UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
FACULTÉ DES SCIENCES

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION : PHYSIQUE ET APPLICATIONS
PARCOURS : PHYSIQUE DES HAUTES ÉNERGIES

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN PHYSIQUE ET APPLICATIONS

intitulé :

SYMÉTRIE EN PHYSIQUE DES PARTICULES

Présenté par :

RATIARIMANANA Jean Rodolphe

devant la commission d'examen composée de :

Président du Jury	: Mr RABOANARY Roland	Professeur titulaire
Examinateur	: Mr LAHATRA RAZAFINDRAMISA Fils	Professeur titulaire
Rapporteur	: Mr HANITRIARIVO Rakotoson	Maître de conférence

Le Vendredi, 09 Décembre 2016

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
FACULTÉ DES SCIENCES

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION : PHYSIQUE ET APPLICATIONS
PARCOURS : PHYSIQUE DES HAUTES ÉNERGIES

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN PHYSIQUE ET APPLICATIONS

intitulé :

SYMÉTRIE EN PHYSIQUE DES PARTICULES

Présenté par :

RATIARIMANANA Jean Rodolphe

devant la commission d'examen composée de :

Président du Jury	: Mr RABOANARY Roland	Professeur titulaire
Examinateur	: Mr LAHATRA RAZAFINDRAMISA Fils	Professeur titulaire
Rapporteur	: Mr HANITRIARIVO Rakotoson	Maître de conférence

Le Vendredi, 09 Décembre 2016

Remerciements

Mon premier remerciement va à Dieu Tout Puissant pour sa miséricorde.
A l'occasion de mon mémoire de Master en Sciences Physiques, plus précisément en Physique Théorique, je voudrais adresser mes vifs remerciements à :

Monsieur RABOANARY Roland , Professeur titulaire et responsable de l'Equipe d'Accueil Doctorale à l'Université d'Antananarivo, d'avoir accepter de présider le jury de ce mémoire.

Monsieur LAHATRA RAZAFINDRAMISA Fils Professeur titulaire à l'Université d'Antananarivo et Responsable du Laboratoire de Physique de la Matière et du Rayonnement, d' avoir accepté d' être l'examinateur de ce mémoire.

Monsieur HANITRIARIVO Rakotoson, Maître de Conférences et responsable du parcours Physique des Hautes Énergies de m'avoir encadré pendant la réalisation de ce travail et m' a donné ces précieux conseils afin d'aboutir à la finalisation de ce mémoire.

Je tiens également à remercier tous les enseignants du Département de Physique et Mathématique de l'Université d'Antananarivo, de m'avoir donnée les atouts nécessaires au cours de notre cursus universitaires.

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille, mes collègues et mes amis de m'avoir soutenir pendant la réalisation de ce mémoire.

Sommaire

Liste des tableaux

Table des figures

Introduction

Depuis la fin de la seconde guerre mondiale, la physique des particules élémentaires a connu un développement significatif. De même évidemment, les scientifiques ont apporté et apportent le progrès technique dans le développement fondamental de la recherche et aussi dans la carrière de l' enseignement.

Il s' en suit que certaines personnes affirment que les mathématiques sont au service de la physique, et selon d'autres la physique n'est qu'une application approximative des théories mathématiques. La mathématique et la physique ont toujours été très liées : historiquement, les découvertes mathématiques ont permis de faire avancer les sciences physiques et, à d'autres moments, l'incompréhension d'un phénomène physique a pu constituer une motivation pour développer un domaine des mathématiques, raison pour laquelle c'est ce genre de relations entre mathématiques et physiques que quelques années plus tard, le rêve d'un grand physicien est les unifier les quatre forces fondamentales en introduisant la théorie mathématique. Au début du XX^e siècle, lorsque Einstein dévoila sa théorie de la relativité générale, les physiciens caressèrent l'espoir que tous les phénomènes de la nature puissent se réduire à ces deux "forces", c'est à dire l'électromagnétisme et la gravitation,pour ainsi envisager de les unifier à leur tour. La découverte dans la première moitié du XX^e siècle des interactions nucléaires mit fin à ce rêve, portant le nombre de " forces fondamentales" à quatre. L'évolution et la recherche scientifique découvrirent le modèle standard de la physique des particules, établi dans les années 1970. Cette nouvelle recherche, unifie l'interaction électromagnétique et la force faible à haute énergie.

Dans cet ordre d'idées, le présent mémoire a choisi ce thème intitulé "Symétrie en physique des particules" pour approfondir et élargir nos connaissances, à partir de la théorie mathématique comme les groupes et les algèbres de Lie les plus utilisés dans de nombreuses branches de la physique et de la chimie plus précisément en physique théorique. Actuellement, ils peuvent être considérés en tant que composantes essentielles dans l'étude de la physique des particules.

Aussi, pour mieux appréhender cet ouvrage, nous avons adopté un plan de travail qui comporte cinq chapitres. Parmi lesquels, le premier va être axé sur les groupes et les algèbres de Lie. Puis , le deuxième se rapporte à quelques représentations de ces groupe, discernant chacune d'elles.

