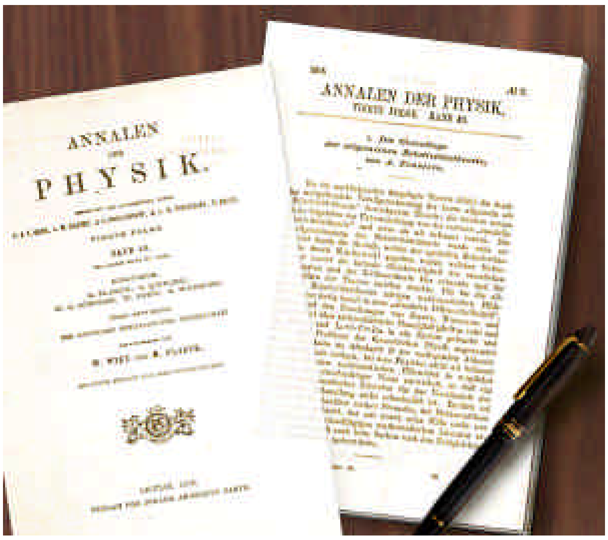
Principes de base de la relativité générale

Monique SIGNORE
Directeur de recherche associé à l'Observatoire de Paris
Monique.Signore@obspm.fr
Sophie REMY,
Comité national E2Phy
sophie.remy@prepas.org

L'Année 2005 a été déclarée « Année mondiale de la physique » par les Nations Unies en hommage à Albert Einstein, père des théories de la relativité.
La théorie de la relativité générale est souvent citée, mais très peu enseignée. Aussi avons nous essayé une approche simplifiée, afin de donner quelques clefs pour en comprendre les fondements et les implications.

Les deux théories d'Einstein que sont la relativité restreinte, élaborée en 1905, et celle de la relativité générale, pensée en 1915, sont essentiellement des théories de l'espace-temps qui ont remplacé les concepts d'espace absolu et de temps absolu de Newton.
En 1905 Einstein met à jour deux dualités : « l'espace-temps » et la « masse-énergie ». En relativité restreinte le temps et l'espace ne sont plus indépendants et leurs variations respectives sont couplées : une variation de l'un entraîne une variation de l'autre. La transformation de Lorentz rend compte de ce couplage. De même la célèbre relation « $E=mc^2$ » qui définit « l'énergie de masse au repos » - où m est la masse et c est la vitesse de la lumière - donne à la masse et à l'énergie un statut équivalent.
Une dizaine d'années plus tard, Einstein élabore la relativité générale qui lie le concept d'espace-temps au concept de masse-énergie.

L'article d'Einstein de 1916 (Annalen der physik)



La relativité générale se révèle ainsi être la théorie de l'une des quatre forces fondamentales, la gravitation. La gravitation, interaction entre masses, s'exprime en terme de géométrie. C'est une révolution intellectuelle sans précédent, et en ce sens la relativité générale est sans doute la plus belle théorie jamais élaborée.

Elle est centrée sur trois idées clef :

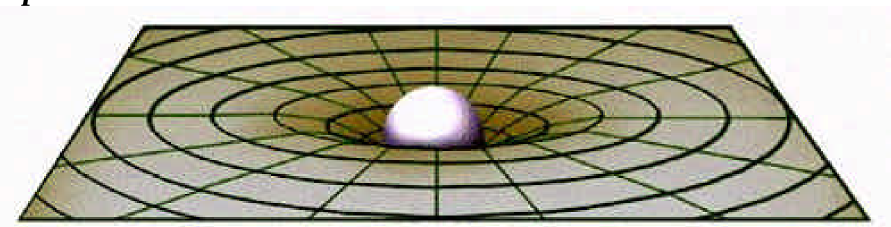
i) **La gravitation c'est de la géométrie.**
Tous les phénomènes dus à des forces gravitationnelles dans un contexte newtonien ont pour cause la courbure de la géométrie de l'espace-temps à quatre dimensions.

ii) La **courbure de l'espace-temps à pour sources la masse et l'énergie.**
La masse est la source de la courbure de l'espace-temps, mais toute autre forme d'énergie l'est aussi.

iii) **La trajectoire d'une particule libre est le « chemin le plus direct » dans un espace-temps courbe.** Cette idée est une conséquence du principe de la moindre action. Un tel chemin se nomme une « géodésique ». On le calcule en exprimant que la norme, dans l'espace-temps considéré, est minimale. Par exemple, à la surface d'une sphère le chemin le plus direct entre deux points est une portion de cercle et non une droite. La droite est le chemin le plus direct seulement dans un espace plat (euclidien).

Ainsi, en relativité générale, la Terre se meut sur une orbite autour du soleil ***non pas à cause d'une force gravitationnelle exercée par le Soleil*** – mais parce qu'elle suit le « chemin le plus direct » dans l'espace-temps courbé par le Soleil.
Cette vision est une reformulation nouvelle de la gravitation qui abandonne la notion traditionnelle de « force ».

Tout ce passe comme si ***l'espace-temps est courbé par la matière comme peut l'être une feuille en caoutchouc par une boule.***



Nous avons tous observé qu'une boule de pétanque, comme celle au centre du diagramme ci-dessus, déforme une feuille de caoutchouc. Si on lâche une boule de masse plus faible, comme une balle de ping-pong, sur le bord de la feuille elle roule vers la boule de pétanque.
Einstein interprète cela en disant que les petites balles (de faible masse) vont vers la grosse boule (de forte masse), non pas parce qu'elles sont attirées par des forces « mystérieuses », mais parce que la feuille est courbée par la grosse boule.
Cette surface à deux dimensions plongée dans l'espace à trois dimensions nous aide à donner une représentation de notre espace-temps courbé. Les physiciens utilisent des diagrammes comme celui ci, appelés « Embedding diagrams », pour illustrer cette idée.

