

RELATIVITE GENERALE

Cours de physique théorique pour la troisième et quatrième année
1 semestre, 3 heures de cours 1 heure d'exercices

Ruth Durrer

Département de Physique Théorique,
Université de Genève
Quai E. Ansermet 24
1211 Genève 4, Switzerland

édité par Dominique Eckert et Omar Azim Usmani

2002

révisé en 2006, 2008



Ce cours suit étroitement les chapitres correspondants du livre de Norbert Straumann [1].

Table des matières

I	Géométrie Differentielle	7
1	Les variétés différentiables	9
2	Champs vectoriels et tensoriels	15
2.1	L'espace tangent	15
2.2	Champs vectoriels	23
2.3	Champs tensoriels	25
3	La dérivée de Lie	29
3.1	Courbes intégrales, le flot d'un champ vectoriel	29
3.2	Applications induites sur les champs tensoriels	31
3.3	Dérivée de Lie	33
3.3.1	Expression de la dérivée de Lie en coordonnées locales	37
4	Connexions affines et la dérivée covariante	39
4.1	Connexions affines	39
4.2	Le transport parallèle le long d'une courbe	42
4.3	Géodésiques, application exponentielle, coordonnées normales . . .	43
4.4	La dérivée covariante des champs tensoriels	45
4.5	Courbure et torsion d'une connexion affine; les identités de Bianchi	48
5	La connexion (pseudo-)riemannienne	53

6	Formes différentielles et le calcul de Cartan	61
6.1	L'algèbre extérieure	61
6.2	Formes différentielles	63
6.3	La dérivée extérieure	67
6.4	Relations entre d , i_X et L_X	68
6.5	Le calcul de Cartan	70
II	Relativité Générale	77
7	Le principe d'équivalence	83
7.1	Propriétés caractéristiques de la gravitation	83
7.2	La relativité restreinte et la gravitation	85
7.3	L'espace-temps comme variété lorentzienne : formulation mathématique du principe d'équivalence	87
7.4	Les lois physiques en présence des champs gravitationnels	89
7.4.1	Equation du mouvement d'une particule test dans un champ gravitationnel	89
7.4.2	"Conservation" de l'énergie-impulsion en présence d'un champ gravitationnel	90
7.4.3	Electrodynamique en présence de champs gravitationnels	90
7.4.4	La limite newtonienne	92
7.4.5	Le décalage vers le rouge dans un champ gravitationnel statique	93
7.4.6	Le principe de Fermat pour des champs gravitationnels sta- tiques	94
7.4.7	Champs gravitationnels statiques et stationnaires	95
7.5	Des référentiels locaux et le transport de Fermi	97

7.5.1	Equation du mouvement d'un spin dans un champ gravitationnel	97
7.5.2	Le transport de Fermi	99
7.5.3	Staticité et stationnarité	101
7.5.4	Référentiels locaux	104
7.5.5	Les symboles de Christoffel et le développement de la métrique le long d'une ligne d'univers	105
7.5.6	Les équations du mouvement d'une particule test, force inertielle.	106
8	Les équations d'Einstein	109
8.1	Dérivation heuristique des équations d'Einstein	109
8.2	Le problème de Cauchy local	112
9	La solution de Schwarzschild et les tests classiques	115
9.1	Dérivation	115
9.2	Une particule test dans le champ de Schwarzschild	119
9.3	L'avancée du périhélie d'une planète	121
9.4	La déviation de la lumière	123
9.5	Le retard de l'écho radar (l'effet Shapiro)	124
9.6	Précession d'un gyroscope géodésique	127
9.7	La continuation de Kruskal	129
9.8	Le collapse sphérique en trou noir	139
9.8.1	Le décalage vers le rouge d'un observateur asymptotique . . .	140
9.8.2	Le fait d'un observateur qui tombe dans un trou noir	142
9.8.3	Evidences observationnelles	142
9.9	Diagramme de Penrose pour l'espace-temps Kruskal	143
9.9.1	Compactification conforme de l'espace-temps de Minkowski .	143

9.9.2	Le diagramme de Penrose de l'espace-temps de Schwarzschild-Kruskal	144
10	Champs gravitationnels faibles, ondes gravitationnelles, lentilles gravitationnelles	149
10.1	La gravitation linéarisée	149
10.2	Des sources presque newtoniennes	152
10.3	Ondes gravitationnelles libres dans la théorie linéarisée	153
10.3.1	La jauge TT	153
10.3.2	Déviations géodésiques engendrées par une onde gravitationnelle linéarisée	156
10.3.3	L'énergie rayonnée par une onde gravitationnelle	157
10.4	Emission des ondes gravitationnelles	159
10.5	Application : radiation gravitationnelle d'un système d'étoiles binaires	161
10.6	Lentilles gravitationnelles	165
10.6.1	L'application lentille	168
10.6.2	La lentille de Schwarzschild	170

Première partie

Géométrie Differentielle

Chapitre 1

Les variétés différentiables

Une variété est un espace topologique qui est localement comme \mathbb{R}^n .

Définition 1.1 (Variété topologique) Une **variété topologique** à dimension m est un espace topologique¹ hausdorffien² à base comptable de la topologie qui est localement homéomorphe à \mathbb{R}^m , c'est-à-dire que pour chaque point $p \in \mathcal{M}$ il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ avec $p \in \mathcal{U}$ et un homéomorphisme³ $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$, pour un ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^m$.

De plus, nous demandons toujours que \mathcal{M} soit paracompact⁴. Ceci implique :

1. \mathcal{M} est σ -compact⁵
2. \mathcal{M} est réunion dénombrable et disjointe de variétés connexes, chacune réunion dénombrable de compacts
3. \mathcal{M} est métrisable

Définition 1.2 (carte, atlas) Soit \mathcal{M} une variété à dimension m et $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ un homéomorphisme d'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ dans un ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^m$.

– On appelle le couple (h, \mathcal{U}) une **carte**⁶ de \mathcal{M} , et \mathcal{U} est le **domaine** de h .

¹Soit X un ensemble $\neq \emptyset$. Un ensemble T de sous-ensembles de X est une **topologie** sur X s'il satisfait : 1) Une réunion quelconque d'éléments de T appartient encore à T ; 2) Toute intersection finie d'éléments de T est encore un élément de T ; 3) T contient X et \emptyset . Un **espace topologique** est un couple (X, T) où X est un ensemble $\neq \emptyset$ et T est une topologie sur X . Les éléments de T sont les sous-ensembles dits 'ouverts' de X .

²Un espace est hausdorffien si pour 2 points $p \neq q \exists$ des ouverts $\mathcal{U} \ni p, \mathcal{V} \ni q$ qui sont disjoints, i.e. $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

³Application continue (i.e. l'image inverse d'un ouvert est un ouvert), localement bijective et d'inverse également continu

⁴ \mathcal{M} est paracompact si tout recouvrement ouvert de \mathcal{M} admet un recouvrement ouvert plus fin qui est localement fini (\mathcal{M} est localement compact)

⁵L'espace topologique \mathcal{M} est σ -compact s'il existe des $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$ qui sont compacts tels que $\mathcal{M} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$

⁶Souvent les physiciens appellent une carte 'un système de coordonnées locales'

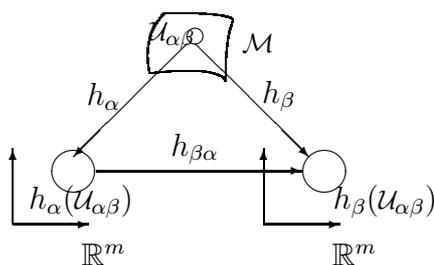


FIG. 1.1 – Un changement de carte (changement de coordonnées).

- Un ensemble $\{(h_\alpha, \mathcal{U}_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ de cartes est un **atlas** si $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{M}$.
- Dans l'intersection $\mathcal{U}_{\alpha\beta} := \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ les deux cartes sont bien définies. L'application $h_{\beta\alpha} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha\beta}) \rightarrow h_\beta(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$ est un **changement de carte**

Définition 1.3 (atlas différentiable) *Un atlas s'appelle différentiable si tous ses changements de carte sont différentiables dans le sens ordinaire d'une application d'un ouvert de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m .*

Pour simplifier dans ce qui suit, "différentiable" veut toujours dire \mathcal{C}^∞ (i.e. les dérivées partielles des $h_{\beta\alpha}$ de tout ordre existent et sont continues). Il est évident que

$$h_{\alpha\alpha} = \mathbb{1}, \quad h_{\gamma\beta} \circ h_{\beta\alpha} = h_{\gamma\alpha} \quad \text{sur} \quad \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma, \quad h_{\alpha\beta}^{-1} = h_{\beta\alpha}. \quad (1.1)$$

Soit \mathcal{A} un atlas différentiable sur la variété \mathcal{M} . Soit $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ l'atlas qui contient toutes les cartes telles que chaque changement de carte avec une carte de \mathcal{A} est différentiable. Clairement, $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$. En plus, l'atlas $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est aussi différentiable parceque pour chaque changement de carte $h_{\beta\gamma}$ pour deux cartes h_β et h_γ dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ il existe une carte h_α telle que localement $h_{\beta\gamma} = h_{\beta\alpha} \circ h_{\alpha\gamma}$.

L'atlas $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est clairement maximal. Il est l'atlas différentiable maximal qui contient \mathcal{A} . De cette façon, chaque atlas différentiable \mathcal{A} détermine uniquement un atlas différentiable maximal $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ qui contient \mathcal{A} . Si $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ sont deux atlas maximaux engendrés par \mathcal{A} et \mathcal{B} alors on a $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{B})$ si et seulement si l'atlas $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est différentiable.

Définition 1.4 (structure différentiable) *Une structure différentiable sur une variété topologique est un atlas différentiable maximal.*

Définition 1.5 (variété différentiable) Une **variété différentiable** est une variété topologique avec une structure différentiable donnée, qu'on note $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$.

Remarque 1.1 Pour définir une structure différentiable sur une variété \mathcal{M} , en général on ne donne pas tout \mathcal{D} mais plutôt un atlas minimal $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ qui, comme nous l'avons dit, détermine entièrement \mathcal{D} .

Dans ce qui suit, nous supposons toujours (sans le répéter) que les cartes et atlas considérés sont contenues dans la structure différentiable \mathcal{D} de notre variété différentiable $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Une variété topologique \mathcal{M} possède en général plusieurs structures différentiables.

Exemples 1.1

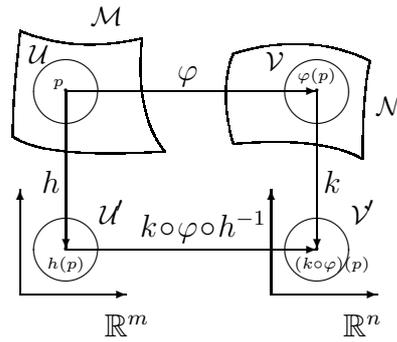
1. $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$. La carte $(\mathbb{1}, \mathcal{M})$, où $\mathbb{1}$ dénote l'identité, forme un atlas qui engendre la structure différentiable ordinaire de \mathbb{R}^m .
2. Chaque ouvert d'une variété différentiable possède une structure différentiable évidente.
3. S^n (sphère à dimension n) $\subset \mathbb{R}^{n+1}$ avec sa structure différentiable induite par un atlas contenant les projections stéréographiques de deux points différents (voir exercices).
4. Le cône (voir exercices).

Définition 1.6 (application différentiable) Une application continue $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ d'une variété différentiable \mathcal{M} dans une variété différentiable \mathcal{N} est **différentiable** au point $p \in \mathcal{M}$ si pour deux (et donc pour chaque!) cartes $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$, $p \in \mathcal{U}$, et $k : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$, $\varphi(p) \in \mathcal{V}$, l'application $k \circ \varphi \circ h^{-1}$ de $h(\varphi^{-1}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{U})$ dans \mathcal{V}' est différentiable au point $h(p)$. De même, on dit que l'application φ est différentiable si elle est différentiable en tout point $p \in \mathcal{M}$.

Remarque 1.2

- L'identité $\mathbb{1} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est différentiable.
- La composition de deux applications différentiables est différentiable, ce qui implique que les variétés différentiables forment une catégorie.
- $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est l'ensemble des applications différentiables de \mathcal{M} dans \mathcal{N} .
- $\mathcal{F}(\mathcal{M}) := \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions différentiables sur \mathcal{M} .

Définition 1.7 (difféomorphisme) Un **difféomorphisme** de \mathcal{M} est une application différentiable et bijective $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que φ^{-1} soit aussi différentiable.

FIG. 1.2 – Différentiabilité d'une application de \mathcal{M} dans \mathcal{N}

Remarque 1.3 La question si une variété topologique possède deux structures différentiables \mathcal{D} et \mathcal{D}' telles que les variétés différentiables induites $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ et $(\mathcal{M}, \mathcal{D}')$ ne soient pas difféomorphes est en général très difficile. Par exemple, Kervaire (Genève) et Milnor (1963) ont montré que la sphère S^7 admet exactement 28 structures différentiables non difféomorphes.

Définition 1.8 (immersion) Soit $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable de la variété différentiable \mathcal{M} à dimension m dans la variété \mathcal{N} à dimension n , avec $m \leq n$. L'application φ est une **immersion** si les cartes h et k de la définition 1.6 peuvent être choisies telles que $k \circ \varphi \circ h^{-1} : h(\mathcal{U}) \rightarrow k(\mathcal{V})$ soit l'inclusion. Ici \mathbb{R}^m est considéré comme sous-ensemble de \mathbb{R}^n : $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m \times 0_{n-m} \subset \mathbb{R}^n$. Autrement dit, dans des coordonnées convenables φ est **localement** de la forme $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$.

Remarque 1.4

- Une immersion est **localement** injective, mais ne l'est en général pas globalement
- Une immersion injective $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ qui est un homéomorphisme de \mathcal{M} dans $\varphi(\mathcal{M})$ est appelée un **plongement**

Définition 1.9 (sous-variété) Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} des variétés différentiables. \mathcal{M} est une **sous-variété** de \mathcal{N} si

1. $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$
2. L'inclusion $i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est un plongement

Comme l'inclusion i est aussi une immersion, on peut choisir des cartes (h, \mathcal{U}) et (k, \mathcal{V}) telles que i soit **localement** représenté par

$$k \circ i \circ h^{-1} : (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \quad (1.2)$$

Le domaine \mathcal{U} de la carte h est de la forme $\tilde{\mathcal{V}} \cap \mathcal{M}$ pour un ouvert $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{N}$ (i.e. i est un homéomorphisme et alors la topologie de \mathcal{M} est celle induite par \mathcal{N}). Si k est défini sur \mathcal{V} , cette représentation de i est définie sur $(\mathcal{V} \cap \tilde{\mathcal{V}}) \cap \mathcal{M}$.

On peut définir le produit $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ de deux variétés différentiables de dimension m et n . Pour deux cartes $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^m$ et $k : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}' \subset \mathbb{R}^n$ on définit la carte produit

$$(h \times k) : \begin{array}{l} \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}' \times \mathcal{V}' \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (p, q) \mapsto (h(p), k(q)) . \end{array} \quad (1.3)$$

L'ensemble de toutes les cartes $\{h \times k \mid h \in \mathcal{A}, k \in \mathcal{B}\}$ pour des atlas \mathcal{A} de \mathcal{M} et \mathcal{B} de \mathcal{N} forme un atlas sur $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ qui définit une structure différentiable.

Chapitre 2

Champs vectoriels et tensoriels

Dans chaque point $p \in \mathcal{M}$ d'une variété différentiable on peut définir un espace tangent, $T_p\mathcal{M}$ qui est un espace vectoriel de dimension m (la dimension de la variété \mathcal{M}). Nous pouvons considérer les tenseurs dans cet espace. En choisissant de façon différentiable en chaque point $p \in \mathcal{M}$ un tenseur de type (r, s) , nous obtenons un champ tensoriel du type (r, s) .

2.1 L'espace tangent

Considérons d'abord pour deux variétés \mathcal{M} et \mathcal{N} l'ensemble des applications de \mathcal{M} dans \mathcal{N} différentiables dans un voisinage d'un point $p \in \mathcal{M}$ donné; on note ce voisinage $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{M}$, c'est-à-dire

$$\{\varphi \mid \varphi : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathcal{N} \text{ soit différentiable pour un ouvert } \mathcal{U}_p \ni p\} . \quad (2.1)$$

Nous introduisons la relation d'équivalence suivante :

$$(R) \quad \varphi \sim \psi \Leftrightarrow \exists \text{ un ouvert } \mathcal{V} \ni p \text{ tel que } \varphi|_{\mathcal{V}} = \psi|_{\mathcal{V}} . \quad (2.2)$$

Définition 2.1 (germe) Une classe d'équivalence de (R) s'appelle un **germe** d'une application $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ autour du point $p \in \mathcal{M}$.

Nous désignons un tel germe, qui est représenté par une application φ , par $\overline{\varphi} : (\mathcal{M}, p) \rightarrow \mathcal{N}$ ou $\overline{\varphi} : (\mathcal{M}, p) \rightarrow (\mathcal{N}, q)$, où $q = \varphi(p)$.

Les germes se laissent composer de façon évidente.

Définition 2.2 (germe de fonction) Un **germe de fonction** est un germe $\overline{f} : (\mathcal{M}, p) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$. Nous désignons l'ensemble de tous les germes de fonction au point $p \in \mathcal{M}$ par $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p)$.

$\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p)$ a la structure d'une algèbre réelle (définir les opérations de façon évidente avec les représentants).

Un germe $\bar{\varphi} : (\mathcal{M}, p) \rightarrow (\mathcal{N}, q)$ définit un homomorphisme φ^* des algèbres $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(q)$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p)$:

$$\varphi^* : \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(q) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p) : \bar{f} \mapsto \overline{f \circ \varphi} \quad (2.3)$$

De façon évidente nous avons $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ et $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. En particulier, si φ représente un germe inversible, alors $\bar{\varphi} \circ \overline{\varphi^{-1}} = \overline{\mathbb{1}}$, et alors

$$\varphi^* \circ (\varphi^{-1})^* = \mathbb{1} \quad \text{ou} \quad (\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1} \quad (2.4)$$

c'est-à-dire que φ^* est un isomorphisme.

Chaque carte h autour d'un point p définit un germe inversible

$$\bar{h} : (\mathcal{M}, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0) \quad (2.5)$$

et donc aussi un isomorphisme¹

$$h : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p) . \quad (2.6)$$

Nous donnons maintenant trois définitions équivalentes de l'espace tangent en un point p . Il est très utile de savoir passer librement d'une définition à l'autre (voir exercices). Nous allons premièrement définir l'espace tangent de manière algébrique. Pour ceci, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 2.3 (dérivation) *Une dérivation sur $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p)$ est une application linéaire $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait la règle de Leibniz, c'est-à-dire*

$$X(\bar{f} \cdot \bar{g}) = \bar{g}(p)X(\bar{f}) + \bar{f}(p)X(\bar{g}), \quad \forall \bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p) \quad (2.7)$$

Définition 2.4 (espace tangent "algébrique") *L'espace tangent de \mathcal{M} au point p , désigné par $T_p\mathcal{M}$, est l'espace vectoriel (réel) des dérivations sur $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p)$.*

Les dérivations forment évidemment un espace vectoriel. De la règle de Leibniz nous concluons

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) + X(1) \text{ ce qui implique que } X(1) = 0 . \quad (2.8)$$

où $1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto 1$. Et donc, par linéarité, toute dérivation est nulle sur les fonction constante $f(p) = c$.

Un germe $\bar{\varphi} : (\mathcal{M}, p) \rightarrow (\mathcal{N}, q)$, et alors en particulier une application différentiable $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, induit une application $\varphi^* : \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(q) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(p)$ appelée l'**application**

¹ \mathcal{F}_m est l'ensemble des germes $(\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

tangente linéaire (ou le différentiel de φ en p) de $T_p\mathcal{M}$ dans $T_q\mathcal{N}$. Elle est donnée par

$$T_p\varphi : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_q\mathcal{N} : X \mapsto X \circ \varphi^* \quad (2.9)$$

Le différentiel $T_p\varphi(X)$ appliqué à un germe $\bar{f} : (\mathcal{N}, q) \rightarrow \mathbb{R}$ donne

$$T_p\varphi(X)(\bar{f}) = X \circ \varphi^*(\bar{f}) = X(\overline{f \circ \varphi}), \text{ pour } X \in T_p\mathcal{M}. \quad (2.10)$$

Le différentiel d'une composition de deux applications,

$$\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} : (\mathcal{M}, p) \xrightarrow{\bar{\varphi}} (\mathcal{N}, q) \xrightarrow{\bar{\psi}} (\mathcal{L}, r) : p \mapsto \psi(\varphi(p)), \quad (2.11)$$

est le produit des applications tangentes $T\psi$ et $T\varphi$:

$$T_p(\psi \circ \varphi) = T_q\psi \circ T_p\varphi, \quad \text{où } q = \varphi(p). \quad (2.12)$$

Preuve :

Soit $X \in T_p\mathcal{M}$ et $\bar{f} \in \mathcal{F}_L(r)$.

$$T_p(\psi \circ \varphi)(X)(\bar{f}) = X \circ ((\psi \circ \varphi)^*(\bar{f})) = X(\overline{f \circ \psi \circ \varphi}) = X \circ (\varphi^*(\overline{f \circ \psi})) =$$

$$(T_p\varphi)(X)(\overline{f \circ \psi}) = (T_p\varphi)(X)(\psi^*(\bar{f})) = (T_q\psi) \circ (T_p\varphi)(X)(\bar{f}).$$

□

La linéarité du différentiel $T_p\varphi$ (aussi appelé l'application tangente de φ au point p) est une conséquence directe de la définition.

Soit maintenant \mathcal{N} une variété différentiable, soit $p \in \mathcal{N}$ et soit n la dimension de \mathcal{N} . Nous allons montrer que la dimension de $T_p\mathcal{N}$ est aussi n . Pour une carte h , le germe $\bar{h} : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ engendre un isomorphisme $h^* : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(p)$. Alors l'application

$$T_ph : T_p\mathcal{N} \rightarrow T_0\mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

est un isomorphisme. $T_p\mathcal{N}$ et $T_0\mathbb{R}^n$ ont alors la même dimension. Pour caractériser $T_0\mathbb{R}^n$, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Soit \mathcal{U} une boule autour de l'origine dans \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors il existe des fonctions différentiables $f_1, \dots, f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n f_i(x)x^i \quad (2.14)$$

Démonstration :

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx^1, \dots, tx^n) dt = \sum_{i=1}^n x^i \underbrace{\int_0^1 \partial_i f(tx^1, \dots, tx^n) dt}_{f_i, i=1, \dots, n},$$

où $\partial_i f$ est la dérivée partielle par rapport à la variable x^i .

□

Des dérivations spéciales de \mathcal{F}_n sont les dérivées partielles

$$\partial_i : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathbb{R} : \bar{f} \mapsto \partial_i f(0). \quad (2.15)$$

Ceci nous mène au lemme suivant :

Lemme 2.2 *Les $(\partial_i)_{i=1}^n$ forment une base de l'espace vectoriel $T_0\mathbb{R}^n$ des dérivations de \mathcal{F}_n .*

Démonstration :

a) Les ∂_i sont linéairement indépendantes :

Soit $X = \sum_{i=1}^n a^i \partial_i \equiv 0$. En appliquant X au germe \bar{x}^j nous obtenons :

$$0 = X(\bar{x}^j) = \sum_{i=1}^n a^i \partial_i x^j = a^j.$$

b) Les ∂_i génèrent $T_0\mathbb{R}^n$: Soit $X \in T_0\mathbb{R}^n$. Nous posons $a^i := X(\bar{x}^i)$. Fixons la dérivée

$$Y = X - \sum_{i=1}^n a^i \partial_i.$$

Nous voulons démontrer que $Y = 0$. Par construction, $Y(\bar{x}^j) = 0$. Pour un germe \bar{f} donné nous pouvons écrire

$$\bar{f} = \bar{f}(0) + \sum_{i=1}^n \bar{f}_i \cdot \bar{x}^i.$$

De la règle de Leibniz 2.7 nous obtenons

$$Y(\bar{f}) = \underbrace{Y(\bar{f}(0))}_{=0} + \sum_{i=1}^n \bar{f}_i(0) \underbrace{Y(\bar{x}^i)}_{=0} = 0.$$

□

La dimension de l'espace tangent $T_p\mathcal{N}$ est donc uniquement déterminée et égale à n , la dimension de la variété \mathcal{N} .

Après l'introduction des coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) au voisinage d'un point $p \in \mathcal{N}$, chaque vecteur $X \in T_p\mathcal{N}$ est caractérisé par son expression comme combinaison linéaire des dérivées partielles ∂_i , où nous interprétons les ∂_i par l'isomorphisme $T_ph : T_p\mathcal{N} \rightarrow T_0\mathbb{R}^n$ comme éléments de $T_p\mathcal{N}$ ($\partial_i \equiv (T_ph)^{-1} \partial_i$) où

$$(\partial_i)_p(\bar{f}) \equiv \partial_i (f \circ h^{-1})(h(p)). \quad (2.16)$$

Soit maintenant $\bar{\varphi} : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{M}, q)$ un germe et nous choisissons aussi dans un voisinage de q des coordonnées locales (y_1, \dots, y_m) où q soit représenté par 0.

Nous pouvons alors comprendre $\bar{\varphi}$ comme germe de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^m, 0)$, que nous désignons aussi par $\bar{\varphi}$: L'application tangente $T_0\bar{\varphi}$ est donnée comme suit :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{N}, p) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & (\mathcal{M}, q) \\ \text{carte } h \downarrow & & \downarrow \text{carte } k \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\text{"}\bar{\varphi}\text{"}} & (\mathbb{R}^m, 0) \\ (x_1, \dots, x_n) & & (y_1, \dots, y_m) \end{array}$$

FIG. 2.1 – Relation entre un germe de (\mathcal{N}, p) dans (\mathcal{M}, q) et un germe de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^m, 0)$, " $\bar{\varphi}$ " $\equiv \overline{k \circ \varphi \circ h^{-1}}$

Soit $\bar{f} \in \mathcal{F}_m$. En posant $\varphi(x^1, \dots, x^n) = (\varphi^1(x^1, \dots, x^n), \dots, \varphi^m(x^1, \dots, x^n))$, on calcule

$$T_0\bar{\varphi}(\partial_i)(\bar{f}) = \partial_i(\bar{f} \circ \bar{\varphi}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^j}(0) \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}(0) \quad (2.17)$$

Alors $T_0\bar{\varphi}(\partial_i) = \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} \right)_0 \frac{\partial}{\partial y^j}$. La matrice $D\varphi := \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} \right)$ est la Jacobienne de l'application φ dans les coordonnées données.

Pour le vecteur $v = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ nous avons alors :

$$T_0\bar{\varphi}(v) = \sum_{j=1}^m b^j \frac{\partial}{\partial y^j} \text{ avec } b = (D\varphi)_0 a \quad (2.18)$$

Nous avons donc montré la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Pour des coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) autour du point $p \in \mathcal{N}$, telles que p corresponde à $(0, \dots, 0) = 0$ et des coordonnées (y^1, \dots, y^m) autour de $q \in \mathcal{M}$, les dérivations $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i=1}^n$ et $\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{j=1}^m$ forment des bases des espaces vectoriels $T_p\mathcal{N}$ et $T_q\mathcal{M}$. L'application tangente d'un germe $\bar{\varphi} : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{M}, q)$ dans cette base est donnée par la Jacobienne*

$$D_0\bar{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m .$$

Ceci nous mène à la définition "physique" d'un vecteur tangent qui dit brièvement : "Un vecteur (contravariant) est une collection de n nombres réels qui se transforment sous des applications différentielles avec la Jacobienne".

Nous précisons cette "définition". Soit \bar{h} et $\bar{k} : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ des germes de carte. Le changement de carte

$$\bar{g} := \bar{k} \circ \bar{h}^{-1} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

est alors un germe inversible.

Tous les germes inversibles, c'est-à-dire tous les changements de carte, forment un groupe \mathcal{G} et pour deux germes de carte \bar{h} et \bar{k} il existe un $\bar{g} \in \mathcal{G}$ **unique** tel que $\bar{g} \circ \bar{h} = \bar{k}$.

Chaque $\bar{g} \in \mathcal{G}$ correspond à une matrice, sa Jacobienne au point 0, Dg_0 .

Cette correspondance définit un homomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) \\ \bar{g} &\mapsto D_0g \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices $n \times n$ inversibles.

La définition "physique" de l'espace tangent peut maintenant être formulée comme suit :

Définition 2.5 (espace tangent "physique") *Un vecteur tangent au point $p \in \mathcal{N}$ est une correspondance qui accorde à chaque germe de carte $\bar{h} : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ en p un vecteur $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ telle que le vecteur $(D_0g)v$ corresponde au germe $\bar{g} \circ \bar{h}$ pour chaque $\bar{g} \in \mathcal{G}$.*

Autrement dit : Soit \mathcal{K}_p l'ensemble des germes de carte en p , $\bar{h} : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. L'espace tangent du physicien $(T_p\mathcal{N})_{\text{phys}}$ est alors l'ensemble des applications

$$v : \mathcal{K}_p \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{2.20}$$

qui satisfont $v(\bar{g} \circ \bar{h}) \stackrel{(*)}{=} (D_0g)v(\bar{h})$ pour tout $\bar{g} \in \mathcal{G}$.

Ces applications forment un espace vectoriel : pour un germe \bar{h} , on peut choisir $v(\bar{h}) \in \mathbb{R}^n$ de façon arbitraire; pour chaque autre germe de carte $\bar{k} = \bar{k} \circ \bar{h}^{-1} \circ \bar{h}$,

$v(\bar{k})$ est alors déterminé par (\star) . $(T_p\mathcal{N})_{\text{phys}}$ est donc isomorphe à \mathbb{R}^n . Chaque choix d'un système de coordonnées définit un isomorphisme entre $(T_p\mathcal{N})_{\text{phys}}$ et \mathbb{R}^n .

L'isomorphisme **canonique** entre $T_p\mathcal{N}$ et $(T_p\mathcal{N})_{\text{phys}}$ est alors

$$\begin{aligned} T_p\mathcal{N} &\rightarrow (T_p\mathcal{N})_{\text{phys}} \\ X &\mapsto v \end{aligned} \quad (2.21)$$

où v accorde au germe de carte $\bar{h} = (\bar{h}^1, \dots, \bar{h}^n)$ le vecteur $(X(\bar{h}^1), \dots, X(\bar{h}^n)) \in \mathbb{R}^n$.

Les composantes de ce vecteur sont exactement les coefficients de X dans la base $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ définie par la carte \bar{h} .

Un physicien écrit un vecteur dans un système de coordonnées et se rend compte du comportement sous transformations de coordonnées.

La définition la plus intuitive est la "définition du géomètre". Ici on identifie les vecteurs tangents au point $p \in \mathcal{N}$ avec les vecteurs vitesse des chemins qui passent par p .

Définition 2.6 (espace tangent "géométrique") Soit W_p l'ensemble des chemins différentiables qui passent par p , c'est-à-dire $W_p = \{w : I \rightarrow \mathcal{M} \mid w(0) = p\}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle avec $0 \in I$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ est un ouvert contenant p et w est une application différentiable.

Nous définissons la relation d'équivalence $w \sim v$ si pour chaque fonction différentiable $f \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$

$$\frac{d}{dt}(f \circ w)(0) = \frac{d}{dt}(f \circ v)(0) \quad (2.22)$$

Une classe d'équivalence de \sim , $[w]$, est un vecteur tangent à \mathcal{N} au point p . On définit donc $(T_p\mathcal{N})_{\text{géom}} := W_p / \sim$.

Clairement, si deux fonctions f_1 et f_2 génèrent le même germe en p , i.e. $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$, alors $\frac{d}{dt}(f_1 \circ w)(0) = \frac{d}{dt}(f_2 \circ w)(0)$. Une classe d'équivalence $[w]$ correspond donc (de façon unique) à la dérivation X_w de $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(p)$ définie par

$$X_w(\bar{f}) := \frac{d}{dt}(f \circ w)(0) \quad (2.23)$$

Cette correspondance est évidemment injective :

$$(T_p\mathcal{N})_{\text{géom}} \equiv W_p / \sim \rightarrow T_p\mathcal{N} : [w] \mapsto X_w . \quad (2.24)$$

Mais elle est aussi surjective : pour $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (dans un système de coordonnées locales fixé) nous choisissons $w = (ta^1, \dots, ta^n)$ et alors $X = X_w$.

L'application tangente est aussi très intuitive avec la définition géométrique de

l'espace tangent :

Une application $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ avec $\varphi(p) = q$ engendre l'application

$$(T_p\mathcal{N})_{\text{géom}} \rightarrow (T_q\mathcal{M})_{\text{géom}} : [w] \mapsto [\varphi \circ w] . \quad (2.25)$$

Ceci est exactement l'application tangente définie dans la définition 2.4 : pour $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(q)$,

$$X_{\varphi \circ w}(\bar{f}) = \frac{d}{dt} (f \circ (\varphi \circ w)) (0) = X_w(\overline{f \circ \varphi}) = X_w(\varphi^* \bar{f}) = T_p\varphi(X_w)(\bar{f}) .$$

Nous avons maintenant donné trois définitions de l'espace tangent d'une variété différentiable \mathcal{N} au point $p \in \mathcal{N}$, et nous avons démontré qu'elles sont toutes équivalentes. Dans ce qui suit, nous ne distinguerons plus entre les trois définitions mais appliquerons l'une ou l'autre comme il nous semble convenable.

Définition 2.7 (fibrée tangente) *L'union $\bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$, notée $T\mathcal{M}$, est appelée la fibrée tangente de \mathcal{M} .*

$T\mathcal{M}$ est aussi une variété différentiable (à dimension $2 \dim \mathcal{M}$) munie de la structure différentielle induite par celle de \mathcal{M} : chaque application différentiable $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ engendre une application différentiable de $T\mathcal{M}$ dans $T\mathcal{N}$, de la manière suivante :

$$T\varphi : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N} : (p, X) \mapsto (\varphi(p), T_p\varphi X) . \quad (2.26)$$

Définition 2.8 (rang) *Le rang d'une application différentiable $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ au point $p \in \mathcal{N}$ est le rang de l'application tangente à ce point :*

$$\text{rg}_p\varphi := \text{Rang}(T_p\varphi) . \quad (2.27)$$

Proposition 2.2 *Une immersion est une application $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ avec $\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$ dont le rang est partout maximal, i.e. $\text{rg}_p\varphi = \dim \mathcal{M}$ pour tout $p \in \mathcal{M}$.*

Démonstration Choisir des coordonnées autour d'un point p donné et appliquer le théorème du rang pour des applications de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n . Montrer que le résultat ne dépend pas des coordonnées choisies.

□

2.2 Champs vectoriels

Définition 2.9 (champ vectoriel) *Un champ vectoriel est une application*

$$X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} : p \mapsto X_p \text{ avec } X_p \in T_p\mathcal{M} . \quad (2.28)$$

*Dans le langage des fibrées, un champ vectoriel est une **section** de la fibrée $T\mathcal{M}$.*

Soit (x^1, \dots, x^m) des coordonnées locales sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Pour $p \in \mathcal{U}$, $X_p \in T_p\mathcal{M}$ a une représentation de la forme

$$X_p = \xi^i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (2.29)$$

Les fonctions ξ^i , $i = 1, \dots, m$ sont les composantes de X par rapport au système de coordonnées (x^1, \dots, x^m) . Pour un deuxième système de coordonnées dans \mathcal{U} , désigné par $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)$ nous avons (d'après la définition du physicien)

$$X_p = \bar{\xi}^i(p) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \quad \text{avec} \quad \bar{\xi}^i(p) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(p) \cdot \xi^j(p) . \quad (2.30)$$

Comme tous les changements de coordonnées sont \mathcal{C}^∞ (et donc que $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$ l'est aussi), l'énoncé que les composantes ξ^i de X soient \mathcal{C}^r au point p ne dépend pas du système de coordonnées. La définition suivante est alors sensée

Définition 2.10 (champ vectoriel \mathcal{C}^r) *Un champ vectoriel X est \mathcal{C}^r au point p si ses composantes $(\xi^i(p))$ sont des fonctions \mathcal{C}^r au point p . X s'appelle \mathcal{C}^r sur \mathcal{M} s'il est \mathcal{C}^r en chaque point $p \in \mathcal{M}$.*

Dans ce qui suit, nous ne considérerons pour la plupart que des champs vectoriels \mathcal{C}^∞ , et nous désignons l'ensemble de ces champs par $\mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Comme avant, $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ est l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{M} .

Pour $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, les applications

$$p \mapsto f(p)X(p) \text{ et } p \mapsto X(p) + Y(p) \quad (2.31)$$

définissent des nouveaux champs vectoriels sur \mathcal{M} , que nous désignons par fX et $X + Y$. Pour $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ et $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ nous avons

$$f(gX) = (f \cdot g)X, \quad f(X + Y) = fX + fY \text{ et } (f + g)X = fX + gX \quad (2.32)$$

En langage algébrique, $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ est un module² sur l'algèbre $\mathcal{F}(\mathcal{M})$.

De plus, nous définissons la fonction Xf sur \mathcal{M} par la dérivation X_p :

$$(Xf)(p) = X_p f, \quad \forall p \in \mathcal{M} \quad (2.33)$$

²Soit A un anneau. Un ensemble M est un module sur A si M est un groupe additif avec une application $A \times M \rightarrow M$ qui à chaque couple (x, v) , avec $x \in A$ et $v \in M$, associe un élément xv de M satisfaisant les propriétés suivantes : 1) si e est l'élément neutre de A , alors $ev = v$, $\forall v \in M$; 2) $x(v + w) = xv + xw$, pour $v, w \in M$; 3) $(x + y)v = xv + yv$, pour $x, y \in A$; 4) $(xy)v = x(yv)$.

En coordonnées locales nous avons (voir équation (2.29))

$$(Xf)(p) = \xi^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) . \quad (2.34)$$

Comme les ξ^i sont des fonctions \mathcal{C}^∞ , aussi Xf est une fonction \mathcal{C}^∞ . Xf est la **dérivation de f "en direction" X**.

Les identités suivantes sont satisfaites :

$$X(f + g) = Xf + Xg \quad (\text{linéarité}) \quad (2.35)$$

$$X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot Xg \quad (\text{règle de Leibniz (2.7)}) . \quad (2.36)$$

L'application $D_X f := Xf$ est donc une **dérivation** de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ au sens de la définition 2.3.

La définition de l'algébriste dit que toute dérivation de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est de la forme D_X pour un certain $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Pour deux dérivations D_1 et D_2 d'une algèbre \mathcal{A} , le commutateur $[D_1, D_2]$ est aussi une dérivation. En effet, soit $a \in \mathcal{A}$. Alors $[D_1, D_2]a := D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))$. $[D_1, D_2]$ est clairement linéaire, comme les dérivations le sont, et

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](ab) &\equiv D_1(D_2(ab)) - D_2(D_1(ab)) \\ &= D_1((D_2a)b + a(D_2b)) - D_2((D_1a)b + a(D_1b)) \\ &= (D_1(D_2a))b + (D_2a)(D_1b) + (D_1a)(D_2b) + aD_1(D_2b) \\ &\quad - (D_2(D_1a))b - (D_1a)(D_2b) - (D_2a)(D_1b) - aD_2(D_1b) \\ &= ([D_1, D_2]a)b + a([D_1, D_2]b); \end{aligned}$$

le commutateur obéit donc à la règle de Leibnitz. De plus, l'identité de Jacobi est satisfaite (exercice!), c'est-à-dire

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_3, [D_1, D_2]] + [D_2, [D_3, D_1]] = 0 . \quad (2.37)$$

Par contre, la composition $D_1 \circ D_2$ n'est pas une dérivation. D'après ces remarques, pour deux champs vectoriels X et Y il existe alors un champ $Z := [X, Y]$ défini par

$$Zf = [X, Y]f \equiv X(Y(f)) - Y(X(f)) = D_X(D_Y f) - D_Y(D_X f) . \quad (2.38)$$

En coordonnées locales avec $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ on trouve (exercice!)

$$[X, Y] = \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} . \quad (2.39)$$

En appliquant la définition, il est facile à voir que pour des champs vectoriels X, Y et Z et des fonctions f et g les identités suivantes sont satisfaites :

1. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$
2. $[X, Y] = -[Y, X]$
3. $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$
4. $[aX, Y] = a[X, Y]$, avec $a \in \mathbb{R}$
5. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

Les propriétés 1. à 4. font de l'espace $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ muni du produit commutateur une algèbre de Lie réelle.

2.3 Champs tensoriels

Comme nous l'avons vu, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$ forme un espace vectoriel (réel) de dimension $m = \dim \mathcal{M}$.

Définition 2.11 (espace cotangent) *L'espace dual³ de l'espace tangent en p , $T_p^*\mathcal{M}$, est appelé l'espace cotangent à \mathcal{M} au point p . L'union $\bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M} := T^*\mathcal{M}$ est la fibrée cotangente de \mathcal{M} .*

Définition 2.12 (différentiel d'une fonction) *Soit f une fonction différentiable sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ et soit $p \in \mathcal{U}$. Pour $v \in T_p\mathcal{M}$ nous définissons*

$$(df)_p(v) := v(f) \quad (2.40)$$

L'application $(df)_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est clairement linéaire⁴ et alors $(df)_p \in T_p^\mathcal{M}$. L'application (df) s'appelle le **différentiel (ou gradient)** de f au point p .*

Dans un système de coordonnées locales (x^1, \dots, x^m) et pour $v = \frac{\partial}{\partial x^i}$ nous avons

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} . \quad (2.41)$$

En particulier, pour les fonctions composantes $x^i : p \mapsto x^i(p)$ nous avons

$$(dx^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i , \quad (2.42)$$

³Soit V un espace vectoriel de dimension n . Son dual V^* est l'espace de toutes les applications linéaires de V dans \mathbb{R} (si $v^* \in V^*$, $v, w \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $v^*(\alpha v + \beta w) = \alpha v^*(v) + \beta v^*(w)$). V^* est aussi un espace vectoriel de dimension n . Pour chaque base $(e_i)_{i=1}^n \subset V$ il existe une base duale $(e^{*i})_{i=1}^n \subset V^*$ telle que $e^{*j}(e_i) = \delta_i^j$, $\forall i, j$.

⁴Comme v est dans l'espace tangent, v est une dérivation, et donc l'application $v \mapsto v(f)$ est linéaire.

c'est-à-dire $(dx^i)_{i=1}^m$ est la base duale à $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1}^m$.
De plus, d'après (2.41) nous avons

$$(df)_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i . \quad (2.43)$$

Définition 2.13 (fibrée tensorielle, champ tensoriel)

– L'espace $(T_p\mathcal{M})_s^r$ est l'espace des tenseurs du type (r, s) sur $T_p\mathcal{M}$ (r -fois contra-variants et s -fois co-variants). C'est-à-dire $(T_p\mathcal{M})_s^r$ est l'espace des applications linéaires⁵

$$\underbrace{T_p^*\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p^*\mathcal{M}}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_p\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p\mathcal{M}}_{s \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R} . \quad (2.44)$$

Alors $(T_p\mathcal{M})_0^1 \equiv T_p\mathcal{M}$, $(T_p\mathcal{M})_1^0 \equiv T_p^*\mathcal{M}$.

- L'union $\bigcup_{p \in \mathcal{M}} (T_p\mathcal{M})_s^r := (TM)_s^r$ est la **fibrée tensorielle** du type (r, s) sur \mathcal{M} .
– Un **champ tensoriel** du type (r, s) est une application

$$t : \mathcal{M} \rightarrow (TM)_s^r : p \mapsto t_p \in (T_p\mathcal{M})_s^r . \quad (2.45)$$

Les opérations algébriques des champs tensoriels du même type sont définies point par point. Par exemple pour t, u du type (r, s) , l'addition est définie par $(t+u)_p := t_p + u_p$. De même pour la multiplication avec une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, on définit $(ft)_p := f(p)t_p$. L'ensemble des champs tensoriels du type (r, s) est appelé $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$. Dans un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ avec des coordonnées locales (x^1, \dots, x^m) nous pouvons représenter $t \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$ dans les bases duales $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ et (dx^i) :

$$t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right) \otimes (dx^{j_1}) \otimes \cdots \otimes (dx^{j_s}) . \quad (2.46)$$

Les fonctions $(t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r})$ s'appellent les **composantes** de t par rapport aux coordonnées (x^1, \dots, x^m) .

Dans un changement de coordonnées $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)$ les composantes de t se transforment de la façon

$$\bar{t}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial \bar{x}^{j_s}} t_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} . \quad (2.47)$$

La propriété que les fonctions $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ soient \mathcal{C}^k est alors indépendante du système de coordonnées (tout changement de coordonnées est \mathcal{C}^∞). Un champ tensoriel t est

⁵Ici nous utilisons qu'un espace vectoriel V est identique à $(V^*)^*$ par l'identification de $v \in V$ avec l'application $v^{**} : V^* \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \mapsto \alpha(v)$. Donc un élément de V peut être compris comme une application linéaire de V^* dans \mathbb{R} , c'est-à-dire comme élément de $(V^*)^*$.

de classe \mathcal{C}^k si les composantes de t sont \mathcal{C}^k . Dans la suite nous ne considérerons que des champs \mathcal{C}^∞ . Les espaces de champs de vecteurs et champs de co-vecteurs sont $\mathcal{T}_0^1(\mathcal{M}) = \mathcal{X}(\mathcal{M})$, et $\mathcal{T}_1^0(\mathcal{M}) = \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$.