Tandis que le troisième se concentre sur les symétries et les lois de conservation, a travers le formalisme Lagrangien et le théorème de Noether. Ensuite, nous développons la symétrie de jauge dans le quatrième chapitre. Enfin, l'interaction forte et la symétrie terminent avec le cinquième chapitre, ce travail que nous allons parachever par la conclusion.

Chapitre 1

Groupes et Algèbres de Lie

1.1 Groupe de Lie

1.1.1 Rappels et définitions

On appelle groupe topologique un groupe G qui est un espace topologique séparé tel que [2] :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, g') &\longmapsto gg' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sont des applications continues.

G est continu s'il dépend d'un ou plusieurs paramètres qui prennent librement ses valeurs dans $\mathbb{R}$

On note $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini, X. L'*ordre d'un groupe fini* G est le nombre $|G|$ d'éléments du groupe.

Exemples

Le groupe que l'on rencontre plus fréquement dans les applications physiques sont les groupes continu appelée *groupe de Lie*

Une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ est un élément d'ordre n du groupe des rotations du plan.

Un *sous-groupe* H de G est un sous-ensemble tel que $e \in H$ implique $g^{-1} \in H$, g et $g' \in H$ implique $gg' \in H$.

Le *sous groupe engendré* par un sous- ensemble d'un groupe G est le plus petit sous groupe de G contenant ce sous-ensemble.

Homomorphismes de groupes : Soient G_1 et G_2 deux groupes.
Une application $f : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme de groupe si elle est compatible avec les lois de compositions de ces groupes, c'est à dire si elle satisfait la propriété suivante $\forall g_1 g_2 \in G_1$:

$$f(g_1.g_2) = f(g_1).f(g_2) \tag{1.1}$$

Une telle application représente un *isomorphisme de groupes* si elle est également inversible. La relation d'isomorphisme est notée $G_1 \simeq G_2$ [3]

1.1.2 Groupe de Lie matricielle

Un groupe de Lie matriciel est un sous-groupe fermé G de $GL_n(\mathbb{C})$. Autrement dit, un sous-groupe $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie matriciel si la propriété suivante est vérifiée : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ est une suite convergente vers un élément $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors $A \in G$

1.1.3 Groupe compact

Un groupe de Lie G est *compact* s'il est fermé et borné dans $M_n(\mathbb{K})$. Autrement dit, G est compact si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

— Pour toute suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G, g_n \to g \in M_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow g \in G$.

— Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour toute $A \in G$ et tous $1 \leq i, j \leq n, |A_{ij}| \leq C$

Tout groupe de Lie compact peut donc être écrit comme un groupe de matrices qui est unitaire et ses représentations sont unitaires

Exemple

Le groupe orthogonale $O(n)$ et $U(n)$ ainsi que $SO(n)$ et $SU(n)$

1.1.4 Groupe connexe

Un groupe de Lie G est *connexe* si et seulement s'il est connexe par arcs, c'est à dire si pour toutes matrices $M, N \in G$, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to G$ telle que $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = N$

1.1.5 Exemple des groupes de Lie

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Le groupe $GL(n,\mathbb{K})$

Le groupe $GL(n,\mathbb{K})$ est le groupe des transformations générales linéaires dans $\mathbb{K}^n$. Il s'agit du groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$, il est défini par :

$$GL(n,\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/det(M) \neq 0\} \tag{1.2}$$

Il est de dimension n^2 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $2n^2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Les opérations de composition et l'inverse sont données par la multiplication de ligne par colonne et l'inverse matricielle, c'est à dire, en indiquant par det[ij] le commatrice ij de M [3]

$$(M_1M_2) = \sum_{k=1}^{n}(M_1)_{ik}(M_2)_{kj} \; ou \; M^{-1} = \frac{1}{det(M)}{}^{t}Com(M) \tag{1.3}$$

ou $Com(M)$ désignera la commatrice de M.
De l'autre manière, pour montrer que $GL(n,\mathbb{K})$ est bien un groupe de Lie matriciel on utilise la définition précédente.

Le groupe $SL(n,\mathbb{K})$

Le groupe spécial linéaire $SL(n,\mathbb{K})$ est un groupe de Lie. Celui-ci est défini par :

$$SL(n,\mathbb{K}) = \{M \in GL(n,\mathbb{K})/det(M) = 1\} \tag{1.4}$$

Le groupe de Lie $SL(n,\mathbb{K})$ est non compact mais il est connexe.