Dans un enseignement magistral on adopterait une approche déductive pour préciser ces idées:

a) Introduction des outils mathématiques nécessaires.
b) Explication des équations de base
c) Résolution de ces équations pour des cas particuliers « intéressants »
d) Prédictions à partir de ces solutions particulières
e) Comparaison de ces prédictions avec les :
    i. Observations
    ii. Résultats d'expériences

Cela supposerait un traitement mathématique long et fastidieux que l'on cherche à éviter ici. Aussi a-t on choisi de privilégier une approche physique.

Après avoir dégagé les principes de base de la physique qui ont conduit Einstein à la relativité générale, on commentera brièvement et successivement :

I- Le principe d'équivalence et la courbure de l'espace-temps
II- L'équation d'Einstein
III- L'importance de la relativité générale pour la physique contemporaine

I – Principe d'équivalence et courbure de l'espace-temps

Du point de vue historique le principe d'équivalence a été le déclencheur du développement de la théorie de la gravitation.

Le principe d'équivalence est introduit par Galilée qui étudie la chute des corps.
Puis Isaac Newton, le premier à comprendre l'interaction gravitationnelle, considère que toute la mécanique repose sur ce principe. Il lui donne un contenu empirique dans la mesure où il réalise des expériences sur le mouvement des pendules, expériences destinées à vérifier la validité du principe d'équivalence, mais cela reste assez imprécis.

Dès 1907 Einstein utilise le principe comme point de départ de la relativité générale, mais ce n'est que dans les années soixante que Dicke et ses collaborateurs réalisent le rôle du principe d'équivalence. Le principe d'équivalence fonde – non pas la relativité générale – mais l'idée plus générale d'une courbure de l'espace-temps.

Le principe d'équivalence faible

Le « principe d'équivalence faible » est la version la plus élémentaire donnée par Newton : La trajectoire d'un corps tombant en chute libre - c'est-à-dire un corps sur lequel n'agit aucune force (de type électromagnétique par exemple) - ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition.

Le cas le plus simple s'illustre par deux corps différents lâchés dans le champ de pesanteur dont la chute est caractérisée par la même accélération, traditionnellement notée « g ».
On peut se souvenir de Neil Amstrong qui a vérifié sur la Lune qu'un marteau et une plume tombent de la même manière !

On peut également formuler le principe d'équivalence faible en écrivant l'identité entre « masse grave » et « masse inerte ».

Masse inerte = Masse grave

La masse inerte est définie par la loi de Newton : $\vec{F} = m_i \, \vec{a}$
Elle traduit que l'accélération prise par un objet est proportionnelle à la force, avec coefficient de proportionnalité m_i qui traduit la « résistance » d'un objet à modifier son mouvement, à savoir sa vitesse, quand on exerce une action sur lui.
La masse grave est définie par l'expression de la force gravitationnelle qui s'exerce sur un objet.
La gravitation agissant sur ce même objet produit une force proportionnelle au gradient d'un champ scalaire Φ, propriété de l'espace dans lequel baigne l'objet, appelé potentiel gravitationnel et tel que : $\vec{F} = - m_g \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi$
Le coefficient de proportionnalité m_g est une caractéristique de l'objet et indique l'intensité de la force ressentie par l'objet en un point de l'espace où règne le champ Φ.

Ainsi :
m_i traduit la quantité d'énergie d'un objet et son inertie.
m_g traduit le couplage d'un objet au champ gravitationnel, ou encore sa « charge gravitationnelle » (par analogie avec l'électromagnétisme)

Ainsi, pour Newton : $\begin{cases} m_i = m_g \\ \vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, F \end{cases}$

Les deux masses sont égales et l'accélération de l'objet ne dépend que du champ gravitationnel.

Tests du principe d'équivalence faible
Le principe d'équivalence faible a été testé à plusieurs occasions :
- En 1680, Isaac Newton mesure la période de pendules de masses différentes et de longueurs équivalentes et n'observe pas de différence mesurable.
- En 1922, R. Eötvos étudie une balance de torsion constituée d'une barre suspendue à un fil reliant 2 masses de natures différentes. Il conclut une différence relative des accélérations inférieure à 10^{-9}.
- En 1964, Roll, Krotov, Dicke reprennent l'expérience de la balance de torsion avec une masse en aluminium et une masse en or. Ils en déduisent une différence relative des accélérations inférieure à 10^{-11}.

On peut en conclure que :
Des corps de natures différentes tombent avec la même accélération à 10^{-12} près !