Pour $t \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$, $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et $\omega^1, \dots, \omega^r \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ nous définissons

$$F(p) := t_p(\omega^1(p), \dots, \omega^r(p), X_1(p), \dots, X_s(p)) . \quad (2.48)$$

Alors, t définit une application $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -multilinéaire :

$$\begin{aligned} & \overbrace{\mathcal{X}^*(\mathcal{M}) \otimes \dots \otimes \mathcal{X}^*(\mathcal{M})}^{r \text{ fois}} \otimes \overbrace{\mathcal{X}(\mathcal{M}) \otimes \dots \otimes \mathcal{X}(\mathcal{M})}^{s \text{ fois}} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}) : \\ & (\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \mapsto t(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s), \\ & t(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) = t_p(\omega^1(p), \dots, \omega^r(p), X_1(p), \dots, X_s(p)) . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Définition 2.14 (champ retiré, pullback) Soit $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable et soit $\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{N})$ une 1-forme. La **1-forme retirée** $\varphi^*\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ est définie par

$$(\varphi^*\omega)_p(X_p) := \omega_{\varphi(p)}(T_p\varphi X_p), \quad \text{avec } X_p \in T_p\mathcal{M}. \quad (2.50)$$

De même, pour un champ $t \in \mathcal{T}_s^0(\mathcal{N})$ nous pouvons définir le **champ retiré** ou le **pullback** φ^*t par

$$(\varphi^*t)_p(v_1, \dots, v_s) := t_{\varphi(p)}(T_p\varphi v_1, \dots, T_p\varphi v_s). \quad (2.51)$$

Pour une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$ nous avons pour $v \in T_p\mathcal{M}$

$$(\varphi^*df)_p(v) = (df)_{\varphi(p)}(T_p\varphi v) = T_p\varphi(v)f = v(f \circ \varphi) = v(\varphi^*f) = d(\varphi^*f)(v) . \quad (2.52)$$

Donc le pullback "commute" avec d .

Définition 2.15 (métrique pseudo-riemannienne) Une **métrique pseudo-riemannienne** sur une variété différentiable est un champ tensoriel $g \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{M})$ avec les propriétés suivantes :

- $g(X, Y) = g(Y, X)$
- Pour chaque point $p \in \mathcal{M}$, g_p est une forme bilinéaire non-dégénérée⁶

Si g_p est définie positive (i.e. toutes les valeurs propres de g_p sont positives), elle est appelée **métrique riemannienne**. Le couple (\mathcal{M}, g) est une **variété (pseudo)-riemannienne**

Soit $(\theta^i)_{i=1}^m$, $m = \dim \mathcal{M}$ une base de 1-formes dans un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Dans \mathcal{U} nous avons

$$g = g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j . \quad (2.53)$$

⁶C'est-à-dire, $g_p(v_1, v_2) = 0 \forall v_2 \in T_p\mathcal{M} \Leftrightarrow v_1 = 0$.

Très souvent nous écrivons aussi

$$ds^2 = g_{ij}\theta^i\theta^j, \quad \text{où} \quad \theta^i\theta^j := \frac{1}{2}[\theta^i \otimes \theta^j + \theta^j \otimes \theta^i]. \quad (2.54)$$

Si nous désignons la base duale (θ^i) par (e_i) nous obtenons

$$g_{ij} = g(e_i, e_j). \quad (2.55)$$

Remarque 2.1 Avec la métrique g d'une variété pseudo-riemannienne, nous avons un isomorphisme entre $T_p\mathcal{M}$ et $T_p^*\mathcal{M}$ donné par

$$\flat : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p^*\mathcal{M} : X_p \mapsto g(p)(X_p, \cdot) =: X_p^\flat. \quad (2.56)$$

Comme g n'est pas dégénéré, chaque forme $\omega_p \in T_p^*\mathcal{M}$ est de la forme $\omega_p = g(p)(\omega_p^\sharp, \cdot)$, pour un certain champ vectoriel ω_p^\sharp . Alors, l'application inverse

$$\sharp : T_p^*\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M} : \omega_p \mapsto \omega_p^\sharp \quad (2.57)$$

est aussi bien définie.

Dans un système de coordonnées locales avec $g = g_{ij}dx^i dx^j$ et $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, si $X = \xi^i \partial_i$ alors $X^\flat = \xi^i g_{ij} dx^j$ et de même si $\omega = \eta_i dx^i$ alors $\omega^\sharp = \eta_i g^{ij} \partial_j$.

L'application \flat s'appelle aussi "baisser un indice", et l'application \sharp "monter un indice", d'où les signes " \flat " et " \sharp ".

Pour un champ tensoriel quelconque, par exemple $t \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{M})$ on peut aussi définir \flat et \sharp . On définit $t^\flat \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{M})$ par $t^\flat(X, Y) = t(X, Y^\flat)$. Et de façon analogue pour un champ tensoriel de type arbitraire $t \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$.

Ceci implique que dans un variété (pseudo-riemannienne) (\mathcal{M}, g) l'opération de "monter" et "baisser" les indices fournit des isomorphismes

$$\mathcal{T}^{s+r}(\mathcal{M}) \leftrightarrow \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M}) \leftrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r+1}(\mathcal{M}) \leftrightarrow \mathcal{T}_{s+1}^{r-1}(\mathcal{M}) \leftrightarrow \mathcal{T}_{s+r}(\mathcal{M}) \quad (2.58)$$

Exercice : Montrer que dans un système de coordonnées donné nous avons

$$(g)^\sharp = g^{ij} \partial_i \otimes \partial_j, \quad \text{et que} \quad (g)^\flat = \delta_i^j dx^i \otimes \partial_j \quad (2.59)$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) .

Chapitre 3

La dérivée de Lie

(voir Kobayashi et Nomizu [3], pp 26-34)

3.1 Courbes intégrales, le flot d'un champ vectoriel

Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ (c'est-à-dire \mathcal{C}^∞).

Définition 3.1 (courbe intégrale) *Un chemin différentiable $\gamma : J \rightarrow \mathcal{M}$, avec $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé tel que $0 \in J$, s'appelle **courbe intégrale** de X avec point de départ $p \in \mathcal{M}$ si*

- $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in J$
- $\gamma(0) = p$.

Proposition 3.1 *Pour chaque point $p \in \mathcal{M}$ et chaque champ vectoriel $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ donnés, il existe une courbe intégrale **maximale** unique avec point de départ p , de classe \mathcal{C}^∞ . Nous l'appelons $\Phi_p : J_p \rightarrow \mathcal{M} : t \mapsto \Phi_p(t)$. Ici $J_p \subset \mathbb{R}$ est un interval.*

Démonstration :

Dans un système de coordonnées locales, cette proposition suit du même théorème pour des systèmes d'équations différentielles ordinaires dans \mathbb{R} , et changements de coordonnées ne posent pas de difficulté.

□

Nous posons

$$\mathcal{D} := \{(t, p) \mid p \in \mathcal{M}, t \in J_p\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M} \quad (3.1)$$

et de même

$$\mathcal{D}_t := \{p \in \mathcal{M} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\} = \{p \in \mathcal{M} \mid t \in J_p\} \subset \mathcal{M}. \quad (3.2)$$

Définition 3.2 (champ vectoriel complet) *Le champ vectoriel X est appelé complet si $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$.*

Définition 3.3 (flot global) *L'application*

$$\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M} : (t, p) \mapsto \Phi(t, p)$$

est le flot global de X .

Proposition 3.2

1. $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ est ouvert et $\{0\} \times \mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ ($\Rightarrow \mathcal{D}_t$ est ouvert dans \mathcal{M})
2. $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$ est C^∞
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$\Phi_t : \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{M} : p \mapsto \Phi(t, p) = \Phi_p(t) \equiv \Phi_t(p)$$

est un difféomorphisme de \mathcal{D}_t dans \mathcal{D}_{-t} et $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$

Démonstration : simple.

Conséquence 3.3 *Pour tout $p \in \mathcal{M}$, il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ et un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{U} \ni p$, tels que $J \times \mathcal{U} \subset \mathcal{D}$.*

Définition 3.4 (flot local) *L'application*

$$\Psi := \Phi \Big|_{J \times \mathcal{U}} : J \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M} : (t, p) \mapsto \Phi(t, p)$$

s'appelle le flot local de X au point p .

Proposition 3.4 *Pour un flot local $\Psi : J \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ de X en p nous avons*

1. Pour $q \in \mathcal{U}$, $\Psi_q : J \rightarrow \mathcal{M} : t \mapsto \Psi(t, q)$ est une courbe intégrale de X avec point de départ q .
2. Pour $t \in J$, $\Psi_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M} : q \mapsto \Psi(t, q)$ est un difféomorphisme de \mathcal{U} dans $\Psi_t(\mathcal{U})$.

3. Pour $q \in \mathcal{U}$ avec $\Psi_t(q) \in \mathcal{U}$, nous avons (pour $(s, t) \in J$)

$$\Psi_{s+t}(q) = \Psi_s(\Psi_t(q)), \quad \Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t} .$$

A cause de ce troisième énoncé, on appelle souvent Ψ un **groupe de difféomorphismes locaux à un paramètre**.

Proposition 3.5 Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ complet et $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ le flot global de X . Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_t = \mathcal{M}$ et

1. $\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est un difféomorphisme
2. $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$

Démonstration :

C'est une conséquence des propositions 3.2 et 3.4.

□

La proposition 3.5 veut dire que l'application $t \mapsto \Phi_t$ est un homomorphisme du groupe additif \mathbb{R} dans $\text{diff}(\mathcal{M})$, le groupe des difféomorphismes de \mathcal{M} .

On peut démontrer que tout champ vectoriel d'une variété compacte est complet.

Pour des démonstrations explicites des propositions 3.1 à 3.5, voir par exemple Abraham & Marsden, *Foundations of classical Mechanics* [4], ou Arnold, *Ordinary Differential equations* [5], ou tout autre texte sur les systèmes dynamiques.

3.2 Applications induites sur les champs tensoriels

Proposition 3.6 Soit $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable. Le pullback (voir définition 2.14) définit une application linéaire

$$\varphi^* : \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_k^0(\mathcal{N}) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_k^0(\mathcal{M}) \quad (3.3)$$

φ^* est même un homomorphisme d'algèbres (avec le produit tensoriel).

Pour $p \in \mathcal{M}$, $t \in \mathcal{T}_k^0(\mathcal{N})$, $u_1, \dots, u_k \in T_p\mathcal{M}$, il est $(\varphi^*t)_p(u_1, \dots, u_k) := t_{\varphi(p)}(T_p\varphi u_1, \dots, T_p\varphi u_k)$.

Démonstration :

Cet énoncé est une conséquence simple de la définition du pullback.
 Pour $\omega \in \mathcal{T}_1^0(\mathcal{N}) = \mathcal{X}^*(\mathcal{N})$ nous écrivons

$$(\varphi^*\omega)_p = (T_p\varphi)^*\omega_{\varphi(p)} . \quad (3.4)$$

$(T_p\varphi)^* : T_{\varphi(p)}^*\mathcal{N} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}$ est l'application linéaire duale à $T_p\varphi : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$. Dans un système des coordonnées elle est donnée par la transposée de la jacobienne.

Définition 3.5 (champs vectoriels liés) Soit $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable. Les champs vectoriels $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ sont appelés **liés par φ** si

$$T_p\varphi X_p = Y_{\varphi(p)}, \quad \forall p \in \mathcal{M} .$$

Proposition 3.7 Soit $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$. Si X_i, Y_i sont liés par φ , $i = 1, 2$, alors le champ vectoriel $[X_1, X_2]$ est aussi lié par φ au champ $[Y_1, Y_2]$.

Démonstration : Exercice !

Proposition 3.8 Soit $t \in \mathcal{T}_k^0(\mathcal{N})$, $X_i \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, $Y_i \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$, pour $i = 1, \dots, k$, avec X_i lié par φ à Y_i . Alors

$$(\varphi^*t)(X_1, \dots, X_k)(p) = t(Y_1, \dots, Y_k)(\varphi(p)) .$$

Démonstration :

$$(\varphi^*t)(X_1, \dots, X_k) = t_{\varphi(p)}(T_p\varphi X_1(p), \dots, T_p\varphi X_k(p))$$

Comme les Y_i sont liés par φ aux X_i , ceci est égal à

$$t_{\varphi(p)}(Y_1(\varphi(p)), \dots, Y_k(\varphi(p))) = t(Y_1, \dots, Y_k)(\varphi(p)) .$$

□

Nous voulons considérer, en particulier, le cas où $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est un difféomorphisme. D'abord la remarque suivante de l'algèbre linéaire :

Remarque 3.1 Soient E et F deux espaces vectoriels réels et E_s^r, F_s^r les espaces vectoriels des tenseurs de type (r, s) sur ces espaces. Soit $A : E \rightarrow F$ un **isomorphisme**. Celui-ci induit un autre isomorphisme

$$A_s^r : E_s^r \rightarrow F_s^r$$

qui est défini comme suit :

Pour $y_1^*, \dots, y_r^* \in F^*$, $y_1, \dots, y_s \in F$ et $t \in E_s^r$ nous définissons :

$$(A_s^r t)(y_1^*, \dots, y_r^*, y_1, \dots, y_s) = t(A^* y_1^*, \dots, A^* y_r^*, A^{-1} y_1, \dots, A^{-1} y_s) \quad (3.5)$$

Il est évident que $A_0^1 \equiv A$ et $A_1^0 \equiv (A^{-1})^*$. De plus, nous posons $A_0^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto \lambda$.

Ici $A^* : F^* \rightarrow E^*$ est défini par $A^* y^*(x) = y^*(Ax)$ pour tout $x \in E$ et $y^* \in F^*$.

Définition 3.6 (push-forward et pull-back) Soit $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un difféomorphisme. Nous définissons les deux applications φ^* et φ_* (qui sont mutuellement inverses) par

$$\varphi_* : \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(\mathcal{N}) \quad (\text{push-forward})$$

$$\varphi^* : \mathcal{T}_s^r(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M}) \quad (\text{pull-back})$$

par (on note $T_s^r \varphi \equiv (T_p \varphi)_s^r$)

$$(\varphi_* t)_{\varphi(p)} = (T_p \varphi)_s^r t_p, \quad \text{pour } t \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$$

$$\text{et } (\varphi^* t)_p = (T_{\varphi(p)} \varphi^{-1})_s^r (t_{\varphi(p)}), \quad \text{pour } t \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{N}).$$

Pour $t \in \mathcal{T}_s^0(\mathcal{M})$, φ^* n'est rien d'autre que notre ancien pullback (voir définition 2.14), et le push-forward sur $\mathcal{T}_0^r(\mathcal{M})$ est bien défini aussi si φ n'est pas un difféomorphisme.

Nous considérons alors un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Si pour un champ tensoriel t , $\varphi^* t = t$, nous appelons t **invariant sous φ** .

S'il existe tout un groupe Φ_s à un paramètre tel que $\Phi_s^* t = t$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, t s'appelle **invariant sous le groupe de transformations $(\Phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$** .

Exercice : Ecrire $\varphi_* t$ et $\varphi^* w$ dans un système de coordonnées locales.

3.3 Dérivée de Lie

Définition 3.7 (dérivée de Lie) Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et soit Φ_t le flot de X . Soit $\mathcal{I}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{s,r \geq 0} \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$. Pour $T \in \mathcal{I}(\mathcal{M})$ nous définissons la **dérivée de Lie** de T par rapport à X par

$$L_X T := \left. \frac{d}{dt} \Phi_t^* T \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi_t^* T - T].$$

Théorème 3.1 $L_X : \mathcal{I}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{M})$ a les propriétés suivantes :

1. L_X est \mathbb{R} -linéaire,
2. $L_X(T \otimes S) = (L_X T) \otimes S + T \otimes (L_X S)$ (règle de Leibnitz),
3. $L_X(\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})) \subset \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$,
4. L_X permute avec la contraction¹ dénommée C ,
5. $L_X f = Xf = df(X)$ pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) = \mathcal{T}_0^0(\mathcal{M})$,
6. $L_X Y = [X, Y]$ pour $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$,
7. $L_{X+Y} = L_X + L_Y$, $L_{\lambda X} = \lambda L_X$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
8. $L_{[X, Y]} = [L_X, L_Y] := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$,
9. $L_X \circ df = d \circ L_X f$ sur les fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Démonstration : Les points 1 à 5 sont des conséquences immédiates de la définition. Pour 9 nous utilisons que

$$\frac{1}{t}(\Phi_t^* df - df) = \frac{1}{t}(d\Phi_t^* f - df) = d \left[\frac{1}{t}(\Phi_t^* f - f) \right].$$

Alors

$$L_X df = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\Phi_t^* df - df) = d \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\Phi_t^* f - f) \right] = d(Xf) = dL_X f.$$

Pour montrer l'énoncé 6 nous utilisons que $Yf = C(Y \otimes df)$:

$$\begin{aligned} X(Yf) &\stackrel{\text{def geom}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_t^*(Yf) = L_X(C(Y \otimes df)) = C(L_X Y \otimes df) + C(Y \otimes L_X df) \\ &= (L_X Y)(f) + Y(Xf) \end{aligned}$$

Alors $(L_X Y)(f) = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f$, ce qui montre 6.

7 suit facilement sur les champs vectoriels à cause de 6 et sur les fonctions à cause de 5. Avec $L_X df = d(Xf)$ il est aussi clair sur les 1-formes de la forme df . Mais comme chaque $\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ est une combinaison linéaire $\lambda_i df^i$ cela est donc vrai pour tout $\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$. A cause de 2, 7 est donc valable sur tout $\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

8 est évident sur les fonctions et c'est une conséquence de l'identité de Jacobi sur les champs vectoriels. Comme $L_X df = dL_X f$ il est alors valable sur les df et donc sur toutes les formes. De nouveau, comme $t \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$, $t = \sum X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s$ en utilisant 2 on trouve que 8 est aussi valable sur tout $\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

Finalment, pour démontrer le point 9, nous utilisons que

$$\begin{aligned} (d \circ L_X f)(Y) &= d(Xf)(Y) = Y(Xf) = X(Yf) - [X, Y]f \\ &= L_X(Yf) - L_{[X, Y]}f = L_X(df(Y)) - L_{[X, Y]}f. \end{aligned}$$

¹Soit $t \in E_s^r$, $s, r \geq 1$, $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E et $(e^{*i})_{i=1}^n$ sa base duale (i.e. $e^{*i}(e_j) = \delta_j^i$). La contraction sur les éléments 1 et $r+1$ est l'application $C : E_s^r \rightarrow E_{s-1}^{r-1}$; $t \mapsto \sum_i t(e^{*i}, \dots, e_i, \dots)$, où les \dots sont pris $r-1$ puis $s-1$ fois. Cette définition est indépendante du choix de la base (e_i) .

En plus,

$$\begin{aligned} L_X(df(Y)) &= L_X C(df \otimes Y) = C(L_X(df) \otimes Y + df \otimes L_X Y) \\ &= L_X(df)(Y) + [X, Y]f = L_X(df)(Y) + L_{[X, Y]}f . \end{aligned}$$

Alors $(d \circ L_X f)(Y) = L_X(df)(Y) = (L_X \circ df)(Y)$.

□

Comme nous l'avons utilisé dans cette démonstration, de manière générale si deux dérivations D_1, D_2 sur $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ qui commutent avec d coïncident sur les fonctions et les champs vectoriels, ils sont identiques sur tout $\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

Proposition 3.9 Soient $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et soit Φ le flot de X et Ψ celui de Y . Les énoncés suivants sont alors équivalents :

1. $[X, Y] = 0$
2. $L_X \circ L_Y = L_Y \circ L_X$
3. $\Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$ pour tout s, t tels que les deux côtés soient bien définis.

Démonstration : L'équivalence de 1 et 2 suit de l'identité 8 du théorème 3.1.

De plus, si 3 est satisfait, alors 2 suit de la définition de la dérivée de Lie 3.7.

De l'autre côté, si 3. n'est pas vrai, $\Phi_s \circ \Psi_t$ et $\Psi_t \circ \Phi_s$ sont différents pour tout $s \neq 0$ et $t \neq 0$.

Supposons qu'il existe un $0 < \epsilon$ tel que $\Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$ pour $s, t \leq \epsilon$. Alors

$$\Phi_{s+\epsilon} \circ \Psi_{t+\epsilon} = \Phi_s \circ \Phi_\epsilon \circ \Psi_\epsilon \circ \Psi_t = \Phi_s \circ \Psi_\epsilon \circ \Phi_\epsilon \circ \Psi_t = \Psi_{t+\epsilon} \circ \Phi_{s+\epsilon}$$

pour $s, t \leq \epsilon$. D'où $\Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$ pour $s, t \leq 2\epsilon$ et ainsi de suite. Finalement $\Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$ pour tout s, t tels que les deux côtés soient bien définis. Par conséquent, si 3 n'est pas satisfait, $\Phi_s \circ \Psi_t \neq \Psi_t \circ \Phi_s$ pour tout $t, s \neq 0$. Il existe alors une fonction f telle que pour tout $s, t > 0$

$$f \circ \Phi_s \circ \Psi_t \neq f \circ \Psi_t \circ \Phi_s \text{ et alors } Y(Xf) \neq X(Yf) \Leftrightarrow [X, Y]f \neq 0 . \quad (3.6)$$

□

Proposition 3.10 Soit Φ_t le flot du champ vectoriel X et $T \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$. Alors

$$\Phi_t^* T = T \text{ est équivalent à } L_X T = 0.$$

Démonstration :

- " \Rightarrow " est trivial (voir définition 3.7)
- " \Leftarrow " : pour cette direction nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Pour $T \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$, $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ avec flot Φ_s nous avons*

$$\Phi_s^*(L_X T) = \frac{d}{dt}(\Phi_t^* T) \Big|_{t=s} .$$

Preuve : Par définition

$$\begin{aligned} \Phi_s^* L_X T &= \Phi_s^* \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\Phi_\epsilon^* T - T) \right) \\ &\stackrel{\Phi_s^* \text{ continu}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\Phi_{s+\epsilon}^* T - \Phi_s^* T) = \frac{d}{dt} \Phi_t^* T \Big|_{t=s} . \end{aligned}$$

Si alors $L_X T = 0$, il suit que $\frac{d}{dt} \Phi_t^* T \Big|_{t=s} = 0$ pour tout s , et donc $\Phi_t^* T = \text{const}$ et avec $\Phi_0^* T = T$ notre assertion est démontrée.

□

Proposition 3.11 *Pour $T \in \mathcal{T}_s^0(\mathcal{M})$, $X_1, \dots, X_s, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ nous avons*

$$(L_Y T)(X_1, \dots, X_s) = Y(T(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{j=1}^s T(X_1, \dots, [Y, X_j], \dots, X_s)$$

Démonstration : Nous considérons $T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \in \mathcal{T}_s^s(\mathcal{M})$:

$$L_Y(T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s) = (L_Y T) \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s + \sum_{j=1}^s T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes \underbrace{L_Y X_j}_{[Y, X_j]} \otimes \dots \otimes X_s$$

La contraction totale sur les deux côtés donne donc

$$L_Y(T(X_1, \dots, X_s)) = (L_Y T)(X_1, \dots, X_s) + \sum_{j=1}^s T(X_1, \dots, [Y, X_j], \dots, X_s) .$$

□

Exemple 3.1 *Pour $\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$,*

$$(L_Y \omega)(X) = Y(\omega(X)) - \omega([Y, X]).$$

3.3.1 Expression de la dérivée de Lie en coordonnées locales

Nous choisissons un système de coordonnées locales (X^1, \dots, X^n) avec les bases duales $(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1}^n$ et $(dx^i)_{i=1}^n$ de $T_p\mathcal{M}$ et $T_p^*\mathcal{M}$.

D'abord nous avons² $L_X dx^i = d(L_X x^i) = d(X^j \delta_j^i) = d(X^i) = X^i_{,j} dx^j$ et $L_X \partial_i = [X, \partial_i] = -X^j_{,i} \partial_j$. Pour $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$ nous utilisons la même écriture que pour la proposition 3.11 :

$$(L_X T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = (L_X T)(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) \quad (3.7)$$

Mais cette expression est la contraction totale de

$$(L_X T) \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s}. \quad (3.8)$$

Avec

$$\begin{aligned} L_X(T \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s}) &= (L_X T) \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s} + \\ &\sum_{k=1}^r T \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes \underbrace{(L_X dx^{i_k})}_{X^{i_k}_{,l} dx^l} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s} + \sum_{k=1}^s T \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes \underbrace{(L_X \partial_{j_k})}_{-X^l_{,j_k} \partial_l} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s}. \end{aligned}$$

Nous obtenons (contraction totale)

$$\begin{aligned} L_X(T(dx^{i_1}, \dots, \partial_{j_s})) &= (L_X T)(dx^{i_1}, \dots, \partial_{j_s}) + X^l_{,l} T(dx^l, \dots, \partial_{j_s}) + \dots + \\ &+ X^l_{,l} T(dx^{i_1}, \dots, dx^l, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) - X^l_{,j_1} T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_l, \dots, \partial_{j_s}) - \dots - \\ &- X^l_{,j_s} T(dx^{i_1}, \dots, \partial_l). \end{aligned}$$

Ou, en utilisant l'éq. (3.7) :

$$(L_X T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = X^l T_{j_1 \dots j_s, l}^{i_1 \dots i_r} - X^l_{,l} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \dots - X^l_{,l} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots l} + X^l_{,j_1} T_{l, \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \dots + X^l_{,j_s} T_{j_1 \dots l}^{i_1 \dots i_r}. \quad (3.9)$$

En particulier pour $\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$:

$$(L_X \omega)_j = X^l \omega_{j, l} + X^l_{,j} \omega_l. \quad (3.10)$$

Pour plus de précision sur les chapitres 1-3 de cette première partie, voir Kobayashi-Nomizu [3], Vol I, Chap.I §1-3.

² $X^i_{,j}$ dénote $\partial_j X^i$

Chapitre 4

Connexions affines et la dérivée covariante

Dans ce chapitre nous introduisons une structure additionnelle très importante sur les variétés différentiables.

4.1 Connexions affines

Le problème que nous voulons aborder est le suivant : regardons d'abord la situation dans \mathbb{R}^n . Pour deux points $p, q \in \mathbb{R}^n$ et deux vecteurs $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ et $u_q \in T_q\mathbb{R}^n$, il y a une façon naturelle de comparer les directions v_p et u_q : nous connectons p et q par une droite et nous transportons v_p **parallèlement** le long de cette droite jusqu'à q . Ce "transport parallèle" nous définit une application de $T_p\mathbb{R}^n$ dans $T_q\mathbb{R}^n$. Dans une variété différentiable générale, cette notion de "transport parallèle" n'existe pas. C'est une structure supplémentaire, qui n'est en général pas unique, que nous définissons ici.

Définition 4.1 (connexion affine) Une **connexion affine** (linéaire) ∇ dans une variété différentiable \mathcal{M} est une application qui applique un couple de champs vectoriels $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ sur un champ vectoriel $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ tel que

1. $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ est \mathbb{R} -bilinéaire en X et en Y ;
2. pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ et $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

Lemme 4.1 Soit ∇ une connexion linéaire sur \mathcal{M} et $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ un ouvert. Soient X, Y deux champs vectoriels dont l'un s'annule sur \mathcal{U} . Alors $\nabla_X Y$ s'annule aussi sur \mathcal{U} .

Démonstration: Soit $Y|_{\mathcal{U}} = 0$. Soit $p \in \mathcal{U}$ donné et h une fonction telle que $h(p) = 0$ et $h = 1$ sur $\mathcal{M} \setminus \mathcal{U}$. Donc $hY = Y$. Alors

$$(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X(hY))_p = h(p)(\nabla_X Y)_p + X(h)(p)Y_p = 0.$$

Comme le choix de p a été arbitraire, $(\nabla_X Y)_p = 0, \forall p \in \mathcal{U}$. De la même façon on démontre l'énoncé pour $X|_{\mathcal{U}} = 0$.

□

Ainsi, une connexion affine ∇ sur \mathcal{M} induit une connexion affine $\nabla|_{\mathcal{U}}$ sur chaque sous-variété ouverte $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Soient $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$. Alors il existe $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ tels que $\tilde{X}|_{\mathcal{U}} = X$ et $\tilde{Y}|_{\mathcal{U}} = Y$ (nous ne démontrons pas ce lemme de continuation). Nous posons

$$\left(\nabla\Big|_{\mathcal{U}}\right)_X Y := (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})\Big|_{\mathcal{U}} \quad (4.1)$$

D'après le lemme 4.1 cette définition ne dépend pas du choix des continuations \tilde{Y} et \tilde{X} .

Lemme 4.2 Soit $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Si $X_p = 0$, alors aussi $(\nabla_X Y)_p = 0$.

Démonstration: Soit localement $X = \xi^i \partial_i \Rightarrow \xi^i(p) = 0$.
Mais $(\nabla_X Y)_p = \xi^i(p)(\nabla_{\partial_i} Y)_p = 0$.

□

Définition 4.2 (symboles de Christoffel) Pour une carte $(\mathcal{U}, x^1, \dots, x^m)$ donnée, nous posons

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (4.2)$$

Les m^3 symboles $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ sont les **symboles de Christoffel** de la connexion ∇ (dans la carte $(\mathcal{U}, x^1, \dots, x^m)$).

Proposition 4.1 Soit $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)$ un changement de carte dans un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Soit Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel par rapport aux coordonnées $(x^i)_{i=1}^m$ et $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ ceux par rapport aux $(\bar{x}^i)_{i=1}^m$. Alors nous avons

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \cdot \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^k}. \quad (4.3)$$

Démonstration:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^b} \right) = \bar{\Gamma}_{ab}^c \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}^c} = \bar{\Gamma}_{ab}^c \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} \frac{\partial}{\partial x^k} .$$

De l'autre côté :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} .$$

En plus

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)}_{\Gamma_{ij}^k \partial_k} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} . \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} .$$

En multipliant par $\left(\frac{\partial \bar{x}^d}{\partial x^k} \right)$, qui est l'inverse de $\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} \right)$, la proposition 4.1 est démontrée.

□

La proposition 4.1 montre que Γ_{ij}^k ne sont pas les composantes d'un tenseur ! Mais m^3 fonctions qui transforment d'après (4.3) sous chaque transformation de carte définissent une connexion ∇ sur \mathcal{M} qui satisfait (4.2).

Définition 4.3 (dérivée covariante d'un champ vectoriel) *L'application $\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_1^1(\mathcal{M}) : X \mapsto \nabla X$, avec $\nabla X(Y, \omega) := \omega(\nabla_Y X)$, est la **dérivée covariante** de X (ou le **différentiel absolu** de X).*

Pour $X = \xi^i \partial_i$ dans un système de coordonnées on nomme les composantes de ∇X par

$$\nabla X = \xi^i_{;j} dx^j \otimes \partial_i. \quad (4.4)$$

Nous avons

$$\xi^i_{;j} = \nabla X(\partial_j, dx^i) = dx^i \left(\underbrace{\nabla_{\partial_j}(\xi^k \partial_k)}_{\xi^k_{;j} \partial_k + \xi^k \nabla_{\partial_j} \partial_k} \right) = dx^i (\xi^k_{;j} \partial_k + \xi^k \Gamma_{jk}^l \partial_l) = \xi^i_{;j} + \Gamma_{jk}^i \xi^k .$$

Alors

$$\xi^i_{;j} = \xi^i_{;j} + \Gamma_{jk}^i \xi^k. \quad (4.5)$$

Il est facile à voir que les $\xi^i_{;j}$ ne transforment pas comme un tenseur tandis qu'il suit de la définition de ∇X que les $\xi^i_{;j}$ sont les composantes du tenseur $\nabla X \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{M})$.

4.2 Le transport parallèle le long d'une courbe

Définition 4.4 (champ vectoriel autoparallèle) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M} : t \mapsto \gamma(t)$ un chemin.

Le champ vectoriel $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ est appelé **autoparallèle** le long de γ si $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$ (au lieu de $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ on écrit parfois $\frac{DX}{dt}$).

Le champ vectoriel $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ est appelé la **dérivée covariante** de X le long de γ .

Dans un système de coordonnées donné avec $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $\dot{\gamma} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$ nous avons

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \left(\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \xi^k \frac{dx^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (4.6)$$

Ce qui montre que $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ ne dépend des valeurs de X que le long de γ .
 X est alors autoparallèle le long de γ si

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \xi^k = 0 . \quad (4.7)$$

Pour une courbe γ donnée et $X_0 \in T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$ il existe alors un champ $X(t)$ unique avec $X(0) = X_0$ qui est autoparallèle le long de γ , la solution de (4.7) avec condition initiale $\xi^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} = X_0$.

Comme l'équation pour $X(t)$ est linéaire, $X(t)$ est bien défini pour tout $t \in I$.
 Pour deux points sur γ , $\gamma(t)$ et $\gamma(s)$, il existe alors un isomorphisme (linéaire)

$$\mathcal{T}_{t,s} : T_{\gamma(s)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma(t)}\mathcal{M} : v \mapsto \mathcal{T}_{t,s}v \quad (4.8)$$

qui applique un vecteur $v \in T_{\gamma(s)}\mathcal{M}$ dans le vecteur parallèlement transporté $\mathcal{T}_{t,s}v \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$.

Définition 4.5 (transport parallèle) L'application $\mathcal{T}_{t,s}$ est le **transport parallèle** le long de γ , de $\gamma(s)$ à $\gamma(t)$.

Le fait que la solution de l'équation (4.7) pour des conditions initiales données est unique implique que

$$\mathcal{T}_{t,s} \circ \mathcal{T}_{s,r} = \mathcal{T}_{t,r} . \quad (4.9)$$

Clairement, $\mathcal{T}_{t,t} = 1$.

Proposition 4.2 Soit X un champ vectoriel le long de γ . Alors nous avons

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X(\gamma(t)) = \frac{d}{ds} \mathcal{T}_{t,s} X(\gamma(s)) \Big|_{s=t} . \quad (4.10)$$

Démonstration: Pour $v_0 \in T_{\gamma(s)}\mathcal{M}$ et $v(t) = \mathcal{T}_{t,s}v_0 \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ nous avons

$$\dot{v}^i + \Gamma_{kj}^i \dot{x}^k v^j = 0.$$

Comme $v^i(t) = (\mathcal{T}_{t,s}v_0)^i = (\mathcal{T}_{t,s})^i_j v_0^j$, nous avons

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{T}_{t,s})^i_j \Big|_{t=s} = -\Gamma_{kj}^i \dot{x}^k$$

Avec $\mathcal{T}_{s,t} = \mathcal{T}_{t,s}^{-1}$ et $\mathcal{T}_{s,s} = \mathbb{1}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{T}_{t,s} X(\dot{\gamma}(s)) \Big|_{s=t} \right)^i &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} (\mathcal{T}_{s,t}^{-1} X(\dot{\gamma}(s)))^i = -\frac{d}{ds} (\mathcal{T}_{s,t})^i_j X^j(\dot{\gamma}(s)) + \frac{d}{ds} X^i(\dot{\gamma}(s)) \\ &= \Gamma_{kj}^i X^j(\dot{\gamma}(s)) + X^i_{,k} \dot{x}^k = (\nabla_{\dot{\gamma}} X)^i(\dot{\gamma}(s)). \end{aligned}$$

□

4.3 Géodésiques, application exponentielle, coordonnées normales

Définition 4.6 (géodésique) Une courbe γ est appelée une géodésique, si $\dot{\gamma}$ est autoparallèle le long de γ , i.e.

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Dans un système de coordonnées, $\gamma(t) = (x^i(t))_{i=1}^m$, cette condition s'exprime

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad (4.11)$$

Remarque 4.1

- D'après le théorème de l'existence d'une solution unique maximale des équations différentielles ordinaires, il existe une géodésique maximale unique pour des valeurs initiales $\gamma(0)$ et $\dot{\gamma}(0)$ données.
- Si $\gamma(t)$ est une géodésique, alors $\gamma(at)$, $a \in \mathbb{R}$, est aussi une géodésique à vitesse initiales $a\dot{\gamma}(0)$.

Pour $a \in \mathbb{R}_+$ suffisamment petit, $\gamma(at)$ est bien défini dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$. Pour $p \in \mathcal{M}$, il existe alors un voisinage $V \subset T_p\mathcal{M}$ du point zéro, $0 \in T_p\mathcal{M}$ tel que la géodésique $\gamma_v(1)$ avec conditions initiales $\gamma_v(0) = p$ et $\dot{\gamma}_v(0) = v$ soit bien définie

pour $v \in V$.

Nous posons

$$\exp_p(v) := \gamma_v(1). \quad (4.12)$$

Comme $\gamma_v(t)$ dépend des conditions initiales de façon différentiable, l'application \exp_p est différentiable.

De $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$ il suit pour $s = 1$ que

$$\exp_p(tv) = \gamma_v(t), \quad (4.13)$$

et alors

$$(T \exp_p(0)) v = \left. \frac{d}{dt} \exp_p(tv) \right|_{t=0} = \dot{\gamma}_v(0) = v,$$

et donc $T \exp_p(0) = \mathbb{1}$.

Nous avons donc démontré l'énoncé suivant :

Théorème 4.1 *L'application \exp_p est un difféomorphisme d'un voisinage de $0 \in T_p\mathcal{M}$ dans un voisinage du point $p \in \mathcal{M}$.*

Ce théorème mène à la définition des coordonnées normales :

Définition 4.7 (coordonnées normales) *Soit e_1, \dots, e_n une base de $T_p\mathcal{M}$. Pour un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, la carte $h : \exp_p(x^i e_i) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ est bien définie et elle applique un voisinage du point $p \in \mathcal{M}$ dans U .*

*Les coordonnées (x^1, \dots, x^n) sont appelées les **coordonnées normales** ou **coordonnées gaussiennes** autour du point p .*

Proposition 4.3 *Dans un système de coordonnées gaussiennes, $\Gamma_{ij}^k(0) + \Gamma_{ji}^k(0) = 0$.*

Démonstration: Pour t suffisamment petit, le point $\exp_x(tv)$ a les coordonnées normales $x^i = v^i t$, $v = v^i e_i$. Mais $\exp_x(tv) = \gamma_v(t)$ est la géodésique à vitesse initiale v , et alors

$$0 = \Gamma_{jk}^i(tv^1, \dots, tv^m) v^j v^k.$$

A $t = 0$, cela donne $0 = \Gamma_{jk}^i(0) v^j v^k$ pour tout choix de (v^1, \dots, v^m) , ce qui démontre 4.3.

□

Pour une connexion symétrique, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, nous avons alors $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$. Des coordonnées normales appliquent les géodésiques sur des droites.

4.4 La dérivée covariante des champs tensoriels

Nous définissons d'abord le transport parallèle pour des champs tensoriels

Définition 4.8 (transport parallèle) *Pour une courbe $\gamma(s)$ donnée, soit $\alpha \in T_{\gamma(s)}^* \mathcal{M}$. Nous définissons $\mathcal{T}_{t,s} \alpha \in T_{\gamma(t)}^* \mathcal{M}$ par*

$$\mathcal{T}_{t,s} \alpha(\mathcal{T}_{t,s} v) = \alpha(v) \quad (4.14)$$

pour tout $v \in T_{\gamma(s)} \mathcal{M}$. Comme $\mathcal{T}_{t,s} : T_{\gamma(s)} \mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma(t)} \mathcal{M}$ est un isomorphisme, ceci définit $\mathcal{T}_{t,s} \alpha$ de manière unique : pour $w \in T_{\gamma(t)} \mathcal{M}$,

$$(\mathcal{T}_{t,s} \alpha)(w) = \alpha(\mathcal{T}_{t,s}^{-1} w). \quad (4.15)$$

Pour un tenseur $T \in (T_{\gamma(s)} \mathcal{M})_j^i$ nous définissons le transport parallèle de T , $\mathcal{T}_{t,s} T \in (T_{\gamma(t)} \mathcal{M})_j^i$ par

$$(\mathcal{T}_{t,s} T)(v_1, \dots, v_j, \alpha_1, \dots, \alpha_i) = T(\mathcal{T}_{t,s}^{-1} v_1, \dots, \mathcal{T}_{t,s}^{-1} \alpha_i) \quad (4.16)$$

pour $\alpha_l \in T_{\gamma(t)}^ \mathcal{M}$, $v_n \in T_{\gamma(t)} \mathcal{M}$, $1 \leq l \leq i$, $1 \leq n \leq j$.*

Définition 4.9 *Soit X un champ vectoriel avec courbe intégrale $\gamma(t)$, $\gamma(0) = p$. Pour un champ tensoriel $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$, nous posons*

$$(\nabla_X T)_p = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{T}_t^{-1} T_{\gamma(t)} \right|_{t=0} \quad \text{où } \mathcal{T}_t \equiv \mathcal{T}_{t,0}, \mathcal{T}_t^{-1} \equiv \mathcal{T}_{0,t}. \quad (4.17)$$

$(\nabla_X T)_p \in (T_p \mathcal{M})_s^r$ est la **dérivée covariante** de T en direction de X , au point p .

Cette définition généralise la définition 4.3 de la dérivée covariante d'un champ vectoriel, voir aussi la proposition 4.2.

Si $X(p) = 0$ nous avons $(\nabla_X T)_p = 0$.

Pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, nous définissons $\nabla_X f = Xf$.

Proposition 4.4 ∇_X définit une dérivation sur l'algèbre des champs tensoriels, $\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

Démonstration: La linéarité suit clairement de la définition (\mathcal{T}_t est une application linéaire).

Il faut encore démontrer que ∇_X satisfait la règle de Leibniz 2.7 : d'après la définition,

$$\mathcal{T}_t(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{T}_t T_1) \otimes (\mathcal{T}_t T_2).$$

Donc

$$\begin{aligned} \nabla_X(T_1 \otimes T_2)_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathcal{T}_t^{-1} T_1_{\gamma(t)} \otimes \mathcal{T}_t^{-1} T_2_{\gamma(t)}) \\ &= (\nabla_X T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes \nabla_X T_2)_p. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.5 ∇_X commute avec les contractions.

Démonstration: Nous considérons le cas spécial $T = Y \otimes \omega \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{M})$, pour $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et $\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$. Le cas général est tout à fait analogue, mais il donne un peu plus à écrire. Soit C la contraction. Nous avons alors

$$\begin{aligned} C\mathcal{T}_s^{-1}(Y \otimes \omega)_{\gamma(s)} &= C((\mathcal{T}_s^{-1}Y_{\gamma(s)}) \otimes (\mathcal{T}_s^{-1}\omega_{\gamma(s)})) = \mathcal{T}_s^{-1}\omega_{\gamma(s)}(\mathcal{T}_s^{-1}Y_{\gamma(s)}) \\ &= \omega_p(Y_p) = C(\omega_p \otimes Y_p) = \mathcal{T}_s^{-1}(C(\omega_{\gamma(s)} \otimes Y_{\gamma(s)})). \end{aligned}$$

Et comme C est linéaire,

$$\begin{aligned} \nabla_X C(Y \otimes \omega) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} C(Y_{\gamma(s)} \otimes \omega_{\gamma(s)}) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [C(Y_{\gamma(s)} \otimes \omega_{\gamma(s)}) - C(Y_p \otimes \omega_p)] \\ &= C \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \mathcal{T}_s^{-1}(Y \otimes \omega)_{\gamma(s)} - (Y \otimes \omega)_p \right] = C(\nabla_X(Y \otimes \omega)) \end{aligned}$$

□

Conséquence 4.6 $\nabla_X(Y \otimes \omega) = (\nabla_X Y) \otimes \omega + Y \otimes \nabla_X \omega$ implique après contraction

$$\underbrace{\nabla_X(\omega(Y))}_{X(\omega(Y))} = \omega(\nabla_X Y) + (\nabla_X \omega)(Y)$$

Et nous avons donc

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \quad (4.18)$$

cette équation détermine la dérivée covariante d'une 1-forme. L'équation (4.18) implique que $\nabla_X \omega$ est $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -linéaire en X . Comme ceci est aussi le cas pour la dérivée covariante d'un champ vectoriel, ∇_X est $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -linéaire sur tout $T\mathcal{M}$: pour $T \in T\mathcal{M}$,

$$\nabla_{fX} T = f \nabla_X T, \quad \text{pour } f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}). \quad (4.19)$$

Définition 4.10 (dérivée covariante d'un champ tensoriel) *Nous posons*

$$\nabla : \mathcal{T}_r^s(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_{r+1}^s(\mathcal{M}) : T \mapsto \nabla T$$

où ∇T est défini par

$$(\nabla T)(X_1, \dots, X_{r+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_s) := \nabla_{X_{r+1}} T(X_1, \dots, X_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

où $X_i \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, $\alpha_j \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$.

∇T est appelé la **dérivée covariante** de T .

