice d'incidence avant :

$$[w^+_{i,j}] \ \ avec \ \ w^+_{i,j} = Post(P_i, t_j)$$

Enfin on déduit la matrice d'incidence W :

$$W = W^+ - W^-$$

Pour le réseau suivant on a :



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ W^- = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ W^+ = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}$$

Attention : la matrice d'incidence n'a de sens que dans le cas des réseaux purs. En effet, dans les réseaux non purs, où une place est en entrée et en sortie de la même transition, le solde des marquages est nul, la matrice d'incidence perd donc une partie de l'information.

2.Équation fondamentale

Soit S une séquence de franchissement, telle que :

$$M_i[S > M_k$$

On définit $\underline{S}$, vecteur caractéristique de la séquence S en précisant pour chaque transition le nombre de fois où la transition est franchie dans la séquence.

Pour le réseau précédent, on a par exemple :

$$S=t_1 t_2, \quad et\ \underline{S}=(1,1)$$

Compte tenu de ces différentes définitions on a l'équation fondamentale suivante :

$$M_k=M_i+W.\underline{S}$$

Cette équation permet de calculer en une opération, sans parcours du réseau le marquage obtenu après le franchissement de la séquence complète.

Attention : Les résultats de l'équation fondamentale, même s'ils sont toujours calculables, n'ont de sens que si la séquence S est effectivement franchissable.

3.Composantes conservatives & invariants

La matrice d'incidence permet aussi de détecter des invariants de marquage, en effet, en partant de l'équation fondamentale on montre que, si V est un vecteur de pondération, et P(V) la composante conservative associée, alors on a :

$$V^T.W=0$$

ou V^T désigne la transformée du vecteur V.

V.Méthodes de réductions

L'inconvénient lorsqu'on applique les méthodes précédentes est la taille du réseau de Petri. On a donc recherché des méthodes visant à réduire la taille du réseau tout en conservant les propriétés essentielles. Le réseau équivalent obtenu permettant alors plus simplement de démontrer les propriétés du réseau original.

6 méthodes sont détaillées ici.

Note : dans la suite les notations t°, °t, P°, °P désigneront respectivement les places en sortie, les places en entrée de la transition t et les transitions en sortie, les transitions en entrée de la place P.

1.R_1: substitution de places

3 conditions à cette réduction :

1. les transitions en sortie de la Place à substituer (P_i) n'ont aucune autre place en entrée,
2. les transitions en sortie de P_i ne sont pas impures,
3. au moins une transition en sortie n'est pas une transition puits.

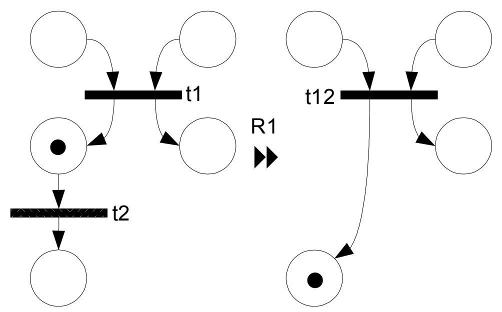
Méthode de réduction :

1. On supprime la place,
2. On supprime les transitions en entrée et sortie de la place (°P et P°),
3. On crée une transition $t_{i,j}$ par couple (t_i,t_j) des transitions en entrée et sortie dont les places en entrée sont celle de t_i et les places en sorties celle de t_j.

Si la place supprimée est marquée deux cas sont possibles :

1. s'il n'existe qu'une transition en sortie, alors le marquage est celui qui aurait été obtenu après franchissement de cette transition,
2. sinon, il faut considérer tous les cas de franchissement possibles et travailler sur autant de réseaux (on a donc réduit la taille du réseau, mais on en a désormais plusieurs à étudier).

Exemples :



2.R_2 : suppression des places implicites

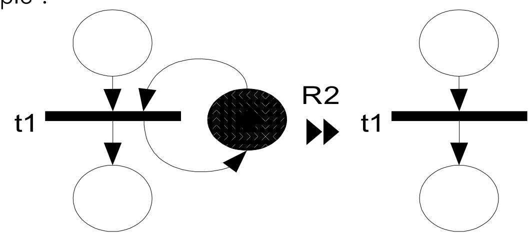
Une place est dite implicite si :

1. son marquage n'a aucun impact sur le franchissement de ses transitions en sortie,
2. ce même marquage est une combinaison linéaire des marquages des autres places du réseau soit :

$$M(P_i)=\left(\sum_{k\neq i} a_k.M(P_k)\right)+b$$

Une place implicite est supprimable, la méthode consiste à supprimer la place et les arcs en entrée et sortie.