<u>Le principe d'équivalence d'Einstein</u>

Le principe d'équivalence d'Einstein est la version la plus forte du principe d'équivalence.
Il stipule que :

i) Le principe d'équivalence faible est vérifié
ii) Le résultat de « n'importe quelle expérience mettant en jeu des interactions non gravitationnelles »** ne dépend pas de la vitesse du référentiel en chute libre dans lequel cette expérience est réalisée.
C'est ce que l'on appelle « Invariance de Lorentz locale »
(Notons que l'invariance de Lorentz locale est vérifiée chaque fois que dans une expérience de physique des hautes énergies on constate que la théorie de la relativité restreinte est vérifiée.)

iii) Le résultat de « n'importe quelle expérience mettant en jeu des interactions non gravitationnelles »** ne dépend
- ni de l'instant,
- ni du lieu où cette expérience a été faite.
C'est ce que l'on appelle « *Invariance locale de position (dans l'espace-temps)* »

** Remarque : « n'importe quelle expérience mettant en jeu des interactions non gravitationnelles » peut être, par exemple, la force électrostatique s'exerçant entre 2 corps chargés MAIS ce n'est pas le cas de la mesure de la force gravitationnelle entre ces deux mêmes corps (c'est-à-dire : l'expérience de Cavendish).

C'est le principe d'équivalence d'Einstein – et non la version faible – qui est au cœur de la théorie de la gravitation.
En effet, il est possible de démontrer que :
Si le principe d'équivalence d'Einstein est valable, la gravitation doit être un phénomène dû à la courbure de l'espace-temps.

Autrement dit, ***les effets que la gravitation produit sont équivalents aux effets que produit le fait d'être dans un espace-temps courbe.***

Pour décrire la courbure de l'espace-temps, il existe un concept mathématique, **la « métrique »**. La métrique, élément central de cette description, détermine les relations géométriques entre les événements.

Exemples :

- La distance entre 2 localisations spatiales à un instant donné. L'exemple le plus simple est la norme du vecteur dans un espace euclidien.
- L'intervalle de temps séparant 2 événements se produisant au même endroit.
- Par généralisation : La « distance » séparant 2 événements correspondant
    - A des positions spatiales différentes
    - A des instants différents

La relativité générale peut aussi se décrire en terme de « métrique » ; Il s'agit alors de la *métrique de Minkowski* d'un espace-temps plat.

Ayant la notion de métrique à notre disposition le résultat énoncé plus haut peut finalement se formuler ainsi :
Les seules théories de la gravitation qui réalisent le principe d'équivalence d'Einstein sont celles qui satisfont aux postulats des « *théories métriques de la gravitation* ».
C'est à dire :

i) L'espace-temps est muni d'une métrique.
ii) Les trajectoires des corps en chute libre sont des « géodésiques ». (*Précisées plus loin)*
iii) Dans un référentiel local – sur de petites dimensions – les lois de la physique non gravitationnelle sont celles que l'on écrit en relativité restreinte.

Le raisonnement qui mène à cette conclusion repose sur la remarque suivante :
Si le principe d'équivalence d'Einstein est valide dans des référentiels tombant en chute libre :

- Les lois sont indépendantes de la vitesse du référentiel : *Invariance de Lorentz.*
- Les diverses constantes atomiques doivent garder la même valeur : *Indépendance de localisation.*

Ainsi :

- Les seules lois qui satisfont ces exigences sont les lois compatibles avec la relativité restreinte, comme par exemple les équations de Maxwell.
- Dans des référentiels en chute libre les « corps d'épreuve » (objets étudiés) apparaissent comme non accélérés. Leurs trajectoires sont des « lignes droites » mais ces lignes sont « localement droites » ; Ce sont – nous le reverrons plus loin - les géodésiques de l'espace-temps courbe.

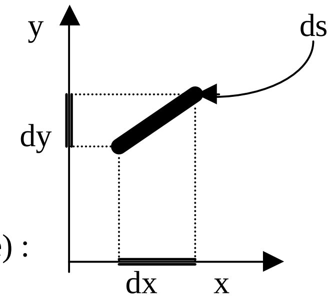
La théorie de la relativité générale est ainsi une théorie métrique de la gravitation. Ce n'est pas la seule : par exemple la théorie de Brans et Dicke est aussi une théorie métrique de la gravitation (C.Brans & R.H.Dickes : "Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation " ,Physical Review ,volume 124 , page 925 , 1961)
La notion d'espace-temps courbe apparaît alors comme une notion fondamentale extrêmement générale.

II - L’équation d’Einstein

« L’équation d’Einstein » est en fait un ensemble d’équations qui fixent la métrique - et donc la courbure de l’espace-temps - engendrée par une distribution donnée de matière.

a) La métrique

Les points de l’espace-temps sont localisés par 4 coordonnées - par exemple cartésiennes (t, x, y, z) ou sphériques (t, r, θ, φ) - que l’on peut noter x^{α}, avec $\alpha = 0, 1, 2, 3$.
On a vu plus haut que pour caractériser l’espace-temps il faut connaître sa métrique c’est à dire la distance « ds » entre 2 événements.



Exemples :
- Plan à 2 dimensions :
$ds^2 = dx^2 + dy^2$
- Espace-temps plat (Relativité restreinte ; Minkowski) :
$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$
-Espace-temps en coordonnées cartésiennes (Relativité générale) :
$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 + \dots$

Les coefficients qui apparaissent dans la métrique de l’espace-temps courbe, $g_{\alpha\beta}$, sont les potentiels de gravitation . Ce sont des fonctions de t, x, y, z.
Pour Minkowski (espace-temps plat), les seuls potentiels non nuls sont :

$$g_{00} = 1 , g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

b) Le tenseur d’Einstein

Il faut construire une fonction des potentiels g qui décrive la forme de l’espace-temps à partir d’une métrique ds, donc des potentiels $g_{\alpha\beta}$.
Einstein a proposé un tenseur (~ matrice) de rang 4x4, soit 16 composantes.
Les éléments sont des combinaisons non linéaires des dérivées partielles des potentiels par rapport aux coordonnées x^{α} , c'est à dire : (t, x, y, z) ou (t, r, θ, φ), selon le système de coordonnées choisi.
On note ce tenseur : $G_{\alpha\beta}$, avec : $\alpha,\beta = 0, 1, 2, 3$ (correspondant à (t, x, y, z) ou (t, r, θ, φ)).
En général, $G_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique ; Ce qui réduit le nombre de composantes de $G_{\alpha\beta}$ à seulement 10, au lieu de 16.