Le groupe O(n)

Le groupe orthogonal $O(n,\mathbb{K})$ est un groupe de transformation linéaire. Il est défini par :

$$O(n,\mathbb{K}) = \{M \in GL(n,\mathbb{K})/{}^tMM = I_n\} \tag{1.5}$$

Le groupe SO(n)

Le groupe spécial orthogonal $SO(n,\mathbb{K})$ est un groupe de transformation linéaire. Il est défini par :

$$SO(n,\mathbb{K}) = \{M \in GL(n,\mathbb{K})/{}^tMM = I_n\}, det(M) = 1\} \subset O(n,\mathbb{K}) \tag{1.6}$$

Toute matrice de $O(n,\mathbb{K})$ est de determinant ± 1. Celui-ci s'appuie sur la multiplicativité du determinant puisque.

$$M \in O(n,\mathbb{K}) \Longrightarrow det({}^tMM) = det({}^tM) = det(M) = det(M)^2 = 1 \tag{1.7}$$

La multiplicativité du déterminant est également utilisée pour montrer que $SO(n,\mathbb{K})$ est un, sous-groupe de $GL(n,\mathbb{K})$. Ce qui implique la caractérisation séquentielle et la continuité du determinant [1.7]. Rappelons également que O(n) est le groupe des matrices carrées réelles de taille $n \times n$ laissant invariant le produit scalaire (. ,.) usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Le groupe U(n)

Le groupe U(n) est un groupe unitaire. Il est défini par

$$U(n) = \{M \in GL(n,\mathbb{C})/M^\dagger M = I_n\} \tag{1.8}$$

Le groupe SU(n)

Le groupe SU(n) est un groupe spécial unitaire défini par

$$SU(n) = \{M \in U(n)/det(M) = 1\} \tag{1.9}$$

Par analogie avec O(n), le groupe U(n) est le groupe des matrices à coefficient complexe laissant invariant la forme hermitienne usuelle sur $\mathbb{C}$

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i \tag{1.10}$$

pour x,y $\in \mathbb{C}^n$.
Les groupes U(n) et SU(n) sont compacts et connexes.

1.2 Algèbre de Lie

Les algèbres de Lie sont des espaces vectoriels munis d'un crochet antisymétrique produisant à partir de deux éléments de l'espace un nouvel élément de cet espace. Elles jouent un rôle important dans la caractérisation des opérateurs agissant sur un espace vectoriel, comme ceux apparaissant en mécanique quantique, et également pour la description de transformations de symétrie infinitésimales.

1.2.1 Définition

$\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ si $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel muni de la loi de composition

$$[.,.] : g \times g \to g$$

vérifiant :

$$\begin{aligned} [X, X] &= 0 \, \forall X \in \mathfrak{g} \\ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \qquad & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \end{aligned}$$

[.,.] : commutateur ou multiplication de Lie.

1.2.2 Dimension de l'algèbre de Lie

La dimension de l'algèbre de Lie est sa dimension en tant qu'espace vectoriel.
Si la dimension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est finie, on peut définir une base. Supposons que la dimensions de $\mathfrak{g}$ est n, alors on a une base de $(X_1, ..., X_n)$. Si une base est connue, le commutateur de chaque élément peut ainsi calculer et on obtient.

$$[X_i, X_j] = \rho_{ij}^k X_k \tag{1.11}$$

$\forall$ i,j,k $\in \{1, ..., n\}$ et $\rho_{ij}^k X_k$ est le constante de structure
Si tous les crochets de Lie sont nuls, l'algèbre est dit abélienne
Si deux algèbres de dimension finie ont les mêmes relations de commutation, elles sont isomorphes.

Exemple

L'ensemble $M(2, \mathbb{C})$ des matrices d'ordre 2, muni de la multiplication matricielle

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \sigma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est considéré comme une algèbre de Lie de dimension 4 complexes.

1.2.3 Algèbre de Lie matricielle

L'algèbre de Lie matricielle $n \times n$ muni de la multiplication matricielle est une algèbre de Lie de dimension n^2 et on note $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, l'élément de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ est noté par $X = (x_{ij})$, i,j= 1,...,n.

Algèbre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, elle est définie par :

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \ \ trX = 0\} \tag{1.12}$$

La dimension de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ est $n^2 - 1$.

Exemple

Soit X une matrice et supposons que $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, donc on peut écrire de la forme comme suit.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Supposons tr X=0, ce qui implique que a+d= 0. On en déduit que a= - d. Ces là nous permet de trouver :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Cette matrice peut s'écrire également de forme suivante.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec a, b, c $\in \mathbb{C}$. On en déduit que la dimension de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ est 3 complexes ($3=2^2-1$)
Si on travaille dans la base :

$$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de la base J_0, J_+, J_- les relation de commutation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ peuvent calculer comme suit :

$$[J_0, J_+] = 2J_+; \;\; [J_0, J_-] = -2J_-; \;\; [J_+, J_-] = J_0$$

1.2.4 Algèbre de Lie $\mathfrak{su}(n,\mathbb{C})$

$\mathfrak{su}(n,\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de matrice $n \times n$ anti-hermitienne de trace nulle

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), X + X^\dagger = 0, \;\; trX = 0\} \tag{1.13}$$