Exemple :



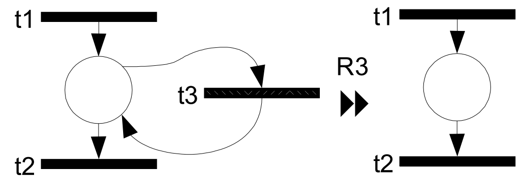
3.R_3 : suppression des transitions neutres

Une transition neutre est une transition dont les places en entrée sont aussi les places en sortie.

On peut supprimer une telle transition t_i si par ailleurs chaque place en entrée ou sortie de de t_i dispose d'au moins une transition en entrée autre que t_i (cette définition peut être étendue au réseaux généralisés).

La réduction consiste à supprimer la transition et les arcs en entrée et sortie.

Exemple :

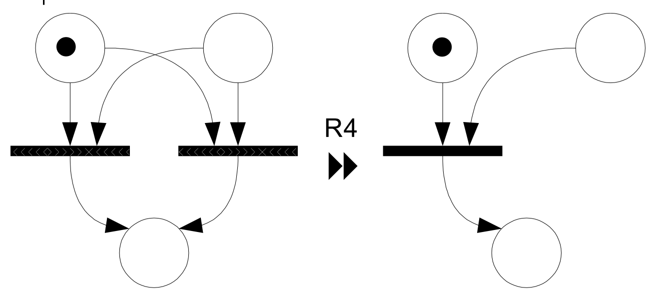


4.R_4 : suppression des transitions identiques

Deux transitions t_i et t_j sont identiques si elles ont les mêmes ensembles de places en entrée et les mêmes ensembles de places en sortie.

La réduction R_4 consiste à supprimer l'une des deux transitions ainsi que les arcs associés.

Exemple :

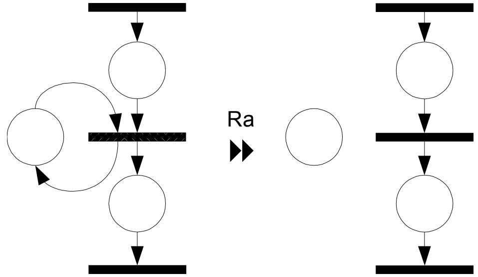


5.R_a : suppression des transitions impures

Une transition impure est une transition dont au moins une des places en entrée est aussi place en sortie.

La réduction R_a consiste à supprimer les arcs entrant et sortant correspondant aux places à la fois entrée et sortie. Ensuite à supprimer la transition elle même si elle est isolée (non reliée à une place).

Exemple :

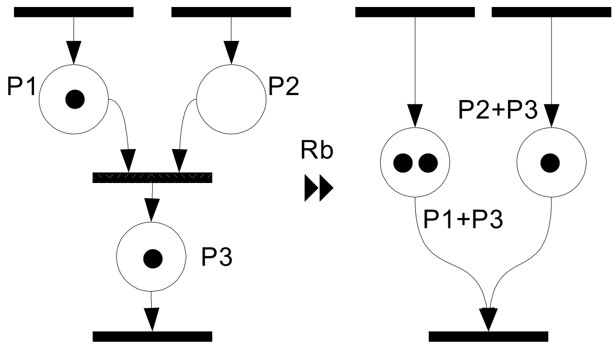


6.R_b : suppression des transitions pures

Pour les transitions pures (non impures) il est possible de procéder à une réduction si la transition n'est ni une transition source, ni une transition puits.
La réduction consiste à :

1. supprimer la transition,
2. remplacer les places en entrée et en sortie par de nouvelles places correspondant aux couples (P_i,P_k) tels que P_i est une place en entrée et P_k est une place en sortie,
3. Relier ces nouvelles places selon la méthode suivante :
   - les transitions en entrée de (P_i,P_k) sont celles des deux places sauf t_j,
   - les transitions en sortie de (P_i,P_k) sont celles des deux places sauf t_j.
4. Marquer chaque couple (P_i,P_k) avec un nombre de jetons égal à la somme des jetons de P_i et P_k.