c) Le tenseur d’énergie-impulsion

Il caractérise la densité de matière ρ et l’impulsion, ou quantité de mouvement, comme par exemple : ρv_x, ρv_y, ρv_z
On le note : $T_{\alpha\beta}$ avec $\alpha,\beta = 0, 1, 2, 3$. De la même façon : x^{α} = (t, x, y, z) ou (t, r, θ, φ), etc.

d) L’équation d’Einstein

L’équation d’Einstein a pour forme symbolique :

$$\mathbf{G}_{ab} = c\, \mathbf{T}_{ab}$$

Le tenseur $\mathbf{G}_{ab}$ représente la « géométrie ». Il indique comment l’espace-temps est courbé.
Le tenseur $\mathbf{T}_{ab}$ représente la « matière ». Il donne la position et le mouvement de la matière.
Cette égalité tensorielle correspond en fait à 10 équations. Mais très souvent, seuls les termes diagonaux sont non nuls et le système se réduit alors à 4 équations.

Si le champ gravitationnel est faible et si les vitesses sont faibles, l'équation d'Einstein se réduit à une seule composante, c'est l'équation de Poisson :

$$\Delta g_{00} \sim 4\pi G\rho$$

Ce qui donne la valeur de la constante χ :

$$\chi = 8\pi G / c^2 \sim 1{,}87\ 10^{-27}\ g^{-1}\ cm = 1{,}87\ 10^{-26}\ kg^{-1}\ m$$

Dans le vide on retrouve l'équation de Laplace :

$$\Delta g_{00} \sim 0$$

e) Solution à symétrie sphérique

La solution à symétrie sphérique est un exemple très important car elle représente la métrique de l'espace vide entourant un corps (Terre, Soleil,…) à symétrie sphérique de masse M.
Etablie par *SCHWARZSCHILD* en1917, elle décrit l'espace-temps courbe à symétrie sphérique :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Notations :

$1 - \frac{2GM}{c^2 r} = g_{00}$ (représente g_{tt}) et $\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = g_{rr}$

L'écriture de l'équation se simplifie et devient :

$$ds^2 = g_{00}\, c^2 dt^2 - g_{rr}\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Si la masse M est suffisamment grande, le terme $\frac{2GM}{c^2 r}$ peut tendre vers 1 quand r tend vers 0.

Dans ce cas, g_{00} (ou g_{tt}) peut devenir très petit et g_{rr} peut devenir très grand.
Schwarzschild parlait alors de « singularité » et Einstein parlait de « singularité de Schwartschild ».
Le débat continue sur la nature des singularités, mais depuis le début des années 60 on introduit le terme de ***trou noir*** pour interpréter une telle singularité.
Un trou noir peut se former par exemple quand une étoile massive s'effondre sur elle-même.

Pour résumer donnons le tenseur $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ pour la *solution statique en symétrie sphérique :*

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\frac{1}{c^2}}{1 - \frac{2GM}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r^2 \sin^2\theta}{c^2} \end{pmatrix}$$

f) Les tests classiques de la relativité générale

Entre le début des années 20 et le début des années 60, il a été question des 3 tests classiques prédits par la relativité générale. Il s'agit de :

- La déviation des rayons lumineux
- La précession du périhélie de Mercure

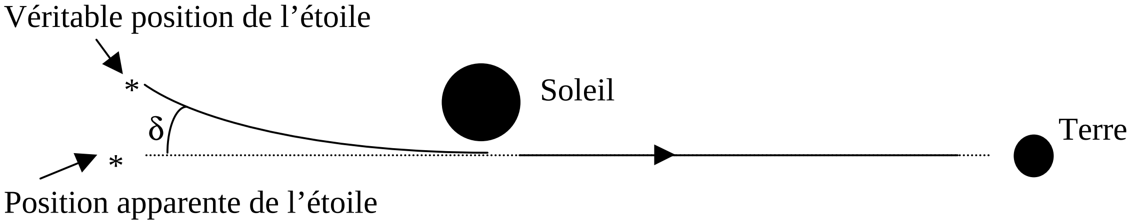
- Le décalage gravitationnel vers le rouge

(mais ce dernier ne teste qu'un aspect de la relativité générale)

f1 – La déviation des rayons lumineux au voisinage d'objets massifs

Déviation au voisinage du Soleil

Historiquement, c'est le premier test de la relativité générale et son effet mesuré lors de l'éclipse de 1919. Il a assuré le triomphe de la relativité générale.
Cet effet donne lieu aux mirages gravitationnels et apporte ainsi des informations précieuses sur les galaxies et la cosmologie.



La mesure consiste à comparer la photographie d'une étoile au voisinage du Soleil, lors d'une éclipse totale (c'est à dire de jour), à la photographie de la même région du ciel à une autre période de l'année (de nuit, à 6 mois d'intervalle). On évalue ainsi la déviation δ.