En appliquant la règle de Leibniz et la commutation avec la contraction, nous obtenons pour $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} \nabla_X [T(Y_1, \dots, Y_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s)] &= \nabla_X [C(T \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_r \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s)] \\ &= C(\nabla_X T \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s) + C(T \otimes \nabla_X Y_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s) + \dots + C(T \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes \nabla_X \alpha_s) \\ &= (\nabla_X T)(Y_1, \dots, \alpha_s) + T(\nabla_X Y_1, \dots, \alpha_s) + \dots + T(Y_1, \dots, \nabla_X \alpha_s); \end{aligned}$$

Et alors

$$(\nabla_X T)(Y_1, \dots, \alpha_s) = X(T(Y_1, \dots, \alpha_s)) - T(\nabla_X Y_1, \dots, \alpha_s) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_X \alpha_s). \quad (4.20)$$

Ceci nous permet de donner une expression explicite pour la dérivée covariante dans une carte $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ avec un système de coordonnées (x^1, \dots, x^m) .

Soit $X = \xi^i \partial_i$ et soit Γ_{lm}^i les symboles de Christoffel dans la carte $(\mathcal{U}, x^1, \dots, x^m)$.

Donc

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^l \partial_l \quad (4.21)$$

et $\nabla_X \partial_j = \xi^i \Gamma_{ij}^l \partial_l$. Comme $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$, nous avons

$$(\nabla_X dx^i)(\partial_j) = 0 - \xi^k \Gamma_{kj}^l dx^i(\partial_l) = -\xi^k \Gamma_{kj}^i.$$

Alors

$$\nabla_X dx^i = -\xi^k \Gamma_{kj}^i dx^j; \quad \nabla_{\partial_k} dx^i = -\Gamma_{kj}^i dx^j \quad (4.22)$$

dans la représentation

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r},$$

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_r}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_s})$$

Nous posons

$$T_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r} := (\nabla_{\partial_k} T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \nabla T(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}, \partial_k, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}).$$

L'équation (4.20) avec les équation (4.21) et (4.22) donne

$$T_{j_1 \dots j_s ; k}^{i_1 \dots i_r} = T_{j_1 \dots j_s , k}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{m=1}^r \Gamma_{kl}^{i_m} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots l \dots i_r} - \sum_{m=1}^s \Gamma_{k j_m}^l T_{j_1 \dots l \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \quad (4.23)$$

où le l dans les indices est pris à la m -ième place.

En particulier pour des champs vectoriels contravariants et covariants :

$$X = \xi^i \partial_i \quad \nabla X = \xi^i_{;k} \partial_i \otimes dx^k, \quad \xi^i_{;k} = \xi^i_{,k} + \Gamma_{kl}^i \xi^l \quad (4.24)$$

$$\text{et } \omega = \eta_j dx^j \quad \nabla \omega = \eta_{j;k} dx^j \otimes dx^k, \quad \eta_{j;k} = \eta_{j,k} - \Gamma_{kj}^l \eta_l. \quad (4.25)$$

En plus

$$\delta^i_{j;k} = \Gamma_{kl}^i \delta^l_j - \Gamma_{kj}^l \delta^i_l = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{kj}^i = 0.$$

4.5 Courbure et torsion d'une connexion affine ; les identités de Bianchi

Définition 4.11 (torsion, courbure) Soit ∇ une connexion sur \mathcal{M} . La torsion de ∇ est l'application bilinéaire

$$T : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M}) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] =: T(X, Y)$$

La courbure de ∇ est l'application trilinéaire

$$R : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M}) : R(X, Y)Z := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

Clairement $T(X, Y) = -T(Y, X)$ et $R(X, Y) = -R(Y, X)$ ($R(X, Y) \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{M})$). Pour $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned} T(fX, gY) &= \nabla_{fX} gY - \nabla_{gY} fX - [fX, gY] = fg \nabla_X Y + fX(g)Y \\ &\quad - gf \nabla_Y X - gY(f)X - fg[X, Y] - fX(g)Y + gY(f)X = fgT(X, Y) \end{aligned}$$

De même (un peu plus long) :

$$R(fX, gY)hZ = fghR(X, Y)Z \quad \text{pour } f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

L'application

$$\mathcal{X}^*(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}) : (\omega, X, Y) \mapsto \omega(T(X, Y)) \quad (4.26)$$

est un champ tensoriel $\in \mathcal{T}_2^1(\mathcal{M})$, le **tenseur de torsion**. De même l'application

$$(\omega, X, Y, Z) \mapsto \omega(R(X, Y)Z)$$

est un champ tensoriel $\in \mathcal{T}_3^1(\mathcal{M})$. Ce **tenseur de courbure** est d'une importance fondamentale en relativité générale, comme nous le verrons.

Dans un système de coordonnées donné, les composantes du tenseur de torsion sont¹

$$\begin{aligned} T_{ij}^k &= dx^k(T(\partial_i, \partial_j)) = dx^k(\nabla_i \partial_j - \nabla_j \partial_i - \underbrace{[\partial_i, \partial_j]}_0) \\ &= dx^k(\underbrace{\nabla_i \partial_j}_{\Gamma_{ij}^l \partial_l} - \underbrace{\nabla_j \partial_i}_{\Gamma_{ji}^l \partial_l}) = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k. \end{aligned}$$

Et donc

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k. \quad (4.27)$$

Si la torsion est nulle, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ dans chaque carte. Une telle connexion est appelée **symétrique**. Pour une connexion symétrique $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ dans un système de coordonnées normales (voir définition 4.7).

Cette remarque est très importante pour la formulation du principe d'équivalence en relativité générale.

Pour les composantes du tenseur de courbure nous obtenons

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i &= dx^i(R(\partial_k, \partial_l)\partial_j) = dx^i(\nabla_k \nabla_l \partial_j - \nabla_l \nabla_k \partial_j) \\ &= dx^i(\nabla_k(\Gamma_{lj}^n \partial_n) - \nabla_l(\Gamma_{kj}^n \partial_n)) \\ &= dx^i(\Gamma_{lj, k}^n \partial_n - \Gamma_{kj, l}^n \partial_n + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{kn}^i \partial_m - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{ln}^i \partial_m). \end{aligned}$$

Alors

$$R_{ijkl}^i = \Gamma_{lj, k}^i - \Gamma_{kj, l}^i + \Gamma_{lj}^n \Gamma_{kn}^i - \Gamma_{kj}^n \Gamma_{ln}^i. \quad (4.28)$$

Définition 4.12 (tenseur de Ricci) *Le tenseur de Ricci est la contraction du tenseur de courbure.*

$$R_{jl} = R_{jil}^i = \Gamma_{lj, i}^i - \Gamma_{ij, l}^i + \Gamma_{lj}^n \Gamma_{in}^i - \Gamma_{ij}^n \Gamma_{ln}^i. \quad (4.29)$$

Remarque 4.2 *Pour la définition des tenseurs de torsion et de courbure nous avons utilisé qu'une application $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -multilinéaire*

$$K : \underbrace{\mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathcal{X}(\mathcal{M})}_{p \text{ fois}} \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

peut être interprétée comme un champ tensoriel $\in \mathcal{T}_p^1(\mathcal{M})$ en posant

$$\tilde{K}(\omega, X_1, \dots, X_p) := \omega(K(X_1, \dots, X_p)).$$

¹ $\nabla_i \equiv \nabla_{\partial_i}$

Nous définissons $\nabla_Y K$ par cette identification :

$$(\nabla_Y \tilde{K})(\omega, X_1, \dots, X_p) =: \omega((\nabla_Y K)(X_1, \dots, X_p)).$$

Mais

$$\begin{aligned} (\nabla_Y \tilde{K})(\omega, X_1, \dots, X_p) &= Y(\tilde{K}(\omega, X_1, \dots, X_p)) - \tilde{K}((\nabla_Y \omega), X_1, \dots, X_p) - \\ &\quad \tilde{K}(\omega, (\nabla_Y X_1), \dots, X_p) - \dots - \tilde{K}(\omega, X_1, \dots, (\nabla_Y X_p)) \\ &= Y(\omega(K(X_1, \dots, X_p))) - \underbrace{(\nabla_Y \omega)(K(X_1, \dots, X_p))}_{Y(\omega(K(X_1, \dots, X_p))) - \omega(\nabla_Y(K(X_1, \dots, X_p)))} - \omega(K(\nabla_Y X_1, \dots, X_p)) \\ &\quad - \dots - \omega(K(X_1, \dots, \nabla_Y X_p)) . \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} (\nabla_Y K)(X_1, \dots, X_p) &= \nabla_Y(K(X_1, \dots, X_p)) - \\ &\quad K(\nabla_Y X_1, \dots, X_p) - \dots - K(X_1, \dots, \nabla_Y X_p) . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Théorème 4.2 Soient T et R la torsion et la courbure d'une connexion affine sur \mathcal{M} . Pour des champs vectoriels X, Y, Z nous avons

$$1. \quad \sum_{\substack{\text{cyclique} \\ \text{en } X, Y, Z}} R(X, Y)Z = \sum_{\text{cyclique}} [T(T(X, Y), Z) + (\nabla_X T)(Y, Z)] . \quad (4.31)$$

(1ère identité de Bianchi).

$$2. \quad \sum_{\text{cyclique}} [(\nabla_X R)(Y, Z) + R(T(X, Y), Z)] = 0 \quad (4.32)$$

(2ème identité de Bianchi).

Démonstration: Nous démontrons le théorème pour le cas d'une connexion symétrique, c'est-à-dire $T(X, Y) = 0$. C'est le cas relevant pour la relativité générale. La démonstration pour $T \neq 0$ est un exercice pour les étudiants intéressés. Supposons alors que $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$. Nous voulons démontrer que le côté gauche de (4.31) s'annule.

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyclique}} R(X, Y)Z &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)Z + (\nabla_Z \nabla_X - \nabla_X \nabla_Z)Y \\ &\quad + (\nabla_Y \nabla_Z - \nabla_Z \nabla_Y)X - \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_{[Z, X]}Y - \nabla_{[Y, Z]}X \\ &= \nabla_X[Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]}X + \text{cyclique} \end{aligned}$$

$$= [X, [Y, Z]] + \text{cyclique} \stackrel{\text{Jacobi}}{=} 0 . \quad (4.33)$$

Ceci montre (4.31). Pour le deuxième et le troisième signe d'égalité nous avons utilisé la symétrie de la connexion. Pour la deuxième identité, toujours avec torsion nulle, nous appliquons l'équation (4.30) :

$$(\nabla_X R)(Y, Z) = \nabla_X(R(Y, Z)) - \underbrace{R(\nabla_X Y, Z)}_{(1)} - \underbrace{R(Y, \nabla_X Z)}_{(2)} - R(Y, Z)\nabla_X$$

La somme cyclique de (1) et (2) donne

$$R(\nabla_X Y, Z) + R(Y, \nabla_X Z) + R(\nabla_Z X, Y) + R(Z, \nabla_Y X) + R(\nabla_Y Z, X) + R(X, \nabla_Z Y) .$$

Avec l'antisymétrie de R ceci donne

$$R(\nabla_X Y, Z) - R(\nabla_Y X, Z) + \text{cyclique} \\ \stackrel{\text{symetrie}}{=} R([X, Y], Z) + \text{cyclique} .$$

Alors

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z) + \text{cyclique} &= \nabla_X(R(Y, Z)) - R([X, Y], Z) - R(Y, Z)\nabla_X + \text{cyclique} \\ &= \nabla_X(\underbrace{\nabla_Y \nabla_Z}_{--} - \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y}_{\dots} - \nabla_{[Y, Z]}) - \nabla_{[X, Y]}\nabla_Z + \nabla_Z \nabla_{[X, Y]} - \nabla_{[[X, Y], Z]} - \underbrace{(\nabla_Y \nabla_Z)}_{--} \\ &\quad - \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y}_{\dots} - \nabla_{[Y, Z]})\nabla_X + \text{cyclique} . \end{aligned}$$

La somme cyclique du terme $\nabla_{[[X, Y], Z]}$ s'annule à cause de l'identité de Jacobi. Les sommes cycliques des terme \dots et $--$ s'annulent aussi. Il reste donc

$$= -\underline{\nabla_X \nabla_{[Y, Z]}} - \overline{\nabla_{[X, Y]} \nabla_Z} + \underline{\nabla_Z \nabla_{[X, Y]}} + \overline{\nabla_{[Y, Z]} \nabla_X} + \text{cyclique} .$$

La somme cyclique des termes $\underline{\quad}$ et $\overline{\quad}$ s'annule aussi, et donc (4.32) est démontrée.

□

Chapitre 5

La connexion (pseudo-)riemannienne

Définition 5.1 (connexion métrique) Soit (\mathcal{M}, g) une variété pseudo-riemannienne. Une connexion affine sur \mathcal{M} est appelée **métrique** si le transport parallèle le long de toute courbe lisse $\gamma(t)$ conserve le produit scalaire. C'est-à-dire pour $X_0, Y_0 \in T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$ et $X(t), Y(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ les vecteurs parallèlement transportés le long de γ , avec $X(0) = X_0$ et $Y(0) = Y_0$, il est

$$g_{\gamma(t)}(X(t), Y(t)) = g_{\gamma(0)}(X_0, Y_0) . \quad (5.1)$$

Proposition 5.1 Une connexion affine est métrique si et seulement si $\nabla g = 0$.

Démonstration: Pour tout γ, X, Y comme dans la définition 5.1, ∇ est métrique si et seulement si

$$\frac{d}{dt}(g_{\gamma(t)}(\mathcal{T}_{t,0}X_0, \mathcal{T}_{t,0}Y_0)) = 0.$$

Mais d'après la définition 4.9 et l'équation (4.16), ceci implique

$$\nabla_{\dot{\gamma}}g(X_0, Y_0) = 0$$

pour tout $X_0, Y_0 \in T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$. Comme la courbe γ , et donc le point $\gamma(0)$ et le vecteur $\dot{\gamma}(0)$ ainsi que les vecteurs X_0 et Y_0 sont arbitraires, ceci démontre la proposition. □

Remarque 5.1 D'après (4.20), $\nabla g = 0$ est équivalent à

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (5.2)$$

pour des champs vectoriels X, Y et Z quelconques. L'équation (5.2) est l'**identité de Ricci**.

Théorème 5.1 *Sur une variété pseudo-riemannienne il existe une unique connexion affine qui a les deux propriétés suivantes :*

- ∇ est métrique,
- la torsion $T = 0$ (∇ est symétrique).

Démonstration:

1. Unicité : $T = 0$, donc $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$. Avec cela, l'identité de Ricci donne

$$a) \quad X(g(Y, Z)) = g(\nabla_Y X, Z) + g([X, Y], Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

La permutation cyclique de X, Y et Z dans a) donne

$$b) \quad Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Z Y, X) + g([Y, Z], X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

$$c) \quad Z(g(X, Y)) = g(\nabla_X Z, Y) + g([Z, X], Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

La somme $b) + c) - a)$ donne

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Z Y, X) &= Y(g(Z, X)) + Z(g(X, Y)) - X(g(Y, Z)) - g([Z, X], Y) \\ &\quad - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Le côté droit ne dépend pas de la connexion ∇ . Comme g n'est pas dégénérée, cela démontre l'unicité.

2. Existence : pour Y et Z donnés, nous définissons l'application

$$\omega : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}) : X \mapsto \frac{1}{2} [\text{côté droit de (5.3)}].$$

ω est clairement \mathbb{R} -linéaire.

Un petit calcul montre aussi que $\omega(fX) = f\omega(X)$ pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Comme g n'est pas dégénérée, il existe un champ vectoriel $\nabla_Z Y$ unique tel que

$$\omega(X) = g(\nabla_Z Y, X)$$

Nous montrons que l'application

$$\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M}) : (Z, Y) \mapsto \nabla_Z Y$$

est une connexion affine :

La \mathbb{R} -linéarité en Y et en Z est évidente.

$\nabla_{fZ} Y = f\nabla_Z Y$ suit d'un petit calcul explicite.

Nous vérifions la règle de Leibniz (pour $g(X, Y)$ nous écrivons $\langle X, Y \rangle$) :

$$2\langle \nabla_Z fY, X \rangle = -X\langle fY, Z \rangle + fY\langle X, Z \rangle + Z\langle X, fY \rangle - \langle [Z, X], fY \rangle$$

$$\begin{aligned}
& -\langle [fY, Z], X \rangle + \langle [X, fY], Z \rangle \\
& = 2\langle f\nabla_Z Y, X \rangle - (Xf)\langle Y, Z \rangle + (Zf)\langle X, Y \rangle + (Zf)\langle Y, X \rangle + Xf\langle Y, Z \rangle \\
& = 2f \cdot \nabla_Z Y + \langle (Zf)Y, X \rangle.
\end{aligned}$$

Alors

$$\nabla_Z fY = f\nabla_Z Y + (Zf)Y.$$

□

Définition 5.2 (connexion riemannienne) *La connexion unique du théorème 5.1 est la connexion riemannienne ou connexion de Levi-Civita sur (\mathcal{M}, g) .*

Expression en coordonnées locales :

Pour un système de coordonnées donné nous posons $X = \partial_k$, $Y = \partial_j$, $Z = \partial_i$, $g(\partial_l, \partial_m) = g_{lm}$ et $(g^{lm}) = (g_{lm})^{-1}$.

Comme $[\partial_i, \partial_j] = 0$, l'équation (5.3) implique

$$2\langle \nabla_i \partial_j, \partial_k \rangle = \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}.$$

Avec $\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^l \partial_l$ il suit que

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} [g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}]. \quad (5.4)$$

Proposition 5.2 *La courbure de la connexion riemannienne satisfait les symétries additionnelles suivantes :*

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Z, U \rangle & = -\langle R(X, Y)U, Z \rangle \\
\langle R(X, Y)Z, U \rangle & = \langle R(Z, U)X, Y \rangle.
\end{aligned} \quad (5.5)$$

Démonstration: Il suffit de montrer les équations (5.5) pour des champs vectoriels à crochet de Lie nul, par exemple des champs de base ∂_j dans un système de coordonnées locales.

Pour la première des équations (5.5), il suffit de la montrer pour $U = Z$, c'est-à-dire

$$\langle R(X, Y)W, W \rangle = 0.$$

Cette équation pour $W_1 = Z + U$ et $W_2 = Z - U$ implique notre énoncé, comme

$$2[\langle R(X, Y)Z, U \rangle + \langle R(X, Y)U, Z \rangle] = \langle R(X, Y)W_1, W_1 \rangle - \langle R(X, Y)W_2, W_2 \rangle.$$

Pour la connexion riemannienne et des champs X , Y et Z ,

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle = X\langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle \quad \text{et} \quad \langle \nabla_Y Z, Z \rangle = \frac{1}{2} Y\langle Z, Z \rangle.$$

Il suit alors de la définition de la courbure ($[X, Y] = 0$) :

$$2\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = XY\langle Z, Z \rangle - YX\langle Z, Z \rangle = [X, Y]\langle Z, Z \rangle = 0.$$

Pour la deuxième des équations (5.5) nous utilisons la première identité de Bianchi (4.31), pour $T = 0$. C'est-à-dire

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle \stackrel{(5.5)\#1}{=} -\langle R(X, Y)U, Z \rangle \stackrel{(4.31)}{=} \langle R(U, X)Y, Z \rangle + \langle R(Y, U)X, Z \rangle,$$

et par la définition de la courbure 4.11 :

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle \stackrel{4.11}{=} -\langle R(Y, X)Z, U \rangle \stackrel{(4.31)}{=} \langle R(Z, Y)X, U \rangle + \langle R(X, Z)Y, U \rangle.$$

La somme donne

$$2\langle R(X, Y)Z, U \rangle = \langle R(X, Z)Y, U \rangle + \langle R(Z, Y)X, U \rangle + \langle R(Y, U)X, Z \rangle + \langle R(U, X)Y, Z \rangle$$

En échangeant ici X, Y avec Z, U nous arrivons à

$$2\langle R(Z, U)X, Y \rangle = \langle R(Z, X)U, Y \rangle + \langle R(X, U)Z, Y \rangle + \langle R(U, Y)Z, X \rangle + \langle R(Y, Z)U, X \rangle$$

Avec $R(X, Y) = -R(Y, X)$ et (5.5)#1, on voit que les côtés droits de ces deux équations sont identiques, alors $\langle R(X, Y)Z, U \rangle = \langle R(Z, U)X, Y \rangle$.

□

Nous dérivons l'expression pour le tenseur de Riemann en coordonnées :

La métricité implique

$$\nabla_k g_{ij} \equiv g_{ij;k} = 0. \quad (5.6)$$

Comme $g_{il}g^{lj} = \delta_i^j$ et $\delta_i^j{}_{;k} = 0$, il suit que aussi

$$g^{ij}{}_{;k} = 0. \quad (5.7)$$

Nous définissons les composantes du tenseur de Riemann dans un système de coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) par

$$R_{jkl}^i := dx^i(R(\partial_k, \partial_l)\partial_j) \quad \text{et donc} \quad (5.8)$$

$$R_{ijkl} := \langle \partial_i, R(\partial_k, \partial_l)\partial_j \rangle. \quad (5.9)$$

Si $\sum_{(ijk)}$ est la somme cyclique des indices i, j et k , les identités de Bianchi pour torsion $T \equiv 0$ s'expriment comme :

$$\sum_{(jkl)} R_{jkl}^i = 0 \quad (\text{1ère identité de Bianchi}), \quad (5.10)$$

$$\sum_{(klm)} R_{jkl}^i{}_{;m} = 0 \quad (\text{2ème identité de Bianchi}). \quad (5.11)$$

Les équations (5.5) donnent

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \quad \text{et} \quad R_{ijkl} = R_{klij} \quad (5.12)$$

De plus, on a l'antisymétrie dans les deux premiers arguments (qui suit aussi de (5.12)) :

$$R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i. \quad (5.13)$$

L'identité de Bianchi contractée :

Soit R_{ik} le tenseur de Ricci donné dans (4.12)

$$R_{ik} = R_{ijk}^j. \quad (5.14)$$

Définition 5.3 (scalaire de Riemann) *Le scalaire de Riemann R est défini par*

$$R = g^{ik} R_{ik} = R^k_k \quad (5.15)$$

est le scalaire de Riemann.

Proposition 5.3

$$(R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R)_{;k} = 0 \quad \text{et} \quad (5.16)$$

$$R_{ik} = R_{ki}. \quad (5.17)$$

Démonstration: $R_{ik} = g^{jl} R_{lij}^j$. La symétrie du tenseur de Ricci suit alors de (5.12) et de la symétrie de g^{jl} .

$$\begin{aligned} R_{j;m}^m &= g^{ml} R_{jl}{}_{;m} = g^{ml} g^{ik} R_{ijkl}{}_{;m} \stackrel{(5.12)\#2}{=} g^{ml} g^{ik} R_{klij}{}_{;m} \\ &\stackrel{(5.11)}{=} -g^{ml} g^{ik} (R_{klmi}{}_{;j} + R_{kljm}{}_{;i}) = R_{;j} - R^i_{j;i} \end{aligned}$$

Avec $R_{;j} = (\delta_j^m R)_{;m}$ nous retrouvons l'équation (5.16).

□

Définition 5.4 (tenseur d'Einstein) *Le tenseur $G_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$ est appelé le tenseur d'Einstein.*

L'identité de Bianchi contractée (5.16) est équivalente à

$$G_i^m{}_{;m} = 0. \quad (5.18)$$

Cette identité est d'une importance première pour la relativité générale.

Théorème 5.2 *Le transport parallèle est indépendant du chemin si et seulement si la courbure est nulle.*

Considération heuristique :

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ un chemin fermé, $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Soit $v_0 \in T_p\mathcal{M}$ et $\mathcal{T}_t v_0 =: v(t)$ le transport parallèle de v_0 le long de γ :

$$\dot{v}^i = -\Gamma_{jk}^i \dot{x}^j v^k.$$

Nous voulons calculer

$$\Delta v^i = v^i(1) - v^i(0) = \int_0^1 \dot{v}^i dt = - \int_0^1 \Gamma_{jk}^i(\gamma(t)) v^k(t) \dot{x}^j(t) dt ,$$

$$\Delta v^i = \oint_{\gamma} \Gamma_{jk}^i(x) v^k dx^j .$$

Ici nous utilisons le théorème de Stokes dans la situation indiquée à la figure 5 :

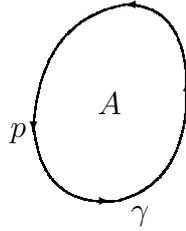


FIG. 5.1 – Application du théorème de Stokes

$$\oint_{\gamma} B_j dx^j = \int_A (B_{j,l} - B_{l,j}) dx^j dx^l . \quad (5.19)$$

Pour nous $B_j = \Gamma_{jk}^i(x) v^k(x)$. Alors

$$(B_{j,l} - B_{l,j}) dx^j dx^l = [\Gamma_{jk,l}^i v^k - \Gamma_{lk,j}^i v^k + \Gamma_{jk}^i v_{,l}^k - \Gamma_{lk}^i v_{,j}^k] dx^j dx^l .$$

Mais

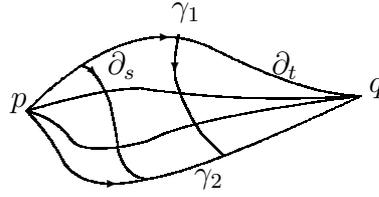
$$v_{,l}^k dx^l = \dot{v}^k dt = -\Gamma_{mn}^k \dot{x}^m v^n dt = -\Gamma_{mn}^k v^n dx^m .$$

Donc

$$(B_{j,l} - B_{l,j}) dx^j dx^l = [\Gamma_{jk,l}^i - \Gamma_{lk,j}^i - \Gamma_{jm}^i \Gamma_{lk}^m + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^m] v^k dx^j dx^l .$$

Pour que l'intégrale (5.19) soit nulle pour chaque γ et v_0 quelconque, il faut alors que

$$[\] \equiv 0 \stackrel{(4.29)}{\Leftrightarrow} R_{klj}^i(x) \equiv 0 .$$

FIG. 5.2 – Définition de l'application H

Démonstration: Soit

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} : (s, t) \mapsto H(s, t)$$

tel que $H(0, t) = \gamma_1(t)$, $H(1, t) = \gamma_2(t)$, $H(s, 0) = p$, et $H(s, 1) = q$.

Soit $v_0 \in T_p \mathcal{M}$ et $v(s, t)$ le vecteur parallèlement transporté le long du chemin $t \mapsto H(s, t)$ pour chaque s fixé. Soit $X = H_*(\partial_t)$ et $Y = H_*(\partial_s)$. Donc

$$\nabla_X v(s, t) \Big|_{s,t} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_Y v(s, t) \Big|_{t=0,s} = 0. \quad (5.20)$$

Soit la courbure $R \equiv 0$. Comme $[X, Y] = H_*([\partial_t, \partial_s]) = 0$,

$$R(X, Y)v = \nabla_X \nabla_Y v - \nabla_Y \nabla_X v = 0 \quad \text{donc} \quad \nabla_X \nabla_Y v = 0.$$

Alors $\nabla_Y v$ est parallèlement transporté le long de $t \mapsto H(s, t)$. Avec l'équation (5.20), il suit donc que $\nabla_Y v|_{t,s} = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Dans la limite $t \rightarrow 1$, on obtient que la valeur $v(s, 1)$ ne dépend pas de s :

$$\frac{d}{ds} v^i(s, 1) + \Gamma_{jk}^i(q) Y^j(s, 1) v^k(s, 1) = 0.$$

Mais $Y(s, 1) = 0$, alors $\frac{d}{ds} v^i(s, 1) = 0$.

Soit maintenant $v(s, t)$ indépendant du chemin. Il suit d'abord qu'aussi $\nabla_Y v|_{s,t} = 0$, et alors $R(X, Y)v = 0$. Comme H et v_0 sont arbitraires, ceci implique que $R = 0$.

□

Définition 5.5 (isométrie) Soient (\mathcal{M}, g) et (\mathcal{N}, h) deux variétés (pseudo-)riemanniennes. Un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est une **isométrie** si

$$\varphi^* h = g. \quad (5.21)$$

Une variété pseudo-riemannienne qui est (localement) isométrique à $(\mathbb{R}^n, \overset{\circ}{g})$,

$$\overset{\circ}{g} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i dx^i \otimes dx^i, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad (5.22)$$

est appelée (localement) **plate**.

Théorème 5.3 *Une variété pseudo-riemannienne est localement plate si et seulement si la courbure de la connexion riemannienne est nulle.*

Démonstration:

– ” \Rightarrow ” : Clair, choisir un système de coordonnées tel que la métrique ait la forme de l'équation (5.22).

– ” \Leftarrow ” : Soit $R = 0$. D'après le théorème 5.2, ceci implique que le transport parallèle soit localement indépendant du chemin choisi.

Une base orthonormée de $T_p\mathcal{M}$ $(e_i)_{i=1}^n \subset T_p\mathcal{M}$ peut alors être parallèlement transportée dans un voisinage. De cette façon nous pouvons supposer que la base $(e_i)_{i=1}^n$ est prise telle que dans un ouvert $\mathcal{U} \ni p$, les dérivées covariantes soient nulles :

$$\nabla_{e_i} e_k = 0, \quad [e_i, e_k] = \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{e_k} e_i = 0.$$

Alors (proposition) il existe un système de coordonnées locales tel que $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. dans ce système, $\Gamma_{ij}^k = 0$, et alors les coefficients métriques g_{ij} sont constants.

Par une transformation linéaire globale, nous pouvons alors les transformer en forme normale (5.22).

□

Chapitre 6

Formes différentielles et le calcul de Cartan

Le calcul de Cartan avec des formes différentielles est très adapté à la relativité générale et il simplifie les calculs substantiellement.

Je présente d'abord quelques préparations algébriques dont je suppose que vous les connaissez déjà un peu des compléments de math 2.

6.1 L'algèbre extérieure

Soit A une algèbre commutative, associative, unitaire sur \mathbb{R} et soit E un module sur A :

- **Commutative** : $a, b \in A \Rightarrow ab = ba$
- **Associative** : $a(bc) = (ab)c$
- **Unitaire** : $\exists e \in A$ tel que $ea = a, \forall a \in A$

Nous nous intéressons ensuite aux cas $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathcal{F}(\mathcal{M})$, \mathcal{M} est une variété différentiable et E un espace linéaire sur \mathbb{R} ou $E = \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

nous considérons l'espace des formes p -linéaires à valeurs dans A .

Définition 6.1

1. $\Lambda_p(E) \subset T_p(E)$ est l'espace des p -formes complètement anti-symétriques sur E :

$$\alpha(\cdots X \cdots Y \cdots) = -\alpha(\cdots Y \cdots X \cdots)$$

pour tout $\alpha \in \Lambda_p(E)$ et $X, Y \in E$.

2. Pour $t \in T_p(E)$ nous définissons l'opérateur d'alternance A par

$$(At)(v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} (\text{sgn} \sigma) t(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \quad (6.1)$$

où $v_1, \dots, v_p \in E$ et \mathfrak{S}_p est le groupe des permutations de p éléments et $\text{sgn} \sigma$ la signature de la permutation σ .

Proposition 6.1 \mathcal{A} est la projection de $T_p(E)$ sur $\Lambda_p(E)$. C'est-à-dire \mathcal{A} est un opérateur linéaire sur $T_p(E)$ avec $\mathcal{A}(T_p(E)) = \Lambda_p(E)$. De plus, $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Démonstration: Exercice.

Définition 6.2 (produit extérieur) Pour $\omega \in \Lambda_p(E)$, $\eta \in \Lambda_q(E)$, nous définissons le **produit extérieur**

$$\Lambda_{p+q}(E) \ni \omega \wedge \eta := \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(\omega \otimes \eta) . \quad (6.2)$$

Proposition 6.2 Le produit extérieur a les propriétés suivantes :

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$
2. $a(\omega \wedge \eta) = (a\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (a\eta)$ pour $a \in A$
3. $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$
4. $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$

\wedge est donc bilinéaire et associatif.

Démonstration: Exercice.

Proposition 6.3 Soient $(\theta^i)_{i=1}^n$ une base de $E^* = \Lambda_1(E)$. Alors les

$$(\theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}); \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$$

forment une base de $\Lambda_p(E)$.

Par conséquent la dimension de $\Lambda_p(E)$, $p \leq n$, est

$$\dim(\Lambda_p(E)) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Pour $p > n$, $\Lambda_p(E) = \{0\}$.

Démonstration: Exercice.

Définition 6.3 (algèbre de Grassmann) L'algèbre de Grassmann (ou algèbre extérieure) est la somme directe

$$\Lambda(E) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda_p(E)$$

D'après la proposition 6.3, $\dim \Lambda(E) = 2^n$.

$\Lambda(E)$ est une algèbre graduée (associée, unitaire).

Définition 6.4 (produit intérieur) *Le produit intérieur est l'application*

$$\begin{aligned} E \times \Lambda_p(E) &\rightarrow \Lambda_{p-1}(E) \\ (v, \omega) &\mapsto i_v \omega \end{aligned}$$

où $(i_v \omega)(v_1, \dots, v_{p-1}) := \omega(v, v_1, \dots, v_{p-1})$.

Pour $\omega \in \Lambda_p(E)$ nous définissons $i_0 \omega \equiv 0$. Le produit intérieur permet de définir une application

$$i : E \times \Lambda(E) \rightarrow \Lambda(E) : (v, \omega) \mapsto i_v \omega.$$

Proposition 6.4

1. i_v est A -linéaire

2. $i_v(\Lambda_p(E)) \subseteq \Lambda_{p-1}(E)$

3. $i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v \omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (i_v \eta)$ pour $\omega \in \Lambda_p(E)$.

C'est-à-dire i_v est une anti-dérivation de degré -1 sur $\Lambda(E)$.

Démonstration: Exercice.

6.2 Formes différentielles

Soit \mathcal{M} une variété différentiable de dimension m . Pour $p = 0, 1, \dots, m$ et $x \in \mathcal{M}$ nous considérons les espaces

$$\begin{aligned} \Lambda_p(T_x \mathcal{M}) &\subset T_x(\mathcal{M})_p^0 \quad \forall p > 1 \\ \Lambda_0(T_x \mathcal{M}) &= \mathbb{R}; \quad \Lambda_1(T_x \mathcal{M}) = (T_x \mathcal{M})^* \\ \Lambda(T_x \mathcal{M}) &= \bigoplus_{p=0}^n \Lambda_p(T_x \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Définition 6.5 (forme différentielle) *Une forme différentielle de degré p est un champ tensoriel covariant de degré p , appelé ω , tel que $\omega(x) \in \Lambda_p(T_x \mathcal{M})$ pour tout $x \in \mathcal{M}$. Souvent nous parlons brièvement de p -formes.*

$\Lambda_p(\mathcal{M})$ est le modul des p -formes sur $\mathcal{F}(\mathcal{M})$.

$\Lambda(\mathcal{M}) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda_p(\mathcal{M})$ est l'algèbre extérieure des formes différentielles sur \mathcal{M} .

Comme les éléments de $\Lambda(\mathcal{M})$ sont des champs tensoriels, tous nos énoncés sur les champs tensoriels sont aussi valables pour des formes différentielles.

Les opérations algébriques définies dans la section précédente sont définies point

par point pour les formes différentielles, y compris le produit extérieur. Pour $\omega \in \Lambda_p(\mathcal{M})$, $X_1, \dots, X_p \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, l'application

$$x \mapsto \omega(X_1(x), \dots, X_p(x))$$

est une fonction sur \mathcal{M} . L'application

$$\underbrace{\mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \dots \times \mathcal{X}(\mathcal{M})}_{p \text{ fois}} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}) : (X_1, \dots, X_p) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_p)$$

est $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -linéaire et complètement anti-symétrique.

Pour un champ vectoriel X nous définissons le produit intérieur

$$(i_X \omega)_x \equiv i_{X(x)} \omega_x$$

Dans un système de coordonnées locales, $(x^1, \dots, x^n; \mathcal{U})$, $\omega \in \Lambda_p(\mathcal{M})$ peut être représenté par

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1 \dots i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \end{aligned}$$

où les $\omega_{i_1 \dots i_p}$ à position d'indice arbitraires sont obtenus de ceux avec $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ par la condition qu'ils soient complètement anti-symétriques.

Soit $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable. Comme déjà vu au chapitre 3 (proposition 3.6), le pull-back est linéaire et il respecte le produit tensoriel, \otimes . Ceci implique que le pull-back

$$\varphi^* : \Lambda(\mathcal{N}) \rightarrow \Lambda(\mathcal{M})$$

respecte le produit extérieur, $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^* \omega \wedge \varphi^* \eta$. Il est alors un homomorphisme des algèbres $\Lambda(\mathcal{N})$ dans $\Lambda(\mathcal{M})$. Si φ est un difféomorphisme, φ^* est même un isomorphisme avec $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Définition 6.6 (dérivation, anti-dérivation) Une application $\theta : \Lambda(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda(\mathcal{M})$ est une **dérivation** (respectivement **anti-dérivation**) de degré $k \in \mathbb{Z}$, si

1. θ est \mathbb{R} -linéaire
2. $\theta(\omega \wedge \eta) = \theta\omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta\eta$, pour $\omega, \eta \in \Lambda(\mathcal{M})$ (anti-dérivation si : $\theta(\omega \wedge \eta) = \theta\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \theta\eta$, $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{M})$, $\eta \in \Lambda(\mathcal{M})$)
3. $\theta(\Lambda_p(\mathcal{M})) \subset \Lambda_{p+k}(\mathcal{M})$, $0 \leq p \leq n$.

Proposition 6.5 Pour des anti-dérivations θ, θ' de degré k, k' , $\theta \circ \theta' + \theta' \circ \theta$ est une dérivation de degré $k + k'$, si k et k' sont les deux impairs.

Démonstration: Simple calcul.

Proposition 6.6 *Les (anti-)dérivations de $\Lambda(\mathcal{M})$ sont locales, c'est-à-dire que pour un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ et $\omega \in \Lambda(\mathcal{M})$ tel que $\omega|_{\mathcal{U}} = 0$ nous avons $\theta\omega|_{\mathcal{U}} = 0$ pour chaque (anti-)dérivation θ .*

Démonstration: Pour $x \in \mathcal{U}$ il existe une fonction $h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ telle que $h(x) = 1$ et $h|_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{U}} = 0$. Alors $h \cdot \omega = 0$. Et, à cause de la linéarité, $\theta(h\omega) = 0$, et donc $\theta h \wedge \omega + h \cdot \theta\omega = 0$ en x il suit que $(\theta\omega)_x = 0$.

□

Par conséquent, pour $\omega = \omega'$ dans $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ nous avons $\theta\omega = \theta\omega'$ dans \mathcal{U} pour toute dérivation θ .

Nous pouvons alors définir de façon unique $\theta|_{\mathcal{U}}$ sur $\Lambda(\mathcal{U})$:

pour $x \in \mathcal{U}$ et $\alpha \in \Lambda(\mathcal{U})$ nous choisissons $\tilde{\alpha} \in \Lambda(\mathcal{M})$ tel que $\tilde{\alpha} = \alpha$ dans un voisinage de x et nous posons

$$\left(\theta\Big|_{\mathcal{U}}\right)\alpha(x) = (\theta\tilde{\alpha})(x).$$

D'après la proposition 6.6, cette définition est indépendante du choix de $\tilde{\alpha}$. L'existence d'une telle extension $\tilde{\alpha}$ est une conséquence du lemme de continuation :

Lemme 6.1 (lemme de continuation) *Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ un ouvert et $K \subset \mathcal{U}$ un compact. Pour tout $\beta \in \Lambda(\mathcal{U})$ il existe un $\alpha \in \Lambda(\mathcal{M})$ tel que*

$$\beta\Big|_K = \alpha\Big|_K \quad \text{et} \quad \alpha\Big|_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{U}} = 0.$$

Démonstration: Il existe une fonction $h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ telle que $h(x) = 1 \forall x \in K$ et $h(x) = 0 \forall x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{U}$. On peut alors choisir

$$\alpha(x) = \begin{cases} h(x)\beta(x), & x \in \mathcal{U} \\ 0, & x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{U} \end{cases}$$

□

Nous avons donc le résultat suivant :

Proposition 6.7 (théorème de localisation) *Soit θ une (anti-)dérivation sur $\Lambda(\mathcal{M})$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ un ouvert. Il existe alors une unique (anti-)dérivation $\theta_{\mathcal{U}}$ sur $\Lambda(\mathcal{U})$ telle que*

$$(\theta\alpha)\Big|_{\mathcal{U}} = \theta_{\mathcal{U}}\left(\alpha\Big|_{\mathcal{U}}\right) \quad \text{pour tout } \alpha \in \Lambda(\mathcal{M})$$

Nous avons aussi besoin du théorème de globalisation :

Proposition 6.8 (théorème de globalisation) *Soit $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de \mathcal{M} . Pour tout $i \in I$, soit θ_i une (anti-)dérivation sur $\Lambda(\mathcal{U}_i)$ et θ_{ij} sa restriction sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Si $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ pour toute paire $(i, j) \in I \times I$ il existe une unique (anti-)dérivation $\theta \in \Lambda(\mathcal{M})$ telle que $\theta_i = \theta|_{\mathcal{U}_i}$.*

Démonstration: Pour $\alpha \in \Lambda(\mathcal{M})$ et $x \in \mathcal{U}_i$ nous définissons

$$(\theta\alpha)_x = \theta_i \left(\alpha \Big|_{\mathcal{U}_i} \right)_x. \quad (6.3)$$

Comme

$$\begin{aligned} \left((\theta\alpha) \Big|_{\mathcal{U}_j} \right) \Big|_{\mathcal{U}_i} &= \theta_{ij} \left(\alpha \Big|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} \right) = \theta_{ji} \left(\alpha \Big|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} \right) \\ &= \left((\theta\alpha) \Big|_{\mathcal{U}_i} \right) \Big|_{\mathcal{U}_j} \end{aligned}$$

L'équation (6.3) est indépendante du choix de \mathcal{U}_i tant que $x \in \mathcal{U}_i$, et alors $\theta\alpha$ est bien défini.

□

Par la suite, nous allons utiliser le fait suivant :

Proposition 6.9 *Soit θ une (anti-)dérivation de degré k et $\theta f = \theta df = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Nous avons alors*

$$\theta \equiv 0.$$

Démonstration: Nous choisissons un atlas (h_i, \mathcal{U}_i) de \mathcal{M} . On prend alors $\theta_i := \theta|_{\mathcal{U}_i}$. Il suffit alors de démontrer que $\theta_i \equiv 0$ pour tout i . Mais dans un système de coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) sur \mathcal{U}_i et $\alpha \in \Lambda_p(\mathcal{M})$,

$$\alpha \Big|_{\mathcal{U}_i} = \sum \alpha_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}.$$

Et à cause de la règle de Leibnitz (point 2 de la définition 6.6)

$$(\theta\alpha) \Big|_{\mathcal{U}_i} = \theta_i \left(\alpha \Big|_{\mathcal{U}_i} \right) = 0.$$

□

Conséquence 6.10 *Une (anti-)dérivation sur $\Lambda(\mathcal{M})$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur les fonctions (= $\Lambda_0(\mathcal{M})$) et sur les "gradients", $\{df \mid f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})\} \subset \Lambda_1(\mathcal{M})$.*

6.3 La dérivée extérieure

Théorème 6.1 *Il existe une unique application*

$$d : \Lambda(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda(\mathcal{M})$$

avec les propriétés suivantes :

1. d est une anti-dérivation de degré 1
2. $d \circ d = 0$
3. df est le gradient de f pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, c'est-à-dire $df(X) = Xf$, pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Démonstration: L'unicité est une conséquence de la proposition 6.9. Comme une forme $\alpha \in \Lambda_p(\mathcal{M})$ sur une carte $(x^1, \dots, x^n; \mathcal{U})$ est de la forme

$$\alpha \Big|_{\mathcal{U}} = \sum_{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad \alpha_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$$

Les points 2 & 3 et la règle de Leibniz déterminent

$$\begin{aligned} d\alpha \Big|_{\mathcal{U}} &\stackrel{2, \text{Leibn.}}{=} \sum_{i_1 \dots i_p} d\alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \in \Lambda_{p+1}(\mathcal{M}) \quad (6.4) \\ &\stackrel{3}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_k < i_{p+1}} \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \alpha_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p+1}}. \end{aligned}$$

(Les indices notés $i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1}$ signifient : "on omet i_k ".) Le théorème de globalisation (proposition 6.8) implique alors l'existence de d .

□

Les composantes de $d\alpha$ sont données par

$$(d\alpha)_{i_1 \dots i_{p+1}} = - \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \alpha_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1}}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \quad (6.5)$$

Définition 6.7 (formes différentielles exactes et fermées) *Une forme différentielle $\alpha \in \Lambda(\mathcal{M})$ est appelée exacte s'il existe une forme β telle que $\alpha = d\beta$. α est fermée si $d\alpha = 0$.*

Comme $d \circ d = 0$, toute forme exacte est fermée. Localement, l'inverse est aussi vrai :

Lemme 6.2 (Lemme de Poincaré) Soit $\alpha \in \Lambda(\mathcal{M})$ fermée. Pour tout $x \in \mathcal{M}$ il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, avec $x \in \mathcal{U}$ telle que $\alpha|_{\mathcal{U}}$ soit exacte.