Exemple :



7.Récapitulatif des propriétés conservées

Les réductions R_1 à R_4 conservent les propriétés décrites précédemment, à savoir : réseau borné, vivant, quasi-vivant, avec état d'accueil, avec ou sans blocage.
En revanche ces 4 méthodes ne permettent pas de conserver les caractéristiques liées aux invariants de marquage.
A l'inverse, les méthodes R_a et R_b si elles ne conservent aucune des propriétés présentées conservent les invariants de marquage et permettent de déterminer les composantes conservatives.

VI. Extensions des réseaux de Petri

Différentes extensions aux réseaux de Petri ont été proposées, en général les propriétés des réseaux de Petri s'étendent à ces réseaux (parfois moyennant des ajustements).

1.Réseaux généralisés

Jusqu'à présent le franchissement de transition ne consomme qu'un jeton par place. Il est possible de valuer les arcs du réseau en indiquant un poids. De tels réseaux sont dit généralisés.
Le franchissement d'une transition peut alors consommer plusieurs marques (selon le poids de l'arc) dans chaque place en entrée et en produire plusieurs dans chaque place en sortie.

2.Réseaux avec arcs inhibiteurs

Une autre extension des réseaux ordinaires consiste à permettre de tester l'absence de marques dans une place, alors que lors d'un franchissement classique, on vérifie au contraire la présence d'une marque qui est consommée.
Lorsqu'une place en entrée est reliée à une transition par un arc inhibiteur, cette transition n'est franchissable que si la place est vide (à ceci peut s'ajouter les conditions sur les autres places naturellement).
Lors du franchissement la place en question reste vide.

VII. Grafcet

1.Origine

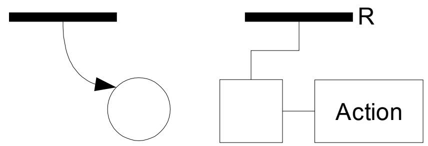
Jusqu'à présent les seuls réseaux de Petri décrits sont des réseaux autonomes. C'est à dire que le franchissement effectif d'une transition n'est conditionné à aucun élément extérieur.
Un autre catégorie de réseaux consiste justement à lier le franchissement à des contraintes (conditions, survenue d'un événement, ...), on parle de réseaux non autonomes.
Parmi les réseaux non autonomes le plus évident est le réseau de Petri temporisé dans lequel on impose un délai d'attente aux marques dans les places (on parle de réseaux P-temporisés) ou des durées aux transitions (on parle de réseaux T-temporisés). De tels réseaux vont permettre d'établir des propriétés en fonctionnement à vitesse maximale ou en régime stationnaire.
En allant plus loin on peut même définir les réseaux de Petri interprétés qui sont :

- des réseaux synchronisés (le franchissement est conditionné à des événements extérieurs),
- des réseaux P-temporisés,
- des réseaux qui comportent une partie opérative : c'est à dire que des actions peuvent être associées à chaque place. Ces actions agissant notamment sur des variables d'état du système.

Le réseau de Petri interprété va donc permettre de décrire des systèmes dont le fonctionnement est lié à des éléments extérieurs et dont l'évolution provoque la réalisation d'actions.
Ce type de réseaux est à l'origine du GRAFCET proposé en 1977 par l'AFCET (Association française pour la cybernétique économique et technique) aujourd'hui devenue ASTI en collaboration avec les acteurs industriels majeurs du secteur (EDF, Peugeot, Merlin-Gérin, Télémécanique).

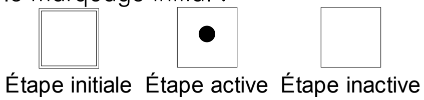
2.Évolution de la notation

A l'origine l'AFCET a proposé pour le GRAFCET une notation quasi-identique à celle déjà utilisée dans les réseaux de Petri. Cependant ce n'est pas la notation utilisée par les professionnels qui ont adopté et défini une notation normalisée.