La dimension de $\mathfrak{su}(n,\mathbb{C})$ est $n^2 - 1$

Exemple

L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$
De [1.13] l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ est un espace vectoriel (de dimension 3) des matrices complexe anti-hermitienne $n \times n$ de trace nulle.
En effet, considérons un élément X de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Les contraintes sur la matrice X sont : a + d = 0 ; a = - $\overline{a}$; d = - $\overline{d}$; b = - $\overline{c}$; c = - $\overline{b}$. La solution de ces contraintes est donnée par les relations suivantes : a = ix_3 ; b = $x_2 + ix_1$; c = $-x_2 + ix_1$ où x_1, x_2 et $x_3 \in \mathbb{R}$. La matrice X peut s'écrire comme :

$$X = \begin{pmatrix} ix_3 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix}$$

Nous observons alors que la dimension de $\mathfrak{su}(2)$ et 3 et la base sont données par :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

On constate que les relations de commutation de $\mathfrak{su}(2)$ sont :

$$[I, J] = IJ - JI = 2K; \ \ [J, K] = JK - KJ = 2I; \ \ [K, I] = KI - IK = 2J$$

En introduisant les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

les éléments de base sont alors de la forme suivante

$$I = -i\sigma_2; \ \ J = i\sigma_1; \ \ K = i\sigma_3.$$

1.2.5 Somme directe d'algèbre de Lie

Somme directe d'espaces vectoriel

Soient n espaces vectoriels $X_1, ..., X_n$. La somme directe $X_1 \oplus X_2 \oplus .... \oplus X_n$ est l'espace vectoriel des n-uples $(x_1, ..., x_n)$ avec $x_i \in X_i$ muni de l'addition [6]

$$(x_1, x_2, ...,) + (x'_1, x'_2, ..., x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, ..., x_n + x'_n) \tag{1.14}$$

et de la multiplication scalaire

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \tag{1.15}$$

L'ensemble des n-uples tels que $x_i = 0$ sauf pour i=k est un sous-espace vectoriel isomorphe à $X_k, X_k \sim \{(0, 0, ..., 0, x_k, 0, ..., 0)\}$ et il est commode de faire l'identification. Les X_k forment ainsi une famille de sous-vectoriels de $X = X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_n$ jouissant des propriétés suivantes :

— Pour $k \neq j, X_k \bigcap X_j = \{0\}$

— Tout élément $x \in X$ se décompose de manière unique comme somme d'éléments $x_k \in X_k$

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n \in X_i$$

Chapitre 2

Représentations

2.0.6 Représentation

Une *représentation* D d'un groupe G dans un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ est un homomorphisme $\phi : G \to GL(n, \mathbb{K})$ associant à chaque élément $g \in G$ une transformation linéaire générale $\phi(g) \in GL(n, \mathbb{K})$ agissant dans l'espace vectoriel E, c'est- à- dire $\phi(g) : E \to E$, avec la propriété suivante :

$$\phi(g_1.g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \tag{2.1}$$

Étant donné que e.e = e on a, $\phi(e)\phi(e) = \phi(e)$ et donc :

$$\phi(e) = I \tag{2.2}$$

De la même manière, vu que $g.g^{-1}$= e il suit que $\phi(g)\phi(g^{-1}) = I$ et par conséquent

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} \tag{2.3}$$

Une telle représentation D associe donc à chaque élément du groupe G une matrice correspondant à une application linéaire dans l'espace vectoriel E. La loi de composition de G devient la multiplication matricielle. Il existe en général des nombreuses représentations différentes d'un même groupe, sur des espaces vectoriels de dimensions différentes.

2.0.7 Représentation du groupe de Lie

Représentations SO(3) et SU(2)

Les générateurs infinitésimaux J_i de SO(3) et T_i de SU(2) satisfont les mêmes relations de commutation. Ces générateurs sont reliés par la formule suivante.

$$J_i = \frac{T_i}{2} \tag{2.4}$$

Représentation de SU(2)

Elle utilise une base formée par les vecteurs

$$\{J_+, J_-, J_3\} \tag{2.5}$$

où $J_\pm = J_1 \pm +iJ_2$. Ces générateurs J_1, J_2 et J_3 sont hermitiennes et $J_\pm$ ne le sont plus. En effet, nous avons

$$J_3^+ = J_3; \quad J_\pm = J_\pm \tag{2.6}$$

Il est facile de calculer

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$$
$$[J_+, J_-] = 2J_3$$

où J_3 et $J_\pm$ sont des opérateurs agissant dans un espace vectoriel E. Pour donner une représentation, il faut chercher leur citation sur E. Supposons que l'espace vectoriel E admet une représentation irréductible de dimension finie. Le but est de construire une base de E. Si $|m>$ est un état propre de J_3 de valeur m, $J_3|m>= m|m>$ alors $J_\pm|m>$ sont également les états propres de J_3 de valeur propre $m \pm 1$
En effet, on a :

$$\begin{aligned} J_3 J_\pm|m> &= ([J_3, J_\pm] + J_\pm J_3)|m> \\ &= (\pm J_\pm + mJ_\pm)|m> \\ &= (m \pm 1)J_\pm|m> \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur suivante :