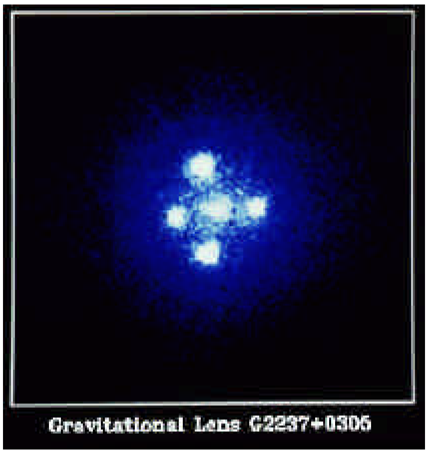
La trajectoire d'un rayon lumineux dans un champ de gravitation peut être calculée, facilement, en relativité générale en écrivant que le long du rayon : $ds^2 = 0$.
La relativité générale prédit pour les rayons lumineux qui « frôlent » le Soleil une déviation δ de 1,75 seconde d'arc. La prédiction de la courbure des rayons lumineux fut l'un des moments de gloire de la relativité générale.

Les confirmations de cet effet observé par Sir Arthur Eddington sur la lumière d'une étoile lors d'une éclipse solaire dans les mois qui suivent la fin de la première guerre mondiale a amplement contribué à faire d'Einstein une star d'envergure internationale.
Pourtant la précision de cette première observation n'est que de 30%.
Aujourd'hui, l'interférométrie permet la détermination de l'angle de déviation à quelques centaines de micro-secondes d'arc près.

Déviations par des galaxies et des quasars.

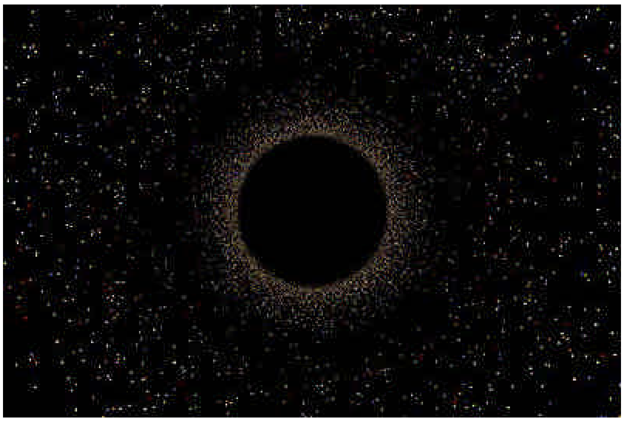
La découverte en 1979 du quasar double Q0957+561 a fait passer la déviation des rayons lumineux du stade de test relativiste à celui d'instrument de l'astrophysique et de la cosmologie.
Ce double quasar a été interprété comme l'image multiple d'un quasar unique, image due à l'effet de lentille gravitationnelle d'une galaxie, ou d'un amas de galaxies, situé(e) dans la ligne de visée du quasar vu depuis la Terre.
La lumière en provenance du quasar émet dans le domaine radio une énorme quantité d'énergie à quelques 8 milliards d'années lumière. Cette « lumière » est courbée par le champ gravitationnel d'une galaxie proche (400 millions d'années lumière).

La Croix d'Einstein, identifiée sous le matricule G2237+0305, résulte du même phénomène (visible seulement dans l'hémisphère sud). Une galaxie massive au centre de l'image forme quatre images autour du noyau central d'un objet situé derrière.



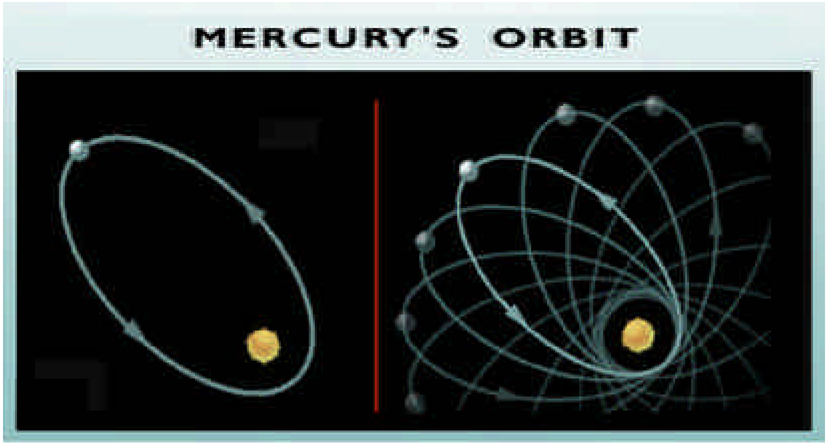
Le même effet de « lentille gravitationnelle » est observé sur l'amas de galaxies Abell 2218. Les objets masqués par ceux du premier plan apparaissent sous forme d'arcs.

Cette simulation numérique montre que la trajectoire de la lumière proche d'un trou noir devient si courbe que les étoiles, situées en arrière, apparaissent sous forme d'anneaux concentriques.



Le nombre et les caractéristiques des images produites par l'effet de la déviation des rayons lumineux par des objets massifs ont de nombreuses applications. Citons notamment la détermination de la distribution de masse des galaxies ou des amas de galaxies (~lentilles gravitationnelles) ou l'amélioration de l'estimation de la distance des quasars.

f2 – La précession du périhélie de Mercure



Depuis Kepler (XVI^e siècle) on sait que le mouvement d'une seule planète autour du Soleil s'effectue sur une ellipse. Le périhélie de l'orbite (point le plus proche du soleil) est à priori un point fixe.
En raison de la présence de perturbations causées par divers facteurs, comme l'existence d'autres planètes ou l'aplatissement éventuel du Soleil, la trajectoire réelle est plutôt une sorte de rosette qui correspond à une ellipse dont l'axe principal tournerait lentement dans son plan.
Il en résulte que le périhélie de la planète tourne également dans le plan de la trajectoire.