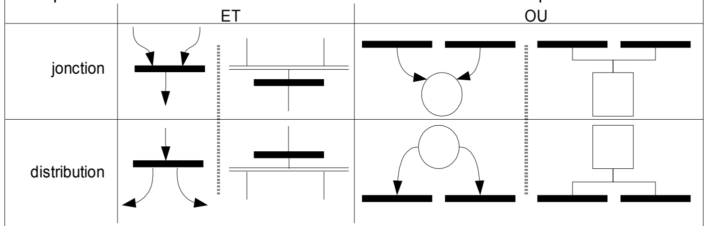


Dans le cas du GRAFCET on ne parlera pas de place, mais d'étape (correspondant au processus modélisé). Lorsque le jeton (dans un GRAFCET, une place contient au maximum un jeton) est dans une place, on parle d'étape active.
On remarque que le GRAFCET n'oriente pas ces arcs. Cette simplification est rendue possible car un GRAFCET se lit de haut en bas. Seul l'arc allant de bas en haut et permettant de revenir à l'état initial est orienté.
Il s'agit donc d'une différence de présentation essentielle : quand un réseau de Petri pouvait s'écrire dans toutes les directions, le GRAFCET impose un sens de lecture.

En outre le GRAFCET adopte une notation particulière pour matérialiser le marquage initial :



Concernant le franchissement des transitions le GRAFCET adopte à la fois une notation et un vocabulaire particulier.



Les conditions de franchissement Ri sont appelées : réceptivités. Ces conditions sont fonction :

- des variables d'état du GRAFCET,
- de l'état interne du réseau (étapes actives ou pas).

Pour ces réceptivités les conventions suivantes sont appliquées :

la somme logique (OU) est désignée avec le signe : +,

le produit logique (ET) est désigné avec le signe : .

On note ainsi « a et b » comme suit : « a.b ». En outre la notation « /a » désigne la négation.

3.Fonctionnement

Les règles d'évolution d'un GRAFCET sont proches de celles des réseaux de Petri, notamment temporisés.

Une transition est franchissable si :

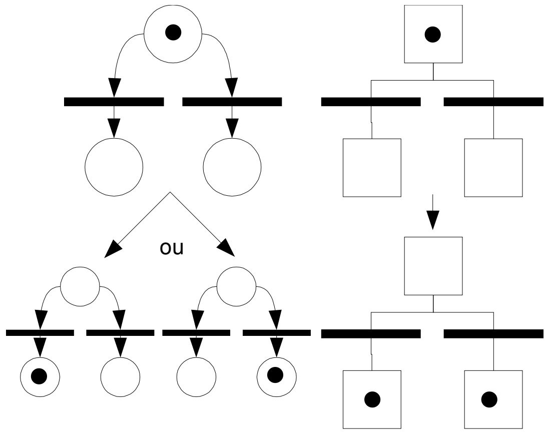
1. toutes les étapes qui précèdent la transition sont actives (dans un réseau de Petri on dirait : les places en entrée comportent au moins un jeton),
2. la réceptivité de la transition est validée.

Le franchissement effectif d'une transition est comparable au cas du réseau temporisé lors d'un fonctionnement à vitesse maximale :

1. toute transition franchissable est immédiatement franchie,
2. si plusieurs transitions sont simultanément franchissables alors elles sont franchies simultanément,
3. pour une étape (place) impure, l'étape reste active (elle n'est pas désactivée, puis réactivée).

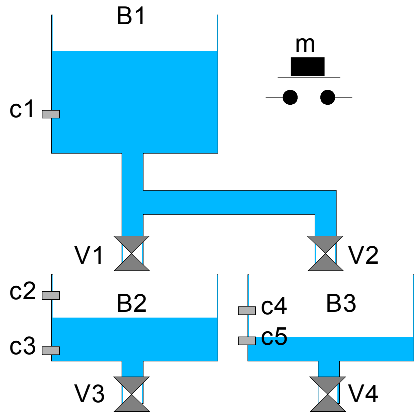
Ce fonctionnement à vitesse maximale induit un changement important par rapport au franchissement décrit précédemment lorsque plusieurs transitions sont franchissables au même instant :

Dans un réseau de Petri ordinaire, on choisit de franchir une transition parmi les deux, ici on va franchir les transitions ensemble :



4.Exemple de modélisation avec le GRAFCET

Dans cet exemple nous modélisons un système permettant de traiter l'eau de deux bassins d'élevage. Les bassins peuvent être de tailles différentes, mais le traitement diffusé est identique.



Le système est constitué d'un réservoir pour le produit traitant, de deux réservoirs doseurs et de 4 vannes. L'ensemble est piloté par un contact m et dispose de 5 capteurs positionnés comme ci-contre.

A chaque pression sur le contact, chacun des doseurs est rempli puis déversé dans le bassin correspondant.

Une modélisation possible sous forme de GRAFCET est la suivante :