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \tag{2.7}$$

On peut vérifier que J^2 commute avec tous les J_i

$$[J^2, J_i] = 0, i = 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

Il est immédiatement de calculer

$$\begin{aligned}
[J^2, J_1] &= [J_3^2 + J_2^2, J_1] \\
&= [J_2^2, J_1] + [J_3^2, J_1] \\
&= J_2[J_2, J_1] + [J_2, J_1]J_2 + J_3[J_3, J_1] + [J_3, J_1] \\
&= -iJ_2J_3 - iJ_3J_2 + iJ_3J_2 + iJ_2J_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

J^2 est dit l'opérateur de Casimir. On peut l'écrire aussi comme suit

$$\begin{aligned}
J^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \\
&= J_-J_+ + J_3^2 + J_3 \\
&= J_+J_- + J_3^2 - J_3
\end{aligned}$$

Puisque $J_+J_- = J_1^2 + J_2^2 + i[J_2, J_1] = J_1^2 + J_2^2 + J_3$
J^2 commute avec les trois générateurs, alors $J^2 = \lambda I$
Soit $|J>$ un état propre de J_3. Nous obtenons la forme suivante.

$$J^2|j>= J_-J_+|j> + J_3|j> + J_3|j>= J_-J_+|j> + (j^2 + j)|j> \tag{2.9}$$

Supposons que j est un vecteur propre maximal donc $J_+|j>= 0$.
Alors,

$$J^2|j>= j(j + 1)|j> \tag{2.10}$$

Finalement, les résultats sont les suivants :

Pour chaque dimension de E, l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ possèdent des représentations irréductibles

La dimension de la représentation est 2j+1 avec

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \tag{2.11}$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
J_+|m> &= \sqrt{j(j + 1) - m(m + 1)}|m + 1> && (2.12)\\
J_3|m> &= m|m>, -j \leq m \leq j && (2.13)\\
J_-|m> &= \sqrt{j(j + 1) - m(m - 1)}|m - 1> && (2.14)
\end{aligned}$$

Exemple

$j = \frac{1}{2}$: on obtient la représentation de dimension 2 suivante

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.0.8 Représentation de $\mathfrak{su}(3)$

La construction de la chromodynamique, autrement dit la théorie de l'interaction forte est à partir du groupe $SU(3)$, il produit huit champs de jauge c'est ce qu'on appelle *gluons*. Considérons à présent l'algèbre de Lie réel $\mathfrak{su}(3)$.

$$\mathfrak{su}(3) = \{M \in M_3(\mathbb{C}) = Tr(M) = 0; M^\dagger = -M\} \tag{2.15}$$

Nous observons que la dimension de $\mathfrak{su}(n)$ est $n^2 - 1$, mais ici $\mathfrak{su}(3)$ est 8. La représentation fondamental est [12]

$$T_j = -\frac{1}{2}\lambda_j \tag{2.16}$$

avec λ_j sont les matrice de Gell-Mann qui généralisent les matrices de Pauli

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1 Représentations équivalentes

Soit D une représentation de l'algèbre de Lie et T_a une représentation de l'élément de base de X_a de $\mathfrak{g}$. Les relations de commutation de $\mathfrak{g}$ sont associées à la base $(X_1, ..., X_n)$

$$[T_a, T_b] = \rho^c_{ab} T_c \tag{2.17}$$

où $\rho_{ab}^{c}T_c \in \mathbb{R}$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathfrak{g} \in \mathbb{C}$, on peut considérer d'autres représentations dues à des automorphismes de $\mathbb{C}$. Par exemple on note $\overline{T}$ la *représentation complexe conjuguée* de T, qui vérifie les relations de commutation :

$$[\overline{T_a}, \overline{T_b}] = \rho_{ab}^{c}\overline{T}_c \tag{2.18}$$

De même , on a aussi une représentation dual de T, notée T^{*}.

$$[-T_a^t, -T_b^t] = [T_b, T_a]^t = \rho_{ab}^{c}(-T_c^t) \tag{2.19}$$

Exemple

Soient D et D' deux représentations de G dans l'espace E et E', supposons qu'il existe un opérateur linéaire V de D dans D' tel que :

$$\forall\ g \in G V D(g) = D'(g)V \tag{2.20}$$

Un tel V est dit *opérateur d'entrelancement.* Si V est inversible on dit que les représentations T et T' sont équivalentes. Une représentation est dite équivalente s'il existe une matrice inversible V telle que : VD(X)= D'(X)V

2.2 Représentations réductible ,irréductible et unitaire

2.2.1 Représentations réductibles et irréductibles

Soient deux représentations D_1 et D_2 de G dans deux espaces E_1 et E_2. On peut alors construire une représentation dans l'espace de somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ et la représentation est dite *somme directe des représentations* D_1 et D_2 et notées $D_1 \oplus D_2$. Les sous-espaces E_1 et E_2 de E sont invariants sous l'action de D_1 et D_2.
Inversement, si une représentation de D dans un espace E laisse invariant un sous-espace de E. Elle est dite *reductible.* Dans le cas contraire, elle est *irréductible.* Si D est réductible et laisse le sous-espace E_1 invariant, et aussi son sous-espace supplémentaire E_2