Démonstration: Voir e.g. Spivak [6], "Calculus on manifolds".

Proposition 6.11 Soit $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable de la variété différentiable \mathcal{M} dans la variété différentiable \mathcal{N} .

Le diagramme suivant est commutatif, c'est-à-dire $d \circ \varphi^* = \varphi^* \circ d$.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(\mathcal{M}) & \xleftarrow{\varphi^*} & \Lambda(\mathcal{N}) \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ \Lambda(\mathcal{M}) & \xleftarrow{\varphi^*} & \Lambda(\mathcal{N}) \end{array}$$

Démonstration: Pour des fonctions, nous avons déjà démontré cette propriété du pull-back, voir définition 2.14, équation (2.52). Nous avons alors

$$(d \circ \varphi^*)df = (d \circ d)(\varphi^*f) = 0 = \varphi^*((d \circ d)f)$$

□

6.4 Relations entre d , i_X et L_X

d est une anti-dérivation de degré 1, i_X , $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ est une anti-dérivation de degré -1 et L_X est une dérivation de degré 0 sur $\Lambda(\mathcal{M})$.

Proposition 6.12 (La formule de Cartan) Pour $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ nous avons

$$L_X = d \circ i_X + i_X \circ d \tag{6.6}$$

Démonstration: D'après la proposition 6.5, $\theta = d \circ i_X + i_X \circ d$ est une dérivation de degré 0. Donc si $\theta f = L_X f$ et $\theta(df) = L_X df$ pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, l'équation

(6.6) est démontrée.

Mais pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$

$$\theta(f) = i_X df = df(X) = Xf = L_X f,$$

de plus

$$\theta(df) = d \circ i_X df = d(Xf).$$

Mais de l'autre côté

$$\begin{aligned} (L_X df)(Y) &= L_X(df(Y)) - df(L_X Y) = L_X(Yf) - df([X, Y]) \\ &= X(Yf) - [X, Y]f = Y(Xf) = (d(Xf))(Y). \end{aligned}$$

□

Avec $d \circ d = 0$, l'équation (6.6) implique

$$L_X \circ d = d \circ L_X = d \circ i_X \circ d. \quad (6.7)$$

En plus (exercice!)

$$i_{[X, Y]} = [L_X, i_Y]. \quad (6.8)$$

Proposition 6.13 Pour $\omega \in \Lambda_{p-1}(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_p) &= \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p) \end{aligned} \quad (6.9)$$

(de nouveau \widehat{X}_i signifie l'omission de X_i).

Démonstration: Pour $p = 1$, l'équation (6.9) se réduit à $df(X) = Xf$.

Pour $\omega \in \Lambda_1(\mathcal{M})$, (6.6) donne

$$(L_X \omega)(Y) = (i_X d\omega)(Y) + d(i_X \omega)(Y) = d\omega(X, Y) + Y(\omega(X)).$$

Avec $(L_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$ il suit

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]),$$

c'est-à-dire l'équation (6.9).

Par induction on montre le pas de p à $p+1$ à l'aide de (6.6) et la formule explicite pour $L_X \omega$.

□

Proposition 6.14 *Soit ∇ la dérivation covariante par rapport à une connexion symétrique. Alors pour $\omega \in \Lambda_p(\mathcal{M})$ nous avons*

$$\mathcal{A}(\nabla\omega) = \frac{(-1)^p}{p+1}d\omega \quad (6.10)$$

Démonstration: Pour $\omega \in \Lambda_p(\mathcal{M})$

$$\begin{aligned} \nabla\omega(X_2, \dots, X_{p+1}, X_1) &= (\nabla_{X_1}\omega)(X_2, \dots, X_{p+1}) \\ &= X_1(\omega(X_2, \dots, X_{p+1})) - \sum_{i=2}^{p+1} \omega(X_2, \dots, \nabla_{X_1}X_i, \dots, X_{p+1}) \\ \mathcal{A}(\nabla\omega)(X_2, \dots, X_{p+1}, X_1) &= \frac{1}{p+1} \left[\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p) \right]. \end{aligned}$$

Mais, comme la torsion est nulle $\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i = [X_i, X_j]$. Alors

$$\mathcal{A}(\nabla\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) = \frac{(-1)^p}{p+1}d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}).$$

□

6.5 Le calcul de Cartan

Définition 6.8 (formes de connexion) *Soit ∇ une connexion affine sur \mathcal{M} et soient (e_1, \dots, e_n) une base des champs vectoriels sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Soit $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ la base duale des 1-formes. Nous définissons les **formes de connexion** $\omega_j^i \in \Lambda_1(\mathcal{U})$ par*

$$\nabla_X e_j = \omega_j^i(X) e_i. \quad (6.11)$$

Nous définissons les symboles de Christoffel par rapport à la base $\{e_i\}$

$$\nabla_{e_k} e_j = \Gamma_{kj}^i e_i = \omega_j^i(e_k) e_i. \quad (6.12)$$

Nous avons donc

$$\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i \theta^k. \quad (6.13)$$

Proposition 6.15 *Pour un champ vectoriel $X = X^i e_i$ nous avons*

$$\nabla X = e_i \otimes (dX^i + \omega^i_k X^k). \quad (6.14)$$

Pour une 1-forme $\alpha = \alpha_i \theta^i$, nous avons

$$\nabla \alpha = \theta^i \otimes (d\alpha_i - \omega^k_i \alpha_k). \quad (6.15)$$

Démonstration: L'équation (6.14) suit de (6.11) et de la règle de Leibniz. Pour (6.15), nous utilisons que ∇_X commute avec les contractions :

$$0 = \nabla_X(\theta^i(e_j)) = (\nabla_X \theta^i)(e_j) + \theta^i(\nabla_X e_j).$$

Alors

$$(\nabla_X \theta^i)(e_j) = -\omega^i_j(X),$$

c'est-à-dire

$$\nabla_X \theta^i = -\omega^i_j(X) \theta^j. \quad (6.16)$$

Avec ceci et la règle de Leibniz, l'équation (6.15) suit.

□

Définition 6.9 (2-formes de torsion et courbure) *Comme la torsion $T(X, Y)$ et la courbure $R(X, Y)Z$ sont anti-symétriques en X et en Y , nous définissons les 2-formes de torsion et courbure Θ^i et Ω^i_j par*

$$T(X, Y) = \Theta^i(X, Y) e_i \quad (6.17)$$

$$R(X, Y) e_j = \Omega^i_j(X, Y) e_i. \quad (6.18)$$

Théorème 6.2 *Les 2-formes de torsion et de courbure satisfont les équations de structure de Cartan :*

$$d\theta^i + \omega^i_j \wedge \theta^j = \Theta^i \quad (6.19)$$

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j \quad (6.20)$$

Démonstration: Pour (6.19) :

$$\begin{aligned} \Theta^i(X, Y) e_i &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \nabla_X(\theta^i(Y) e_i) - \nabla_Y(\theta^i(X) e_i) - \theta^i([X, Y]) e_i \\ &= \{X(\theta^i(Y)) - Y(\theta^i(X)) - \theta^i([X, Y])\} e_i + \theta^i(Y) \omega^j_i(X) e_j - \theta^i(X) \omega^j_i(Y) e_j \\ &= (d\theta^i + \omega^i_l \wedge \theta^l)(X, Y) e_i. \end{aligned}$$

Et pour (6.20) :

$$\begin{aligned}
\Omega_j^i(X, Y)e_i &= \nabla_X \nabla_Y e_j - \nabla_Y \nabla_X e_j - \nabla_{[X, Y]} e_j \\
&= \nabla_X(\omega_j^i(Y)e_i) - \nabla_Y(\omega_j^i(X)e_i) - \omega_j^i([X, Y])e_i \\
&= \{X(\omega_j^i(Y)) - Y(\omega_j^i(X)) - \omega_j^i([X, Y])\}e_i + \{\omega_j^i(Y)\omega_i^k(X) - \omega_j^i(X)\omega_i^k(Y)\}e_k \\
&= (d\omega_j^i + \omega_l^i \wedge \omega_l^j)(X, Y)e_i .
\end{aligned}$$

□

Comme $R_{jkl}^i = \theta^i(R(e_k, e_l)e_j) = \Omega_j^i(e_k, e_l)$, nous avons

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2}R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l. \quad (6.21)$$

De même :

$$\Theta^i = \frac{1}{2}T_{kl}^i \theta^k \wedge \theta^l \quad (6.22)$$

où $T_{kl}^i = \theta^i(T(e_k, e_l))$.

Proposition 6.16 *Une connexion est métrique si et seulement si*

$$dg_{ik} = \omega_{ik} + \omega_{ki} \quad (6.23)$$

où $\omega_{ik} := g_{il}\omega_k^l$; $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Démonstration: Par définition, la connexion ∇ est métrique si $(\nabla_X g)_{ik} = X(g_{ik}) - g(\nabla_X e_i, e_k) - g(e_i, \nabla_X e_k) = 0$ pour tout champ vectoriel X . Donc pour une connexion métrique

$$\begin{aligned}
dg_{ik}(X) &\equiv X(g_{ik}) = g(\nabla_X e_i, e_k) + g(e_i, \nabla_X e_k) = g(\omega_i^j(X)e_j, e_k) + g(e_i, \omega_k^j(X)e_j) \\
&= \omega_i^j(X)g_{jk} + \omega_k^j(X)g_{ij} = \omega_{ki}(X) + \omega_{ik}(X) .
\end{aligned}$$

□

Pour la **connexion riemannienne** nous avons alors les équations suivantes :

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = dg_{ij} \quad (6.24)$$

$$d\theta^i + \omega^i_j \wedge \theta^j = 0 \quad (6.25)$$

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l. \quad (6.26)$$

Ceci sont les équation de structure de Cartan pour une connexion riemannienne.

Solution formelle des équations de structure pour la connexion riemannienne (Levi-Civita)

Soient les bases locales $(e_i)_{i=1}^n$ et $(\theta^i)_{i=1}^n$ avec $\theta^i(e_j) = \delta^i_j$ données, et $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Dans le cas d'une base orthonormée, $g_{ij} = \pm \delta_{ij}$.

Nous développons $d\theta^i$:

$$d\theta^i = -\frac{1}{2} C^i_{jl} \theta^j \wedge \theta^l \quad (6.27)$$

Le choix de la base (θ^i) détermine les C^i_{jk} et la métrique g_{ij} . Nous calculons maintenant les formes de connexion, ω^i_j et les formes de courbure Ω^i_j à partir des C^i_{jl} et des g_{ij} . Pour une base holonome, $\theta^i = dx^i$, $C^i_{kl} \equiv 0$.

Avec (6.13) et (6.25) (la première équation de structure de Cartan). ceci donne

$$\left(-\frac{1}{2} C^i_{jl} + \Gamma^i_{jl} \right) \theta^j \wedge \theta^l = 0,$$

et alors

$$\Gamma^i_{jl} - \Gamma^i_{lj} = C^i_{jl} \quad (6.28)$$

Et donc, pour une base holonome, les Γ sont symétriques.

De plus, nous posons

$$g_{ij,k} := e_k(g_{ij}).$$

Alors $dg_{ij} = g_{ij,k} \theta^k$. Comme $\omega_{ij} = g_{il} \Gamma^l_{kj} \theta^k$, (6.24) donne

$$g_{il} \Gamma^l_{kj} + g_{jl} \Gamma^l_{ki} = g_{ij,k}.$$

Pour une base orthonormée les $\Gamma_{ikj} := g_{il} \Gamma^l_{kj}$ sont alors antisymétriques en ij . Avec permutation cyclique nous obtenons

$$g_{ki,j} = g_{kl} \Gamma^l_{ji} + g_{il} \Gamma^l_{jk}$$

$$g_{jk,i} = g_{jl} \Gamma^l_{ik} + g_{kl} \Gamma^l_{ij}$$

A l'aide de l'équation (6.28) cela conduit à

$$(g_{ij,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}) = g_{kl} C^l_{ij} + g_{il} C^l_{kj} + g_{jl} (\Gamma^l_{ki} + \Gamma^l_{ik})$$

La multiplication avec g^{mj} donne

$$\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{ik} = g^{mj} (g_{ij,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}) - g^{mj} g_{kl} C^l_{ij} - g^{mj} g_{il} C^l_{kj}.$$

Avec (6.28)

$$\Gamma_{ki}^m = \frac{1}{2}g^{mj}(g_{jk,i} + g_{ji,k} - g_{ik,j}) + \frac{1}{2}(C_{ki}^m - g^{mj}g_{li}C_{kj}^l - g^{mj}g_{kl}C_{ij}^l). \quad (6.29)$$

Pour une base holonome ($\theta^i = dx^i$), seule la première partie de (6.29) est non-nulle et nous retrouvons le résultat (5.4).

Pour une base orthonormée, seule la deuxième partie est non-nulle et¹

$$\Gamma_{ki}^m = \frac{1}{2}(C_{ki}^m - \varepsilon_m \varepsilon_k C_{im}^k - \varepsilon_m \varepsilon_i C_{km}^i).$$

D'après (6.13),

$$\begin{aligned} d\omega_j^i &= d\Gamma_{kj}^i \wedge \theta^k + \Gamma_{kj}^i d\theta^k \\ d\Gamma_{kj}^i &= e_l(\Gamma_{kj}^i)\theta^l =: \Gamma_{kj,l}^i \theta^l \\ d\omega_j^i &= \Gamma_{kj,l}^i \theta^l \wedge \theta^k - \frac{1}{2}\Gamma_{kj}^i C_{lm}^k \theta^l \wedge \theta^m \\ d\omega_j^i &= \frac{1}{2}(\Gamma_{kj,l}^i - \Gamma_{lj,k}^i - \Gamma_{mj}^i C_{lk}^m) \theta^l \wedge \theta^k. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Omega_j^i &= d\omega_j^i + \omega_m^i \wedge \omega_j^m = \left[\frac{1}{2}(\Gamma_{kj,l}^i - \Gamma_{lj,k}^i - \Gamma_{mj}^i C_{lk}^m) + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \right] \theta^l \wedge \theta^k \\ &= \frac{1}{2}R_{jlk}^i \theta^l \wedge \theta^k. \end{aligned}$$

Et donc

$$R_{jlk}^i = \Gamma_{kj,l}^i - \Gamma_{lj,k}^i - \Gamma_{mj}^i C_{lk}^m + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m. \quad (6.30)$$

Proposition 6.17 *Les formes de torsion et de courbure satisfont les identités de Bianchi,*

$$D\Theta^i \equiv d\Theta^i + \omega_l^i \wedge \Theta^l = \Omega_j^i \wedge \theta^j, \quad (6.31)$$

$$D\Omega_j^i \equiv d\Omega_j^i + \omega_l^i \wedge \Omega_j^l - \omega_j^l \wedge \Omega_l^i = 0. \quad (6.32)$$

Démonstration: Pour (6.31) :

$$\begin{aligned} d\Theta^i + \omega_l^i \wedge \Theta^l &= d(d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j) + \omega_j^i \wedge d\theta^j + \omega_l^i \wedge \omega_j^l \wedge \theta^j \\ &= d\omega_j^i \wedge \theta^j + \omega_l^i \wedge \omega_j^l \wedge \theta^j = \Omega_j^i \wedge \theta^j. \end{aligned}$$

Et pour (6.32) :

$$\begin{aligned} d\Omega_j^i + \omega_l^i \wedge \Omega_j^l - \omega_j^l \wedge \Omega_l^i &= d(d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k) + \omega_l^i \wedge (d\omega_j^l + \omega_k^l \wedge \omega_j^k) - \omega_j^l \wedge (d\omega_l^i + \omega_k^i \wedge \omega_l^k) \\ &= d\omega_l^i \wedge \omega_j^l - \omega_l^i \wedge d\omega_j^l + \omega_l^i \wedge d\omega_j^l + \omega_l^i \wedge \omega_k^l \wedge \omega_j^k - \omega_j^l \wedge d\omega_l^i - \omega_j^l \wedge \omega_k^i \wedge \omega_l^k = 0. \end{aligned}$$

¹ $\varepsilon_m = g_{mm} = \pm 1$

□

Exercice : Montrer que, dans une base holonome, $e_i = \partial_i$, $\theta^i = dx^i$, les identités de Bianchi (6.31) et (6.32) sont équivalentes à (4.31) et (4.32).

Le fait que dans le calcul de Cartan les identités de Bianchi sont presque triviales montre à quel point celui-ci est adapté à la géométrie différentielle.

Deuxième partie

Relativité Générale

Introduction

Parmi les théories physiques (mécanique classique de Newton, Lagrange, etc ; électrodynamique de Faraday et Maxwell ; mécanique quantique, etc.), la relativité générale prend une place spéciale, d'abord en étant la seule théorie physique qui a été conçue par une seule personne, A. Einstein. En plus, la relativité générale n'était pas motivée par des résultats empiriques² mais par la contradiction entre la gravitation newtonienne et les principes fondamentaux de l'espace temps formulés dans la relativité restreinte. Au sujet de la relativité générale, M. Born a déclaré : "(Die allgemeine Relativitätstheorie) erschien uns erscheint mir auch heute als die grösste Leistung menschlichen Denkens über die Natur, die erstaunlichste Vereinigung von philosophischer Tiefe, physikalischer Intuition und mathematischer Kunst. Ich bewundere sie wie ein Kunstwerk."

La gravitation newtonienne ($\vec{\nabla} \wedge \vec{g} = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 4\pi G\rho$, ou $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$, $\Delta\Phi = -4\pi G\rho$) est incompatible avec la relativité restreinte (action à distance) : comme la notion de simultanéité dépend du système de coordonnées, le champ \vec{g} newtonien en un point p donné dépend du système inertiel et n'a pas d'interprétation physique.

Einstein (comme aussi d'autres) a d'abord essayé de remplacer $\Delta\Phi$ par $\square\Phi$ (et, p.ex. ρ par T_{μ}^{μ}) mais dans les équations de mouvement pour les particules testées qu'il a trouvé avec cet essai, l'accélération d'une particule dans un champ gravitationnel vertical dépend de l'énergie cinétique de la particule, et donc de sa vitesse horizontale.

Ce résultat était incompatible avec l'expérience que tous les corps subissent la même accélération gravitationnelle, l'égalité de la masse lourde et de la masse inertielle, qu'Einstein a immédiatement reconnu comme vérité profonde.

Einstein a travaillé environ 10 ans pour trouver la relativité générale. Un jour, il a écrit à Sommerfeld sur ses travaux concernant la relativité générale :

"...Aber das eine ist sicher, dass ich mich im Leben noch nicht annähernd so geplagt habe, und dass ich grosse Hochachtung für die Mathematik eingeflössst bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt für puren Luxus ansah! Gegen dieses Problem ist die ursprüngliche Relativitätstheorie eine Kindelei..."

Dans la relativité générale (rg), la structure de l'espace-temps de la relativité restreinte est généralisée. La base de cette généralisation est le **principe d'équivalence**, d'après lequel la gravitation peut être éliminée localement dans un système sans rotation en chute libre. C'est-à-dire qu'infinimentalement, par rapport à un tel système inertiel **local**, la relativité restreinte (rr) est valable.

Mais la métrique **varie** d'un point à l'autre. En langage mathématique : l'es-

²Mis à part un petit décalage du périhélie de Mercure :y après les corrections perturbatives dues à l'influence des planètes ($\sim 500''$ par siècle) il est resté environ $43''$ par siècle inexplicés par la gravitation newtonienne

pace temps forme une variété pseudo-riemannienne. La métrique g a la signature $(-, +, +, +)$ (variété lorentzienne) et elle ne décrit pas seulement les propriétés métriques et causales de l'espace temps mais aussi le champ gravitationnel. Elle devient alors un élément dynamique et elle est liée au tenseur énergie-impulsion par les équations de champ einsteiniennes.

La rg unifie donc géométrie et gravitation. C'est un fait mathématique que pour tout point sur une variété lorentzienne donné on trouve des coordonnées locales telles que

$$1. \quad (g_{\mu\nu}(x)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0.$$

Nous appelons un tel système de coordonnées un système inertiel local au point x . Dans un tel système le champ gravitationnel est localement éliminé et les équations de la relativité restreinte sont valables. Le principe d'équivalence dictera la forme des équations du mouvement d'une particule, les équations de Maxwell, etc. en présence des champs gravitationnels.

Les équations de champ einsteiniennes, qui lient la métrique g aux masses et énergies présentes, forment la partie centrale de la relativité générale (voir chapitre 9).

Einstein les a trouvées après des années de recherche intensive. Ce sont des équations différentielles partielles **non-linéaires** qui lient g avec le tenseur énergie-impulsion de la matière. On peut montrer que, avec quelques conditions de base, elles sont (presque) uniquement déterminées.

Einstein pouvait aussi montrer que dans la limite des faibles vitesses et pour des champs gravitationnels faibles on retrouve la gravitation newtonienne. En plus, il pouvait dériver la périhélie de Mercure comme correction relativiste de la gravitation.

Après tous ces succès Einstein dit une fois :

"Im Lichte bereits erlangter Erkenntnis erscheint das glücklich erreichte fast wie selbstverständlich, und jeder intelligente Student erfasst es ohne zu grosse Mühe. Aber das ahnungsvolle, Jahre währende Suchen im Dunkeln mit seiner gespannten Sehnsucht, seiner Abwechslung von Zuversicht und Ermattung und seinem endlichen Durchbrechen zur Wahrheit, das kennt nur, wer es selber erlebt hat."

En premier lieu, la rg trouvée en 1915 avait peu d'influence sur le développement de la physique. Les années 20 ont mené à une théorie quantique de l'électrodynamique. Plus tard (années 40-60) le modèle standard des particules a été développé, et on a démontré que la gravitation ne se laisse pas quantifier de façon perturbative comme les interactions du modèle standard (elle n'est pas renormalisable).

Depuis les années 80 les efforts principaux de la physique théorique fondamentale sont en direction d'une théorie quantique de la gravitation (supercordes, M-theory,

le programme de Ashtekar,...).

Aussi en physique expérimentale observationnelle, la rg n'a longtemps pas joué un rôle important. Mais de nos jours beaucoup de phénomènes astrophysiques (émission de rayons X, sursauts gamma, quasars,...) sont attribués aux interactions des étoiles à neutrons et aux trous noirs avec leurs environs. Aussi en cosmologie la rg est indispensable.

Les Prix Nobel liés à la rg sont :

- Penzias & Wilson (1978) : découverte du rayonnement de fond cosmologique
- Hulse & Taylor (1993) : découverte indirecte du rayonnement gravitationnel par les études de pulsars binaires.
- Et peut-être aussi un peut celui de Chandrasekhar et Fowler (1983) pour la limite de masse des naines blancs et la nucléosynthèse primordiale dans l'univers.
- (Mais pas celui de Einstein !)

Chapitre 7

Le principe d'équivalence

7.1 Propriétés caractéristiques de la gravitation

La gravitation est la plus faible des interactions. Pour voir ce fait, comparons la force gravitationnelle et la force électromagnétique entre deux électrons. Nous trouvons

$$\frac{Gm_e^2}{r^2} = 0.2 \cdot 10^{-42} \frac{e^2}{r^2}.$$

L'analogie gravitationnelle de la constante de couplage électromagnétique $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137}$ est alors

$$\alpha_G := \frac{Gm_e^2}{\hbar c} \cong 1.5 \cdot 10^{-45}.$$

Pour mieux saisir ce nombre minuscule, nous comparons le rayon de Bohr d'un atome d'hydrogène avec le rayon gravitationnel correspondant

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{c^{-1} \hbar}{m_e \alpha} \cong 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

$$(a_B)_G = \frac{\hbar^2}{m_e G m_e m_p} = \frac{c^{-1} \hbar}{m_p \alpha_G} = \frac{m_e}{m_p} \frac{\alpha}{\alpha_G} \cdot a_B \sim 10^{31} \text{ cm} \cong 10^{13} \text{ années lumières}$$

Plus grand que le rayon de l'univers observable ($R_H \sim 1.4 \cdot 10^{10}$ a.l.).

Pour cette raison, les corrections d'une théorie quantique de la gravitation pour la physique atomique sont négligeables. La gravitation intervient significativement seulement pour les masses importantes. A grandes distances la gravitation l'emporte parcequ'elle n'est pas seulement à longue portée (comme aussi l'électromagnétisme) mais aussi universellement attractive. Chaque forme d'énergie est source d'un champ gravitationnel : matière, anti-matière, énergie cinétique, ... En plus, la gravitation agit sur chaque forme d'énergie.

Universalité : Le mouvement d'un corps test dans un champ gravitationnel est

indépendant de sa masse et de sa composition (égalité de la masse lourde et de la masse inerte).

Cette universalité a été testée expérimentalement à une précision de $1 : 10^{13}$.

Principe d'équivalence : Aucune expérience locale ne peut distinguer un système sans rotation, en chute libre d'un système en mouvement non-accéléré dans un espace sans gravitation.

Remarque 7.1

- La formulation mathématique précise de ce principe suivra.
- Le principe d'équivalence implique l'égalité entre la masse gravitationnelle et la masse inerte, mais pas vice-versa (voir exercices !)

Le décalage vers le rouge (redshift) comme conséquence du principe d'équivalence D'après le principe d'équivalence, tous les effets d'un champ gravitationnel homogène sont identiques aux phénomènes dans un système accéléré avec une accélération constante dans un espace sans gravitation.

Considérons donc deux expérimentateurs dans une fusée à accélération \vec{g} constante. Au temps $t = 0$, l'expérimentateur 1 envoie un photon vers 2. Supposons que la

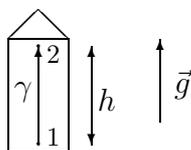


FIG. 7.1 – Expérimentateurs dans une fusée sous une accélération constante \vec{g}

fusée soit au repos au temps $t = 0$ par rapport à notre système inertiel. Au temps $t = \frac{h}{c}$ le photon arrive en 2 (nous négligeons les corrections d'ordre $\frac{v}{c}$). Mais à ce temps là 2 a déjà une vitesse $v = gt = g\frac{h}{c}$. Il observe donc le photon avec un décalage Doppler $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cong \frac{v}{c}$. C'est-à-dire $z = \frac{gh}{c^2}$.

D'après le principe d'équivalence le même décalage est aussi trouvé dans un champ gravitationnel homogène \vec{g} . Dans ce cas nous pouvons écrire $z = \frac{gh}{c^2} = \frac{\Delta\Phi}{c^2}$, où Φ est le potentiel newtonien, et donc

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2} \quad (7.1)$$

Cet effet a vraiment été observé dans des expériences terrestres (Pound & Snider, 1965).

A l'heure où Einstein a prédit ce décalage gravitationnel (1907), on n'avait pas

encore les moyens expérimentaux pour l'observer directement, mais on peut s'en convaincre aussi à l'aide d'un argument de conservation d'énergie :

Prenons à nouveau 2 points 1 et 2 à distance h dans un champ gravitationnel homogène \vec{g} . On suppose qu'une masse m soit en chute libre à vitesse initiale 0

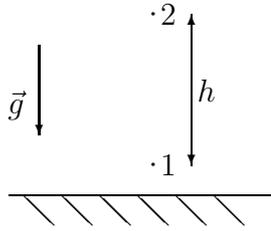


FIG. 7.2 – Configuration pour la deuxième expérience

de 2 à 1. Au point 1 elle a l'énergie cinétique mgh . Supposons que toute l'énergie de cette masse ($mc^2 + mgh$) soit transformée en un photon à 1 qui remonte vers 2. Si ce photon n'interagissait pas avec le champ gravitationnel et ne subissait aucun décalage vers le rouge, nous pourrions de nouveau le transformer en une particule de masse m en ayant gagné une énergie mgh dans ce processus circulaire, et donc un perpetuum mobile. Pour sauver la conservation de l'énergie, le photon doit perdre de l'énergie en montant :

$$E_1 = 2\pi\hbar\nu_1 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} = E_2 + mgh = mc^2 + mgh = E_2 \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right).$$

Ce qui donne un décalage

$$1 + z = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{E_1}{E_2} = 1 + \frac{gh}{c^2}$$

ce qui correspond à 7.1.

7.2 La relativité restreinte et la gravitation

Ici nous voulons brièvement montrer que la gravitation, et surtout le redshift des photons et la déviation de la lumière, ne peut pas être formulée dans le cadre de la relativité restreinte.

Redshift :

Dans le cadre de la relativité restreinte, une horloge en mouvement le long d'une

ligne d'univers $x^\mu(\lambda)$ de $x^\mu(\lambda_1)$ à $x^\mu(\lambda_2)$ montre une différence de temps

$$\Delta\tau = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad \text{où} \quad (\eta_{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Comme nous le démontrons ici, cette formule ne peut pas être valable en présence de champs gravitationnels :

Supposons l'existence d'une théorie de la gravitation compatible avec la relativité restreinte. Nous considérons l'expérience de redshift suivante : Le champ gravita-

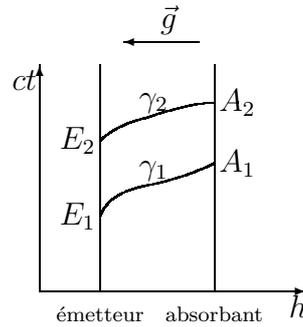


FIG. 7.3 – Dispositif pour cette expérience

tionnel est considéré comme statique par rapport au système inertiel indiqué. L'émetteur émet à fréquence constante de E_1 à E_2 . Comme la situation est statique, un photon émis à E_1 bouge parallèlement à celui émis à E_2 (mais non nécessairement à 45° à cause de la présence du champ gravitationnel).

Mais si la relativité restreinte était valable pour la mesure du temps, la distance temporelle entre E_2 et E_1 serait égale à celle entre A_2 et A_1 , ce qui est en contradiction avec le redshift.

Déviation : Si les relations de causalité étaient déterminées par la relativité restreinte, les cônes de lumière seraient toujours des cônes droits et la lumière bougerait le long des droites, ce qui contredit la déflexion de la lumière dans un champ gravitationnel qui a été observé empiriquement (pour la première fois lors d'une éclipse en 1919). Donc la métrique ne peut pas être conformement plat, c'est-à-dire de la forme $\exp(\Phi)\eta_{\mu\nu}$ avec un champ scalaire Φ , parce que dans cette forme le cône de lumière reste inchangé.

De plus, d'après le principe d'équivalence on ne peut pas distinguer empiriquement un système en chute libre (qui est un système avec des coordonnées relatives) d'un système inertiel. Mais la loi d'inertie ($\ddot{x}^\mu = 0$) n'est pas valable en chute libre. Il n'existe alors plus la possibilité de définir ce qui est un "système inertiel" de façon opérationnelle.

Avec cela nous avons perdu la base de la relativité restreinte ! (et aussi la raison

de représenter l'espace-temps par un espace affine dont la loi d'inertie a été à la base!)

7.3 L'espace-temps comme variété lorentzienne : formulation mathématique du principe d'équivalence

Dans la section précédente nous avons argumenté que l'espace-temps en présence de champs gravitationnels ne peut plus être représenté par un espace de Minkowski. Mais nous avons vu que la relativité restreinte est quand même valable infinitésimalement d'après le principe d'équivalence. A chaque point p une métrique ($g_{\mu\nu}(p)$) est donc spécifiée mais, en général, cette métrique varie de point à point, telle qu'il n'existe pas de système de coordonnées avec $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ pour tout x .

”Définition” : Le modèle mathématique de l'espace-temps (c'est-à-dire pour l'ensemble des événements) est une variété pseudo-riemmanienne \mathcal{M} avec une métrique de signature lorentzienne $(-, +, +, +)$. Une telle variété (\mathcal{M}, g) est appelée **variété lorentzienne**.

Exercice : Montrer que la signature de la métrique d'une variété pseudo-riemmanienne ne peut pas changer d'un point à l'autre.

La métrique détermine (comme dans la relativité restreinte) les relations de causalité : les signaux optiques envoyés de l'événement $x \in \mathcal{M}$ forment le cône de lumière future, L^+ . Les signaux optiques convergents en x forment le cône de lumière passé, L^- . Nous supposons que la distinction entre les cônes futur et passé soit possible de façon continue, au moins localement (c'est-à-dire que (\mathcal{M}, g) soit orientable dans le temps).

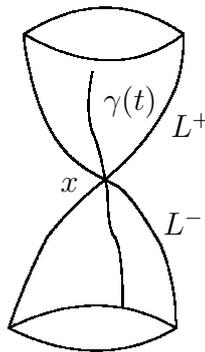


FIG. 7.4 – Le cône de lumière passé et futur. Le vecteur $\dot{\gamma}(t)$, la tangente au cône de lumière, et genre lumière, $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$.

Définition 7.1

- Une ligne d'univers est appelée **genre temps** si son vecteur tangent $\dot{\gamma}$ est à chaque point (événement) à l'intérieur du cône de lumière.
- Elle est appelée **genre lumière** si $\dot{\gamma}$ est tangent au cône de lumière.
- Elle est appelée **genre espace** si $\dot{\gamma}$ est à l'extérieur du cône de lumière.

La métrique g est interprétée comme champ gravitationnel (potentiel gravitationnel) \Leftrightarrow le champ gravitationnel et les propriétés métriques et causales de l'espace-temps sont décrites par la même grandeur g .

Dans une variété lorentzienne il n'existe en général pas de système de coordonnées distingué (sauf dans des cas symétriques).

Il est donc évident que les lois de la physique doivent se transformer de façon covariante sous des transformations de coordonnées dans le sens de la définition suivante :

Définition 7.2 (système d'équations covariant) *Un système d'équations est appelé **covariant** par rapport au groupe des transformations de coordonnées, $\mathcal{G}(\mathcal{M})$, si chaque élément $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$ applique les grandeurs dans les équations dans des nouvelles grandeurs telles que*

1. Cette application respecte la structure du groupe $\mathcal{G}(\mathcal{M})$.
2. Les grandeurs transformées satisfont aussi le système d'équations.

Seules des lois covariantes ont un sens intrinsèque, c'est-à-dire indépendant du système de coordonnées. En utilisant le langage géométrique adapté il est possible de les formuler sans usage de coordonnées.

Comme nous l'avons démontré dans la première partie, en chaque point $x_0 \in \mathcal{M}$ il existe un système de coordonnées (système géodésique ou normal) tel que

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu,\lambda}(x_0) = 0. \quad (7.3)$$

Un tel système est appelé un système inertiel local. Dans ce système les lois physiques ont la même forme qu'en relativité restreinte au point x_0 .

Dans le paragraphe suivant les deux conditions ci-dessous nous permettront de formuler les lois physiques en présence de champs gravitationnels :

1. A part la métrique et ses dérivées, les équations ne contiennent que des grandeurs qui sont déjà présentes dans leur formulation dans le cadre de la relativité restreinte.
2. Les équations sont covariantes et se réduisent à leur forme "restreinte" dans un système géodésique (7.3) au point x_0 .

Ces deux conditions expriment le principe d'équivalence de façon mathématique.

7.4 Les lois physiques en présence des champs gravitationnels

(à partir de maintenant $c = 1$).

7.4.1 Equation du mouvement d'une particule test dans un champ gravitationnel

Dans un système inertiel local au point $p \in \mathcal{M}$ nous avons pour la trajectoire $x(s)$ d'une particule test d'après le principe d'équivalence de la relativité restreinte :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0, \quad (7.4)$$

où s est la longueur d'arc, c'est-à-dire

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = -1. \quad (7.5)$$

Avec $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha, \beta} + g_{\nu\beta, \alpha} - g_{\alpha\beta, \nu})$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(p) = 0$, l'équation (7.4) au point p est aussi

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0 \quad (\dot{x} = \frac{dx^\alpha}{ds} \partial_\alpha) \quad (7.6)$$

Mais l'équation (7.6) est généralement covariante et alors valable dans chaque système de coordonnées et à chaque point p de la trajectoire (comme le choix de p était arbitraire).

Comme \dot{x} est parallèlement transporté le long de la trajectoire, il suit que $g(\dot{x}, \dot{x}) = \text{const} = -1$ le long de la trajectoire.

Pour des rayons de lumière $x^\mu(\lambda)$ avec un paramètre affine λ , nous avons

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (7.7)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (7.8)$$

Cette équation de mouvement est aussi obtenue du principe de variation à partir de l'action

$$S = \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds. \quad (7.9)$$

En effet, $\delta S = 0$ donne

$$0 = \delta \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds = \int \delta x^\lambda \left[g_{\mu\nu, \lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - 2 \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \right] ds \quad (7.10)$$

pout toute variation δx^λ . Il suit alors

$$0 = g^{\alpha\lambda}(g_{\mu\nu,\lambda} - 2g_{\mu\lambda,\nu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - 2 \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2},$$

ou, avec $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (7.11)$$

7.4.2 "Conservation" de l'énergie-impulsion en présence d'un champ gravitationnel

En relativité restreinte, le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ d'un système fermé satisfait la loi de conservation

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$

Dans un système inertiel en p ($\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(p) = 0$) ceci est équivalent à

$$T^{\mu\nu}_{;\nu}(p) = T^{\mu\nu}_{,\nu}(p) + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(p)T^{\nu\alpha}(p) + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu(p)T^{\mu\alpha}(p) = 0 \quad (7.12)$$

Exemple 7.1 Pour un fluide parfait à densité d'énergie ρ et pression p où u^μ est la champ du flux d'énergie,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1) \quad (7.13)$$

7.4.3 Electrodynamique en présence de champs gravitationnels

Soit comme d'habitude

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

où $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B_k$. Les équations de Maxwell de la relativité restreinte sont

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = -4\pi j^\mu \quad (7.15)$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (7.16)$$

$$(j^\mu) = (\rho, \vec{J}) \text{ est le quadri-courant électrique.} \quad (7.17)$$

En présence de champs gravitationnels nous définissons $F_{\mu\nu}$ et j^μ de telle façon qu'ils se transforment comme des champs tensoriels et qu'ils se réduisent à (7.14) et (7.17) dans un système inertiel au point p .

En présence d'un champ gravitationnel (7.15) et (7.16) deviennent

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = -4\pi j^\mu \quad (7.18)$$

$$F_{\mu\nu ;\lambda} + F_{\lambda\mu ;\nu} + F_{\nu\lambda ;\mu} = 0 \quad (7.19)$$

(7.19) est identique à (7.16) !

La condition d'intégrabilité (7.16) ou (7.19) permet la représentation par un potentiel électromagnétique :

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu ;\nu} - A_{\nu ;\mu} = A_{\mu ;\nu} - A_{\nu ;\mu}$$

Avec le potentiel électromagnétique A_μ , l'équation (7.18) s'écrit

$$A^{\mu ;\nu}{}_{;\nu} - A^{\nu ;\mu}{}_{;\nu} = -4\pi j^\mu. \quad (7.20)$$

Le tenseur énergie impulsion du champ électromagnétique est

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left[F_{\lambda}^{\mu} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\sigma\lambda} F_{\sigma\lambda} \right]. \quad (7.21)$$

L'équation de lorentz en présence d'un champ gravitationnel est

$$m \left(\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) = e F_{\nu}^{\mu} \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (7.22)$$

Ambiguïtés :

Sans champ gravitationnel (7.20) est

$$A^{\mu ;\nu}{}_{;\nu} - A^{\nu ;\mu}{}_{;\nu} = -4\pi j^\mu \quad (7.23)$$

Comme les dérivées partielles commutent, ceci est équivalent à

$$A^{\mu ;\nu}{}_{;\nu} - A^{\nu ;\mu}{}_{;\nu} = -4\pi j^\mu. \quad (7.24)$$

Mais, dans un champ gravitationnel la deuxième expression donne

$$A^{\mu ;\nu}{}_{;\nu} - A^{\nu ;\mu}{}_{;\nu} + R_{\nu}^{\mu} A^{\nu} = -4\pi j^\mu \quad (7.25)$$

où R_{ν}^{μ} est le tenseur de Ricci.

Le principe d'équivalence ne dit pas laquelle des équations (7.20) et (7.25) sera la bonne en présence de champs gravitationnels.

La transition de la relativité restreinte à la relativité générale contient de telles possibilités de "couplages non-minimaux" dès que l'on rencontre des dérivées supérieures. Cette ambiguïté est comparable à l'ambiguïté de l'ordre des opérateurs dans la transition de la mécanique classique à la mécanique quantique.

En pratique de tels problèmes sont rares (au cas (7.20) et (7.25) il faut regarder les équations de maxwell originales, (7.18), et donc se décider pour (7.20) et non pour (7.25)) mais il n'existe pas de prescription générale pour les résoudre.

7.4.4 La limite newtonienne

Pour des particules en mouvement lent, $(u^\mu) = (\dot{x}^\mu) = \gamma(1, \vec{v})$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $v^2 \ll 1$ dans un champ gravitationnel faible

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Nous pouvons négliger $|\frac{dx^i}{dt}| \sim |v^i|$ à côté de $\frac{dx^0}{dt} \sim 1$.
L'équation (7.6) nous donne alors ($\gamma \sim 1$)

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \cong \frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \cong -\Gamma_{00}^i \cong +\frac{1}{2} h_{00,i} - h_{0i,0}. \quad (7.26)$$

Si nous supposons aussi que le champ gravitationnel change très lentement dans le temps, nous pouvons négliger le terme $h_{0i,0}$, et nous obtenons

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00}. \quad (7.27)$$

Pour

$$h_{00} = -2\Phi, \quad g_{00} = -\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) \quad (7.28)$$

nous retrouvons l'équation de Newton

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi.$$

Eq. (7.28) est déterminée à une constante près. Celle-ci peut être fixée par des conditions de bord, par exemple

$$h_{00}(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \Phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$$

où en g_{00} nous avons pour une fois mis c .

Exemples 7.2 $\frac{\Phi}{c^2}$ est environ :

- 10^{-9} sur la Terre ;
- $2 \cdot 10^{-6}$ à la surface du Soleil
- 10^{-4} sur une naine blanche
- 10^{-1} sur une étoile à neutrons
- 10^{-39} "sur un proton"

7.4.5 Le décalage vers le rouge dans un champ gravitationnel statique

Nous définissons d'abord (définition intrinsèque plus tard) un champ gravitationnel **statique** par un espace-temps avec un système de coordonnées (t, x^i) tel que la métrique prenne la forme

$$ds^2 = g_{00}(\vec{x})dt^2 + g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j.$$

Il existe une foliation de l'espace-temps $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \mathcal{S} \ni (t, \vec{x})$ telle que \mathcal{S} soit un espace riemannien avec métrique

$$g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j \quad \text{et} \quad g(\partial_t, X) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{S}).$$

Le temps propre τ d'un observateur sur la trajectoire $(t, \vec{x}(t))$ satisfait

$$-\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \quad (7.29)$$

(d'après le principe d'équivalence!).

Pour une montre au repos dans le système (t, x^i) , c'est-à-dire $\frac{dx^i}{dt} = 0$, cela donne

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt$$

au point \vec{x}_2 nous émettons des éclairs de lumière à distance temporelle $d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt_2$, périodiquement.

Comme la métrique ne dépend pas du temps t , la différence de temps d'arrivée entre les deux éclairs au point \vec{x}_1 , dt'_1 , est égale à la différence de temps d'émission

$$dt'_1 = dt_2 = \frac{d\tau}{\sqrt{-g_{00}(\vec{x}_2)}}.$$

D'un autre côté le même processus physique au point \vec{x}_1 a la même "période propre" $d\tau$ mais alors un différent temps dt_1 qui s'écoule :

$$dt_1 = \frac{d\tau}{\sqrt{-g_{00}(\vec{x}_1)}}.$$

Si nous comparons alors la fréquence ν_2 d'un signal arrivant du point 2 avec la fréquence ν_1 du même signal produit au point 1 nous obtenons

$$\nu_2 \propto \frac{1}{dt'_1}, \quad \nu_1 \propto \frac{1}{dt_1}, \quad \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(\vec{x}_2)}{g_{00}(\vec{x}_1)}}. \quad (7.30)$$

Pour des champs gravitationnels faibles $g_{00} \cong -(1 + 2\Phi)$, cela donne la décalage vers le rouge

$$z := \frac{\nu_1}{\nu_2} - 1 \cong \Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2). \quad (7.31)$$

La lumière du Soleil arrive sur Terre avec un décalage $z \sim 2 \cdot 10^{-6}$. Cet effet n'est pas observable à cause de la "largeur thermique" des lignes dans le spectre solaire.