Au XIX^e siècle, les observations du mouvement de la planète Mercure montraient que son périhélie avançait de ~ 43'' par siècle. Il s'agissait d'une avance résiduelle non expliquée par la théorie de Newton. L'avance du périhélie de Mercure préoccupait les astronomes. Le Verrier avait cherché tant bien que mal à l'expliquer en invoquant une perturbation induite par un satellite de la planète, Vulcain, jamais détecté.

C'est la relativité générale qui va expliquer le phénomène observé.
Comme l'a fait Einstein, on peut considérer les termes apportés par la relativité générale comme des petites perturbations aux équations classiques.
L'avance du périhélie $\delta\psi$ exprimé en radian par révolution a pour expression :

$$dy = \frac{6pGM_S}{(1-e^2)a}$$

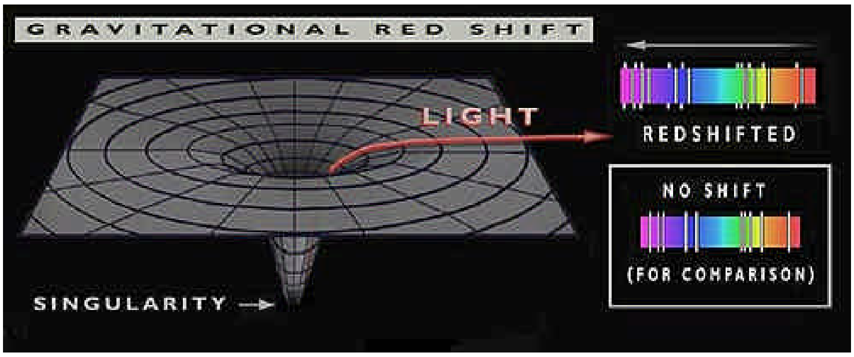
Avec :
e : Excentricité de l'orbite ; Pour Mercure e = 0,2056
a : Longueur du demi grand-axe ; Pour Mercure a = 57,91 10^9 m
M_S :Masse du Soleil = 2 10^{30} kg

La relativité générale prédit une avance de 43,03'' par siècle, valeur très proche de ce qui est observé : 43,11±0,45''.
Cela a confirmé le succès de la théorie.

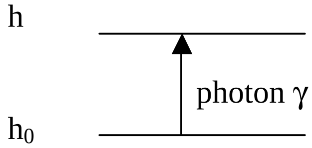
f3 – Le décalage gravitationnel vers le rouge

Cette prédiction, qu'Einstein considérait comme un des tests de la relativité générale, dit que :
« La <u>longueur d'onde</u> de la lumière (ou de tout autre rayonnement électromagnétique) passant dans un champ gravitationnel est <u>décalée</u> vers les régions rouges du spectre »
Par analogie : une balle lancée en l'air ralentit tandis qu'elle grimpe.

La relativité générale exprime qu'un photon, pour se frayer un chemin dans un champ de gravitation, perd de l'énergie et sa couleur… rougit !



Illustrons le décalage gravitationnel vers le rouge par un raisonnement heuristique :



- Un photon est émis à la surface d'une étoile
- On l'observe à l'altitude h, au dessus de l'altitude d'émission h_0
- Le photon dépense de l'énergie contre la gravitation pour grimper à h
- On peut montrer que le décalage spectral $\Delta\nu$ est donné par :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{GM}{Rc^2} \approx \frac{GM}{R^2c^2}(h-h_0)$$

Avec :
M : masse de l'étoile
R : Rayon de l'étoile
Si le récepteur est situé « plus bas » que l'émetteur, le signal reçu est décalé vers les hautes fréquences (« vers le bleu »), sinon le décalage s'effectue vers les basses fréquences (« vers le rouge »). On donne ainsi à ce phénomène le nom générique de « décalage gravitationnel vers le rouge ».

III- Importance de la relativité générale en physique

La gravitation est la plus faible des forces fondamentales aux échelles d'énergies accessibles.
Le rapport entre la force gravitationnelle et la force électrostatique entre deux protons distants de r est de l'ordre de 10^{-40} :

$$\frac{F_{grav}}{F_{elec}} = \frac{\frac{Gm_p^2}{r^2}}{\frac{e^2}{r^2}} = \frac{Gm_p^2}{e^2} \approx 10^{-40}$$

La gravitation semble alors négligeable.

Mais trois faits expliquent *pourquoi* et *quand* elle est importante :

- La gravitation est une force universelle qui se couple à toutes les formes de masse et d'énergie.

- La gravitation est une force à longue portée ; C'est une différence essentielle avec les forces d'interactions nucléaires faibles et fortes dont le rayons d'action se limite à l'échelle atomique.
- La gravitation n'a pas d'effet d'écran ; La masse est toujours positive. C'est une différence essentielle avec la force électrostatique par exemple, pour laquelle les effets s'annulent à grande échelle.