Somme directe de représentation du groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie et $D_1, ..., D_m$ des représentations de G admettant pour un espace des représentations $E_1, ..., E_m$ respectivement. La somme directe de $D_1, ..., D_m$ est définie par la représentation $D_1 \oplus .... \oplus D_m$ de G agissant sur l'espace $e_1 \oplus ... \oplus e_m$ de la manière suivante :

$$\forall g \in G, \forall (e_1, ..., e_m) \in E_1 \oplus ... \oplus E_m, [D_1 \oplus ... \oplus D_m(g)](e_1, ..., e_m) = (D_1(g)e_1, ..., D_m(g)e_m).$$

Somme directe d'une représentation de l'algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $D_1, ..., D_m$ des représentations de $\mathfrak{g}$ admettant pour un espace des représentations $E_1, ..., E_m$ respectivement. La *somme directe* de $D_1, ..., D_m$ est définie par la représentation $D_1 \oplus ..... \oplus D_m$ de $\mathfrak{g}$ agissant sur l'espace $E_1 \oplus .... \oplus E_m$ de la manière suivante :

$$\forall X \in G, \forall (e_1, ..., e_m) \in E_1 \oplus ... \oplus E_m, [D_1 \oplus ... \oplus D_m(X)](e_1, ..., e_m) = (D_1(X)e_1, ..., D_m(X)e_m).$$

Pour une même construction, ces sommes directes sont réductibles et mêmes complètements réductibles

2.2.2 Représentation unitaire

Une représentation de G dans E est dite *unitaire* si pour tout $g \in G$, l'opérateur $D(g)$ est unitaire. On a donc pour tous $g \in G$ et $x, y \in E$

$$\begin{aligned} < x|y > &= < D(g)x|D(g)y > \\ D(g)^\dagger D(g) &= I \\ D(g^{-1}) &= D^{-1}(g) = D^\dagger(g) \end{aligned}$$

où : $<.|.>$: produit scalaire Toute représentation unitaire réductible est complètement réductible (Théorème de Maschke)

2.2.3 Lemme de Schur

Soient deux représentations irréductibles D dans E et D' dans E et un opérateur d' entrelacement entre elles, comme $\forall g \in G$, $VD(g) = D'(g)V$ où V est un opérateur linéaire. Si V $= 0$ ou bien V injective et les représentations sont équivalentes.

Preuve

Supposons $V \neq 0$. Alors, $VD(g) = D'(g)V$ implique que le noyau de V est un sous espace de E invariant par D ; par l'hypothèse d'irréductibilité, il se déduit donc à 0. De même, l'image de V est un sous- espace de E' invariant par D', il ne peut pas être nul et il est donc identique à E'. Les théorèmes classiques sur les applications linéaires entre espaces vectoriels découlent que V est une bijection de E dans E' et que les représentations sont donc équivalentes.

Corollaire

Tout opérateur d' entrelacement d'une représentation irréductible sur le corps $\mathbb{C}$ avec elle-même , c'est à dire tout opérateur commutant avec tous les représentants du groupe sont un multiple de l'identité. En effet, sur $\mathbb{C}$ et V ont au moins une valeur propre λ (qui est non nulle puisque V est inversible par le lemme de Schur). L'opérateur $V - \lambda I$ est aussi un opérateur d' entrelacement, mais il est singulier donc nul.

2.2.4 Produit tensoriel de représentation $\mathfrak{su}(n)$

Règle de Littlewood et Racah- Speiser

Il existe de règle assez complexe donnant la décomposition en représentation irréductible d'un produit de représentation irréductibles Λ et (Λ') de $\mathfrak{su}(n)$. Ce sont les *règles de Littlewood Richardson* qui font appel à la représentation en tableau d'Young. Mais il est souvent plus simple de procéder de proche en proche, en notant que la représentation irréductible (Λ') se trouve dans un produit adéquat de représentation successifs de la représentation Λ) par ces représentations fondamentales. Par l'associativité du produit tensoriel, on ramène le problème de départ à celui du produit tensoriel de (Λ) par les divers représentation fondamentales. Cette dernière opération est aisée à décrire sur la réseau des poids. Étant donné le plus haut poids (Λ) dans la première chambre de weyl C_1, le produit tensoriel de (Λ) par la représentation fondamentale de plus haut poids (Λ_i) se décompose en représentation irréductible de la manière suivante, on ajoute de toutes les façons possibles les $\dim(\Lambda)$ poids de la fondamentale au vecteur Λ et on ne regarde comme plus haut poids de la décomposition que ces poids résultant de cette addition qui appartient à C_1
Illustrons ceci sur le cas de $\mathfrak{su}(3)$. Si on calcule la décomposition de $8 \oplus 8$, on sait que la décomposition 8 (adjointe) se trouve dans le produit des deux fondamentale 3 et $\overline{3}$. Le poids de la représentation fondamental "3" de plus haut poids $\Lambda_1 = e_1$ et e_1, e_2, e_3 Ceux de la représentation fondamentale "$\overline{3}$" sont leur opposé [8] . Alors la règle ci-