7.4.6 Le principe de Fermat pour des champs gravitationnels statiques

Nous considérons à nouveau une métrique de la forme

$$ds^2 = g_{00}(\vec{x})dt^2 + g_{ik}dx^i dx^k.$$

Soit $x^\mu(\lambda)$ un rayon de lumière avec $x_1 = x(0)$ et $x_2 = x(1)$. L'équation géodésique pour $x^\mu(\lambda)$ implique (7.11),

$$\delta \int_0^1 g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda = 0. \quad (7.32)$$

Nous considérons d'abord seulement la variation de $t(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda &= \int_0^1 2g_{00} \frac{dt}{d\lambda} \delta \left(\frac{dt}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \left(2g_{00} \frac{dt}{d\lambda} \right) \delta t d\lambda. \end{aligned}$$

Comme δt est arbitraire, il suit que

$$g_{00} \frac{dt}{d\lambda} = \text{const.}$$

Nous choisissons le paramètre λ tel que

$$g_{00} \frac{dt}{d\lambda} = 1. \quad (7.33)$$

Pour une trajectoire quelconque (genre lumière) nous avons

$$\begin{aligned} -g_{00} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 &= g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \\ \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{\sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}}}{\sqrt{-g_{00}}}. \end{aligned}$$

Il suit alors de $0 = \delta \int g_{00} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 d\lambda$, et avec éq. (7.33)

$$0 = \delta \int \left(\frac{dt}{d\lambda} \right) d\lambda = \delta \int \frac{d\sigma}{\sqrt{-g_{00}}} \quad \text{où} \quad d\sigma^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Donc $1/\sqrt{-g_{00}}$ joue le rôle d'un indice de réfraction. Dans un espace-temps statique, la trajectoire **spatiale** d'un rayon de lumière est une géodésique de la métrique $\frac{g_{ij}}{-g_{00}}$ sur \mathcal{S} !

7.4.7 Champs gravitationnels statiques et stationnaires

Naïvement, un champ gravitationnel est stationnaire s'il existe un système de coordonnées tel que la métrique ne dépend pas du temps $t = x^0$.

Nous voulons ici traduire cette notion intuitive à une description géométrique : si $K = \partial_t$,

$$\partial_t g_{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K^\lambda g_{\mu\nu, \lambda} + g_{\lambda\nu} K_{, \mu}^\lambda + g_{\mu\lambda} K_{, \nu}^\lambda \equiv L_K g = 0$$

Ceci mène à la définition importante d'un vecteur de killing :

Définition 7.3 (champ de killing) *Un champ vectoriel K tel que*

$$L_K g = 0 \tag{7.34}$$

*est appelé un **champ de killing** pour la métrique g .*

Chaque champ de killing engendre un groupe d'isométries à un paramètre :

$$\text{Si } \Phi_{s,t} \text{ est le flot de } K, \Phi_{s,t}^* g = g. \tag{7.35}$$

Définition 7.4 (métrique stationnaire) *La métrique d'une variété lorentzienne (\mathcal{M}, g) est appelée **stationnaire** s'il existe un champ de killing genre temps.*

De cette définition, il suit l'existence de coordonnées locales par rapport auxquelles g est indépendante du temps. Pour les construire, nous considérons, dans un voisinage d'un point p_0 , une hypersurface S tri-dimensionnelle qui n'est pas tangente à K , i.e. $K(p) \notin T_p S$ pour tout p dans un voisinage de p_0 .

Soit $x^1(p)$, $x^2(p)$ et $x^3(p)$ des coordonnées sur S et $\Phi_t = \Phi_{t,0}$ le flot de K . En un point $q = \Phi_t(p)$ nous choisissons les coordonnées $(t, x^1(p), x^2(p), x^3(p))$. Avec cette construction $K = \partial_t = \partial_{x^0}$ et

$$L_K g = 0 \quad \text{est équivalent à} \quad g_{\mu\nu, 0} = 0 .$$

Il peut arriver qu'un champ de killing soit genre temps dans un certain domaine, genre espace dans un autre et genre lumière au bord (voir trou noir).

Définition 7.5 (métrique statique) *Une métrique stationnaire est appelée **statique** si la 1-forme K^\flat satisfait*

$$K^\flat \wedge dK^\flat = 0 . \tag{7.36}$$

Nous voulons montrer que dans ce cas les surfaces S peuvent être choisies telles que K soit même normale à S et donc que $g_{i0} = 0$.

C'est en effet une conséquence d'un théorème de Frobenius : nous posons $K(p)^\perp =: \{X_p \in T_p\mathcal{M} \mid g_p(X_p, K(p)) = 0\}$. Si l'éq. (7.36) est satisfait, la distribution $\{K(p)^\perp \mid p \in \mathcal{M}\}$ est localement intégrable. C'est-à-dire, localement

$$K^\flat = (K, K)df \quad (7.37)$$

pour une fonction f . Les surfaces $\{f = \text{const}\}$ sont alors normales à K . Nous montrons l'existence de la fonction f dans (7.37). Dans un système de coordonnées normales au point p , (7.34) implique $K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0$. Nous avons alors dans un système de coordonnées quelconque

$$K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0. \quad (7.38)$$

$$K^\flat \wedge dK^\flat = (K_\mu K_{\nu;\lambda} + K_\nu K_{\lambda;\mu} + K_\lambda K_{\mu;\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda = 0.$$

Comme $K_{\nu;\lambda} dx^\nu \wedge dx^\lambda = K_{\nu;\lambda} dx^\nu \wedge dx^\lambda$, nous pouvons remplacer toutes les dérivées ordinaires dans cette expression par des dérivées covariantes. Ceci donne

$$K_\mu \underbrace{K_{\nu;\lambda}}_{-K_{\lambda;\nu}} + K_\nu K_{\lambda;\mu} + K_\lambda K_{\mu;\nu} = 0.$$

En multipliant par K^λ nous obtenons

$$-K_\mu \underbrace{K^\lambda K_{\lambda;\nu}}_{\frac{1}{2}\langle K, K \rangle_{;\nu}} + K_\nu \underbrace{K^\lambda K_{\lambda;\mu}}_{\frac{1}{2}\langle K, K \rangle_{;\mu}} + K^\lambda K_\lambda \cdot \underbrace{K_{\mu;\nu}}_{\frac{1}{2}(K_{\mu;\nu} - K_{\nu;\mu})} = 0$$

et alors

$$-K_\mu \langle K, K \rangle_{;\nu} + K_\nu \langle K, K \rangle_{;\mu} + \langle K, K \rangle (K_{\mu;\nu} - K_{\nu;\mu}) = 0.$$

Ceci peut être écrit comme

$$\left(\frac{K_\mu}{\langle K, K \rangle} \right)_{;\nu} - \left(\frac{K_\nu}{\langle K, K \rangle} \right)_{;\mu} = 0 \quad \text{donc} \quad d \left(\frac{K^\flat}{\langle K, K \rangle} \right) = 0.$$

C'est-à-dire

$$K^\flat = \langle K, K \rangle df =: \langle K, K \rangle dt$$

Ce que nous voulions démontrer.

Conclusions : (pour $df \equiv dt$) :

- Le flot Φ_s de K applique les hypersurfaces $t = \text{const}$ de façon isométrique.
- Un observateur au repos propage le long des courbes intégrales à K .
- S'il existe un seul champ de Killing de genre temps satisfaisant à l'éq. (7.36), il existe un temps distingué t avec $dt = \frac{K^\flat}{\langle K, K \rangle}$.
- Pour $S = \{t = \text{const}\}$, les coordonnées lagrangiennes introduites pour le cas stationnaire mènent dans le cas statique à une métrique de la forme

$$ds^2 = g_{00}(\vec{x})dt^2 + g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j, \quad (7.39)$$

ce qui coïncide avec notre définition naïve d'une métrique statique.

7.5 Des référentiels locaux et le transport de Fermi

Ici nous discutons les questions de référentiels et forces inertielles.

Nous considérons une observatrice dans un vaisseau spatial qui bouge le long d'une ligne d'univers genre temps dans un champ gravitationnel, pas nécessairement le long d'une ligne géodésique. Elle définit un système de coordonnées fixées au vaisseau par rapport auquel les appareils dans le vaisseau spatial sont au repos. Nous posons les questions suivantes :

1. Quelles sont les équations du mouvement d'une particule test en chute libre dans ce système de coordonnées ?
2. Comment faut-il orienter le vaisseau pour éviter des forces centrifuges et des forces de Coriolis ?
3. Comment bouge une toupie libre ?
4. Dans un champ gravitationnel stationnaire, existe-t-il un référentiel distingué de repos ? Dans quel cas la toupie libre ne précesse-t-elle pas dans ce référentiel et quelle est son équation du mouvement ?

7.5.1 Equation du mouvement d'un spin dans un champ gravitationnel

Le spin peut être la valeur moyenne de l'opérateur de spin d'une particule où le vecteur de moment cinétique (d'un compas gyroscopique).

Le spin est d'abord défini par rapport au système de repos de la particule (du gyroscope). Là il est donné par un vecteur à trois composantes, \vec{S} . Sans forces externes, il est dans le système de repos

$$\frac{d}{dt}\vec{S}(t) = 0 \quad (\text{dans le référentiel du repos}). \quad (7.40)$$

Nous définissons un quadri-vecteur S qui se réduit à $(0, \vec{S})$ dans le référentiel de repos d'une particule qui bouge avec quadri-vitesse u . Ceci implique

$$\langle u, S \rangle = 0. \quad (7.41)$$

En absence de champs gravitationnels et dans le référentiel au repos ou $u = (1, \vec{0})$

$$(\nabla_u S)_R = \frac{d}{dt}S = \left(\frac{d}{dt}S^0, \frac{d}{dt}\vec{S} \right) = \left(\frac{d}{dt}S^0, \vec{0} \right).$$

Mais

$$0 = \nabla_u \langle u, S \rangle = \underbrace{\langle \nabla_u u, S \rangle}_a + \langle u, \nabla_u S \rangle$$

où a est l'accélération. Nous avons alors

$$\langle u, \nabla_u S \rangle = -\langle a, S \rangle \quad (7.42)$$

Mais dans le référentiel de repos

$$\langle \nabla_u S, u \rangle_R = -\frac{dS^0}{dt} = -\langle a, S \rangle .$$

Ceci donne

$$(\nabla_u S)_R = (\langle a, S \rangle, \vec{0}) = (\langle a, S \rangle u)_R . \quad (7.43)$$

Mais (7.43) est une équation covariante. Elle est alors valable dans n'importe quel référentiel et, à cause du principe d'équivalence, aussi en présence de champs gravitationnels. L'équation covariante recherchée est alors

$$\nabla_u S = \langle a, S \rangle u, \quad a := \nabla_u u. \quad (7.44)$$

Il est évident que (7.44) est compatible avec (7.41).

Application : Précession de Thomas (relativité restreinte) :

Nous considérons une particule (toupie) qui bouge avec quadri-vitesse u en **absence** de champs gravitationnels. Nous avons alors

$$u = \gamma(1, \vec{\beta}) \quad , \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \beta^2 < 1 \quad (7.45)$$

Dans le référentiel de repos $S_R = (0, \vec{S}(t))$.

Dans le référentiel du laboratoire, S_L est obtenu par le boost $\Lambda(-\vec{\beta}(t))$:

$$S \equiv S_L = (\gamma \vec{\beta} \cdot \vec{S}, \vec{S} + \vec{\beta} \left(\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{S})) . \quad (7.46)$$

Avec

$$a \equiv \dot{u} = (\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \vec{\beta} + \gamma \dot{\vec{\beta}}) = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} u + \gamma(0, \dot{\vec{\beta}}) \quad (7.47)$$

nous obtenons alors avec $\langle S, u \rangle = 0$:

$$\langle S, a \rangle = \langle S, \dot{u} \rangle = \gamma \langle (0, \dot{\vec{\beta}}), S \rangle = \gamma (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{S} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta}) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}))$$

(7.44) donne alors pour la composante 0

$$(\gamma \vec{\beta} \cdot \vec{S}) \dot{} = \gamma^2 \left(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{S} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta}) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \right) \quad (7.48)$$

et pour les composantes spatiales

$$(\vec{S} + (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}) \dot{} = \vec{\beta} \gamma^2 \left(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{S} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta}) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \right) . \quad (7.49)$$

La combinaison de (7.48) et (7.49) donne (exercice!) :

$$\dot{\vec{S}} = \vec{S} \wedge \vec{\omega}_T, \quad \text{avec} \quad (7.50)$$

$$\vec{\omega}_T = \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}. \quad (7.51)$$

$\vec{\omega}_T$ est la **fréquence de précession de Thomas**.

7.5.2 Le transport de Fermi

Définition 7.6 (dérivée de Fermi) Soit $\gamma(s)$ un chemin genre temps avec vecteur tangent $u = \dot{\gamma}$, $\langle u, u \rangle = -1$.

Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. La **dérivée de Fermi** de X le long de γ est définie par

$$\mathbb{F}_u X := \nabla_u X - \langle X, a \rangle u + \langle X, u \rangle a, \quad (7.52)$$

avec $a := \nabla_u u$.

Comme $\langle S, u \rangle = 0$, l'équation (7.44) est équivalente à

$$\mathbb{F}_u S = 0. \quad (7.53)$$

Évidemment, la dérivée de Fermi a les propriétés suivantes :

1. Si γ est une géodésique, $\mathbb{F}_u = \nabla_u$.
2. $\mathbb{F}_u u = 0$
3. Si $\mathbb{F}_u X = \mathbb{F}_u Y = 0$ le long de γ , $\langle X, Y \rangle$ est constant le long de γ .
4. Si $\mathbb{F}_u X = 0$, $\langle X, u \rangle$ est constant le long de γ . (Ceci n'est pas le cas si X est parallèlement transporté sauf si γ est une géodésique ou les deux notions coïncident.)
5. Si $\langle X, u \rangle = 0$ le long de γ ,

$$\mathbb{F}_u X = (\nabla_u X)_\perp \quad (7.54)$$

où \perp signifie la projection orthogonale sur u ,

$$v_\perp := v + \langle u, v \rangle u.$$

Définition 7.7 (champs Fermi-transporté) Un champ vectoriel $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ est appelé *Fermi-transporté* le long de γ si

$$\mathbb{F}_\gamma X = 0.$$

Comme ceci est une équation différentielle (ordinaire) linéaire en X , elle a une solution globale. Comme pour le transport parallèle, il existe un groupe d'isomorphismes

$$\mathcal{T}_{t,s}^F : T_{\gamma(s)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma(t)}\mathcal{M} : X(\gamma(s)) \mapsto \mathcal{T}_{t,s}^F X(\gamma(s))$$

avec

$$\mathbb{F}_{\dot{\gamma}} X(\gamma(t)) = \frac{d}{ds} \mathcal{T}_{t,s}^F X(\gamma(s)) \Big|_{s=t} . \quad (7.55)$$

Comme pour le transport parallèle nous pouvons étendre cette définition pour des champs tensoriels de rang arbitraire, telle que

$$\mathcal{T}_{t,s}^F : (T_{\gamma(s)}\mathcal{M})_q^r \rightarrow (T_{\gamma(t)}\mathcal{M})_q^r$$

est un isomorphisme linéaire et

$$\mathbb{F}_{\dot{\gamma}} T_{\gamma(t)} = \frac{d}{ds} \mathcal{T}_{t,s}^F T_{\gamma(s)} \Big|_{s=t} \quad \text{pour } T \in \mathcal{T}_q^r \mathcal{M}. \quad (7.56)$$

Ainsi définie, la dérivée de Fermi des champs tensoriels a les propriétés suivantes :

1. Pour $T \in \mathcal{T}_q^r \mathcal{M}$, $\mathbb{F}_u T \in \mathcal{T}_q^r \mathcal{M}$
2. $\mathbb{F}_u (S \otimes T) = \mathbb{F}_u S \otimes T + S \otimes \mathbb{F}_u T$
3. \mathbb{F}_u commute avec les contractions
4. $\mathbb{F}_u f = \frac{df}{ds}$ le long de γ , pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Nous considérons alors la ligne d'univers $\gamma(\tau)$, d'une observatrice accélérée avec quadri-vitesse $u = \dot{\gamma}$. τ est son temps propre tel que $u^2 = -1$.

$(e_i)_{i=1}^3$ est un référentiel orthonormé arbitraire le long de γ , normal à $u =: e_0$ (le référentiel du vaisseau spatial).

Nous avons alors $\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu}$. Clairment

$$\langle a, u \rangle = \frac{1}{2} \nabla_u \langle u, u \rangle = 0, \quad a = \nabla_u u .$$

Nous posons

$$\omega_{ij} := \langle \nabla_u e_i, e_j \rangle = -\omega_{ji} . \quad (7.57)$$

Avec $e^\mu := \eta^{\mu\nu} e_\nu$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \nabla_u e_i &= \langle \nabla_u e_i, e^\mu \rangle e_\mu = -\langle \nabla_u e_i, u \rangle u + \langle \nabla_u e_i, e_j \rangle e_j \\ &= \langle e_i, a \rangle u + \omega_{ij} e_j . \end{aligned} \quad (7.58)$$

En posant

$$\omega_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \omega_{ij} \end{array} \right) \quad (7.59)$$

cela conduit à

$$\nabla_u e_\alpha = -\langle e_\alpha, u \rangle a + \langle e_\alpha, a \rangle u + \omega_{\alpha\beta} e^\beta \quad (7.60)$$

ou, avec (7.52)

$$\mathbb{F}_u e_\alpha = \omega_{\alpha\beta} e^\beta . \quad (7.61)$$

$\omega_{\alpha\beta}$ définit alors la déviation du transport de Fermi. Pour un gyroscope libre, nous avons $\mathbb{F}_u S = 0$. Comme $(S, u) = 0$, $S = S^i e_i$ et alors

$$0 = \frac{dS^i}{d\tau} e_i + S^i \mathbb{F}_u e_i = \frac{dS^i}{d\tau} e_i + S^i \omega_{ij} e^j,$$

ce qui implique

$$\frac{dS^j}{d\tau} = \omega_{ji} S^i . \quad (7.62)$$

Le gyroscope donc précesse par rapport à $\{e_i\}$ avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ donnée par

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= -\varepsilon_{ijk} \Omega^k \\ \frac{d\vec{S}}{d\tau} &= \vec{S} \wedge \vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Si le référentiel (e_i) est Fermi transporté, $\vec{\Omega} = 0$, et le gyroscope ne précesse pas.

7.5.3 Staticité et stationnarité

Nous considérons un champ gravitationnel stationnaire avec champ de Killing K et un observateur **au repos** qui bouge le long de sa ligne d'univers $\gamma(\tau)$ tangente à K . Sa quadri-vitesse u est alors

$$u = \frac{1}{\sqrt{-\langle K, K \rangle}} K. \quad (7.64)$$

Nous considérons à nouveau un référentiel orthonormé, $(e_i)_{i=1}^3$, le long de γ . Nous demandons

$$L_K e_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.65)$$

De l'équation de Killing il suit que l'orthogonalité des vecteurs e_i est conservée le long de γ :

$$0 = (L_K g)(X, Y) = K(g(X, Y)) - g(L_K X, Y) - g(X, L_K Y)$$

avec (7.65) nous avons $\partial_\tau (g_{\gamma(\tau)}(e_i(\gamma(\tau)), e_j(\gamma(\tau)))) = 0$.

De même, l'orthogonalité avec K et donc avec u est conservée.

Les e_i sont des axes au repos. Ils définissent le "système copernicien" des étoiles fixes.

Nous calculons le changement de composantes du spin $S = S^i e_i$ par rapport à ce référentiel. Avec (7.64) et (7.57) nous avons

$$\omega_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-\langle K, K \rangle}} \langle e_j, \nabla_K e_i \rangle$$

Mais

$$0 = L_K e_i = [K, e_i] = \nabla_K e_i - \nabla_{e_i} K .$$

Donc

$$\omega_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-\langle K, K \rangle}} \langle e_j, \nabla_{e_i} K \rangle = \frac{1}{\sqrt{-\langle K, K \rangle}} \nabla K^b(e_i, e_j) .$$

Pour rendre l'antisymétrie de ω_{ij} explicitement visible nous écrivons

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} k^{-1} [\nabla K^b(e_i, e_j) - \nabla K^b(e_j, e_i)] \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{-\langle K, K \rangle} . \quad (7.66)$$

Mais plus généralement nous avons vu (géométrie, équation (6.10)) que pour une 1-forme α

$$(\nabla \alpha)(X, Y) - (\nabla \alpha)(Y, X) = -d\alpha(X, Y) .$$

Il est alors

$$\omega_{ij} = -\frac{1}{2} k^{-1} dK^b(e_i, e_j) . \quad (7.67)$$

Nous considérons la base duale à (K, e_i) , (K^b, θ^i) . La 2-forme dK^b a, en général, la forme

$$dK^b = \kappa_{ij} \theta^i \wedge \theta^j + \alpha \wedge K^b \quad (7.68)$$

pour des fonctions κ_{ij} anti-symétriques et une 1-forme α . Donc la condition de staticité, $K^b \wedge dK^b = 0$ est équivalente à $\kappa_{ij} \equiv 0$. Mais $dK^b(e_i, e_j) = 2\kappa_{ij}$ et alors

$$\omega_{ij} = -k^{-1} \kappa_{ij} . \quad (7.69)$$

C'est-à-dire $\omega_{ij} = 0$ si et seulement si $K^b \wedge dK^b = 0$.

D'après la définition 7.5, un gyroscope ne précesse donc pas par rapport au système copernicien si et seulement si le champ gravitationnel est statique.

Autrement dit le système de repos d'un champ gravitationnel stationnaire **non-statique** est en rotation. Avec $\omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \Omega^k$ il suit

$$\varepsilon^{ijk} \omega_{ij} = -2\Omega^k, \text{ et donc}$$

$$\Omega^k = \frac{1}{2k} \varepsilon^{ijk} \kappa_{ij} . \quad (7.70)$$

Explicitement pour $K = \partial_t$:

$$ds^2 = g_{00}(\vec{x}) dt^2 + 2g_{0i}(\vec{x}) dx^i dt + g_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j ,$$

$$\begin{aligned}
K^b &= g_{00}dt + g_{0i}dx^i \\
dK^b &= g_{00,k}dx^k \wedge dt + \frac{1}{2}(g_{0i,j} - g_{0j,i})dx^j \wedge dx^i \\
&= \frac{g_{00,k}}{g_{00}}dx^k \wedge (g_{00}dt + g_{0i}dx^i) + \frac{1}{2} \left(g_{0i,j} - g_{0j,i} - \frac{g_{00,j}g_{0i}}{g_{00}} + \frac{g_{00,i}g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^j \wedge dx^i \\
&= \alpha \wedge K^b + \kappa_{ij}dx^j \wedge dx^i
\end{aligned}$$

avec

$$\kappa_{ij} = \frac{g_{00}}{2} \left(\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}} \right)_{,j} - \left(\frac{g_{0j}}{g_{00}} \right)_{,i} \right).$$

En général, ces κ_{ij} ne correspondent pas aux κ_{ij} définis dans l'équation (7.68) car les ∂_i ne forment pas une base orthonormée. Mais nous considérons la limite de champs gravitationnels faibles, $g_{00} \cong -1$, $g_{i0} \ll 1$, et $g_{ii} \cong 1$, $g_{ij} \ll 1$ pour $i \neq j$, la base (∂_i) est presque orthonormée. Dans ce cas nous obtenons au premier ordre

$$\vec{\Omega} \cong \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} g_{0i,j} \partial_k \quad (7.71)$$

où

$$\vec{\Omega} \cong \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{g}, \quad \text{avec} \quad \vec{g} := (g_{01}, g_{02}, g_{03}).$$

Ceci est l'effet **Lense-Thirring** souvent aussi appelé 'frame dragging' ou 'gravitomagnetic effect'. Les composantes g_{ij} du champ gravitationnel d'une étoile en rotation sont proportionnel les au moment cinétique \vec{J} de l'étoile. A cet effet il faut ajouter la précession géodésique qui est de l'ordre $\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \phi$. Pour le champ gravitationnel de la terre, le rapport des deux effets est de l'ordre

$$\frac{\text{Lense-Thirring}}{\text{géodésique}} \simeq \frac{G J_{\oplus}}{3(M_{\oplus} G)^{3/2} R_{\oplus}^{1/2}} = 6.5 \times 10^{-3}.$$

L'expérience 'Gravity-Probe-B' de la NASA a essayé à mesurer l'effet Lense-Thirring. Les résultats définitifs ne sont pas encore disponibles. Si la précession géodésique a été confirmée avec une précision d'environ 1%, les erreurs expérimentaux doivent encore être déduits avant d'annoncer fermement la mesure de l'effet Lense-Thirring. Cet expérience devrait mesurer une précession géodésique de 6.606 arc-secondes par année et du 'frame dragging' (effet Lense-Thirring) de 39 milli-arc-secondes par année

Résumé

- Un compas gyroscopique a des composantes constantes par rapport à un référentiel $(e_i)_{i=1}^3$ si et seulement si (e_i) est Fermi transporté le long de la ligne d'univers de l'observatrice (porteuse du compas).
- Dans un référentiel au repos par rapport à un champ gravitationnel stationnaire (référentiel copernicien, étoiles fixes), un gyroscope est en rotation avec vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ (équations (7.67), (7.69) et (7.70)).
- Le gyroscope n'est pas en rotation dans un référentiel au repos par rapport à un champ gravitationnel stationnaire, $\vec{\Omega} = 0$, si et seulement si le champ gravitationnel est statique.

7.5.4 Référentiels locaux

Nous voulons maintenant déterminer les équations de mouvement d'une particule test en chute libre, vu d'une observatrice sur une ligne d'univers $\gamma(\tau)$ quelconque. Nous voulons trouver les effets de la relativité générale. Pour ceci nous déterminons d'abord le référentiel local de l'observatrice et la métrique dans un voisinage de la ligne d'univers.

Soit, comme avant, $\gamma(\tau)$ la ligne d'univers d'une observatrice (accélérée) $u = \dot{\gamma}$, $u^2 = -1$, $a = \nabla_u u$. Soit $(e_i)_{i=1}^3$ un référentiel orthonormé arbitraire, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, normal à $u = e_0$, $\langle u, e_i \rangle = 0$.

A chaque point $\gamma(\tau)$ nous considérons une géodésique $\alpha(s)$ normale à u , où s est la longueur d'arc, i.e. $\dot{\alpha}^2 = 1$ ($\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds}$) et $(\dot{\alpha}(0), \dot{\gamma}(\tau)) = 0$ ($\alpha(0) = \gamma(\tau)$).

Par $\alpha(s, n, \tau)$ nous désignons la géodésique qui passe par $\gamma(\tau)$ en direction n , $\dot{\alpha}(0) = n$, $\alpha(0) = \gamma(\tau)$ avec paramètre affine s

$$n = \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_{\alpha(0, n, \tau)}, \quad n^2 = 1.$$

Chaque point $p \in \mathcal{M}$ dans le voisinage de $\gamma(\tau)$ est sur une et seulement une des géodésiques α (voir figure 7.5).

Nous accordons à $p = \alpha(s, n, \tau)$, $n = n^i e_i$ les coordonnées

$$(x^0(p), x^1(p), x^2(p), x^3(p)) = (\tau, sn^1, sn^2, sn^3) \quad (7.72)$$

C'est-à-dire

$$x^0(\alpha(s, n, \tau)) = \tau \quad (7.73)$$

$$x^i(\alpha(s, n, \tau)) = sn^i = s\langle n, e_i \rangle. \quad (7.74)$$

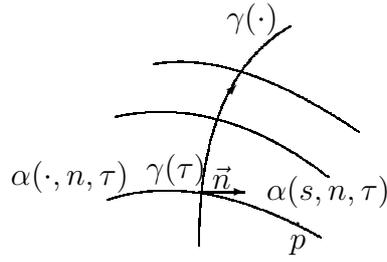


FIG. 7.5 – Une ligne d’univers $\gamma(\tau)$ avec des géodésiques $\alpha(s, n, \tau)$ transverses.

7.5.5 Les symboles de Christoffel et le développement de la métrique le long d’une ligne d’univers

Le long de $\gamma(\tau)$, $s = 0$, nous avons par construction

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = e_i, \quad \frac{\partial}{\partial x^0} = u \quad (\text{le long de } \gamma). \quad (7.75)$$

Donc

$$g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu} \quad (\text{le long de } \gamma). \quad (7.76)$$

Le long de γ nous avons alors

$$\nabla_u e_\alpha = \nabla_{e_0} e_\alpha = \Gamma_{0\alpha}^\beta e_\beta$$

et

$$\langle e_\beta, \nabla_u e_\alpha \rangle = \eta_{\beta\gamma} \Gamma_{0\alpha}^\gamma.$$

Donc

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= -\langle u, \nabla_u u \rangle = 0 \\ \Gamma_{00}^j &= \langle e_j, \nabla_u u \rangle = \langle e_j, a \rangle = a^j \\ \Gamma_{0j}^0 &= -\langle u, \nabla_u e_j \rangle = \langle \nabla_u u, e_j \rangle = a^j. \end{aligned} \quad (7.77)$$

De plus, avec

$$\omega_{ij} \stackrel{(7.57)}{=} \langle \nabla_u e_i, e_j \rangle =: \varepsilon_{ijk} \Omega^k = \Gamma_{0i}^j. \quad (7.78)$$

Le long d’une géodésique $\alpha(\tau, s, n)$, $\tau = \text{const}$, $n = \text{const}$ nous avons

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds}$$

Le long de γ ceci donne

$$\Gamma_{ij}^\mu n^i n^j = 0 \quad (7.79)$$

et alors, comme n^i est arbitraire

$$\Gamma_{ij}^\mu = 0 \quad (7.80)$$

A l'aide des symboles de Christoffel nous trouvons les dérivées partielles de la métrique :

$$0 = g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} g_{\mu\alpha} .$$

Avec les équations (7.76) à (7.78) et (7.79) ceci donne le long de γ

$$g_{\mu\nu,0} = \Gamma_{\mu 0}^{\alpha} \eta_{\alpha\nu} + \Gamma_{\nu 0}^{\alpha} \eta_{\mu\alpha} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g_{00,0} = 0 \\ g_{0i,0} = -a^i + a^i = 0 \\ g_{ij,0} = \varepsilon_{ijk} \Omega^k + \varepsilon_{jik} \Omega^k = 0 \end{cases}$$

Le long de γ

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,0} &= 0 \\ g_{ij,l} &= \Gamma_{il}^{\mu} \eta_{\mu j} + \Gamma_{jl}^{\mu} \eta_{\mu i} = 0 \\ g_{00,j} &= 2\Gamma_{0j}^{\mu} \eta_{\mu 0} = -2a^j \\ g_{0j,k} &= \Gamma_{0k}^{\mu} \eta_{\mu j} + \Gamma_{jk}^{\mu} \eta_{0\mu} = \varepsilon_{kji} \Omega^i \end{aligned} \quad (7.81)$$

La métrique dans le voisinage de γ est alors donnée par

$$ds^2 = -(1 + 2\vec{a} \cdot \vec{x}) dt^2 + 2\varepsilon_{kji} \Omega^i x^k dt dx^j + \delta_{ij} dx^i dx^j + \mathcal{O}(|\vec{x}|^2) dx^{\mu} dx^{\nu} . \quad (7.82)$$

L'accélération donne la contribution $\delta g_{00} = -2\vec{a} \cdot \vec{x}$.

Comme, pour $\Omega \neq 0$, les axes e_i de l'observatrice sont en rotation, nous obtenons le terme non-diagonal

$$g_{0j} = \varepsilon_{jik} \Omega^i x^k = (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})^j$$

Si $a = \nabla_u u = 0$ et $\vec{\Omega} = 0$ nous obtenons un référentiel inertiel le long de γ ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$).

C'est-à-dire : une observatrice se trouve dans un référentiel inertiel si elle est en chute libre, $\nabla_u u = 0$, et elle Fermi-transporte ses axes de coordonnées, (e_i). ($\Leftrightarrow \omega_{ij} = 0$). Comme $a = 0$, pour une observatrice en chute libre, le transport de Fermi est équivalent au transport parallèle dans ce cas.

7.5.6 Les équations du mouvement d'une particule test, force inertielle.

De nouveau, $\gamma(\tau)$ est la ligne d'univers de notre observatrice (astronaute dans un vaisseau spatial).

Elle observe une particule en chute libre :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = 0 \quad (7.83)$$

Elle mesure la vitesse de la particule par rapport à son temps coordonnée, t . Nous posons $\gamma = \frac{dt}{d\lambda}$.

Avec $\frac{dx^0}{d\lambda} = \gamma$, $\frac{dx^l}{d\lambda} = \frac{dx^l}{dt}\gamma =: v^l\gamma$, (7.83) devient

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0 .$$

Pour $\mu = 0$ ceci donne avec (7.80)

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 2\Gamma_{i0}^0 v^i + \Gamma_{00}^0 . \quad (7.84)$$

Pour $\mu = j$, nous trouvons avec (7.84)

$$\frac{dv^j}{dt} - v^j (\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{i0}^0 v^i) + \Gamma_{00}^j + 2\Gamma_{0i}^j v^i = 0 . \quad (7.85)$$

Nous calculons (7.85) au voisinage de la ligne d'univers γ et nous considérons des particules lentes, $|v| \ll 1$. Nous développons donc (7.85) jusqu'au premier ordre en \vec{x} et \vec{v} :

$$\begin{aligned} \frac{dv^j}{dt} &= v^j \Gamma_{00}^0 \Big|_{\vec{x}=0} - \Gamma_{00}^j \Big|_{\vec{x}=0} - \left(\Gamma_{00,k}^j \Big|_{\vec{x}=0} \right) \cdot x^k - 2\Gamma_{0i}^j \Big|_{\vec{x}=0} v^i \\ &= -a^j - 2\varepsilon_{ijk} \Omega^k v^i - \left(\Gamma_{00,k}^j \Big|_{\vec{x}=0} \right) x^k \end{aligned} \quad (7.86)$$

$\Gamma_{00,k}^i$ peut être lié au tenseur de Riemann :

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} .$$

Alors

$$\Gamma_{00,k}^j = R^j_{0k0} + \underbrace{\Gamma_{0k,0}^j}_{\varepsilon_{kjl}\dot{\Omega}^l} - \underbrace{\Gamma_{k\mu}^j \Gamma_{00}^\mu}_0 + \underbrace{\Gamma_{0\mu}^j \Gamma_{0k}^\mu}_{a^j a^k + \varepsilon_{ijl}\Omega^l \varepsilon_{kim}\Omega^m}$$

à $\vec{x} = 0$.

Tout cela donne en (7.86)

$$\dot{\vec{v}} = -\vec{a}(1 + \vec{a} \cdot \vec{x}) - \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}}_{(1)} - \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{x} - \underbrace{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})}_{(2)} + \vec{f} \quad (7.87)$$

où

$$f^j = R^j_{00k} x^k . \quad (7.88)$$

Le premier terme est l'accélération inertielle avec la correction relativiste $\vec{a} \cdot \vec{x}$ qui a son origine dans la correction de la métrique (7.82).

Les termes avec $\vec{\Omega}$ sont identiques à ceux de la mécanique classique, (1) est la "force de Coriolis" et (2) est la "force centrifuge".

La force, $R^j_{0k0}x^k$, est la conséquence des inhomogénéités du champ gravitationnel. C'est la "force des marées".

Si les axes (e_i) sont Fermi-transportés les forces inertielles avec $\vec{\Omega}$ s'en vont, $\vec{\Omega} = 0$. Si l'observatrice n'est pas accélérée, $a = \nabla_u u = 0$, seule la force des marées reste. Il n'est pas possible de l'annuler par une transformation du système de coordonnées. Elle représente alors la "vraie" force gravitationnelle.

Chapitre 8

Les équations d'Einstein

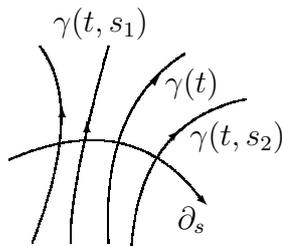
Jusqu'ici nous avons étudié les lois physiques en présence d'un champ gravitationnel externe en utilisant le principe d'équivalence.

D'autre part, le champ (potentiel) gravitationnel ($g_{\mu\nu}$) est influencé par le contenu d'énergie et impulsion de l'univers. Pour trouver les équations qui gouvernent la relation entre $g_{\mu\nu}$ et le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ nous utilisons le principe d'équivalence, la limite newtonienne et la version covariante de la "conservation" d'énergie-impulsion.

8.1 Dérivation heuristique des équations d'Einstein

Nous reformulons d'abord le résultat trouvé dans le paragraphe précédent pour une observatrice en chute libre et une base orthonormée $(e_i)_{i=1}^3$ parallèlement transportée :

soit $\gamma(t)$ une géodésique et $\gamma(t, s)$ une congruence des géodésiques voisines, $\gamma(t) = \gamma(t, 0)$. Pour toute valeur s , le chemin $t \mapsto \gamma(t, s)$ est une géodésique. Soit



$$u = \dot{\gamma} = \gamma_{\star} \partial_t, u^2 \equiv \langle u, u \rangle = -1, \quad \text{et} \quad w = \gamma_{\star} \partial_s \quad (8.1)$$

Soit $n = w + \langle w, u \rangle u$ le vecteur de distance normal à u :

$$n = n^i e_i.$$

Nous voulons dériver une équation d'évolution pour ce vecteur de distance n .

A cause de (8.1) $[u, w] = 0$, ce qui implique $\nabla_u w = \nabla_w u$. Comme $\nabla_u u = 0$ ceci mène à

$$\nabla_u^2 w = \nabla_u \nabla_w u = (\nabla_u \nabla_w - \nabla_w \nabla_u) u = R(u, w) u. \quad (8.2)$$

De même avec n : nous avons

$$L_u n = [u, n] = [u, \langle w, u \rangle u] = u(\langle w, u \rangle) u.$$

Mais

$$u(\langle w, u \rangle) = \langle \nabla_u w, u \rangle = \langle \nabla_w u, u \rangle = \frac{1}{2} \nabla_w \langle u, u \rangle = 0,$$

c'est-à-dire

$$L_u n = 0 = \nabla_u n - \nabla_n u \quad (8.3)$$

Analogue à (8.2) nous trouvons alors

$$\nabla_u^2 n = R(u, n) u.$$

Dans notre base $n^i e_i$, comme les e_i sont parallèlement transportés le long de u ,

$$\nabla_u n = u(n^i) e_i = \frac{dn^i}{dt} e_i \quad \text{et} \quad \nabla_u^2 n = \frac{d^2 n^i}{dt^2} e_i.$$

Avec $e_0 \equiv u$ nous obtenons alors

$$\frac{d^2 n^i}{dt^2} e_i = n^j R(e_0, e_j) e_0 = n^j R^i{}_{00j} e_i, \quad \text{ou}$$

$$\frac{d^2 n^i}{dt^2} = n^j R^i{}_{00j}. \quad (8.4)$$

Cette équation décrit l'accélération relative des particules test voisines en chute libre.

Nous comparons ceci avec la théorie newtonienne. Là nous avons

$$\ddot{x}^i = -(\partial_i \Phi)_{\bar{x}}$$

$$\ddot{x}^i + \ddot{n}^i = -(\partial_i \Phi)_{\bar{x} + \bar{n}}.$$

La différence de ces deux équations donne

$$\ddot{n}^i = -(\partial_i \Phi)_{\bar{x} + \bar{n}} + (\partial_i \Phi)_{\bar{x}} \cong -(\partial_i \partial_j \Phi)_{\bar{x}} n^j. \quad (8.5)$$

La comparaison de ceci avec l'équation (8.4) suggère l'analogie

$$R^i{}_{00j} \longleftrightarrow -(\partial_i \partial_j \Phi) .$$

En prenant la trace sur les deux côtés nous trouvons la correspondance

$$R_{00} \longleftrightarrow -\Delta \Phi .$$

En théorie newtonienne le potentiel gravitationnel est déterminé par l'équation de Poisson :

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \cong -4\pi G T_{00} .$$

Donc

$$R_{00} = 4\pi G T_{00} . \quad (8.6)$$

Ceci motive l'équation covariante

$$R_{\mu\nu} = 4\pi G T_{\mu\nu} . \quad (8.7)$$

Mais cette équation n'est pas correcte , comme $R^{\mu\nu}{}_{;\nu} \neq 0$ et $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ en général. Il faut donc modifier (8.7) en

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (8.8)$$

Ce qui est équivalent à

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T), \quad \text{où } T = T^\mu{}_\mu . \quad (8.9)$$

Dans le cas newtonien, $T_{00} \cong -\rho$, $T \cong T_0^0 \cong \rho$, $g_{00} \cong -1$, (8.9) se réduit (pour $\mu\nu = 00$) de nouveau à (8.6). Les équations (8.8) ou (8.9) sont les équations d'Einstein.

On définit encore le tenseur d'Einstein, $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ et on obtient

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (8.10)$$

Nous avons montré que les identités de Bianchi contractées sont équivalentes à $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

Unicité : On peut montrer le fait suivant :

soit $\mathcal{D}_{\mu\nu}[g]$ un tenseur formé seulement de $g_{\mu\nu}$ et de ses premières et deuxièmes dérivées qui satisfont à $\mathcal{D}_{\mu\nu}[g]{}^{;\nu} = 0$. Nous avons alors

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}[g] = a G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad \text{avec } a, \text{ et } \Lambda \text{ des constantes.}$$

Les équations d'Einstein sont alors nécessairement de la forme

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa = 8\pi G . \quad (8.11)$$

La valeur de κ est déterminée par la limite newtonienne qui donne

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho + \Lambda.$$

La constante Λ joue le rôle d'une densité de masse **homogène**, $\rho_{eff} = \frac{\Lambda}{4\pi G}$. Elle joue un rôle important en cosmologie actuelle. Mais comme $|\frac{\Lambda}{4\pi G}| \lesssim 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, nous la négligeons ici où nous nous intéressons surtout aux effets gravitationnels sur des échelles stellaires avec $\rho \gtrsim \rho_{\odot} \cong 1,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Les équations (8.10) et (8.11) sont, aussi dans le vide ($T_{\mu\nu} = 0$), des équations partielles non-linéaires. Et je crois qu'il est juste de dire qu'une grande partie de leurs conséquences n'a pas encore été comprise jusqu'à ce jour. Dans certains cas, la non-linéarité peut être comprise comme le couplage du champ gravitationnel avec sa propre énergie-impulsion.

Une analyse principale des équations d'Einstein est très difficile (je ne mentionnerai ici que les résultats principaux). Des solutions exactes ne sont connues que pour des cas symétriques. Heureusement, il s'agit des cas les plus pertinents pour l'astrophysique :

1. La métrique de Schwarzschild (voir chapitre suivant) : une solution statique en symétrie sphérique, décrit les étoiles et trous noirs sphériques.
2. La métrique de Kerr : une solution stationnaire à symétrie rotationnelle, décrit des étoiles et trous noirs en rotation.
3. La métrique de Robertson et Walker : une solution homogène et isotrope, décrit des univers Friedmann-Lemaître en expansion ou contraction.

8.2 Le problème de Cauchy local

La question est la suivante : soit \mathcal{S} une variété riemannienne 3-dimensionnelle avec métrique γ_{ij} . En plus, des fonctions $\gamma_{0\mu}$, $\gamma_{\mu\nu,0}$ soient données ($ij = 1, 2, 3$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). Existe-t-il une variété lorentzienne (\mathcal{M}, g) et une immersion $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ telles que

$$\sigma_*\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \sigma_*\gamma_{\mu\nu,0} = g_{\mu\nu,0} \quad \text{sur} \quad \sigma(\mathcal{S})$$

et

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \tag{8.12}$$

sur \mathcal{M} .

C'est-à-dire existe-t-il une solution au problème (8.12) avec conditions initiales $(\mathcal{S}, \gamma, \gamma_{,0})$?

Premièrement, l'identité de Bianchi donne

$$G^{\mu 0}_{,0} = -G^{\mu i}_{,i} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} G^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} G^{\mu\lambda}. \tag{8.13}$$

Comme le côté droit de ces équations contient au maximum des dérivées secondes par rapport au temps, ($t = x^0$), $G^{\mu 0}$ contient au maximum des dérivées premières de $g_{\mu\nu}$. Les équations

$$G_{\mu 0} = 8\pi G T_{\mu 0} \quad (8.14)$$

sont donc des **contraintes** pour $g_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,0}$ qui doivent être satisfaites sur $\sigma(\mathcal{S})$ pour qu'une solution existe.

Il reste alors les 6 équations

$$G_{ij} = 8\pi G T_{ij} \quad (8.15)$$

pour déterminer l'évolution dans le temps de $g_{\mu\nu}$. La solution n'est donc pas unique. Il faut imposer quatre conditions de jauge, ce qui correspond à un choix de coordonnées!

Pour un choix de jauge "compatible" et des données initiales $(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,0})$ qui satisfont les contraintes (8.14), et un tenseur énergie-impulsion "raisonnable" on trouve toujours une solution locale à (8.15). (8.15) est un système d'équations différentielles du 2ème ordre **hyperbolique** pour les six $g_{\mu\nu}$ qui ne sont pas fixées par le choix de la jauge.

L'existence locale n'est pas difficile à démontrer. Mais tous les résultats globaux sont assez profonds et limités.

Un exemple de choix de jauge est la **jauge harmonique** définie par les quatre conditions

$$(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 . \quad (8.16)$$

Dérivation par rapport au temps de ces conditions implique

$$(\sqrt{-g} g^{\mu 0})_{,00} = - (\sqrt{-g} g^{\mu i})_{,0i} . \quad (8.17)$$

Avec ceci et les six équations $G_{ij} = 8\pi G T_{ij}$ sont du 2ème ordre dans le temps dans les variables g_{ij} , et nous pouvons déterminer toutes les 10 fonctions $g_{\mu\nu}$.