Ces trois faits expliquent pourquoi la gravitation est la force dominante qui gouverne les structures de l'Univers aux grandes échelles de l'espace-temps ; *C'est à dire aux échelles de l'astrophysique et de la cosmologie.*
En effet, les forces d'interaction faible et forte sont à courte portée et les forces électromagnétiques sont à portée relativement grande mais les charges sont « cachées » dans un Univers électriquement neutre. Seule la gravitation peut donc opérer aux très grandes échelles.

La relativité générale se révèle en fait importante pour tout objet de masse M et de taille R pour lequel le « paramètre gravitationnel » q est de l'ordre de 1 :

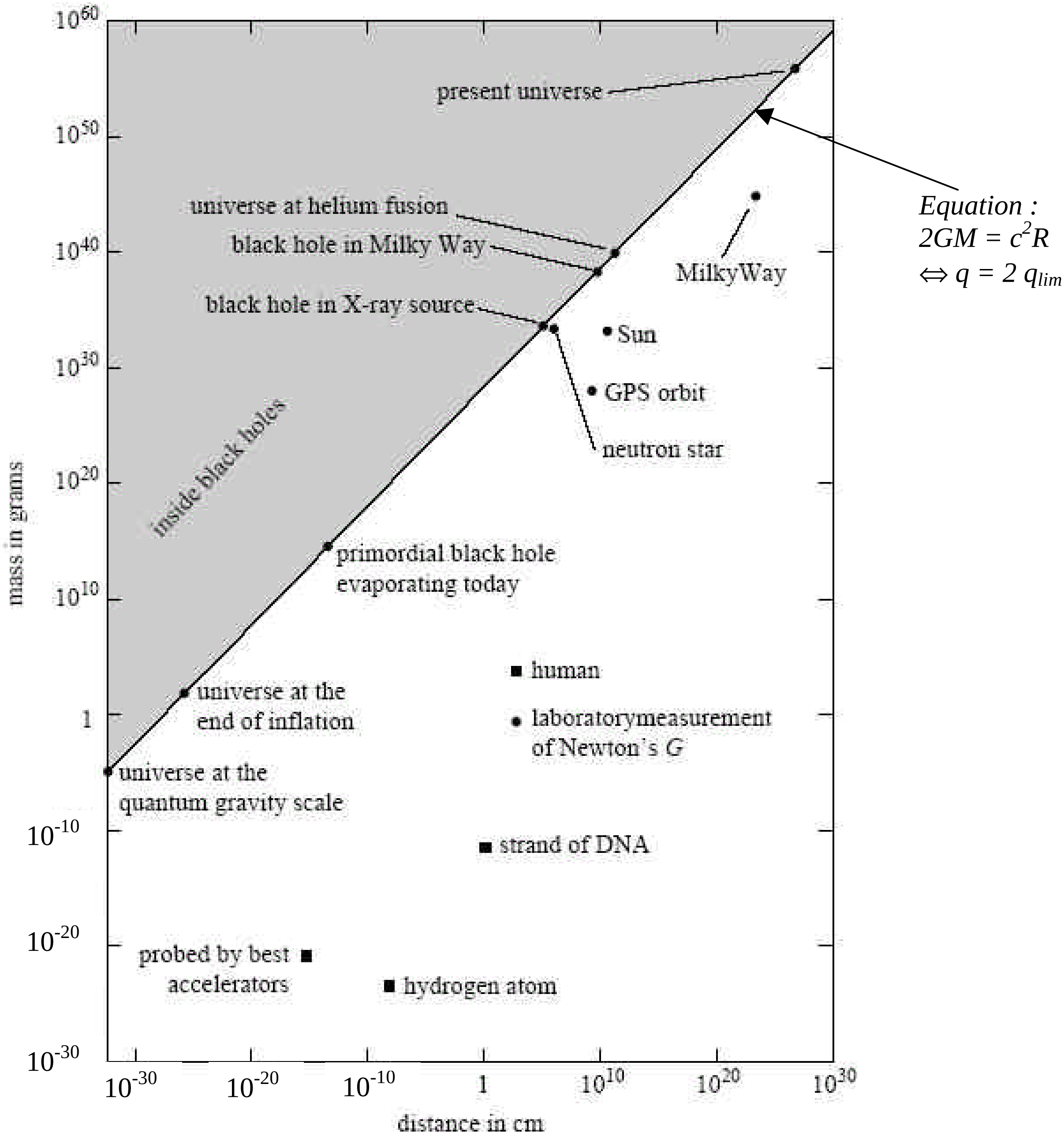
$$q = \frac{GM}{Rc^2} \approx 1$$

Quelques ordres de grandeurs de q :

Objet	**Masse (g)**	**Taille (cm)**	**q**
Noyau	10^{-23}	10^{-13}	10^{-38}
Atome	10^{-23}	10^{-8}	10^{-43}
Homme	10^{5}	10^{2}	10^{-25}
Terre	$6\ 10^{27}$	$6\ 10^{8}$	10^{-9}
Soleil	$2\ 10^{33}$	$7\ 10^{10}$	10^{-6}
Galaxie	10^{44}	10^{23}	10^{-7}
Naine Blanche	$2\ 10^{33}$	10^{9}	$3\ 10^{-4}$
Etoile à neutrons	$2\ 10^{33}$	10^{6}	0,3
Univers	Masse dans L_{Hubble}	L_{Hubble}	≤ 1
Trous noirs	?		1

Précision : L_{Hubble} est le rayon de Hubble tel que $L_{Hubble} = cH^{-1}$, où H est la « Constante de Hubble ». Aujourd'hui L_{Hubble} ~15 milliards d'années lumière (13,7 d'après les mesures du satellite WMAP en 2003).