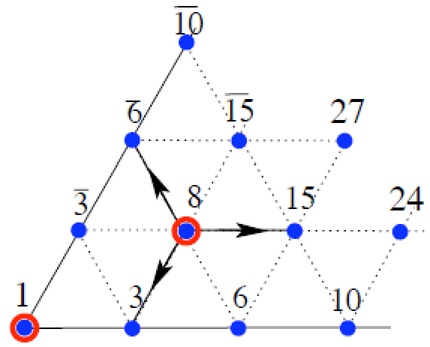


FIGURE 2.1 – Diagramme de poids de $\mathfrak{su}(3)$

dessus, on obtient donc

$$\begin{aligned}
3 \otimes 6 &= 8 \oplus 10 \\
3 \otimes 8 &= 3 \oplus \overline{6} \oplus 15 \\
3 \otimes 15 &= 6 \oplus \overline{15} \oplus 24 \\
3 \otimes \overline{3} &= 1 \oplus 8 \\
3 \otimes \overline{6} &= \overline{3} \oplus \overline{15}
\end{aligned}$$

En général on ajoute les trois vecteur $e_1 = (1,0), e_2 = (-1,1)$ et $e_3 = (0,-1)$ (dans la base Λ_1, Λ_2 à $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ les poids les plus hauts de la décomposition peut s'écrire comme suit :

$$(\lambda_1 + 1, \lambda_2), (\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1) \ \ et \ \ (\lambda_1, \lambda_2 - 1) \tag{2.21}$$

On élimine l'indice de Dynkin négatif. Noter la cohérence avec la trialité : toutes les représentation du membre de gauche.

Exemple

De [2.21] le produit tensoriel de la représentation $3 \otimes 3$ est :

$$\begin{gathered}
3 \otimes 3 = 6 \oplus \overline{3} \\
e_1(1,0) \to (2,0) = 6 \\
e_2(-1,1) \to (0,1) = \overline{3} \\
e_3(0,-1) \to \cancel{(1,-1)}
\end{gathered}$$

Les poids plus hauts respectivement associées aux deux vecteurs e_1 et e_2 sont (2,0) et (0,1). En prenant la figure [2.1], notons que 1 est le point de départ sur l'axe des

abscisses et des ordonnées. Les poids plus hauts sont portés ensuite sur la figure [2.1] puis le projetés suivant les deux axes. Et les valeurs obtenus sont les produits tensoriels de la représentation.
Si l'une ou les valeurs des poids plus hauts est (où sont) négative(s), le poids plus haut correspond à ce, vecteurs est éliminé donc le produit tensoriel de la représentation n'existe pas.
De même pour le $8 \otimes (1 \oplus 8)$:

$$8 \otimes (1 \oplus 8) = 8 \otimes 3 \otimes \overline{3} = (3 \oplus \overline{6} \oplus 15) \otimes \overline{3} = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 27$$

D'où on tire

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8_s \oplus 8_a \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 27 \tag{2.22}$$

Dans cette expression ci-dessus, on a ajouté un indice "a" ou "s" pour distinguer les deux copies de la représentation 8 : l'une est symétrique et l'autre antisymétrique dans l'échange des deux représentations 8 du membre de gauche. Cette relation nous sera très utile dans l'étude de la symétrie $SU(3)$ de saveur.

2.3 Représentation adjointe

Application adjointe

Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On définit l'*application adjointe* Ad : $G \to GL(g)$ par

$$\forall A \in G, \forall X \in \mathfrak{g},\ Ad_A(X) = AXA^{-1} \tag{2.23}$$

Représentation adjointe

L'application Ad : $G \to GL(\mathfrak{g})$ est une représentation appelée *représentation adjointe.* On définit de manière analogue la représentation adjointe pour $\mathfrak{g}$ par ad :$\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g},\ ad_X(Y) = [X, Y]. \tag{2.24}$$

Démonstration

Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $g(t) \in G$ une courbe telle que g(0)=I (où I est l'élément neutre de G) et g'(0)= X. Alors

$$ad_X Y = \left(\frac{d}{dt} Ad_{g(t)} Y\right)_{|t=0} \tag{2.25}$$

Avec :

$$Ad_{g(t)} Y = g(t) Y g(t)^{-1}$$

$$\left(\frac{d}{dt} Ad_{g(t)} Y\right)_{|t=0} = g'(0) Y I + g(0) Y(-X) = XY - YX = [X, Y] = ad_X Y \tag{2.26}$$

Exemple représentation adjointe de $\mathfrak{su}(2)$

Nous allons voir que la dimension de $\mathfrak{su}(2)$ est 3, ce qui va déterminer la taille des matrices de la représentation adjointe et les relations de commutation peuvent s'écrire de la forme suivante.