Chapitre 9

La solution de Schwarzschild et les tests classiques

9.1 Dérivation

Nous cherchons une solution statique à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide ($T_{\mu\nu} = 0$). Cette solution peut décrire l'extérieur d'une étoile statique, par exemple le Soleil.

Nous choisissons la variété

$$\mathcal{M} = \underbrace{\mathbb{R}}_t \times \underbrace{\mathbb{R}_+}_r \times \underbrace{\mathbb{S}^2}_{(\vartheta, \varphi)}$$

et faisons l'ansatz suivant pour la métrique :

$$g = -e^{2a(r)} dt^2 + e^{2b(r)} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.1)$$

La variable r est choisie de sorte qu'une sphère à rayon r aie la surface $4\pi r^2$.

Les fonctions $a(r)$, $b(r)$ satisfont $a(r), b(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. L'espace est asymptotiquement plat. Nous choisissons la base

$$\theta^0 = e^a dt, \quad \theta^1 = e^b dr, \quad \theta^2 = r d\vartheta, \quad \theta^3 = r \sin \vartheta d\varphi \quad (9.2)$$

telle que

$$g = \eta_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu, \quad (\eta_{\mu\nu}) = (-1, 1, 1, 1). \quad (9.3)$$

Comme cette base est orthonormée, nous avons

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0. \quad (9.4)$$

De plus

$$d\theta^0 = a' dr \wedge \theta^0 = a' e^{-b} \theta^1 \wedge \theta^0$$

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= 0 \\
d\theta^2 &= dr \wedge d\vartheta = \frac{e^{-b}}{r} \theta^1 \wedge \theta^2 \\
d\theta^3 &= \sin \vartheta dr \wedge d\varphi + r \cos \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi \\
&= \frac{e^{-b}}{r} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\cot \vartheta}{r} \theta^2 \wedge \theta^3 .
\end{aligned}$$

Avec la première équation de structure (6.25), $d\theta^\mu = -\omega^\mu_\alpha \wedge \theta^\alpha$ et (9.4), $\omega_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu} \omega^\mu_\beta$, ceci donne

$$\begin{aligned}
\omega^0_1 &= a' e^{-b} \theta^0 = \omega^1_0, & \omega^0_2 &= \omega^2_0 = 0, & \omega^0_3 &= \omega^3_0 = 0, \\
\omega^2_1 &= \frac{e^{-b}}{r} \theta^2 = -\omega^1_2, & \omega^3_1 &= \frac{e^{-b}}{r} \theta^3 = -\omega^1_3, \\
\omega^3_2 &= \frac{\cot \vartheta}{r} \theta^3 = -\omega^2_3 .
\end{aligned} \tag{9.5}$$

La deuxième équation de structure, (6.26) détermine la courbure :

$$\begin{aligned}
\Omega^0_1 &= d\omega^0_1 + \omega^0_\mu \wedge \omega^\mu_1 = d\omega^0_1 \\
&\stackrel{(9.5)}{=} (a' e^{-b})' dr \wedge \theta^0 + (a' e^{-b}) d\theta^0 \\
&= e^{-2b} (a'^2 - a'b' + a'') \theta^1 \wedge \theta^0
\end{aligned} \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^0_2 &= d\omega^0_2 + \omega^0_i \wedge \omega^i_2 \\
&\stackrel{(9.5)}{=} -\frac{a' e^{-b} \cdot e^{-b}}{r} \theta^0 \wedge \theta^2 = -\frac{a' e^{-2b}}{r} \theta^0 \wedge \theta^2 .
\end{aligned} \tag{9.7}$$

De la même façon on trouve les autres composantes de la courbure. Le résultat final est

$$\begin{aligned}
\Omega^0_1 &= e^{-2b} (a'^2 - a'b' + a'') \theta^1 \wedge \theta^0 \\
\Omega^0_2 &= \frac{a' e^{-2b}}{r} \theta^2 \wedge \theta^0 \\
\Omega^0_3 &= \frac{a' e^{-2b}}{r} \theta^3 \wedge \theta^0 \\
\Omega^1_2 &= \frac{b' e^{-2b}}{r} \theta^1 \wedge \theta^2 \\
\Omega^1_3 &= \frac{b' e^{-2b}}{r} \theta^1 \wedge \theta^3 \\
\Omega^2_3 &= \frac{1 - e^{-2b}}{r^2} \theta^2 \wedge \theta^3
\end{aligned}$$

et $\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}$. Les composantes du tenseur de Riemann sont déterminées par

$$\Omega^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \quad R^0{}_{00\mu} = 0, \quad R^1{}_{010} = e^{-2b}(a'^2 - a'b' + a'') = -R^0{}_{101}$$

$$R^2{}_{020} = e^{-2b}\frac{a'}{r} = R^3{}_{030} = -R^0{}_{202} = -R^0{}_{303}$$

$$R^1{}_{212} = \frac{b'e^{-2b}}{r} = R^2{}_{121} = R^1{}_{313} = R^3{}_{131}, \quad R^2{}_{323} = \frac{1 - e^{-2b}}{r^2} = R^3{}_{232}$$

$$R^2{}_{310} = R^2{}_{320} = R^2{}_{303} = R^2{}_{312} = R^2{}_{313} = R^1{}_{301} = R^1{}_{302} = R^1{}_{303} = R^1{}_{312} = R^1{}_{323} = 0$$

$$R^1{}_{201} = R^1{}_{202} = R^1{}_{203} = R^1{}_{213} = R^1{}_{223} = R^0{}_{301} = R^0{}_{302} = R^0{}_{312} = R^0{}_{313} = R^0{}_{323} = 0$$

$$R^0{}_{201} = R^0{}_{203} = R^0{}_{212} = R^0{}_{213} = R^0{}_{223} = R^0{}_{102} = R^0{}_{103} = R^0{}_{112} = R^0{}_{113} = R^0{}_{123} = 0.$$

Toutes les autres composantes sont déterminées par symétrie :

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha{}_{\beta\nu\mu}; \quad R^i{}_{j\mu\nu} = -R^i{}_{j\nu\mu}$$

$$R^0{}_{j\mu\nu} = R^j{}_{0\mu\nu}; \quad R^i{}_{0\mu\nu} = R^0{}_{i\mu\nu}.$$

Pour le tenseur de Ricci nous obtenons

$$R_{00} = R^1{}_{010} + R^2{}_{020} + R^3{}_{030} = e^{-2b}(-a'b' + a'' + a'^2 + 2\frac{a'}{r})$$

$$R_{11} = e^{-2b}(a'b' - a'' - a'^2 + \frac{2b'}{r})$$

$$R_{22} = \frac{e^{-2b}}{r}(b' - a') + \frac{1 - e^{-2b}}{r^2} = R_{33}$$

$$R = -R_{00} + R_{11} + R_{22} + R_{33} = 2e^{-2b}\left(a'b' - a'' - a'^2 + \frac{2b'}{r} - \frac{2a'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2}$$

$R_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$. Pour le tenseur d'Einstein nous obtenons donc

$$G_{00} = R_{00} + \frac{1}{2}R = \frac{1}{r^2} + e^{-2b}\left(\frac{2b'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \quad (9.8)$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}R = -\frac{1}{r^2} + e^{-2b}\left(\frac{2a'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \quad (9.9)$$

$$G_{22} = G_{33} = e^{-2b}\left(-a'b' + a'' + a'^2 + \frac{a' - b'}{r}\right). \quad (9.10)$$

Pour résoudre les équations d'Einstein dans le vide, $G_{\mu\nu} = 0$, nous utilisons $G_{00} + G_{11} = 0$, donc $(a + b)' = 0$. Comme $a, b \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ nous concluons

$$a = -b. \quad (9.11)$$

En plus, $G_{00} = 0$ implique

$$0 = \frac{1}{r^2} + e^{-2b} \left(\frac{2b'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \quad \text{ou} \quad 1 = (re^{-2b})' .$$

Ceci donne finalement

$$r - 2m = re^{-2b} \quad \text{ou} \quad e^{-2b} = 1 - \frac{2m}{r} , \quad (9.12)$$

où m est une constante d'intégration. Avec (9.1), (9.11) et (9.12) nous avons alors la solution

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r} \right)} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9.13)$$

Eq. (9.13) est la fameuse solution de Schwarzschild (1916).

Pour l'interprétation physique de la constante d'intégration m , nous utilisons que dans la limite $r \gg m$

$$-g_{00} \cong 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - 2 \frac{GM}{rc^2} ,$$

et alors

$$m = \frac{GM}{c^2}. \quad (9.14)$$

On peut montrer (théorème de Birkhoff) que la métrique de Schwarzschild est la **seule** solution à symétrie sphérique dans le **vide**. C'est-à-dire une solution du vide à symétrie sphérique est nécessairement statique.

La métrique (9.13) est souvent écrite de la façon suivante :
soit

$$\rho = \frac{1}{2}(r - m + (r^2 - 2mr)^{1/2}).$$

$$\text{Ou} \quad r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho} \right)^2, \quad 1 - \frac{2m}{r} = \left(\frac{1 - \frac{m}{2\rho}}{1 + \frac{m}{2\rho}} \right)^2 .$$

Avec (9.13) cela donne

$$\begin{aligned} g &= - \left(\frac{1 - \frac{m}{2\rho}}{1 + \frac{m}{2\rho}} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \\ &= -h^2(|\vec{x}'|) dt^2 + f^2(|\vec{x}'|) d\vec{x}'^2 \end{aligned} \quad (9.15)$$

avec

$$\begin{aligned} h^2(\vec{x}) &= \left(\frac{1 - \frac{m}{2|\vec{x}'|}}{1 + \frac{m}{2|\vec{x}'|}} \right)^2 = 1 - 2\alpha \frac{m}{|\vec{x}'|} + 2\beta \left(\frac{m}{|\vec{x}'|} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{m}{|\vec{x}'|} \right)^3 \\ f^2(\vec{x}) &= \left(1 + \frac{m}{2|\vec{x}'|} \right)^4 = 1 + 2\gamma \frac{m}{|\vec{x}'|} + 3\gamma' \left(\frac{m}{|\vec{x}'|} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{m}{|\vec{x}'|} \right)^3 . \end{aligned} \quad (9.16)$$

où $\alpha = \beta = \gamma = \gamma' = 1$.

Des tests de la relativité générale sont souvent quantifiés comme des mesures de ces paramètres post-newtoniens.

$\alpha = 1$ est une conséquence de la limite newtonienne. A présent $|\gamma - 1| < 2 \cdot 10^{-4}$, $|\gamma' - 1| < 2 \cdot 10^{-3}$ et $|2\gamma - \beta - 1| < 3 \cdot 10^{-3}$ (see e.g. [8]).

La solution (9.13) semble avoir une singularité en

$$r = R_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (9.17)$$

R_S est le rayon de Schwarzschild. Nous verrons plus tard que $r = R_S$ est seulement une singularité des coordonnées. Une indication de ce fait est que les composante du tenseur de Riemann restent finies en $r = R_S$.

De même, la sphère $r = R_S$ a une signification physique très importante : aucune information ne peut pénétrer de $r < R_S$ à $r > R_S$. La sphère de Schwarzschild, $r = R_S$ forme un **horizon** : toute information qui pénètre la surface $r = R_S$ est perdue (décroissance d'entropie?).

9.2 Une particule test dans le champ de Schwarzschild

L'équation du mouvement d'une particule test est l'équation d'Euler-Lagrange pour la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

$$2\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2). \quad (9.18)$$

Le long du chemin $x^\mu(\tau)$ nous avons (pour une particule massive)

$$-2\mathcal{L} = 1. \quad (9.19)$$

L'équation pour ϑ , $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right)' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0$, donne

$$(r^2 \dot{\vartheta})' = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2. \quad (9.20)$$

Si nous choisissons la condition initiale (ceci correspond à un choix des coordonnées (ϑ, φ)) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta} = 0$, nous obtenons

$$\ddot{\vartheta} = 0 \quad \text{et alors} \quad \dot{\vartheta} \equiv 0, \quad \vartheta \equiv \frac{\pi}{2}. \quad (9.21)$$

Avec $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ nous avons

$$2\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (9.22)$$

Ici t et φ sont des variables cycliques qui déterminent les intégrales premières suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi} = \text{const} = L \quad (9.23)$$

(la constante d'aire de Kepler) et

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = \text{const} = E. \quad (9.24)$$

Avec (9.19) et (9.22) ceci donne

$$\frac{E^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - \frac{L^2}{r^2} = 1 \quad (9.25)$$

$$\dot{r}^2 + V(r) = E^2, \quad (9.26)$$

avec

$$V(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (9.27)$$

Nous voulons déterminer la courbe $r(\varphi)$. Soit $' \equiv \frac{d}{d\varphi}$. Donc $r' = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$, $\dot{r} = r' \dot{\varphi} = \frac{r' L}{r^2}$. Avec ceci l'équation (9.26) implique

$$\frac{r'^2 L^2}{r^4} = E^2 - V(r).$$

Nous posons $u = \frac{1}{r}$. Or $r' = -\frac{u'}{u^2}$ et $u' = -r'/r^2$. Donc

$$\begin{aligned} L^2 u'^2 &= E^2 - (1 - 2mu)(1 + L^2 u^2), \\ u'^2 + u^2 &= \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2mu}{L^2} + 2mu^3. \end{aligned} \quad (9.28)$$

La différentiation par rapport à φ donne

$$2u' u'' + 2uu' = \frac{2m}{L^2} u' + 6mu^2 u'.$$

Alors

$$u' = 0 \quad (\text{mouvement circulaire}) \quad (9.29)$$

ou

$$u'' + u = \frac{m}{L^2} + 3mu^2. \quad (9.30)$$

Nous voulons comparer (9.30) avec l'équation de mouvement équivalente de la gravitation newtonienne, $\Phi = -\frac{m}{r}$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - \Phi .$$

Ici φ est cyclique et $\frac{d\varphi}{dt} r^2 = L = \text{const.}$ L'équation pour r donne

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{d\Phi}{dr} . \quad (9.31)$$

Avec $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r'}{r^2} L = -Lu'$ et $\frac{d^2 r}{dt^2} = -Lu'' \frac{d\varphi}{dt} = -L^2 u'' u^2$, l'éq. (9.31) mène à

$$u'' + u = \frac{1}{L^2 u^2} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{L^2} . \quad (9.32)$$

La correction relativiste est alors le terme $3mu^2$. Cette "perturbation" est très petite, comme

$$\begin{aligned} \frac{3mu^2}{m/L^2} &= 3u^2 L^2 = \frac{3}{r^2} (r^2 \dot{\varphi})^2 \cong 3 \frac{(r\dot{\varphi})^2}{c^2} \\ &= 3 \left(\frac{v_{\perp}}{c} \right)^2 \cong 7.7 \cdot 10^{-8} \text{ pour la planète Mercure.} \end{aligned}$$

On peut interpréter (9.30) comme équation du mouvement newtonienne dans le potentiel

$$\Phi = -\frac{m}{r} - \frac{mL^2}{r^3} . \quad (9.33)$$

9.3 L'avancée du périhélie d'une planète

De la mécanique classique nous savons que les seuls potentiels centraux dans lesquels toutes les orbites sont **fermées** sont le potentiel de Newton, $\Phi_N = -\frac{m}{r}$ et l'oscillateur harmonique, $\Phi_H = \kappa^2 r^2$ (théorème de Bertrand). Nous attendons donc que

$$r(\varphi + 2\pi + \Delta\varphi) = r(\varphi)$$

avec un $\Delta\varphi \neq 0$. $\Delta\varphi$ est l'avancée du périhélie. Nous calculons $\Delta\varphi$ au premier ordre en la perturbation $\frac{mL^2}{r^3}$.

La solution de (9.32) (l'ellipse de Kepler) est

$$u = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi) \quad (9.34)$$

avec $p = \frac{L^2}{m} = a(1 - e^2)$, où a est le demi grand axe de l'ellipse et e est son excentricité. En introduisant cette solution dans la perturbation en (9.30) nous obtenons

$$u'' + u = \frac{m}{L^2} + \frac{3m^3}{L^4}(1 + 2e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi) . \quad (9.35)$$

Les solutions particulières aux équations

$$u'' + u = \begin{cases} \frac{3m^3}{L^4} \\ \frac{6m^3}{L^4}e \cos \varphi \\ \frac{3m^3}{L^4}e^2 \cos^2 \varphi \end{cases}$$

sont

$$u_1 = \begin{cases} \frac{3m^3}{L^4} \\ \frac{3m^3}{L^4}e\varphi \sin \varphi \\ \frac{3m^3}{L^4}e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varphi \right) . \end{cases}$$

Ceci donne

$$u_2(\varphi) = \frac{m}{L^2} \left[1 + e \cos \varphi + \frac{3m^2}{L^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) - \frac{m^2}{2L^2} e^2 \cos 2\varphi + \frac{3m^2}{L^2} e\varphi \sin \varphi \right] .$$

Seul le dernier terme n'est pas périodique (avec période 2π) et mène a une perturbation "séculaire" (perturbation qui s'accumule avec le temps). Les perturbations périodiques ne contribuent pas à l'avance du périhélie. Nous les négligeons et nous approximons $\frac{3m^2}{L^2}\varphi \cong \sin\left(\frac{3m^2}{L^2}\varphi\right)$ et $1 \cong \cos\left(\frac{3m^2}{L^2}\varphi\right)$, d'où

$$u_2(\varphi) \cong \frac{m}{L^2} \left[1 + e \cos \left(\left(1 - \frac{3m^2}{L^2} \right) \varphi \right) \right] . \quad (9.36)$$

C'est une fonction périodique de période

$$\frac{2\pi}{1 - \frac{3m^2}{L^2}} \simeq 2\pi \left(1 + \frac{3m^2}{L^2} \right) > 2\pi .$$

L'avancée du périhélie est alors $\Delta\varphi \cong \frac{6\pi m^2}{L^2}$,

$$\Delta\varphi \cong \frac{6\pi m^2}{L^2} \cong \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)} \quad \text{par période.} \quad (9.37)$$

Pour Mercure (a est le plus petit), l'effet est le plus important et on obtient

$$(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \cong 42,92'' \quad \text{par siècle.} \quad (9.38)$$

L'avancée du périhélie de Mercure par les perturbations newtoniennes des autres planètes (surtout Jupiter) est environ

$$(\Delta\varphi)_{\text{pert. newt.}} \cong 500'' \quad \text{par siècle.} \quad (9.39)$$

Ce désaccord d'environ 10% entre la théorie de la gravitation de Newton et les observations était la seule indication **observationnelle** pour la relativité générale **avant** 1915.

Une avancée du périhélie de Mercure est aussi engendrée par un **quadrupôle** dans la luminosité du Soleil. Mais d'après les mesures récentes de ce quadrupôle, cet effet accumule moins qu'une seconde d'arc par siècle.

"... dass die Gleichungen die Perihelbewegungen Merkurs richtig liefern! Ich war einige Tage fassungslos vor freudiger Erregung."

(A. Einstein à P.Ehrenfest, Janvier 1916).

9.4 La déviation de la lumière

Pour des rayons lumineux nous avons $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$. Au lieu de (9.28) nous obtenons alors

$$u'^2 + u^2 = \frac{E^2}{L^2} + 2mu^3$$

et, après dérivation par rapport à φ ,

$$u'' + u = 3mu^2. \quad (9.40)$$

Le côté droit de (9.40) est très petit

$$\frac{3mu^2}{u} = \frac{3R_S}{2R} \lesssim \frac{R_S}{R_\odot} \cong 10^{-6}$$

En le remplaçant par 0 nous obtenons

$$u = \frac{1}{b} \sin \varphi, \quad (9.41)$$

la droite avec paramètre d'impact b indiquée dans la figure ci-dessus.

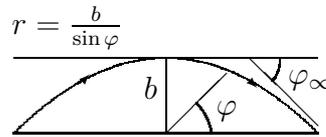


FIG. 9.1 – Déviation de la lumière

En introduisant (9.41) dans la perturbation $3mu^2$ en (9.40) nous trouvons

$$u'' + u = \frac{3m}{b^2}(1 - \cos^2 \varphi)$$

avec la solution particulière

$$u_1 = \frac{3m}{2b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) .$$

En premier ordre dans la perturbation nous obtenons donc

$$u = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{3m}{2b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) .$$

Dans la limite $r \rightarrow \infty$ φ est très petit, et donc $\sin \varphi \sim \varphi$, $\cos 2\varphi \sim 1$. Donc pour $r \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 0$ cela donne

$$0 = \frac{1}{b} \varphi_\infty + \frac{2m}{b^2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{2m}{b}. \quad (9.42)$$

$$\delta = 2|\varphi_\infty| = \frac{4m}{b} = \frac{2R_S}{b}. \quad (9.43)$$

Pour le Soleil cela donne

$$\delta_\odot = \frac{1,75''}{b/R_\odot}. \quad (9.44)$$

Ce résultat peut être obtenu dans la théorie **linéarisée**, au contraire du périhélie qui est sensible aux non-linéarités de la théorie. Pour tester observationnellement la déviation de la lumière, il faut comparer les positions des étoiles proches du Soleil pendant une éclipse avec leur positions nocturnes. Ceci a été entrepris avec succès pour la première fois en 1919 par A. Eddington et F. Dyson.

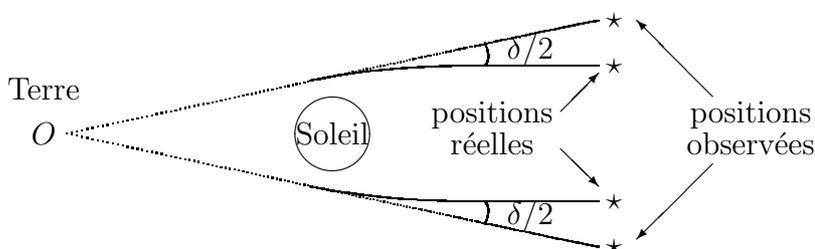


FIG. 9.2 – Changement apparent de la distance angulaire de deux étoiles au voisinage du Soleil

9.5 Le retard de l'écho radar (l'effet Shapiro)

Un autre effet relativiste qui a été très précisément testé est le retard d'un signal radar émis de la Terre vers un satellite, où il est réfléchi sur la Terre et qui passe

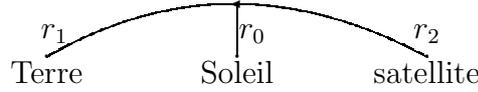


FIG. 9.3 – Retard d'un signal radar au voisinage du Soleil

proche du Soleil (voir figure 9.3). Nous calculons le délai du signal sur son voyage (aller-retour). Nous déterminons d'abord le temps de coordonnées t_{12} qui s'écoule pendant la propagation d'un photon de r_1 à r_2 . Pour un observateur très loin de la masse m , $r/m \gg 1$, ceci est approximativement son temps propre. $\mathcal{L} = 0$ donne (pour $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta} = 0$) :

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}. \quad (9.45)$$

$$\text{où } \dot{r} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{E}{1 - \frac{2m}{r}}.$$

Dans (9.45) cela donne

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-3} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \frac{L^2}{E^2} \frac{1}{r^2}. \quad (9.46)$$

En r_0 , l'approche minimale, $\frac{dr}{dt} = 0$. Donc

$$\left(\frac{L}{E}\right)^2 = \frac{r_0^2}{1 - \frac{2m}{r_0}},$$

ce qui conduit à

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-3} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{2m}{r_0}} - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} = 0. \quad (9.47)$$

Nous multiplions avec $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^3$ et isolons dt . Une intégration donne alors le temps écoulé pour arriver de r_0 à r (ou vice-versa),

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1 - \frac{2m}{r}}{1 - \frac{2m}{r_0}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{1/2}}. \quad (9.48)$$

Nous développons l'intégrant dans la petite grandeur $\frac{2m}{r}$ ($\frac{2m}{r} \ll 1$, $\frac{2m}{r_0} \ll 1$) :

$$\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \left(1 - \frac{1 - \frac{2m}{r}}{1 - \frac{2m}{r_0}} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \cong \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \left(1 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{2m}{r_0}\right) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2m(1/r_0 - 1/r)r_0^2}{r^2(1 - (r_0/r)^2)}\right)^{-1/2} \\
&\cong \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{2m}{r} + \frac{mr_0}{r(r+r_0)}\right).
\end{aligned}$$

Nous introduisons cette approximation dans (9.48), et donc

$$t(r, r_0) \cong \int_{r_0}^r dr \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{2m}{r} + \frac{mr_0}{r(r+r_0)}\right].$$

Cette intégrale a la solution

$$t(r, r_0) \cong \sqrt{r^2 - r_0^2} + 2m \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) + m \left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{1/2}.$$

Pour le trajet de r_1 à r_2 et retour nous obtenons alors le retard du temps coordonnée

$$\begin{aligned}
\Delta t &= 2 \left[t(r_1, r_0) + t(r_2, r_0) - \sqrt{r_1^2 - r_0^2} - \sqrt{r_2^2 - r_0^2} \right] \\
&= 4m \ln \left(\frac{\left(r_1 + \sqrt{r_1^2 - r_0^2}\right) \left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_0^2}\right)}{r_0^2} \right) \\
&\quad + 2m \left(\sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} + \sqrt{\frac{r_2 - r_0}{r_2 + r_0}} \right). \tag{9.49}
\end{aligned}$$

Pour de grandes distances, $r_1, r_2 \gg r_0$, nous avons

$$\Delta t \cong 4m \left[\ln \left(\frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right) + 1 \right]. \tag{9.50}$$

Pour le trajet Terre-Mars on obtient

$$\Delta t_{\max} \cong 72 \text{ [km]} \cong 240 \text{ [\mu sec]}. \tag{9.51}$$

Ce retard a été mesuré pour la première fois avec les missions Viking et Mariner 6,7,9 pour Mars et Venus, avec une précision de 3%.

Les trois tests classiques de la relativité générale ont déterminés les paramètres β et γ à une précision de $|\gamma - 1| \lesssim 2 \cdot 10^{-3}$ (Shapiro time delay, ~ 1980).

$|\beta - 1| \lesssim 6 \cdot 10^{-4}$ (Lunar Laser Ranging) $|\beta - 1| \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$ (l'avancée du périhélie de Mercure, 1990).

Une amélioration substantielle a été possible avec le satellite 'Cassini' qui a été en conjonction avec la terre et le soleil en juillet 2002 pendant son trajet pour saturne [9]. Ces mesures limitent $|\gamma - 1| < 2.3 \times 10^{-5}$.

9.6 Précession d'un gyroscope géodésique

Nous considérons un compas gyroscopique en mouvement le long d'une géodésique qui tourne (en cercle) autour d'une astre à symétrie sphérique (solution de Schwarzschild). Dans ce cas S est parallèlement transporté et nous avons

$$\langle S, u \rangle = 0, \quad \nabla_u S = 0, \quad \nabla_u u = 0. \quad (9.52)$$

Nous considérons une géodésique à $\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{constante}$ et $r = \text{constante}$. Donc $u^1 = u^2 = 0$.

Dans la base $e_0 = e^b \partial_t$, $e_1 = e^{-b} \partial_r$, $e_2 = \frac{1}{r} \partial_\vartheta$, $e_3 = \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi$, nous avons

$$\begin{aligned} u &= u^0 e_0 + u^3 e_3 \\ \dot{S}^0 &= -\omega^0_\beta(u) S^\beta \stackrel{(9.5)}{=} b' e^{-b} u^0 S^1 \\ \dot{S}^1 &= -\omega^1_\beta(u) S^\beta \stackrel{(9.5)}{=} b' e^{-b} u^0 S^0 + \frac{e^{-b}}{r} u^3 S^3 \\ \dot{S}^2 &= -\omega^2_\beta(u) S^\beta = 0 \quad (\vartheta = \frac{\pi}{2}) \\ \dot{S}^3 &= -\omega^3_\beta(u) S^\beta = -\frac{e^{-b}}{r} u^3 S^1. \end{aligned} \quad (9.53)$$

D'autre part, $\nabla_u u = 0$ donne

$$\begin{aligned} \dot{u}^0 = 0, \quad 0 &= b'(u^0)^2 + \frac{1}{r}(u^3)^2, \quad \dot{u}^3 = 0 \\ \text{et alors} \quad \left(\frac{u^0}{u^3}\right)^2 &= -\frac{1}{b'r}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Nous choisissons la base suivante, normale à u :

$$\bar{e}_1 = e_1, \quad \bar{e}_2 = e_2, \quad \bar{e}_3 = u^3 e_0 + u^0 e_3.$$

Dans cette base nous avons $S = \bar{S}^i \bar{e}_i$ et

$$S^0 = \bar{S}^3 u^3, \quad S^1 = \bar{S}^1, \quad S^2 = \bar{S}^2, \quad S^3 = \bar{S}^3 u^0.$$

Les équations (9.53) donnent pour les composantes \bar{S}^i (avec $-(u^0)^2 + (u^3)^2 = -1$)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{S}}^1 &= -b' e^{-b} \frac{u^0}{u^3} \bar{S}^3 \\ \dot{\bar{S}}^2 &= 0 \\ \dot{\bar{S}}^3 &= b' e^{-b} \frac{u^0}{u^3} \bar{S}^1 \\ \frac{d\bar{S}^i}{dt} &= \frac{\dot{\bar{S}}^i}{t} = \frac{\dot{\bar{S}}^i e^{-b}}{u^0} \quad (u^0 = e^{-bt}) \end{aligned} \quad (9.55)$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{S}^1}{dt} &= -\frac{b'}{u^3} e^{-2b} \bar{S}^3 \\ \frac{d\bar{S}^3}{dt} &= \frac{b'}{u^3} e^{-2b} \bar{S}^1 \end{aligned} \quad (9.56)$$

$u^3 = r\dot{\varphi}$. La fréquence angulaire de l'orbite est

$$\omega := \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \frac{u^3}{u^0} \frac{1}{r} e^{-b}.$$

$$\omega^2 = \left(\frac{u^3}{u^0} \right)^2 \frac{1}{r^2} e^{-2b} \stackrel{(9.54)}{=} -\frac{b'}{r} e^{-2b} = \frac{1}{2r} (e^{-2b})'.$$

Avec $e^{-2b} = 1 - \frac{2m}{r}$ nous obtenons

$$\omega^2 = \frac{m}{r^3} \tag{9.57}$$

ce qui est la loi des aires, 3ème loi de Kepler.

Pour la fréquence Ω de la rotation décrite par éq. (9.56) nous avons

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{b'^2}{(u^3)^2} e^{-4b} = b'^2 e^{-4b} \left(\frac{(u^0)^2 - (u^3)^2}{(u^3)^2} \right) \\ &= b'^2 e^{-4b} \left(-\frac{1}{b'r} - 1 \right) = -b' \left(b' + \frac{1}{r} \right) e^{-4b} \\ &= \omega^2 e^{-2b} (rb' + 1) = \omega^2 e^{-2b} \left[1 - \frac{m}{r} \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \right] \\ &= \omega^2 e^{-2b} \left(\frac{1 - \frac{3m}{r}}{1 - \frac{2m}{r}} \right), \\ \Omega^2 &= e^2 \omega^2 \quad \text{avec} \quad e^2 = 1 - \frac{3m}{r}. \end{aligned} \tag{9.58}$$

Nous écrivons encore (9.56) en notation vectorielle

$$\frac{d}{dt} \vec{S} = \vec{\Omega} \wedge \vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega} = (0, e\omega, 0). \tag{9.59}$$

Dans la limite newtonienne nous avons $\Omega = \omega$, c'est-à-dire dans la limite newtonienne les composantes de \vec{S} ne changent pas par rapport à un système cartésien et la précession avec ω est dûe au changement de la base e_1, e_2, e_3 le long de l'orbite. Dans un champ gravitationnel, $m \neq 0$, ce changement de base n'est plus entièrement compensé et le spin précesse seulement avec la fréquence

$$e\omega < \omega.$$

Après une période, \vec{S} a tourné d'un angle

$$2\pi(1 - e) =: \omega_G \frac{2\pi}{\omega}.$$

La fréquence de précession géodesique est

$$\begin{aligned}\omega_G &= \omega(1 - e) = \sqrt{\frac{m}{r^3}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{3m}{r}} \right] \\ &\cong \left(\frac{GM}{r^3} \right)^{1/2} \frac{3}{2} \frac{GM}{r} = \frac{3}{2} \frac{(GM)^{3/2}}{r^{5/2}}.\end{aligned}\quad (9.60)$$

Pour la masse de la terre cela donne (pour la précession d'un satellite à la distance r du centre de la terre)

$$\omega_G \cong 8.4 \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^{5/2} \text{ secondes d'arc par année.} \quad (9.61)$$

La précession géodesique (couplage spin-orbite) s'ajoute au terme dû à la rotation de la terre (effet Lense Thirring, couplage spin-spin) et elle est environ 10^3 fois plus grand que ce dernier. Actuellement le couplage spin-orbite est mesuré avec une précision d'un demi pour-cent pour l'orbite du satellite "Gravity Probe B" autour de la terre. Pour aussi discerner le couplage spin-spin, l'analyse des données doit être améliorée pour réduire l'erreur d'un facteur d'environ 10. L'équipe de l'expérience "Gravity Probe B" reste optimiste (voir <http://einstein.stanford.edu>).

Le système terre-lune représente un gyroscope naturel qui subit cette précession dans son orbite autour du soleil (dans le champ gravitationnel du soleil). La Distance moyenne du système terre-lune du soleil est env. $a = 1.5 \times 10^8$ km. Le potentiel gravitationnel est $\phi = GM_\odot/a \simeq 9.87 \times 10^{-9}$. Ceci donne une contribution de $(3/2)(GM_\odot/a)^{3/2}/a \simeq 1.92 \times 10^{-2}$ arc-sec/année à la périégée de la lune. Cette contribution est mesurée dans les expériences de 'lunar laser ranging' avec une précision de 0.1%, [7] donc mieux que la mesure du couplage spin-orbite par "gravity probe B" en ce moment. Le couplage spin-orbite est aussi observé dans le pulsar binaire PSR1916+13 (voir prochain chapitre) ou il est environ 1.1° /année.

9.7 La continuation de Kruskal

Comme déjà mentionné, la métrique de Schwarzschild

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

semble avoir une singularité en $r = 2m$. Mais toutes les composantes du tenseur de Riemann restent finies en $r = 2m$. Elles sont typiquement de l'ordre de

$$R^1_{212} = R^1_{313} = e^{-2b} \frac{b'}{r} = -\frac{1}{2r} \underbrace{(e^{-2b})'}_{1 - \frac{2m}{r}}$$

$$= -\frac{m}{r^3}.$$

Les accélérations relatives des particules en chute libre restent alors finies en $r = 2m$.

Avant de chercher des coordonnées dans lesquelles nous pouvons continuer la métrique de Schwarzschild à travers $r = 2m$, nous voulons discuter ce qui se passe lorsqu'une particule vient de très loin vers $r \rightarrow 2m$. Nous considérons une géodésique radiale, $L = r^2\dot{\phi} = 0$. Avec (9.26) et (9.27) nous avons

$$\dot{r}^2 = \frac{2m}{r} + E^2 - 1. \quad (9.62)$$

Nous considérons une particule qui est lâchée du repos à une distance $r = R > 2m$ du centre. En $r = R$, il est $\dot{r} = 0$: $E^2 - 1 = -\frac{2m}{R}$. Ceci donne

$$d\tau = \frac{-dr}{\left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{R}\right)^{1/2}}. \quad (9.63)$$

Nous avons choisi le signe moins parce que nous considérons une particule qui tombe vers $r \rightarrow 0$, donc r est décroissant ('ingoing'). Cette relation est satisfaite pour une cycloïde. En représentation paramétrique

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{2}(1 + \cos \eta) \\ \tau &= \frac{R}{2} \left(\frac{R}{2m}\right)^{1/2} (\eta + \sin \eta). \end{aligned} \quad (9.64)$$

Pour $r = R$ nous avons ($\eta = 0$) $\tau = 0$. Rien de particulier ne se passe en $r = 2m$. Le centre $r = 0$ ($\eta = \pi$) est atteint au temps propre

$$\tau = R \frac{\pi}{2} \left(\frac{R}{2m}\right)^{1/2} \cong \left(\frac{R}{R_S}\right)^{3/2} \left(\frac{R_S}{R_{S\odot}}\right) \times 10^{-5} \text{sec.}$$

Pour comparaison nous considérons r comme fonction du temps de coordonnée t (le temps propre d'un observateur à $r \rightarrow \infty$).

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \dot{t} = \frac{dr}{dt} \frac{E}{1 - \frac{2m}{r}}. \quad (9.65)$$

Il est utile d'introduire la variable

$$r^* = r + 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad (9.66)$$

$$\frac{dr^*}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \frac{dr}{dt}, \quad \text{donc} \quad \dot{r} = E \frac{dr^*}{dt}. \quad (9.67)$$

De (9.67) il suit

$$E^2 \left(\frac{dr^*}{dt}\right)^2 = E^2 - 1 + \frac{2m}{r} = \frac{2m}{r} - \frac{2m}{R}. \quad (9.68)$$

Pour $r \rightarrow 2m$, $r^* \rightarrow -\infty$ et le côté droit de (9.68) approche E^2 .

Pour $r \cong 2m$ nous avons alors

$$\frac{dr^*}{dt} \cong -1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad r^* \cong -t + \text{const.}$$

$$2m + 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) \cong -t + \text{const.}$$

Alors, pour $r \rightarrow 2m$, $r(t)$ se comporte comme

$$r \cong 2m + \text{const} \cdot e^{-\frac{t}{2m}}. \quad (9.69)$$

Le rayon de Schwarzschild $r = 2m$ est alors atteint à temps de coordonnée $t = \infty$. Ceci suit déjà de

$$\dot{t} = \frac{E}{1 - \frac{2m}{r}} \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{d\tau} \quad \text{diverge pour } r \rightarrow 2m.$$

Donc pour un observateur lointain la particule ne disparaît jamais ($t \rightarrow \infty$)

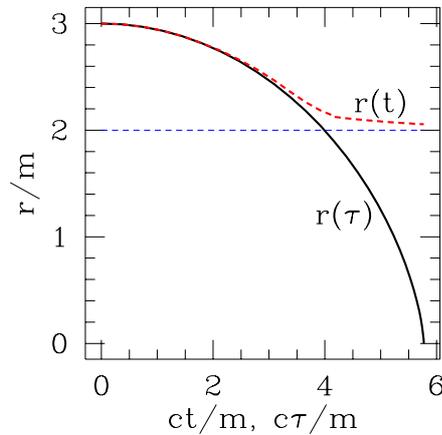


FIG. 9.4 – $r(t)$ et $r(\tau)$ pour une géodésique radiale.

derrière l'horizon $r = 2m$.

Considérons aussi des géodésiques radiales genre lumière. Pour celles-ci, $ds^2 = 0$ ce qui implique

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \quad (9.70)$$

Pour $r > 2m$ le signe + est pour les rayons qui vont vers $r \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$ ("outgoing") et le signe – est pour les raies "ingoing".

Pour $r \rightarrow 2m$ le cône de lumière devient de plus en plus étroit. (voir figure 9.5)

Physiquement, il est important de noter que **le redshift** d'un photon émis à $r = R > 2m$ à r est

$$z + 1 \stackrel{(7.30)}{=} \left(\frac{g_{00}(R)}{g_{00}(r)} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \frac{2m}{R}}{1 - \frac{2m}{r}} \right)^{1/2} \xrightarrow{r \rightarrow 2m} \infty. \quad (9.71)$$

Ceci diverge pour $r \rightarrow 2m$. Donc même si une particule massive (ou un photon) n'atteint jamais l'horizon du point de vue d'un observateur lointain, sa lumière est de plus en plus décalée vers le rouge de sorte qu'elle devient très vite invisible.

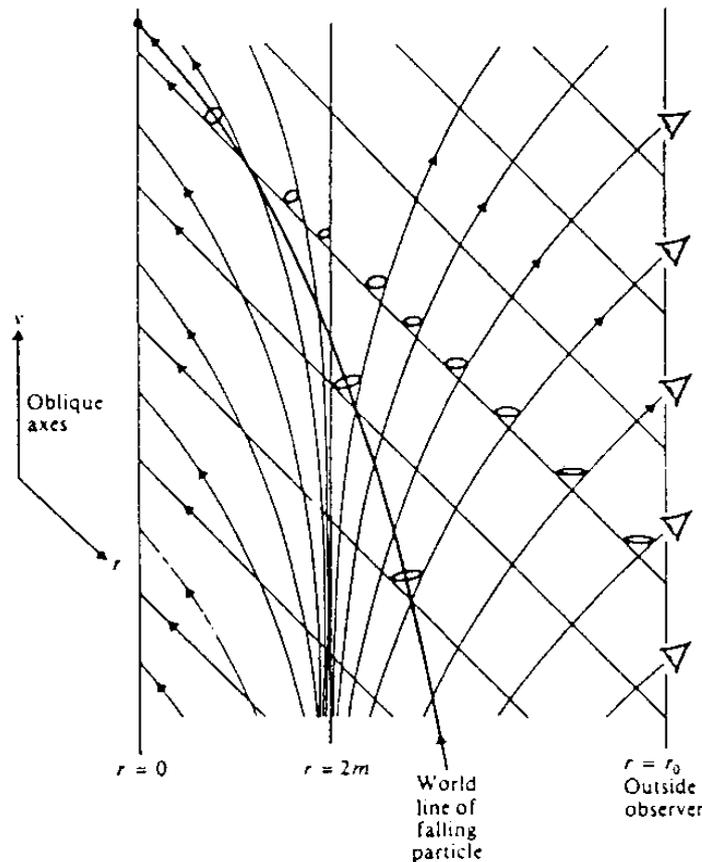


FIG. 9.5 – Géodésiques "ingoing" et "outgoing". De J. Foster, J.D Nightingale, *A short course in General Relativity*, Springer, 1995

Nous introduisons encore la coordonnée de Eddington-Finkelstein,

$$v = t + r + 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) .$$

Avec v la métrique s'exprime comme

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 .$$

Les géodésiques radiales, genre lumière sont alors données par

$$- \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 + 2\frac{dv}{dr} = 0 .$$

Ici $\frac{dv}{dr} = 0$ décrit des géodésiques à r décroissant (ingoing) tandis que pour $\frac{dv}{dr} = \frac{2}{1-\frac{2m}{r}} > 0$, la géodésique est 'outgoing'.

Le fait qu'il se passe des événements à temps propre τ fini qui sont plus tard que $t = \infty$, nous montre que t n'est plus une bonne coordonnée pour $r < 2m$. Pour $r > 2m$, t est la coordonnées temporelle par rapport à laquelle la métrique est statique, $K = \partial_t$ est le champ de Killing qui satisfait $K^\flat \wedge dK^\flat = 0$. Ceci détermine t uniquement (à une constante près). Pour $r < 2m$, les coordonnées t et r changent leur rôle. Le temps t devient coordonnée du genre espace et r devient genre temps!

Nous voulons continuer la métrique à travers $r = 2m$. Pour cela, nous suivons l'approche de Kruskal (1956) en essayant un ansatz $u(r, t)$, $v(r, t)$ tel que

$$g = f^2(u, v)(-dv^2 + du^2) + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) . \quad (9.72)$$

Dans un tel système de coordonnées toujours $\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1$ pour des rayons de lumière radiaux. La partie radiale de la métrique, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, est conforme à la métrique de Minkowski en 2 dimensions et elle a alors les mêmes cônes de lumière. dans un tel système de coordonnées nous ne rencontrons donc plus le problème que le cône de lumière devient de plus en plus étroit.

La relation

$$g_{\alpha\beta} = \frac{dx'^\mu}{dx^\alpha} \frac{dx'^\nu}{dx^\beta} g'_{\mu\nu}$$

implique les équations différentielles suivantes pour la transformation $(t, r) \mapsto (v, u)$:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right] , \quad (9.73)$$

$$-\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \right] , \quad (9.74)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial r} . \quad (9.75)$$

Motivé par la staticité de la solution de Schwarzschild, nous essayons de trouver une fonction f qui ne dépend que de r . Nous posons d'abord

$$F(r^*) = \frac{1 - \frac{2m}{r}}{f^2(r)} \quad (9.76)$$

où $r^* = r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right)$ comme avant en (9.65). Avec (9.73) et (9.74) ceci donne

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = F(r^*) , \quad (9.77)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r^*}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r^*}\right)^2 = -F(r^*) , \quad (9.78)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r^*} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial r^*} . \quad (9.79)$$

Les sommes (9.77)+(9.78)±2·(9.79) donnent

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r^*}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r^*}\right)^2 , \quad (9.80)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial r^*}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial r^*}\right)^2 . \quad (9.81)$$

Nous avons utilisé que

$$\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} .$$

Les signes de $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, etc. ne sont pas déterminés par (9.73) à (9.75).

En prenant les racines de (9.80) et (9.81) nous choisissons le signe positif dans (9.80) et le signe négatif dans (9.81).

Si l'on choisissait le même signe dans (9.80) qu'en (9.81), le déterminant $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,r^*)}\right|$ s'annulerait !