Le critère q~1 est un peu grossier. Il nous assure qu'on peut considérer comme relativistes les étoiles à neutrons, les trous noirs et notre Univers.
En effet, en représentant sur un graphique la masse caractéristique M en fonction de la taille caractéristique R, on peut déduire les phénomènes pour lesquelles la relativité générale est importante et ceux pour lesquels elle ne l'est pas :



Masse caractéristique versus taille caractéristique
(d'après C. Will)

Légende :

- Phénomènes où la relativité générale est importante
- ▪ Phénomènes où la relativité générale est non importante

Sur ce graphique, il apparaît une frontière déterminée par q_{lim} tel que : $q_{lim} = \frac{GM}{Rc^2}$

Les phénomènes situés au-dessus de cette ligne sont, par exemple, des points qui sont à l'intérieur des trous noirs et sont donc inaccessibles .
Pour notre Univers, R est la distance de Hubble L_{Hubble} et M est la masse contenue dans L_{Hubble}. Il évolue le long de la ligne d'équation $2GM = c^2R$. Cela depuis les plus petites échelles de la gravité quantique (échelles de Planck) jusqu'aux plus grandes échelles caractérisant la cosmologie d'aujourd'hui.
En conclusion, les phénomènes qui sont sur la frontière, ou très proches de la ligne mais en dessous d'elle, sont les phénomènes pour lesquels la relativité générale est importante.

Ainsi la solution de Schwarzchild, trouvée quelques mois après la publication de l'article d'Einstein, est la base d'un grand nombre d' applications de la relativité générale.
Citons – en quelques unes :

- Décalage gravitationnel en fréquence
- Courbure de la lumière par le Soleil
- Précession du périhélie de Mercure
- Mirage gravitationnel
- Retard de temps de Shapiro
- Disques d'accrétion autour des objets compacts
- Détermination des paramètres des pulsars binaires
- Effondrement gravitationnel sphérique
- Formation des trous noirs
- Rayonnement de Hawking des trous noirs
- Entrainement par un corps en rotation
- Précession « Lense-Thiring » d'un gyroscope
- GPS (« Global Positioning System ») et prochainement Galileo
- Sources X
- Noyaux actifs de galaxies
- Etoiles à neutrons

Au-delà des tests et des applications dans le système solaire, au-delà des pulsars, des étoiles à neutrons, des trous noirs, Einstein considère la géométrie de l'espace comme une nouvelle entité physique avec ses degrés de liberté et sa dynamique propre. Dès 1918, étudiant les déformations possibles de la géométrie de l'espace, il prédit que celles-ci peuvent transporter avec elles de l'énergie. Il faut donc ajouter à la liste ci-dessus ce qui se réfère aux « ondes gravitationnelles » :

- Production d'ondes gravitationnelles
- Propagation d'ondes gravitationnelles
- Détection d'ondes gravitationnelles : « pulsars millisecondes », LIGO, VIRGO

Enfin, on doit traiter la cosmologie comme la plus importante des applications de la relativité générale avec, en particulier :

- Décalage cosmologique vers le rouge
- Expansion de l'Univers
- Théorie du Big Bang
- Fond micro-onde cosmologique : COBE , WMAP et à venir PLANCK Surveyor
- La fin de l'Univers

Conclusion :

Le but était de présenter la relativité générale comme une théorie fondamentale décrivant l'espace-temps et la gravitation :

- En introduisant la gravitation comme géométrie
- En écrivant la solution de Schwarzschild
- En considérant des tests expérimentaux

Il faut souligner l'importance de la relativité générale en tant que fondement sur lequel reposent non seulement les autres théories de la physique mais aussi les recherches dans le domaine des théories unifiées ou de grande unification qui tentent de traiter de manière uniforme la gravitation et les autres interactions.

On voudrait enfin insister sur l'utilisation de la relativité générale en tant qu'outil d'étude du monde réel comme le montre ces quelques exemples astrophysiques :

- La courbure des rayons lumineux par effet de lentille gravitationnelle, qui doit permettre l'étude de la structure des galaxies,
- Les effets relativistes du pulsar double, qui ont déjà permis la détermination de sa masse et de ses autres paramètres,
- Les limites imposées à la masse des étoiles à neutrons, qui jouent un rôle important dans la recherche des trous noirs par les observations
- Le rayonnement gravitationnel, qui sera très bientôt un moyen d'exploration et d'examen de l'Univers complètement nouveau.

Pour conclure cette trop brève introduction à la relativité générale disons simplement qu'au début du XX^{e} siècle, Einstein, ce savant génial et visionnaire, a fait franchir à la science une étape décisive. On a sûrement encore beaucoup à exploiter de cette théorie si révolutionnaire pour la physique !

Lectures complémentaires :

Pour en savoir plus ,en français :
- R.Hakim
"Gravitation relativiste"
CNRS Edition,Paris, 1994.

Pour en savoir plus , en anglais :
- C.W.Misner,K.S.Thorne,J.A.Wheeler
"Gravitation"
Freeman,San Francisco,1973.

Le point de vue d'un historien des sciences :
- J.Eisenstaedt
"Einstein et la relativité générale : Les chemins de l'espace-temps."
CNRS Edition, Paris, 2002.

- J.Eisenstaedt
"Avant Einstein : Relativité, lumière,gravitation."
Seuil,Paris,2005.