Nous trouvons alors $(\sqrt{(9.80)} + \sqrt{(9.81)}; \sqrt{(9.80)} - \sqrt{(9.81)})$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r^*} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial r^*} = \frac{\partial u}{\partial t} . \quad (9.82)$$

Ceci donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^{*2}} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^{*2}} = 0 . \quad (9.83)$$

Avec solutions générales

$$\begin{aligned} v &= h(r^* + t) + g(r^* - t) , \\ u &= h(r^* + t) - g(r^* - t) . \end{aligned} \quad (9.84)$$

Les équations (9.77) et (9.78) demandent

$$-4h'(r^* + t)g'(r^* - t) = F(r^*) . \quad (9.85)$$

Différentiation par rapport à r^* donne

$$\frac{h''(r^* + t)}{h'(r^* + t)} + \frac{g''(r^* - t)}{g'(r^* - t)} = \frac{F'(r^*)}{F(r^*)} ,$$

et la différentiation par rapport à t mène à

$$\frac{h''(r^* + t)}{h'(r^* + t)} - \frac{g''(r^* - t)}{g'(r^* - t)} = 0 .$$

La somme de ces deux équations implique

$$[\ln F(r^*)]' = 2 [\ln h'(r^* + t)]' . \quad (9.86)$$

Ici nous considérons r^* et $y = r^* + t$ comme variables indépendantes. Les deux côtés de (9.86) sont alors constants. Il suit (avec le choix 2η pour $[\ln(F(r^*))]'$ et la constante d'intégration telle que la contrainte (9.85) soit satisfaite,

$$F(r^*) = \eta^2 e^{2\eta r^*} \quad h(r^* + t) = \frac{1}{2} e^{\eta(r^* + t)} \quad g(r^* - t) = -\frac{1}{2} e^{\eta(r^* - t)} .$$

Pour $r > 2m$ le signe de h et g est déterminé par la condition $F > 0$. Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} u &= h - g = \frac{1}{2} e^{\eta(r^* + t)} + \frac{1}{2} e^{\eta(r^* - t)} \\ &= e^{\eta r^*} \cosh \eta t = \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{2m\eta} e^{\eta r} \cosh \eta t . \end{aligned}$$

Et de même

$$v = \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{2m\eta} e^{\eta r} \sinh \eta t .$$

Pour f nous trouvons

$$f^2 = \frac{2m}{\eta^2 r} \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{1-4m\eta} e^{-2\eta r} .$$

Nous voulons choisir la constante d'intégration η telle que $f^2 \neq 0$ à $r = 2m$. ceci demande $\eta = \frac{1}{4m}$. Ce choix correspond à la

transformation de Kruskal $(r, t) \mapsto (u, v)$ avec

$$u = \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{1/2} \exp(r/4m) \cosh \left(\frac{t}{4m} \right) \quad (9.87)$$

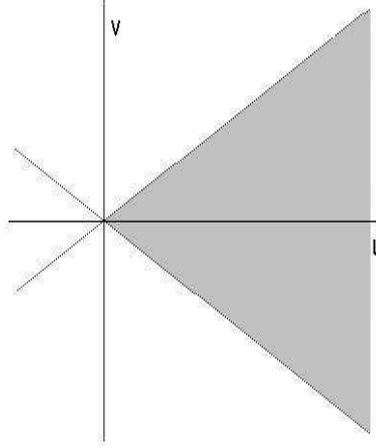


FIG. 9.6 – L'image du domaine $(r > 2m, t)$ est le domaine $u > |v|$.

$$v = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} \exp(r/4m) \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \quad (9.88)$$

$$f^2 = \frac{32m^3}{r} \exp(-r/2m). \quad (9.89)$$

Pour $r > 2m$, ceci est une simple transformation de coordonnées. Le domaine $(r > 2m, t)$ est appliqué sur $u > |v|$ du plan (u, v) .

Nous avons

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}} \quad \text{et} \quad \frac{v}{u} = \tanh\left(\frac{t}{4m}\right).$$

Les lignes $r = \text{constant}$ sont alors des hyperboles, $u^2 - v^2 = \text{const}$. Pour $r \rightarrow 2m$, elles approchent les droites $u = |v|$. Les lignes $t = \text{const}$ sont des droites radiales. La diagonale $u = v$ correspond à $t = \infty$ et $u = -v$ à $t = -\infty$. Les diagonales $t = \pm\infty$ correspondent aussi à $r = 2m$.

La métrique

$$g = f^2(u, v) (-dv^2 + du^2) + r^2(u, v) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.90)$$

est bien définie non seulement pour $u > |v|$, mais aussi dans tout le domaine où $f(u, v) = f(r(u, v))$ est bien défini et $r(u, v) > 0$. La fonction $r(u^2 - v^2)$ donnée par

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}}, \quad (9.91)$$

est monotone (voir graphique 9.8). Le domaine $r > 0$ est alors

$$u^2 - v^2 > -1, \quad v^2 - u^2 < 1. \quad (9.92)$$

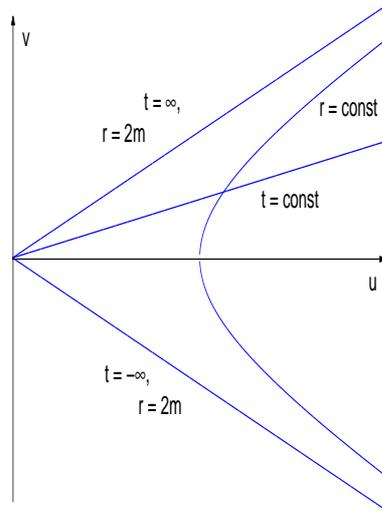


FIG. 9.7 – Des lignes $r = \text{const.}$ et $t = \text{const.}$ dans le plan (u, v) .

La nouvelle variété de Kruskal (u, v) contient la variété de Schwarzschild (r, t) . Sur la variété de Kruskal nous avons aussi $G_{\mu\nu} = 0$. Elle est donc une solution dans le vide des équations d'Einstein.

Dans la dérivation de la transformation de Kruskal nous avons choisi le signe de h de façon arbitraire, $h > 0$. Le choix $h < 0$ aurait aussi été possible. Il correspond à $(u, v) \mapsto (-u, v)$. Les domaines I et III de la figure 9.9 sont alors isométriques.

Considérons la solution de Schwarzschild pour $r < 2m$. Elle satisfait aussi les équations dans le vide, $G_{\mu\nu} = 0$. Pour $r < 2m$, r est une coordonnée genre temps et t est genre espace. Le domaine $r < 2m$ de la solution de Schwarzschild est isométrique au domaine II de la variété de Kruskal. Pour nous convaincre de ceci nous pouvons répéter la dérivation qui a mené à (9.87) et à (9.88) avec $r < 2m$. Maintenant $F(r^*)$ est négatif et le signe relatif de h et g doit être positif. Nous obtenons

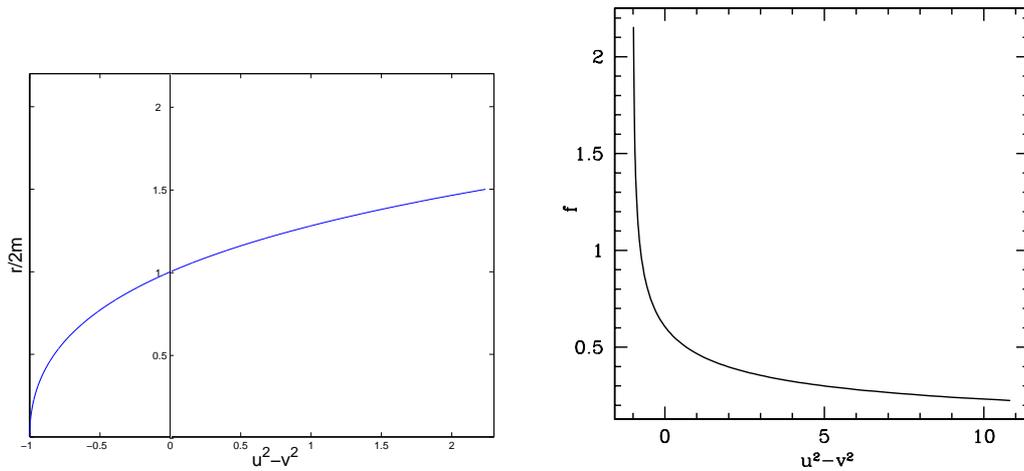
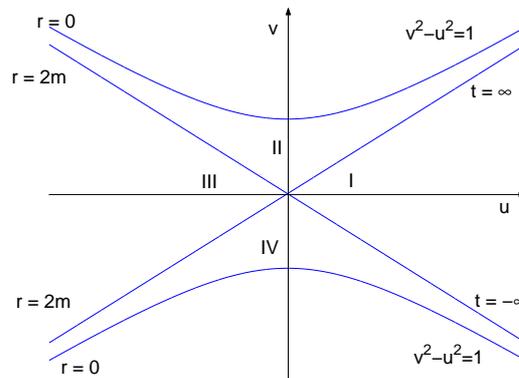
$$u = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \sinh\left(\frac{t}{4m}\right), \quad (9.93)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \cosh\left(\frac{t}{4m}\right), \quad (9.94)$$

et f est comme avant (9.89).

Nous avons alors $v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{2m}\right) e^{\frac{r}{2m}} > 0$ et $\frac{u}{v} = \tanh\left(\frac{t}{4m}\right)$, ce qui correspond au domaine II. Sur $v^2 - u^2 = 1$ la géométrie a une vraie singularité. Par exemple, le scalaire de Riemann R diverge. La variété de Kruskal est maximale. Toute géodésique rencontre la singularité $v^2 - u^2 = 1$ ou elle continue jusqu'à paramètre affine infini.

Les relations causales de la métrique de Kruskal sont simples, comme tous les cônes de lumière sont à 45° comme dans l'espace de Minkowski :

FIG. 9.8 – La fonction $r(u^2 - v^2)$ FIG. 9.9 – Les 4 domaines dans la variété de Kruskal séparées par des droites à 45° .

- Les observateurs I et III reçoivent des signaux de IV. (I et III sont eux-mêmes causalement déconnectés)
- Aucun signal ne peut rester dans IV.
- Aucun signal ne peut quitter II.
- Chaque géodésique temporelle ou genre lumière en II rencontre la singularité $u^2 - v^2 = -1$ en temps propre fini.
- Chaque géodésique temporelle ou genre lumière en IV a quitté la singularité à temps propre fini. La singularité $v^2 - u^2 = 1$ est séparée des régions asymptotiquement plates, I et III, par l'horizon $r = 2m$.¹
- Un signal qui vient de IV vers I (ou II) a quitté la singularité avant $t = -\infty$.

¹Un horizon est une surface fermée de genre lumière. C'est-à-dire une surface telle que le cône de lumière de tout point sur la surface y est partiellement tangent et la partie non-tangente ne s'ouvre que vers l'intérieur de la surface.

Les domaines III et IV de la variété de Kruskal correspondent à $t < -\infty$ et elles ne sont (peut-être) pas observables. En général un trou noir astrophysique est représenté par les domaines I et II de la variété de Kruskal (les parties III et IV sont parfois appelés "trou blanc" (white hole)).

- La singularité $v^2 - u^2 = 1$, $r = 0$ est genre espace. Dans I et III le champ de Killing $K = \partial_t$ est genre temps, alors que dans II et IV il est genre espace et à l'horizon, $r = 2m$, il est genre lumière :

$$(K, K) = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) = \begin{cases} < 0 & \text{si } r > 2m \\ = 0 & \text{si } r = 2m \\ > 0 & \text{si } r < 2m . \end{cases} \quad (9.95)$$

- En II (IV) il n'existe pas d'observateur au repos, c'est-à-dire avec $r = \text{constant}$.

Chaque observateur s'approche (s'éloigne) de la singularité.

Théorème de Birkhoff généralisé : Toute solution des équations d'Einstein dans le vide à symétrie sphérique est une partie de la variété de Kruskal.

Démonstration: Voir par exemple Straumann.

9.8 Le collapse sphérique en trou noir

Aussitôt que le rayon d'une étoile est inférieur à $2m$ il n'existe plus de solution statique. Comme les lignes d'univers de la surface de l'étoile sont à l'intérieur du cône de lumière, cette surface se précipite inévitablement vers $r = 0$ (effets quantiques pour $r \sim 0$?).

Un signal émis à l'intérieur de $r = 2m$ ne peut pas "sortir" (voir figure 9.9 et rappelle que les cônes de lumière sont à 45°). Toutes les raies de lumière tombent aussi dans la singularité. L'horizon $r = 2m$ est la limite du domaine qui est causalement lié à l'infini, $r \rightarrow \infty$. Il agit comme une membrane semi-perméable : de l'énergie et de l'information peut entrer mais rien ne peut en sortir.

L'existence des horizons dans l'univers est une conséquence remarquable de la relativité générale sans aucun équivalent newtonien. La singularité de la solution de Schwarzschild est derrière un horizon et donc pas visible. Il est une conjecture que ceci soit le cas pour toutes les solutions stable avec une singularité :

'Conjecture of cosmic censorship' : Toute singularité d'une solution **stable** des équations d'Einstein est séparée par un horizon d'un observateur asymptotique.

Il n'existe pas encore de contre-exemple (ce qu'on appellerait une singularité nue) stable si le tenseur énergie-impulsion satisfait certaines conditions 'raisonables'.

9.8.1 Le décalage vers le rouge d'un observateur asymptotique

Nous considérons un émetteur qui s'approche radialement de l'horizon de Schwarzschild avec quadri-vitesse v . Il émet des signaux à fréquence ω_e .

Si k est le vecteur d'onde des photons émis, nous avons (relativité restreinte) :

$$\begin{aligned} \omega_e &= -(k, v) \\ \omega_0 &= -(k, u) \end{aligned} \quad \text{donc le redshift est} \quad z + 1 = \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{(k, v)}{(k, u)} \quad (9.96)$$

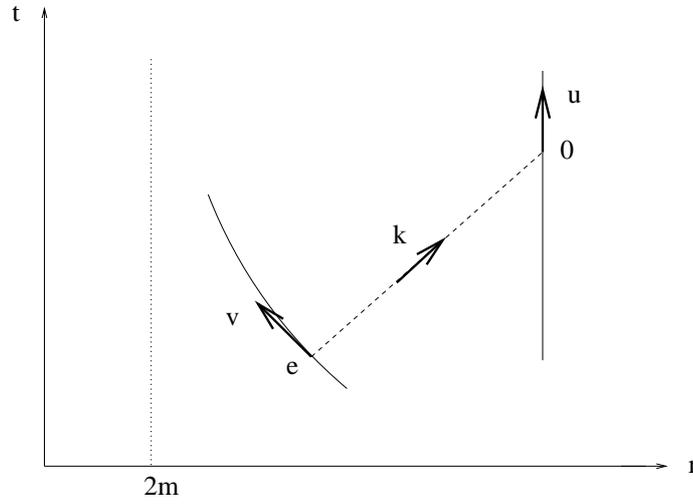


FIG. 9.10 – Un émetteur 'e' avec quadri-vitesse v s'approche de l'horizon, $r = 2m$, d'un trou noir. Il envoie des photons avec quadri-impulsion k vers un observateur '0', qui est en repos (quadri-vitesse u).

Nous posons $a = t - r^*$, $r^* = r + 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)$ (a est le temps "retardé"). Donc

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) (da)^2 - 2dadr + r^2 d\Omega^2. \quad (9.97)$$

Pour un rayon de lumière radial nous avons

$$k = k^a \partial_a + k^r \partial_r = k^t \partial_t + \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \right] k^r \partial_r .$$

Avec (9.97) le lagrangien d'une géodésique radiale est

$$-\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) k^a + k^r \right] k^a = 0 . \quad (9.98)$$

$\mathcal{L} = 0$ implique $k_a = 0$ ou $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) k^a + k^r$ Pour un rayon lumineux radial vers l'extérieur nous avons

$$k^a = k^t - k^r \left(\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \right) = 0 .$$

Comme $\epsilon = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) k^t$ est une constante du mouvement, il suit que $k^r = \text{constant}$, donc $k = \text{const} \cdot \partial_r$ et alors

$$1 + z = \frac{(v, \partial_r)}{(u, \partial_r)} . \quad (9.99)$$

Pour $v = \dot{a} \partial_a + \dot{r} \partial_r$ nous avons $(v, \partial_r) = g_{ar} \dot{a} = -\dot{a}$. Pour l'observateur lointain au repos nous avons $(u, \partial_r) = g_{ar} \dot{a} = g_{ar} \dot{t} \cong -1$. Alors

$$1 + z = \dot{a} = \dot{t} - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \dot{r} , \quad (9.100)$$

où \dot{t} , \dot{r} se rapportent ici à l'émetteur.

Avec $E = \dot{t} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$, $2\mathcal{L} = 1 = (E^2 - \dot{r}^2) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$

$$1 + z = \frac{E - \dot{r}}{1 - \frac{2m}{r}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left[E + \left(E^2 - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{1/2} \right] \xrightarrow{r \rightarrow 2m} \infty . \quad (9.101)$$

Le temps propre de l'observateur est $d\tau_0 \cong da$.

La coordonnée de l'émetteur $r_e(\tau_0)$ se comporte comme

$$\frac{dr_e}{d\tau_0} = \frac{dr_e}{da} = \left(\frac{\dot{r}}{\dot{a}} \right) = \frac{\dot{r}}{1+z} = - \left(1 - \frac{2m}{r_e}\right) \frac{(E^2 - 1 + \frac{2m}{r_e})^{1/2}}{E + (E^2 - 1 + \frac{2m}{r_e})^{1/2}} . \quad (9.102)$$

Très proche de $r_e \sim 2m$ nous avons

$$-\frac{dr_e}{d\tau_0} \cong \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r_e}\right) \quad \text{or} \quad r_e - 2m \cong e^{-\frac{\tau_0}{4m}} , \quad (9.103)$$

ce qui implique

$$1 + z \cong \frac{4mE}{r_e - 2m} \propto e^{\frac{\tau_0}{4m}} . \quad (9.104)$$

(9.103) implique que l'émetteur atteint $r_e = 2m$ seulement pour $\tau_0 \rightarrow \infty$, où τ_0 est le temps propre de l'observateur. Mais d'après (9.104) le redshift diverge pour $r \rightarrow 2m$.

Le temps caractéristique est $4m \cong 10^{-5} [\text{sec}] \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$. L'émetteur "disparaît" donc très vite lorsqu'il approche le rayon de Schwarzschild dû à ce décalage vers le rouge qui décale l'émission hors de la sensibilité du télescope.

9.8.2 Le fait d'un observateur qui tombe dans un trou noir

Les composantes typiques du tenseur de Riemann de la solution de Schwarzschild sont

$$R_{1212} = \frac{m}{r^3} \quad R_{0101} = \frac{2m}{r^3} . \quad (9.105)$$

Les accélérations relatives des particules en chute libre sont donc $\sim 2\frac{m}{r^3}$ (en direction radiale). Considérons un petit cube à dimension $\ell \ll m$ et de masse μ . La force nécessaire pour qu'il ne soit pas "déchiré" par la gravitation est

$$F \cong \frac{2m}{r^3} \mu \ell .$$

Pour la tension $T = \frac{F}{\ell^2} \cong \frac{2m}{r^3} \frac{\mu}{\ell}$.

Pour $\mu \sim 70$ [kg], $\ell \sim 180$ [cm] ceci donne

$$T(r) \sim 10^{13} \left(\frac{R_S R_S^2 (M_\odot)}{r^3} \right) [\text{dyne cm}^{-2}] . \quad (9.106)$$

(comparer à 1 [atm] $\sim 10^6$ [dyne cm⁻²]),

$$T(R_S) = 10^{13} \left(\frac{R_S (M_\odot)}{R_S} \right)^2 [\text{dyne cm}^{-2}]$$

Pour des grandes masses, $R_S \gg R_S(M_\odot)$, la tension peut être supportable à $r = R_S$. Mais comme, ensuite, l'approche vers $r \rightarrow 0$ est inévitable...

9.8.3 Evidences observationnelles

On peut montrer qu'il n'existe pas de configurations de matière stables à $M \gtrsim 2.5M_\odot$. Toute étoile incapable de se débarrasser de masse supplémentaire va finalement former un trou noir. Comme un trou noir n'est pas directement visible (aucun photon ne peut s'échapper de l'intérieur de l'horizon), on ne peut le percevoir que par son attraction gravitationnelle. Très souvent un trou noir est entouré d'un disque de 'poussière', disque d'accrétion qui émet des rayons X, ou il est dans un système binaire. Dans ces cas on a des possibilités pour estimer sa masse et/ou sa 'taille' (c'est-à-dire la taille de l'horizon, R_S) :

- On a trouvé plusieurs systèmes binaires dont l'un des compagnons a une masse supérieure à $5 M_\odot$, $7 M_\odot$ et même $10 M_\odot$, et n'est pas visible dans le spectre, et donc qui représente fort probablement un trou noir. Malgré ça, l'abondance des trous noirs stellaires dans notre galaxie est très difficile à estimer
- Il est aussi très vraisemblable que des trous noirs massifs, $M \sim 10^{6-7} M_\odot$, se trouvent dans la plupart des centres galactiques. Dans le centre de la voie lactée il nous supposons un trou noir avec une masse de $M \simeq 3.6 \times 10^6 M_\odot$. Cette masse est déterminée par ces orbites stellaires très étroites.

- L'activité des quasars et de tout nucléus galactique actif, est comprise comme accréation sur un trou noir gigantesque, $M \gtrsim 10^8 M_\odot$, au centre d'une galaxie.

9.9 Diagramme de Penrose pour l'espace-temps Kruskal

Dans cette section nous construisons la 'compactification conforme' de l'espace-temps de Kruskal. De telles constructions rendent possible une discussions de ce qui se passe à l'infini avec des outils locaux de la géométrie différentielle. Ce qui est très important par exemple pour l'étude du rayonnement gravitationnel.

9.9.1 Compactification conforme de l'espace-temps de Minkowski

Comme exemple simple nous construisons la 'compactification conforme' de l'espace-temps de Minkowski. En coordonnées polaire, la métrique de Minkowski est donnée par

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) .$$

Introduisant les coordonnées $u = t - r$ et $v = t + r$ nous pouvons écrire

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v - u)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) .$$

Les hypersurfaces $\{u = \text{constant}\}$ et $\{v = \text{constant}\}$ sont des surfaces nulles, c'est-à-dire

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0 .$$

Ce sont les surface normales aux raies de lumière qui propagent en directions radiales vers $r \rightarrow \infty$ pour $u = \text{constant}$ ou vers $r \rightarrow 0$ pour $v = \text{constant}$. Les coordonnées (u, v) de la région $u \leq v$ du \mathbb{R}^2 représentent tout le domaine (t, r) avec $r \geq 0$. Nous les appliquons dans la région bornée $(U, V) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $U \leq V$ donnée par

$$u = \tan U , \quad v = \tan V . \tag{9.107}$$

Avec

$$dudv = \frac{dUdV}{\cos^2 U \cos^2 V}$$

et

$$(u - v)^2 = \frac{\sin^2(U - V)}{\cos^2 U \cos^2 V} ,$$

la métrique devient

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} (-4dUdV + \sin^2(U - V)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \\ &= \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} d\tilde{s}^2, \quad \text{avec} \\ d\tilde{s}^2 &= -4dUdV + \sin^2(U - V)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \end{aligned}$$

Les métriques ds^2 et $d\tilde{s}^2$ sont reliées par

$$ds^2 = \Omega^2 d\tilde{s}^2, \quad \Omega^2 = 4 \cos^2 U \cos^2 V.$$

Contrairement à ds^2 , la métrique $d\tilde{s}^2$ est aussi bien définie au bord, $U = \pm\pi/2$ ou $V = \pm\pi/2$. C'est une métrique régulière sur $\widetilde{\mathcal{M}} = [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2] \times \mathbb{S}^2$. En effet $(\widetilde{\mathcal{M}}, d\tilde{s}^2)$ est une partie de l'univers d'Einstein qui est donné par $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ avec sa métrique induite de celle de \mathbb{R}^5 . En posant $\tau = U + V$ et $\chi = V - U$ nous trouvons

$$d\tilde{s}^2 = -d\tau^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

ce qui est la métrique de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. La partie ombragée du cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ dans la figure 9.11 correspond à $\widetilde{\mathcal{M}}$. L'image de l'espace de Minkowski correspond à la partie intérieure (sans le bord) de $\widetilde{\mathcal{M}}$. Son bord s'appelle 'l'infini conforme'. Il consiste des parties suivantes : Les deux hypersurfaces nulles données par $\{2V = \tau + \chi = \pi, |2U| = |\tau - \chi| < \pi\} \equiv \mathcal{J}^+$ qui correspond à '**future null infinity**' et $\{2U = \tau - \chi = -\pi, |2V| = |\tau + \chi| < \pi\} \equiv \mathcal{J}^-$ qui correspond à '**past null infinity**'. Les deux point $i^\pm = (U, V) = \pm(\pi/2, \pi/2)$ indiqués sur le graphique correspondent à l'infini future (i^+) et passé (i^-) genre temps et i^0 représente l'infini genre espace.

Toute géodésique genre temps qui est dirigée vers le future se termine à i^+ et toute géodésique genre temps qui est dirigée vers le passé se termine à i^- . Toute géodésique genre espace se termine dans i^0 . Le diagramme conforme en coordonnées (τ, χ) est présenté dans la figure 9.12. Cette figure est le diagramme de Penrose-Carter de l'espace Minkowski.

9.9.2 Le diagramme de Penrose de l'espace-temps de Schwarzschild-Kruskal

Nous procédons alors de la même manière pour construire le diagramme de Penrose de l'espace-temps de Schwarzschild-Kruskal. Nous transformons les coordonnées de Kruskal, (u, v) , données dans (9.87) et (9.88) en

$$\tilde{u} = v - u \quad \text{et} \quad \tilde{v} = v + u.$$

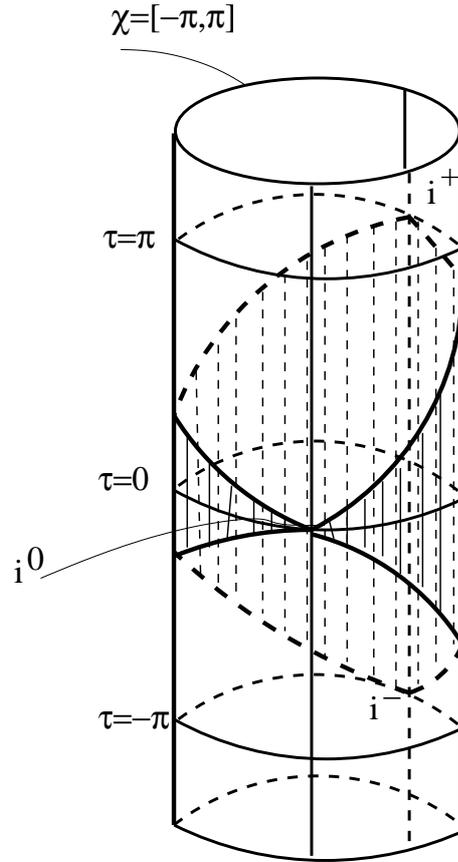


FIG. 9.11 – L'univers d'Einstein avec la variété $\tilde{\mathcal{M}}$ (région ombragée) qui est conformément isométrique à l'espace de Minkowski. Les bords de $\tilde{\mathcal{M}}$ correspondent à l'infini de l'espace Minkowski.

Comme dans le cas Minkowski, nous faisons suivre la transformation (9.107),

$$\tilde{u} = \tan U \quad \text{et} \quad \tilde{v} = \tan V ,$$

avec $(U, V) \in]-\pi/2, \pi/2[\times]-\pi/2, \pi/2[$, et la restriction $V - U \geq 0$ tel que $\tilde{v} - \tilde{u} = 2u = 2 \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) > 0$. De même, dans cette région $v > 0$, donc $r > 2m$. Ceci correspond alors à la partie extérieure de l'horizon. Comme pour Minkowski, nous posons $\tau = U + V$ et $\chi = V - U$. L'espace temps de Kruskal entier dans le plan (τ, χ) est montré dans le diagramme 9.13.

Dans ce diagramme de Penrose, les hyperboloïdes

$$1 = v^2 - u^2 \equiv \left(1 - \frac{r}{2m}\right) e^{r/2m}$$

qui correspond à la singularité $r = 0$ transforment en $\tan U \cdot \tan V = \tilde{u} \cdot \tilde{v} = 1$, ce qui donne $\cos(U + V) = (1 - \tan U \cdot \tan V) \cos U \cdot \cos V = 0$, donc $\tau = U + V = \pm\pi/2$.

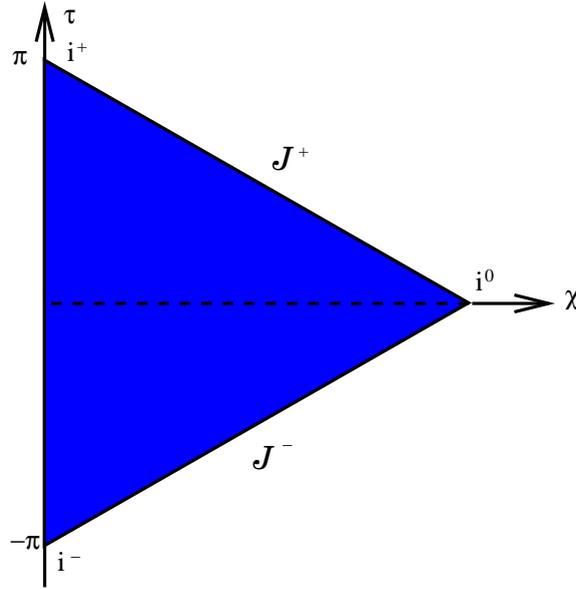


FIG. 9.12 – Le digramme conforme de l'espace Minkowski. L'intérieur correspond à des points (t, r) finis tandis que le bord représente des points à l'infini comme décrit dans le texte. Les coordonnées angulaires, (ϑ, φ) sont supprimés.

Donc les deux lignes traitillées représentent la singularité. Comme dans le cas Minkowski, pour un certain facteur conforme Ω^2 , la métrique $\tilde{g} = \Omega^2 g$ peut être étendue à \mathcal{J}^\pm de façon différentiable (mais à i^0 seulement de façon continue).

Exercice : Montrer que dans la partie $r > 2m$ il est

$$\tau = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh(t/4m)}{1 - \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{r/2m}} \right) & \text{si } \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{r/2m} < 1 \\ \pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh(t/4m)}{\left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{r/2m} - 1} \right) & \text{si } \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{r/2m} > 1 \\ \pi/2 & \text{si } \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{r/2m} = 1, \end{cases} \quad (9.108)$$

$$\chi = \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh(t/4m)}{1 + \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{r/2m}} \right). \quad (9.109)$$

Des lignes $t = \text{constant}$ et $r = \text{constant}$ dans la région I, $r > 2m$, sont montrées dans la fig. 9.14. Faites une figure analogue pour la région II, $0 < r < 2m$. Pour ceci dérivez d'abord les formules correspondantes à (9.108) et (9.109) dans cette région.

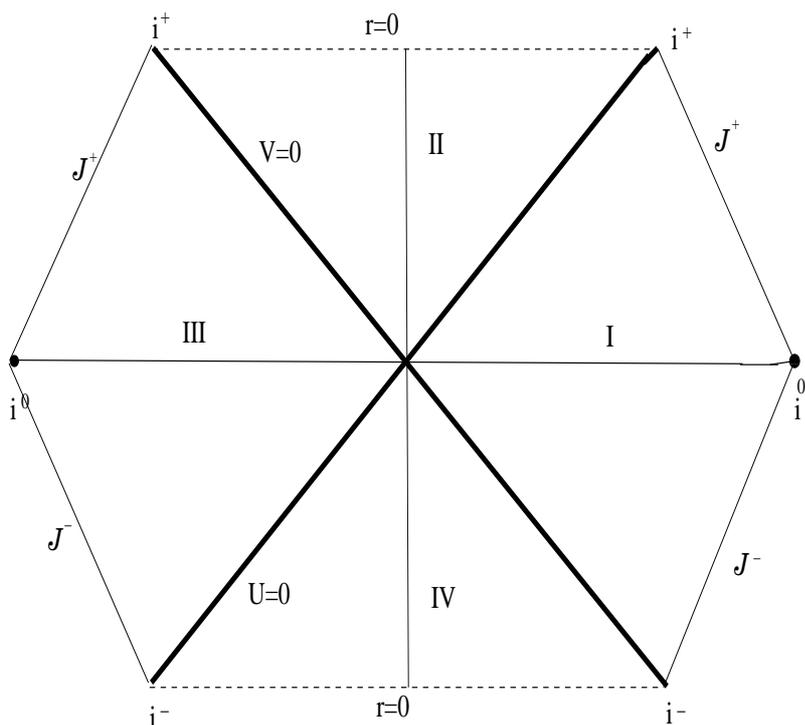


FIG. 9.13 – Le digramme conforme de l'espace-temps Kruskal dans le plan (τ, χ) . L'intérieur correspond à des point (u, v) finis tandis que le bord représente des points à l'infini comme décrit dans le texte. Les quatre régions I, II, III et IV sont aussi indiquées. L'horizon $r = 2m$ correspond aux diagonales $V = 0$ et $U = 0$. Comme dans le cas Minkowski, les infinis genre lumière, \mathcal{J}^\pm correspondent à U et $V = \pm\pi/2$ respectivement et i^0 est l'infini genre espace et i^\pm représentent l'infini genre temps future et passé respectivement.

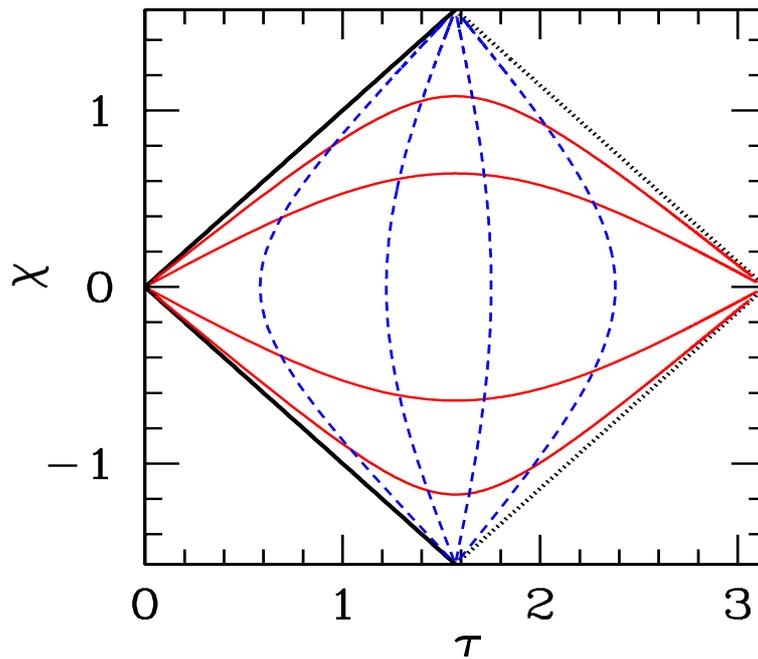


FIG. 9.14 – La région I du diagramme de Penrose dans le plan (τ, χ) est représentée et des lignes $t = \text{constant}$ (rouge, solide), ainsi que des lignes $r = \text{constant}$ (bleue traitillé) sont indiquées. Pour $t = \text{constant}$ toutes les lignes commencent au point $(\tau, \chi) = (0, 0)$ qui correspond à $r = 2m$ et se terminent à i^0 , i.e. $r = \infty$. De haut vers le bas, les temps $t = 4m \ln(4)$, $4m \ln(2)$, $-4m \ln(2)$, $-4m \ln(5)$ sont choisis. Les lignes $r = \text{constant}$ commencent à i^- et se terminent à i^+ . De gauche à droite les choix pour r sont tels que $(r/2m - 1) \exp(r/2m) = 0.1, 0.7, 1.1, 2.5$.

Chapitre 10

Champs gravitationnels faibles, ondes gravitationnelles, lentilles gravitationnelles

Nous considérons des variétés lorentziennes (\mathcal{M}, g) avec champ gravitationnel faible. C'est-à-dire, il existent des coordonnées telles que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{avec} \quad |h_{\mu\nu}| \sim \varepsilon \ll 1. \quad (10.1)$$

Par exemple, dans le système solaire $|h_{\mu\nu}| \cong \frac{2|\Phi|}{c^2} \lesssim \frac{2GM_\odot}{R_\odot c^2} \cong 4 \times 10^{-6}$.

10.1 La gravitation linéarisée

Nous développons la courbure de Ricci et ne gardons que les termes du premier ordre en $h_{\mu\nu}$.

D'après (4.29),

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu}^\alpha + h_{\nu,\mu}^\alpha - h_{\mu\nu}^{\alpha}) . \end{aligned} \quad (10.3)$$

Ici nous "montons" et "baissons" les indices de $h_{\mu\nu}$ avec la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Ceci donne

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [h_{\mu,\nu\alpha}^\alpha + h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha - \square h_{\mu\nu} - h_{\alpha,\mu\nu}^\alpha] \quad (10.4)$$

et

$$R = h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h \quad \text{où} \quad h := h^\alpha{}_\alpha. \quad (10.5)$$

La forme linéarisée du tenseur d'Einstein est alors

$$2G_{\mu\nu} = -\square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha\nu} + h_\nu{}^\alpha{}_{,\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu} \left(\square h - h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} \right). \quad (10.6)$$

L'identité de Bianchi devient

$$G^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0.$$

Les équations d'Einstein donnent

$$\square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha\nu} - h_\nu{}^\alpha{}_{,\alpha\mu} - \eta_{\mu\nu} \left(\square h - h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} \right) = -16\pi GT_{\mu\nu}. \quad (10.7)$$

Dans la théorie linéarisée $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, c'est-à-dire $T_{\mu\nu}$ crée un champ gravitationnel mais ce champ n'a aucune influence sur $T_{\mu\nu}$ au premier ordre.

Nous travaillerons aussi avec

$$\gamma_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (10.8)$$

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma, \quad \text{où} \quad \gamma = \gamma^\alpha{}_\alpha. \quad (10.9)$$

En $\gamma_{\mu\nu}$ les équations d'Einstein deviennent

$$-\square\gamma_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \gamma_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_\nu + \gamma_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_\mu = 16\pi GT_{\mu\nu}. \quad (10.10)$$

Soit ξ^μ un champ vectoriel. Il est facile de voir que le tenseur d'Einstein (10.6) est invariant sous la transformation

$$h_{\mu\nu} \mapsto h_{\mu\nu} + \varepsilon\xi_{\mu,\nu} + \varepsilon\xi_{\nu,\mu}. \quad (10.11)$$

(10.11) peut être interprété comme transformation **infinitésimale** des coordonnées : soit $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x)$. Cette transformation induit des changements d'ordre ε sur toutes les grandeurs. Dans la courbure (et le tenseur énergie-impulsion) qui est déjà du premier ordre en ε nous pouvons négliger ce changement. Mais pour le changement de la métrique nous obtenons

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}(x') \\ &= (\delta^\alpha{}_\mu + \varepsilon\xi^\alpha{}_{,\mu}) (\delta^\beta{}_\nu + \varepsilon\xi^\beta{}_{,\nu}) g'_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= g'_{\mu\nu}(x') + \varepsilon g'_{\nu\alpha}(x')\xi^\alpha{}_{,\mu} + \varepsilon g'_{\mu\beta}(x')\xi^\beta{}_{,\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Au premier ordre donc

$$h_{\mu\nu}(x) = h'_{\mu\nu}(x) + \varepsilon\xi_{\mu,\nu} + \varepsilon\xi_{\nu,\mu}. \quad (10.12)$$

Autrement dit, un difféomorphisme infinitésimal est le flot infinitésimal Φ_ε par rapport à un champ vectoriel ξ . Le changement de la métrique sous Φ_ε est le pull-back,

$$\Phi_\varepsilon^* g = g + \varepsilon L_\xi g + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Pour $g = \eta + h$, $\mathcal{O}(h) \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$, ceci donne

$$h \mapsto h + \varepsilon L_\xi \eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (10.13)$$

mais $(L_\xi \eta)_{\mu\nu} = \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}$. Sous des transformations de coordonnées linéarisées, aussi appelées 'transformation de jauge' dans ce contexte, la courbure et le tenseur énergie-impulsion sont alors invariants tandis que la métrique se transforme d'après l'Eq. (10.12). Nous utilisons cette invariance de jauge pour simplifier les équations d'Einstein (10.10).

Lemme 10.1 *Il existe toujours une jauge telle que*

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (10.14)$$

Cette jauge est appelée la jauge de Hilbert.

Démonstration: Sous $h_{\mu\nu} \mapsto h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}$ (nous absorbons le facteur ε dans ξ_μ), $\gamma_{\mu\nu}$ se transforme d'après

$$\gamma_{\mu\nu} \mapsto \gamma_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu} \xi^\alpha{}_{,\alpha} \quad (10.15)$$

et alors

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{,\nu} \mapsto \gamma^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \square \xi^\mu. \quad (10.16)$$

Pour

$$\square \xi^\mu = -\gamma^{\mu\nu}{}_{,\nu} \quad (10.17)$$

ceci donne donc $\gamma'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$.

Mais (10.17) a toujours une solution (fonction de Green retardée).

□

Dans la classe des jauges hilbertiennes (10.14) les équations d'Einstein se simplifient en

$$\square \gamma_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (10.18)$$

La solution générale de (10.18) qui satisfait à la condition (10.14) est

$$\gamma_{\mu\nu} = -16\pi G D_R \star T_{\mu\nu} + \text{solution homogène} \quad (10.19)$$

où D_R est la fonction de Green retardée du d'Alembertien (voir Compl. Math. II)

$$D_R(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \theta(t).$$

(nous avons $(D_R \star T^{\mu\nu})_{,\nu} = D_R \star T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$.)

Nous obtenons alors

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -4G \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (10.20)$$

Nous interprétons ce champ comme le champ créé par la source $T_{\mu\nu}$. Comme en électrodynamique, ce champ est **causal**. Un changement dans la source propage en $\gamma_{\mu\nu}$ avec la vitesse de la lumière $c = 1$.

La solution homogène représente une onde provenant de l'infini (onde plane).

10.2 Des sources presque newtoniennes

Nous considérons des tenseurs énergie-impulsion avec $|T_{00}| \gg |T_{0j}|, |T_{ij}|$ et des vitesses si petites que nous négligeons tous les effets de retard, i.e. $T_{00}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|) \cong T_{00}(t)$ dans la source, $|v| \ll 1$.

Nous avons alors

$$\gamma_{00} = -4\Phi, \quad \gamma_{0j} = \gamma_{ij} = 0, \quad (10.21)$$

où Φ est le potentiel newtonien,

$$\Phi(t, \vec{x}) = -G \int \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = G \int \frac{T_{00}(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (10.22)$$

avec $\gamma = +4\Phi$ et (10.9), il suit

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi), \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = (1 - 2\Phi)\delta_{ij},$$

c'est-à-dire

$$g = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)d\vec{x}^2. \quad (10.23)$$

Très loin de la source (ou dans une situation à symétrie sphérique) nous pouvons nous contraindre à la contribution monopole,

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) d\vec{x}^2, \quad (10.24)$$

Avec $m = \frac{GM}{c^2}$, ce qui est la linéarisation de la métrique de Schwarzschild.

Les approximations dans (10.23) sont

- Il manque des termes d'ordre Φ^2 et supérieur.
- Les termes γ_{0i} sont de l'ordre $v\Phi$ où $v \sim \left| \frac{T_{0i}}{T_{00}} \right|$ est une vitesse typique de la source.
- Il manque les $\gamma_{ij} \sim \Phi \times \left| \frac{T_{ij}}{T_{00}} \right| \sim \Phi v^2$.

Dans l'approximation newtonienne, $v^2 \sim \Phi$ et les corrections les plus importantes sont alors de l'ordre $\Phi^{3/2}$. Dans le système solaire, $\Phi \sim 10^{-6}$, toutes les corrections sont $\lesssim 10^{-9}$.

10.3 Ondes gravitationnelles libres dans la théorie linéarisée

10.3.1 La jauge TT

Nous considérons d'abord les équations linéarisées dans le vide :

$$\square \gamma_{\mu\nu} = 0. \quad (10.25)$$

Lemme 10.2 *Dans la classe des jauges hilbertiennes il existe une jauge avec $\gamma = 0$ (pour $T_{\mu\nu} \equiv 0$!).*

Démonstration: Les transformations de jauge

$$\gamma_{\mu\nu} \mapsto \gamma_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu} \xi^{\alpha}{}_{,\alpha} = \gamma'_{\mu\nu}$$

dans la classe hilbertienne satisfont

$$\gamma'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \gamma'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \Leftrightarrow \square \xi^{\mu} = 0.$$

Nous avons $\gamma' = \gamma - 2\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}$. Nous cherchons alors un champ ξ^{μ} avec $\square \xi^{\mu} = 0$ et $\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} = \frac{1}{2}\gamma$.

Construction : Soit η^{μ} une solution de $\eta^{\mu}{}_{,\mu} = -\frac{1}{2}\gamma$. Soit $\zeta^{\mu} = \square \eta^{\mu}$. Comme

$$\zeta^{\mu}{}_{,\mu} = \square \eta^{\mu}{}_{,\mu} = \frac{1}{2} \square \gamma \stackrel{(10.25)}{=} 0,$$

il existe un tenseur antisymétrique $f^{\mu\nu}$ avec

$$\zeta^{\mu} = f^{\mu\nu}{}_{,\nu}.$$

Soit $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ une solution de $\square \sigma^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}$. Nous posons

$$\xi^{\mu} = \eta^{\mu} - \sigma^{\mu\nu}{}_{,\nu}.$$

Ceci satisfait $\xi^\mu{}_{,\mu} = \eta^\mu{}_{,\mu} = \frac{1}{2}\gamma$ et

$$\square\xi^\mu = \square\eta^\mu - \square\sigma^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \zeta^\mu - f^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 .$$

□

Dans cette classe de jauges nous avons $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$.

La solution générale de (10.25) est une superposition d'ondes planes

$$h_{\mu\nu} = \text{Re}(\varepsilon_{\mu\nu}e^{-ik\cdot x}) \quad \text{avec} \quad k^2 = 0 \quad \text{où} \quad k = (\omega, \vec{k}) \quad \text{et} \quad k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2. \quad (10.26)$$

Les conditions de jauge demandent

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{,\nu} = h^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad h = \gamma = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} k_\mu \varepsilon^\mu{}_{,\nu} &= 0 \\ \varepsilon^\mu{}_{,\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (10.27)$$

La matrice $\varepsilon_{\mu\nu}$ est appelée le tenseur de polarisation. Les cinq conditions (10.27) laissent le libre choix de 5 composantes de la matrice symétrique $\varepsilon_{\mu\nu}$. Nous voulons montrer que seuls deux degrés de liberté sont physiques, les trois autres peuvent être éliminés par des transformations de jauge dans la classe des jauges (10.27).

Une transformation de jauge admise dans cette classe doit satisfaire

$$\square\xi^\mu = 0 \quad \text{et} \quad \xi^\mu{}_{,\mu} = 0. \quad (10.28)$$

Nous posons

$$\xi^\mu = \Re(i\varepsilon^\mu e^{-ik\cdot x}) \quad (10.29)$$

(10.28) implique $k^2 = 0$ et $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.

Sous une transformation de jauge $\varepsilon_{\mu\nu}$ change d'après

$$\varepsilon_{\mu\nu} \mapsto \varepsilon_{\mu\nu} + k_\mu \varepsilon_\nu + k_\nu \varepsilon_\mu. \quad (10.30)$$

Nous considérons une onde qui propage en direction z :

$$(k^\mu) = (k, 0, 0, k).$$

Dans ce cas (10.27) donne

$$\varepsilon_{0\nu} = \varepsilon_{3\nu}, \quad \varepsilon_{00} = \varepsilon_{30} = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{01} = \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{02} = \varepsilon_{32}$$

$$\text{et } -\varepsilon_{00} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0$$

Toutes les composantes sont alors déterminées par

$$\varepsilon_{00}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \varepsilon_{12}.$$

Sous une transformation de la forme (10.30) ces composantes changent en

$$\varepsilon_{00} \mapsto \varepsilon_{00} + 2k\varepsilon_0$$

$$\varepsilon_{11} \mapsto \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{12} \mapsto \varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon_{01} \mapsto \varepsilon_{01} + k\varepsilon_1, \quad \varepsilon_{02} \mapsto \varepsilon_{02} + k\varepsilon_2$$

$k_\mu \varepsilon^\mu = 0$ implique $\varepsilon_0 = \varepsilon_3$.

En choisissant $\varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon_{00}}{2k}$, $\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_{01}}{k}$ et $\varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_{02}}{k}$ nous pouvons annuler les $\varepsilon_{0\mu}$ et il ne restent que les composantes $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ et $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$ qui sont non nulles.

Cette jauge est la jauge TT (transverse, traceless). Dans ce cas

$$h_{\mu 0} = 0, \quad h^i{}_i = 0 \quad \text{et} \quad h_{ij,j} = 0. \quad (10.31)$$

Ces conditions de jauge peuvent être satisfaites pour n'importe quelle onde gravitationnelle libre (les conditions sont linéaires).

Pour déterminer l'effet d'une onde gravitationnelle sur la distance entre deux particules en chute libre, nous devons calculer le tenseur de Riemann linéarisé. L'équation (4.28) donne

$$R^\mu{}_{\sigma\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\sigma,\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} + \text{termes en } (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})^2.$$

Donc

$$R_{\mu\sigma\nu\rho} = \frac{1}{2} (h_{\nu\sigma,\mu\rho} + h_{\rho\mu,\sigma\nu} - h_{\mu\nu,\sigma\rho} - h_{\rho\sigma,\mu\nu}). \quad (10.32)$$

En particulier pour les composantes

$$R_{i0j0} = R_{0i0j} = R_{0j0i} = -R_{i00j} = -R_{0ij0}$$

nous obtenons dans la jauge TT

$$\begin{aligned} R_{i0j0} &= \frac{1}{2} (h_{0j,0i} + h_{0i,0j} - h_{ij,00} - h_{00,ij}) \\ &= -\frac{1}{2} h_{ij,00}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Comme R_{i0j0} est invariant de jauge, (10.33) implique qu'il est impossible de réduire $h_{\mu\nu}$ à moins que les deux degrés de liberté de la jauge TT.

10.3.2 Déviation géodésique engendrée par une onde gravitationnelle linéarisée

Le vecteur \vec{n} de séparation entre deux géodésiques voisines satisfait (voir équation (8.4))

$$\frac{d^2 \vec{n}}{d\tau^2} = K \vec{n}, \quad \text{avec} \quad K_{ij} = R^i{}_{00j}. \quad (10.34)$$

Au premier ordre ceci donne dans le système de coordonnées TT

$$\frac{d^2 n^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_j^i n^j. \quad (10.35)$$

où $\cdot = \partial_t$. Pour des temps petits nous obtenons alors

$$n^i(\tau) \cong n^i(0) - \frac{1}{2} h_{ij}(\gamma(\tau)) n^j(0). \quad (10.36)$$

Nous considérons particulièrement une onde plane en direction z .

$$\begin{aligned} h_{xx} &= -h_{yy} = A(t-z) \\ h_{xy} &= h_{yx} = B(t-z) \end{aligned} \quad (10.37)$$

sont les composantes non nulles dans la jauge TT.

Si la particule bouge en direction de l'onde, $n(0) = (0, 0, a)$, elle ne subit aucun effet, $h_{ij} n^j(0) = 0$. Seules les directions transverses oscillent. La partie transverse de n , $n_\perp = (n_x, n_y)$ satisfait à

$$\ddot{n}_\perp = K_\perp n_\perp$$

avec

$$K_\perp = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddot{h}_{xx} & \ddot{h}_{xy} \\ \ddot{h}_{xy} & -\ddot{h}_{xx} \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$n_\perp \cong n_\perp(0) - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & -h_{xx} \end{pmatrix} n_\perp(0). \quad (10.38)$$

Soit R la rotation du plan (x, y) qui diagonalise la matrice symétrique K_\perp ,

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & -h_{xx} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix} R^T,$$

et soit (η, ξ) les composantes de n_\perp dans le système transformé,

$$n_\perp =: R \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}, \quad n_\perp(0) = R \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Dans un petit interval de temps, l'évolution de n_{\perp} est alors donnée par

$$\begin{aligned}\eta &\cong \eta_0 + \Omega(t)\eta_0 \\ \xi &\cong \xi_0 - \Omega(t)\xi_0 .\end{aligned}$$

(10.38) correspond donc à un cisaillement. Un cercle est transformé en ellipse en gardant l'aire constante en premier ordre. La figure montre la déformation d'un cercle de particules tests engendré par une onde périodique de période ω :

$$\begin{aligned}h_{xx} &= \Re(A_0 e^{-i\omega(t-z)}) \\ h_{xy} &= \Re(B_0 e^{i\omega(t-z)}) .\end{aligned}$$

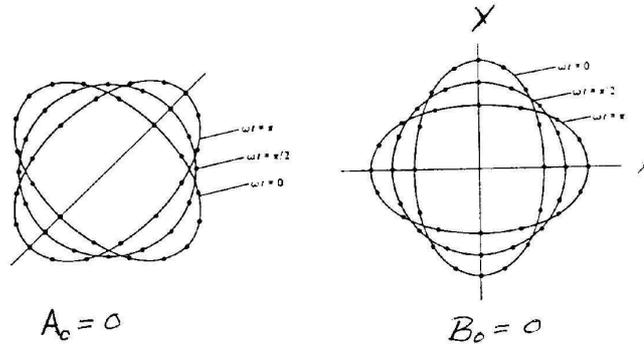


FIG. 10.1 – La déformation provoquée par une onde gravitationnelle purement diagonale (à droite) et purement “off diagonal” (à gauche).

10.3.3 L'énergie rayonnée par une onde gravitationnelle

Dans le cadre de la relativité restreinte, le tenseur énergie-impulsion est conservé,

$$T_{\text{tot}}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0. \quad (10.39)$$

Ici $T_{\text{tot}}^{\mu\nu}$ peut, par exemple, représenter la somme d'énergie-impulsion des particules et du champ électromagnétique. En intégrant la composante 0 de (10.39) sur un 3-volume V à surface Σ nous trouvons

$$0 = \int_V T_0^0{}_{,0} d^3x + \int_V T_0^i{}_{,i} d^3x$$

Avec le théorème de Gauss ceci donne

$$-\frac{dE(V)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V T_0^0 d^3x = \int_{\Sigma} T_0^i n^i d\sigma , \quad (10.40)$$

où \vec{n} est la normale à la surface Σ . Le deuxième terme représente le flux d'énergie à travers la surface Σ (vers l'extérieur).

En relativité générale, nous cherchons aussi des quantités symétriques

$$\tau^{\mu\nu} = g(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) \quad (10.41)$$

qui soient conservées, c'est-à-dire, avec $\tau^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Ici, $g = |\det(g_{\mu\nu})|$, et $T^{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière. Les quantités $t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu}$ sont les contributions spécifiques du champ gravitationnel. Comme l'équation $\tau^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ n'est pas covariante, $t^{\mu\nu}$ ne peut pas être un tenseur. La quantité $t^{\mu\nu}$ est appelé le pseudo-tenseur d'énergie-impulsion du champ gravitationnel. Il existe des versions différentes (pseudo-tenseur de Landau et Lifschitz, pseudo-tenseur d'Einstein) qui mènent aux mêmes quantités conservées dans la théorie linéarisée. Ici nous ne considérons que la théorie linéarisée. Comme avant nous posons

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} . \quad (10.42)$$

Nous séparons le tenseur d'Einstein en sa partie linéarisée et le reste,

$$G_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^{(1)} + S_{\mu\nu}^{(2)} , \quad (10.43)$$

où $S^{(1)}$ contient les termes linéaires en $h_{\mu\nu}$ et $S^{(2)}$ contient le reste. Avec $g = -\det(g_{\mu\nu}) = 1 + \delta g$ les équations d'Einstein donnent

$$S_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi G g T_{\mu\nu} - g S_{\mu\nu}^{(2)} - \delta g S_{\mu\nu}^{(1)} . \quad (10.44)$$

Comme $S_{\mu\nu}^{(1)}$ est conservée, $S^{(1)\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$,

$$\left(g T_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G} (g S_{\mu\nu}^{(2)} + \delta g S_{\mu\nu}^{(1)}) \right) {}^{;\nu} = 0 . \quad (10.45)$$

Nous définissons alors

$$\tau_{\mu\nu} \equiv g T_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G} (g S_{\mu\nu}^{(2)} + \delta g S_{\mu\nu}^{(1)}) = g (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) . \quad (10.46)$$

La quantité $\tau_{\mu\nu}$ est symétrique et possède les propriétés requises pour être considérée comme une pseudo-densité d'énergie-impulsion, $\tau^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

En utilisant la jauge de Hilbert nous trouvons en ordre h^2 après un petit calcul

$$g t^{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \left[2\gamma^\mu{}_{\alpha,\beta} \gamma^{\nu\alpha,\beta} - 2\gamma^\mu{}_{\alpha,\beta} \gamma^{\alpha\beta,\nu} - 2\gamma^\nu{}_{\alpha,\beta} \gamma^{\alpha\beta,\mu} + \gamma_{\alpha\beta}{}^{;\mu} \gamma^{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{2} \gamma^{;\mu} \gamma^{;\nu} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(\gamma_{\alpha\beta,\sigma} \gamma^{\alpha\beta,\sigma} - \frac{1}{2} \gamma^{;\alpha} \gamma_{,\alpha} - 2\gamma_{\alpha\beta,\sigma} \gamma^{\beta\sigma,\alpha} \right) \right] \quad (10.47)$$

En prenant la divergence de cette expression on obtient

$$(gt^{\mu\nu})_{,\nu} = \frac{1}{32\pi G} (h_{,\nu}\square\gamma^{\mu\nu} - 2h^\mu{}_{,\alpha,\nu}\square\gamma^{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu}{}^{;\mu}\square\gamma^{\alpha\nu}). \quad (10.48)$$

De même, en utilisant $g_{,\beta} = 2g\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha$ et les équations d'Einstein il vient (toujours au deuxième ordre en h)

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha T^{\sigma\beta} + \Gamma_{\sigma\beta}^\beta T^{\alpha\sigma} \\ 0 &= g\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = (gT^{\alpha\beta})_{,\beta} + \frac{1}{8\pi G} \left(\Gamma_{\sigma\beta}^\alpha S^{(1)\sigma\beta} - g\Gamma_{\sigma\beta}^\beta S^{(1)\alpha\sigma} \right) \\ 0 &= (gT^{\alpha\beta})_{,\beta} + \frac{1}{32\pi G} (h_{,\beta}\square\gamma^{\alpha\beta} - 2h^\alpha{}_{,\sigma,\beta}\square\gamma^{\sigma\beta} + h_{\sigma\beta}{}^{;\alpha}\square\gamma^{\sigma\beta}) \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\tau^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ est nul, compte tenu de l'identité (10.48) établie en préalable.

Pour une onde plane en direction x^1 , dans la jauge TT, l'équation (10.47) donne

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu}(t - x^1), \quad \gamma^{0\mu} = \gamma^{1\mu} = 0, \quad \gamma = 0 \quad \gamma^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \\ t^{01} &= \frac{1}{16\pi G} \left[(\dot{h}_{23})^2 + \frac{1}{4} (\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2 \right] = t^{00}. \end{aligned} \quad (10.49)$$

10.4 Emission des ondes gravitationnelles

Nous considérons la solution

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -4G \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (10.50)$$

à grande distance de la source, $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$, nous négligeons alors $|\vec{x}'|$ dans le retard comme dans le terme $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$, ce qui donne, avec $|\vec{x}'| \equiv r$,

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}, t) \cong -\frac{4G}{r} \int T_{\mu\nu}(t - r, \vec{x}') d^3x'. \quad (10.51)$$

Pour transformer (10.51) nous utilisons

$$0 = \int x^k \partial_\nu T_\mu{}^\nu d^3x = \partial_t \left(\int x^k T_\mu{}^0 d^3x \right) + \int x^k \partial_t T_\mu{}^l d^3x$$

L'intégration par partie du deuxième terme donne

$$\partial_t \left(\int x^k T_\mu{}^0 d^3x \right) = \int T_\mu{}^k d^3x. \quad (10.52)$$

En plus, le théorème de Gauss donne $0 = \int \partial_j (T^{j0} x^k x^l) d^3x$, donc

$$\int \partial_\mu (T^{\mu 0} x^k x^l) d^3x = \partial_t \int T^{00} x^k x^l d^3x . \quad (10.53)$$

Mais

$$\int \partial_\mu (T^{\mu 0} x^k x^l) d^3x \stackrel{\partial_\mu T^{\mu 0} = 0}{=} \int T^{\mu 0} \partial_\mu (x^k x^l) d^3x = \int (T^{k0} x^l + T^{l0} x^k) d^3x . \quad (10.54)$$

Avec (10.53) et (10.52) ceci donne

$$\frac{1}{2} \partial_t^2 \int T^{00} x^k x^l d^3x = \frac{1}{2} \partial_t \int (T^{k0} x^l + T^{l0} x^k) d^3x = \int T^{kl} d^3x . \quad (10.55)$$

Si nous insérons cette équation dans (10.51) nous obtenons

$$\gamma^{kl}(\vec{x}, t) = \frac{2G}{r} \left[\partial_t^2 \int \rho(\vec{x}', t') x'^k x'^l d^3x' \right]_{t'=t-r} , \quad (10.56)$$

où $\rho = T^{00}$. Le tenseur quadrupolaire d'une distribution de matière (non-relativiste) est défini comme

$$Q_{kl} = \int (3x'^k x'^l - r'^2 \delta^{kl}) \rho(\vec{x}', t) d^3x' , \quad (10.57)$$

Dans (10.56) ceci donne

$$\gamma_{kl}(\vec{x}, t) = \frac{2G}{3r} \left[\partial_t^2 Q_{kl}(t-r) + \delta_{kl} \partial_t^2 \int r'^2 \rho(\vec{x}', t-r) d^3x' \right] . \quad (10.58)$$

Pour calculer l'énergie émise dans cette onde gravitationnelle nous utilisons le résultat du paragraphe précédent. Au plus bas ordre (quadratique) en $h_{\mu\nu}$ nous avons obtenu pour le flux d'énergie d'une onde gravitationnelle en direction x^1 . Dans la jauge TT le deuxième terme de (10.58) qui est proportionnel à δ_{kl} , ne contribue pas et nous obtenons

$$\gamma_{kl}^{TT} = h_{kl}^{TT} = -\frac{2G}{3r} \partial_t^2 Q_{kl}(t-r) . \quad (10.59)$$

Quand nous insérons ceci dans (10.49) nous trouvons

$$t^{01} = \frac{G}{36\pi r^2} \left[\ddot{Q}_{23}^2 + \frac{1}{4} (\ddot{Q}_{22} - \ddot{Q}_{33})^2 \right] . \quad (10.60)$$

En posant $\vec{n} = (1, 0, 0)$ ceci donne (avec $Q_{ll} = 0$)

$$t^{0j} n^j = \frac{G}{36\pi r^2} \left[\frac{1}{2} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} - \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{km} n^l n^m + \frac{1}{4} (\ddot{Q}_{kl} n^l n^k)^2 \right] . \quad (10.61)$$

Cette formule est valable dans une direction \vec{n} quelconque. L'énergie émise par angle en direction \vec{n} est $r^2 t^{0j} n^j = \frac{dI}{d\Omega}(\vec{n})$. Donc

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{G}{36\pi} \left[\frac{1}{2} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} - \ddot{Q}_{km} \ddot{Q}_{kl} n^m n^l + \frac{1}{4} (\ddot{Q}_{kl} n^l n^k)^2 \right]$$

La perte d'énergie est obtenue par l'intégration de cette expression sur les directions. En utilisant

$$\frac{1}{4\pi} \int n^k n^l d\Omega = \frac{1}{3} \delta^{kl}$$

et

$$\frac{1}{4\pi} \int n^k n^l n^j n^i d\Omega = \frac{1}{15} (\delta^{kl} \delta^{ij} + \delta^{ki} \delta^{lj} + \delta^{kj} \delta^{li})$$

nous trouvons la fameuse formule quadrupolaire d'Albert Einstein :

$$\boxed{-\frac{dE}{dt} = I = \frac{G}{45c^5} \ddot{Q}_{lk} \ddot{Q}_{lk}}. \quad (10.62)$$

La vérification expérimentale de (10.62) avec le pulsar 1913+16 de Hulse et Taylor a mérité le prix Nobel en 1993. Entre temps, la formule quadrupolaire a été confirmée aussi dans plusieurs autres pulsars binaires. Cette 'preuve' indirecte représente la seule vérification de l'existence des ondes gravitationnelles à ce jour. Nous la discutons en détail dans le prochain paragraphe.

10.5 Application : radiation gravitationnelle d'un système d'étoiles binaires

Nous considérons un système binaire d'étoiles de masse M_1 , respectivement M_2 et d'énergie $\mathcal{E} < 0$. Nous posons $m_1 = GM_1$, $m_2 = GM_2$. Nous approximons les orbites des étoiles par la solution newtonienne.

Les paramètres a (demi-grand axe) et e (excentricité) de l'orbite newtonienne sont liés aux intégrales premières E (énergie) et L (moment cinétique) par

$$a = -\frac{m_1 m_2}{2\mathcal{E}}, \quad \text{où } \mathcal{E} = GE, \quad (10.63)$$

$$e^2 = 1 + \frac{2\mathcal{E}\mathcal{L}^2(m_1 + m_2)}{m_1^3 m_2^3}, \quad \text{où } \mathcal{L} = GL. \quad (10.64)$$

Ces résultats se trouvent dans n'importe quel cours de mécanique classique. En plus, la période du système est (3ème loi de Kepler)

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2}}. \quad (10.65)$$

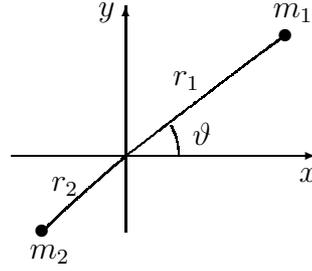


FIG. 10.2 – Problème d'émission d'ondes gravitationnelles dans un système binaire

Nous voulons calculer le changement de la période, \dot{T} dû à l'émission d'ondes gravitationnelles. Le système binaire orbite dans un plan que nous choisissons comme le plan (x, y) . Le tenseur quadrupolaire de notre système n'a alors que des composantes x et y : si I_{ij} est le tenseur d'inertie,

$$I_{ij} = G \int \rho(\vec{x}) x_i x_j d^3x,$$

nous avons

$$GQ_{ij} = 3(I_{ij} - \frac{1}{3}I), \quad I = \sum_{i=1}^3 I_{ii}.$$

La formule du quadrupole (10.62) donne alors

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5G} \left(\overset{\dots}{I}_{kl} \overset{\dots}{I}_{kl} - \frac{1}{3} \overset{\dots 2}{I} \right) = \frac{1}{5G} \left(\overset{\dots 2}{I}_{xx} + \overset{\dots 2}{I}_{yy} + 2 \overset{\dots 2}{I}_{xy} - \frac{1}{3} \overset{\dots 2}{I} \right). \quad (10.66)$$

Le demi-axe a change en raison de cette perte d'énergie et cela mène alors à un changement de la période T . Pour déterminer ceci il faut alors calculer les dérivées $\overset{\dots}{I}_{ij}$. Nous adoptons les coordonnées (x, y) comme indiquées sur la figure 10.2. La distance r entre les deux masses est

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (10.67)$$

Les positions r_1 et r_2 sont

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r.$$

Les composantes du tenseur d'inertie sont

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{x}) x_i x_j d^3x.$$

Pour notre distribution $\rho(\vec{x}) = m_1\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) + m_2\delta(\vec{x} - \vec{x}_2)$, et on obtient donc

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}r^2 \cos^2 \vartheta, \\ I_{yy} &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}r^2 \sin^2 \vartheta, \\ I_{xy} &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta, \\ I &= I_{xx} + I_{yy} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}r^2. \end{aligned}$$

Avec $\mathcal{L} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2\dot{\vartheta}$ et (10.64) nous trouvons

$$\dot{\vartheta} = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}}{r^2}. \quad (10.68)$$

Ceci mène avec (10.67) à

$$\dot{r} = e \sin \vartheta \left(\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)} \right)^{1/2}. \quad (10.69)$$

Avec (10.67), (10.68) et (10.69) nous pouvons déterminer les dérivées du tenseur d'inertie :

$$\begin{aligned} \dot{I}_{xx} &= -\frac{2m_1m_2}{\sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}}r \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \ddot{I}_{xx} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)}(\cos 2\vartheta + e \cos^3 \vartheta) \\ \ddot{\ddot{I}}_{xx} &= \frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)}(2 \sin 2\vartheta + 3e \cos^2 \vartheta \sin \vartheta)\dot{\vartheta} \\ \dot{I}_{yy} &= \frac{2m_1m_2}{\sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}}r(\sin \vartheta \cos \vartheta + e \sin \vartheta) \\ \ddot{I}_{yy} &= \frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)}(\cos 2\vartheta + e \cos \vartheta + e \cos^3 \vartheta + e^2) \\ \ddot{\ddot{I}}_{yy} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)}(2 \sin 2\vartheta + e \sin \vartheta + 3e \cos^2 \vartheta \sin \vartheta)\dot{\vartheta} \\ \dot{I}_{xy} &= \frac{m_1m_2}{\sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}}r(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta + e \cos \vartheta) \\ \ddot{I}_{xy} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)}(\sin 2\vartheta + e \sin \vartheta + e \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) \\ \ddot{\ddot{I}}_{xy} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)G}(2 \cos 2\vartheta - e \cos \vartheta + 3e \cos^3 \vartheta)\dot{\vartheta} \\ \ddot{\ddot{I}} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)}e \sin \vartheta \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Dans (10.66) cela donne finalement

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{8m_1^2 m_2^2}{15a^2 G(1-e^2)^2} [12(1+e \cos \vartheta)^2 + e^2 \sin^2 \vartheta] \dot{\vartheta}^2.$$

Pour la perte d'énergie moyennée sur une période nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{dt} \frac{1}{\dot{\vartheta}} d\vartheta \\ &= -\frac{32}{5G} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \end{aligned}$$

Avec (10.63) ceci mène au changement du demi-axe majeur

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2a^2 G}{m_1 m_2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{a^3} f(e)$$

où

$$f(e) = \frac{1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4}{(1-e^2)^{7/2}}.$$

Ensuite, en utilisant la troisième loi de Kepler, nous trouvons

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{96}{5} \frac{m_1 m_2}{a^4} (m_1 + m_2) f(e).$$

En remplaçant a par T nous obtenons avec (10.65)

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96}{5} \frac{m_1 m_2}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{8/3} (m_1 + m_2)^{1/3}} f(e). \quad (10.70)$$

Cette formule a été confirmée avec plusieurs systèmes. Le plus remarquable est le pulsar binaire PSR 1913+16 qui est un système binaire de deux naines blanches de masse $m_1 \sim m_2 \sim 1.4M_\odot$. Ce système est en observation depuis plus de 20 ans et la formule (10.70) est confirmée au niveau de moins d'un demi pour cent. La valeur mesurée donne $\dot{T}_{\text{exp}} = (-2.408 \pm 0.01) \times 10^{-12}$, tandis que la valeur théorique est $\dot{T}_{\text{theo}} = (-2.40243 \pm 0.00005) \times 10^{-12}$. Dans la valeur expérimentale, l'effet de l'accélération relative entre le pulsar binaire et notre système solaire est pris en compte. Il change le résultat d'environ 1%. L'incertitude de la valeur théorique est due à l'incertitude des masses. Pour plus de détail, voir C.M. Will [8]. Pour cette confirmation indirecte de l'existence de trous noirs l'astronome radio Joe Taylor et son étudiant R. Hulse ont obtenu le prix Nobel en 1993.

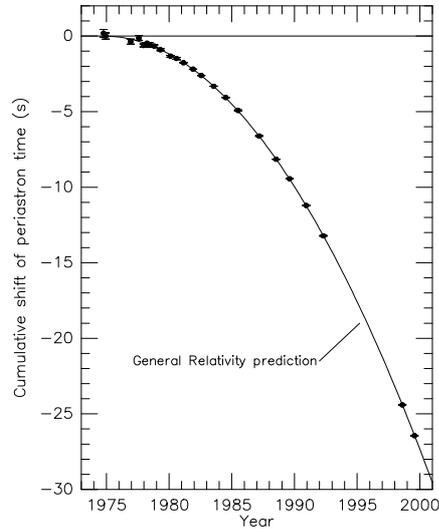


FIG. 10.3 – La décroissance de l’orbite du pulsar binaire PRS1913+16 qui correspond à environ 3.2mm par période est montré comme déplacement de la phase de l’orbite au moment du passage du périastre comparé avec un système dont l’orbite ne décroît pas. Cette décroissance est due entièrement à l’émission d’ondes gravitationnelles comme le montre la comparaison des résultats expérimentaux (points) avec la courbe théorique.

10.6 Lentilles gravitationnelles

Dans la section 7.4.6 nous avons vu que dans un champ gravitationnel statique, les chemins des photons, $\mathbf{x}(\lambda)$, suivent des géodésiques dans la géométrie $g_{ij}^F = g_{ij}/(-g_{00})$. Dans une situation presque newtonienne, dans un potentiel gravitationnel faible, $\phi \ll 1$, la métrique est

$$g = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)d\mathbf{x}^2$$

telle que le principe de Fermat se réduit à

$$S \equiv \int \sqrt{\left(\frac{1 - 2\phi}{1 + 2\phi}\right) \dot{\mathbf{x}}^2} d\lambda \int n(\mathbf{x}(\lambda)) |\dot{\mathbf{x}}(\lambda)| d\lambda = \int L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) d\lambda, \quad \delta S = 0, \quad (10.71)$$

ou $n(\mathbf{x}) \simeq 1 - 2\phi(\mathbf{x})$. Donc le potentiel gravitationnel joue le rôle de l’indice de réfraction et la propagation de la lumière dans un champ gravitationnel statique est identique à celle dans un milieu inhomogène avec indice de réfraction $n(\mathbf{x})$. Si

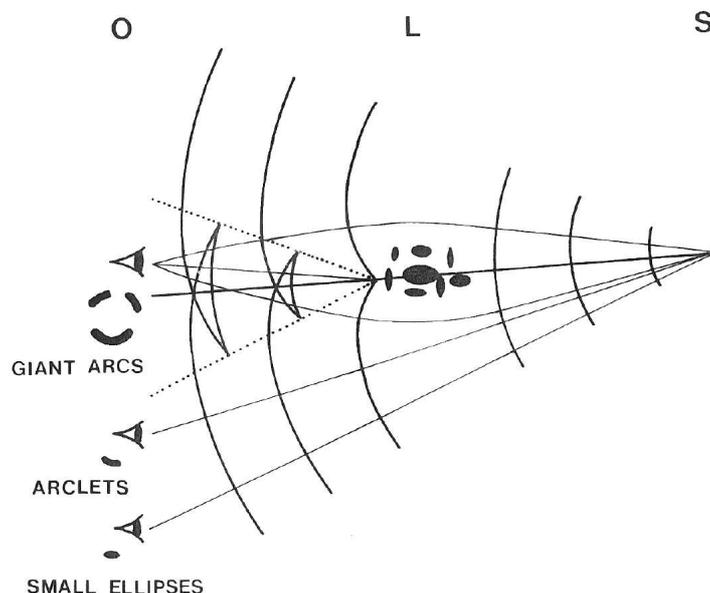


FIG. 10.4 – Les surfaces de phase constante et les raies de lumière qui y sont orthogonales sont indiquées. Les effets de lentille dans la région à l'intérieur du cône pointillé sont forts et mènent à plusieurs images, dans la région au milieu ils sont moyens et mènent à une déformation de l'image (medium lensing) tandis que plus loin les effets de lentille sont faibles et induisent une légère déformation de l'image (weak lensing).

la métrique est statique mais non-newtonienne, telle que g_{ij}^F n'est pas diagonale, l'analogie est celle avec un milieu inhomogène et anisotrope.

Comme dans la limite optique, à partir de

$$F_{\mu\nu} = \text{Re}(F_{\mu\nu} e^{i\psi})$$

les équation de Maxwell impliquent que la quadri-vitesse du photon est donnée par le gradient de la phase ψ ,

$$\partial_\mu \psi = \dot{x}_\mu \quad \text{et} \quad g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi = 0 .$$

Pour $d\lambda = ds$ = la longueur d'arc telle que $\dot{\mathbf{x}}^2 = 1$, l'équation Euler Lagrange de (10.71) donne

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \nabla n . \quad (10.72)$$

Ceci est l'équation de propagation pour des raies de lumière dans un milieu inhomogène de l'optique. Les différentes situations possibles en dépendance de la

distance entre la ligne de visée et la lentille sont montrées dans la fig. 10.4. Dans la région où une raie peut traverser une surface de phase constante ('wavefront') plus qu'une fois, une source produit plusieurs images. Dans les régions à l'extérieur du cône pointillé, l'image est seulement déformée.

La possibilité de l'effet lentille dans le cadre de la relativité générale a déjà été réalisé par Einstein, mais il ne croyait pas qu'on puisse jamais l'observer. Fritz Zwicky, en 1937 a été le premier de prédire l'observation de lentilles gravitationnelles. Le premier candidat d'une lentille gravitationnelle a été découverte en 1979 et depuis plus qu'une centaine de systèmes à plusieurs images, avec des arcs ou des anneaux d'Einstein presque parfait ont été trouvés (voir e.g. <http://www.cfa.harvard.edu/glensdata/>).

Le vecteur $\frac{d\mathbf{x}}{ds} \equiv \mathbf{e}$ dans l'éq. (10.72) est un vecteur unitaire et (10.72) est équivalent à

$$\frac{d}{ds}\mathbf{e} = -2\nabla\phi + 2\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \nabla)\phi = -2\nabla_{\perp}\phi. \quad (10.73)$$

Pour l'angle de diffraction défini par $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{e}_{\text{in}} - \mathbf{e}_{\text{fin}}$ cela donne

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = 2 \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{fin}}} \nabla_{\perp}\phi ds. \quad (10.74)$$

Notez que $\boldsymbol{\alpha}$ est un vecteur dans le plan normal à \mathbf{e} et l'intégrale est à prendre le long du chemin non-perturbé, $\mathbf{x}(s) = \mathbf{e}(s - s_{\text{in}})$. En prenant la divergence de (10.74) nous trouvons

$$\nabla_{\perp} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}} = 2 \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{fin}}} \Delta_{\perp}\phi ds = 2 \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{fin}}} \Delta\phi ds = \frac{8\pi G}{c^2} \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{fin}}} \rho ds = \frac{8\pi G}{c^2} \Sigma, \quad (10.75)$$

où

$$\Sigma = \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{fin}}} \rho$$

est la densité par unité de surface projetée le long de \mathbf{e} . Dans le deuxième signe d'égalité nous avons remplacé Δ_{\perp} par Δ parce que les termes additionnels sont de la forme $d\phi/ds$ et $d^2\phi/ds^2$ et peuvent être intégrés. Nous négligeons les contributions $\phi(s_{\text{in/fin}})$ et $\frac{d\phi}{ds}(s_{\text{in/fin}})$. Avec

$$\hat{\psi} \equiv \int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{fin}}} \phi ds \quad \text{nous avons} \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = 2\nabla_{\perp}\hat{\psi} \quad \text{et} \quad \Delta_{\perp}\hat{\psi} = 4\pi G\Sigma. \quad (10.76)$$

La fonction Green du Laplacien en deux dimensions est ¹

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\boldsymbol{\xi}|), \quad (10.77)$$

¹voir complément de math. II

telle que

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = 2G \int_{\mathbb{R}^2} \ln |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'| \Sigma(\boldsymbol{\xi}') d\boldsymbol{\xi}' . \quad (10.78)$$

L'angle de diffraction est alors

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = 2G \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} \Sigma(\boldsymbol{\xi}') d\boldsymbol{\xi}' . \quad (10.79)$$

Pour une masse ponctuelle M à l'origine, $\Sigma(\boldsymbol{\xi}') = M\delta^2(\boldsymbol{\xi}')$ ceci donne

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = 4GM \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} . \quad (10.80)$$

Pour une distribution de masse plus générale mais à symétrie cylindrique autour de l'axe \mathbf{e} qui correspond à $\boldsymbol{\xi} = 0$ on obtient (exercice !)

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = 4G \frac{M(|\boldsymbol{\xi}|)\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} . \quad (10.81)$$

10.6.1 L'application lentille

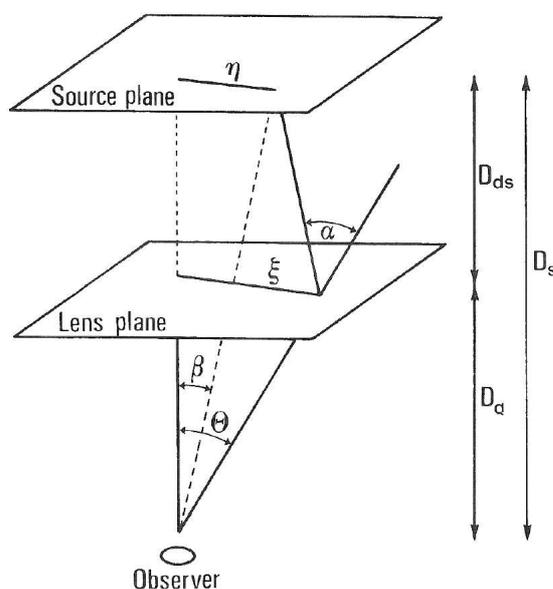


FIG. 10.5 – La notation utilisée dans le texte

La géométrie euclidienne donne (voir fig. 10.5)

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \boldsymbol{\xi} - D_{ds} \hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) . \quad (10.82)$$

Ici $\boldsymbol{\eta}$ est la position de la source et $\boldsymbol{\xi}$ est celle de l'image. Ceci définit une application $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{\eta}$. D'après la fig. 10.5, il est aussi

$$\boldsymbol{\xi} = D_d \boldsymbol{\theta} \text{ , et } \boldsymbol{\eta} = D_s \boldsymbol{\beta} \text{ ,} \quad (10.83)$$

et nous pouvons écrire (10.82) dans la forme

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \text{ .} \quad (10.84)$$

Eq. (10.84) est l'équation lentille. Il est utile d'écrire cette équation dans une forme à-dimensionnelle. Pour ceci nous introduisons une échelle de longueur ξ_0 dans le plan de la lentille. Nous posons $\eta_0 = (D_s/D_d)\xi_0$, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}/\xi_0$ et $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}/\eta_0$. En plus

$$\kappa(\mathbf{x}) = \frac{\Sigma(\xi_0 \mathbf{x})}{\Sigma_{\text{crit}}} \text{ , } \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{D_d D_{ds}}{\xi_0 D_s} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_0 \mathbf{x}) \text{ , et } \psi(\mathbf{x}) = \frac{D_d D_{ds}}{\xi_0 D_s} \hat{\psi}(\xi_0 \mathbf{x}) \text{ ,} \quad (10.85)$$

avec

$$\Sigma_{\text{crit}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} = 0.35 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2} \left(\frac{1 \text{ Gpc}}{D_d D_{ds} / D_s} \right) \text{ .} \quad (10.86)$$

La longueur 1Gpc (giga parsec) = $10^9 \text{ pc} = 3.26 \times 10^9$ année lumière est une distance cosmologique. Le rayon de l'univers observable est environ $H_0^{-1} \simeq 4.3 \text{ Gpc}$.

Dans ces variables, l'application lentille s'écrit

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \text{ avec} \quad (10.87)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \kappa(\mathbf{x}') d^2 x' = \nabla \psi(\mathbf{x}) \text{ ,} \quad (10.88)$$

où $\nabla \equiv \nabla_{\perp}$ est le gradient en 2 dimensions. Le potentiel ψ satisfait l'équation de Poisson en deux dimensions,

$$\Delta \psi = 2\kappa \text{ .} \quad (10.89)$$

L'application lentille, $\varphi : x \mapsto y$ est une application gradient,

$$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^2 - \psi(\mathbf{x}) \right) \text{ ,} \quad (10.90)$$

avec

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \kappa(\mathbf{x}') d^2 x' = \nabla \psi(\mathbf{x}) \text{ .} \quad (10.91)$$

Le différentiel $(D\varphi)_{ij} = \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \psi$ est symétrique. La paramétrisation standard est

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \text{ .} \quad (10.92)$$

Ici $\gamma_1 = \frac{1}{2}(\partial_1^2 - \partial_2^2)\psi$ et $\gamma_2 = \partial_1 \partial_2 \psi = \partial_2 \partial_1 \psi$. La variable $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ est le cisaillement complexe et $2(1 - \kappa) = 2 - \Delta \psi$ est la trace. On peut démontrer [10]

que, si $\kappa > 1$ pour certaines valeurs de \mathbf{x} , ils existent toujours des images multiples pour certaines positions \mathbf{y} de la source. (Cette condition est suffisante mais non nécessaire). L'amplification μ d'un image est [10]

$$\mu = \frac{1}{|\det D\varphi|} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2} . \quad (10.93)$$

Les **lignes critiques** sont données par

$$\det D\varphi(\mathbf{x}) = 0 ,$$

et les images (sous φ) des lignes critiques sont les **caustiques**. Ceci sont alors les positions des sources pour lesquelles l'amplification diverge. Bien sûr, cette divergence est formelle parce que pour une source étendue l'amplification reste finie et pour une source ponctuelle proche à une caustique, l'approximation des raies lumineuses n'est pas valable. Mais une source qui se trouve dans le voisinage d'une caustique est fortement amplifiée.

10.6.2 La lentille de Schwarzschild

Nous terminons ce chapitre avec l'exemple simple d'une masse ponctuelle, $\Sigma(\boldsymbol{\xi}) = M\delta^2(\boldsymbol{\xi})$. Même si la lentille de Schwarzschild issue d'une distribution singulière et donc contre-dit à certaines théorèmes générales (odd image theorem, voir [10]), elle est utile surtout pour l'effet de 'microlensing'.

Nous allons voir par la suite qu'un bon choix pour la longueur ξ_0 est le rayon d'Einstein R_E défini par

$$R_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_d D_{ds}}{D_s}} = 610 R_\odot \left(\frac{M}{M_\odot} \frac{D_d}{D_s} \frac{D_s - D_d}{\text{kpc}} \right)^{1/2} . \quad (10.94)$$

Comme la situation est symétrique, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \alpha(x)\mathbf{x}/x$ et $\mathbf{y} = y \cdot \mathbf{x}/x$, $x \equiv |\mathbf{x}|$. Nous avons $\psi = \ln(x)$ donc $\alpha = x^{-1}$ tel que l'application lentille devient

$$y = x - \frac{1}{x} . \quad (10.95)$$

Si la source est sur l'axe de symétrie, $y = 0$, les solutions sont $x = \pm 1$ et l'image forme un cercle de rayon 1, $|\boldsymbol{\xi}| = R_E$. Le cercle de Einstein avec angle d'ouverture

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} .$$

Pour toute autre position $y \neq 0$, la symétrie cylindrique est brisée et ils existent deux l'images situées à

$$x_\pm = \frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right) \quad (10.96)$$

Le différentiel de l'application lentille est

$$(D\varphi)_{ij} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \delta_{ij} + 2\frac{x_i x_j}{x^4},$$

avec

$$\mu^{-1} = |\det D\varphi| = \left|1 - \frac{1}{x^4}\right|. \quad (10.97)$$

Pour les deux images ceci donne une amplification de

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} \left| \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} + \frac{\sqrt{y^2 + 4}}{y} \pm 2 \right|. \quad (10.98)$$

Si y est grand, $x_- \sim 0$ et $\mu_- \ll 1$ tandis que $x_+ \sim y$ et $\mu_+ \sim 1$. Donc l'image x_- est proche à l'axe et très faible, tandis que l'image x_+ est très peu modifiée par la lentille. Par contre, si y est petit, la source est proche à l'axe, les deux images peuvent être magnifiées fortement. Si on ne peut pas les résoudre, la quantité significative est l'amplification totale,

$$\mu_p = \mu_+ + \mu_- = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}.$$

Pour des quasars qui subissent un effet lentille par une galaxie à l'avant-plan, cet effet micro-lentille est provoqué par les étoiles dans la galaxie. Il est variable dans le temps. Cet effet a aussi été observé pour des étoiles au Grand Nuage de Magellan. Il n'est pas encore résolu s'il a été provoqué par des étoiles faibles, soit dans notre galaxie soit dans le Nuage de Magellan, qui ont traversé la caustique ou par des 'MACHO's' (massive cold halo objects) dans le halo de notre galaxie. Le fait que la masse de la lentille est de l'ordre de $0.5 M_{\odot}$ dans le cas où elle peut être estimée, favorise la première explication.

Bibliographie

- [1] N. Straumann, *General Relativity with Applications in Astrophysics*, Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, Berlin 2004.
- [2] R. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press 1984
- [3] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Gemometry, Vol I*, J. Wiley and Sons, London 1963.
- [4] R. Abraham & J.E. Marsden, *Foundations of classical Mechanics*, Benjamin, Reading 1978.
- [5] V.I. Arnold, *Ordinary differential equations*, MIT Press, Cambridge MA, 1973.
- [6] M. Spivak, *Calculus on Manifolds : A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, Benjamin/Cummings, New York 1965.
- [7] B. Bertotti, I Ciufolini and P. Bender, *New Test of General Relativity : Measurement of de Sitter Geodetic Precession Rate for Lunar Perigee*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1062 (1987).
- [8] C.M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Reviews in Relativity (2001), latest update 2006
<http://www.livingreviews.org/Articles/lrr-2006-3>.
- [9] B. Bertotti, L. Iess and P. Tortora, Nature **425**, 374 (2003).
- [10] P. Schneider, J. Ehlers and E.E. Falco, *Gravitational Lenses*, Springer Verlag (Berlin, 1992).