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ij}^k X_k \ avec \ i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas- ci la représentation adjointe est une représentation fidèle de $\mathfrak{su}(2)$. On peut aussi la noter $\underset{\sim}{3}$. Pour les représentations $\underset{\sim}{\overline{3}}, \underset{\sim}{3}^\dagger$ et $\underset{\sim}{3}^*$ sont équivalente à $\underset{\sim}{3}$. Donc pour les quatre représentations,on obtient les mêmes matrices.

$$T_j = -\overline{T}_j^t \Longleftrightarrow \underset{\sim}{3} \equiv 3^\dagger$$
$$\overline{T}_j = -\overline{T}_j^t \Longleftrightarrow \underset{\sim}{3} \equiv \underset{\sim}{3}^*$$

On ne peut pas trouver de matrice P, qui relier les représentations $\underset{\sim}{3}$ et $\underset{\sim}{\overline{3}}$ donc ces deux représentations ne sont pas équivalentes d'où l'importance à la physique des particules élémentaires. De même pour les représentations de $\mathfrak{su}(2)$. Selon [1.13] les éléments de base de $\mathfrak{su}(2)$ peuvent s'écrire comme suit :

$$T_j = \frac{i}{2} \sigma_j \tag{2.27}$$

où les matrices σ_j sont les matrices de Pauli définies par :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette représentation est encore une représentation fidèle, et les représentations $\overline{\underset{\sim}{2}}$, $\underset{\sim}{2}^\dagger$ et $\underset{\sim}{2}^*$ lui sont équivalentes. En effet,

$$\begin{aligned} JT_j &= \overline{T}_j J \\ JT_j &= -T_j^t \\ T_j &= -T_j^\dagger \end{aligned}$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Symétries et lois des conservations

3.1 Formalisme Lagrangien

Le formalisme Lagrangien représente une façon élégante et extrêmement puissante de décrire l'évolution d'un problème. Initialement abordé sous la forme du principe de moindre action, il permet en effet de déterminer le comportement du système dès que l'expression d'une grandeur spécifique, le Lagrangien, est connue. L'objectif de ce chapitre est de rappeler les concepts fondamentaux de la théorie Lagrangienne, tout d'abord dans le cadre de l'étude d'une particule massive, puis dans celui de la théorie des champs. [13]

3.1.1 Rappels de mécanique du point

Un système de coordonnées généralisées q est décrit par l'action

$$S[q] = \int dtL(q, \dot{q}) \tag{3.1}$$

où L est le lagrangien, généralement donné par

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \tag{3.2}$$

Cherchons la variation de l'action sous une transformation infinitésimale des coordonnées

$$\begin{cases} q \to q + \delta q \\ \dot{q} \to \dot{q} + \delta\dot{q} = \dot{q} + \partial_t(\delta q) \end{cases}$$

en supposant que la variation s'annule aux bords du domaine.
Alors,

$$S[q+\delta q] = \int dtL(q+\delta q, \dot{q}+\partial_t(\delta q)) \tag{3.3}$$

$$\approx S[q] + \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\partial_t(\delta q) \right) \tag{3.4}$$

$$= S[q] + \int dt\delta q \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \tag{3.5}$$

en intégrant par partie puisque le terme intégré est nul. La variation de l'action vaut donc,

$$\delta S = S[q+\delta q] - S[q] = \int d\delta q \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \tag{3.6}$$

et on doit avoir $\delta S = 0$ pour tout δq, ce qui nous donne l'équation d'Euler- Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{3.7}$$

où q_i sont les coordonnées généralisées de la particule, t la variable temporelle et $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.

En physique des particules où les interactions fondamentales sont décrites par des principes de symétrie, soient les transformations de jauge locales. Il est possible de démontrer que ces symétries sont intimement liées avec la conservation locale (et non seulement globale) de quantités physiques telles que la charge électrique, la couleur, etc,...

A partir de l'équation [3.7], calculons le Lagrangien des champs noté $\mathcal{L}$
Soit un champ $\phi = \phi(x)$. Il est décrit par l'action

$$S[\phi] = \int dtL(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{3.8}$$

Si on considère seulement les théories locales, alors le Lagrangien L s'écrit comme l'intégrale d'une densité de Lagrangien $\mathcal{L}$:

$$L = \int d^3x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{3.9}$$

On écrira alors l'action sous la forme

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{3.10}$$

De cette manière, S est un invariant de Lorentz à condition que $\mathcal{L}$ soit aussi un invariant : seuls les termes du type $\phi^2, \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, etc., peuvent apparaitre. Par abus de langage, on dit souvent que $\mathcal{L}$ est le lagrangien du système.
Considérons un intervalle $\mathcal{D} = [t_0, t_1] \times \mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}$ est un domaine spatial. On notera $\partial\mathcal{S}$ le bord de $\mathcal{S}$.
Considérons une variation de ϕ :

$$\begin{cases} \phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x) \\ \partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi + \partial_\mu(\delta\phi) \end{cases}$$

avec $\delta\phi = 0$ sur les bords.
L'action sera alors

$$S[\phi + \delta\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi + \delta\phi + \partial_\mu(\delta\phi)) \tag{3.11}$$

$$\approx [\phi] + \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \right) \tag{3.12}$$

$$= S[\phi] + \int d^4x \delta\phi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) + \underbrace{\oint_{\partial D} d^3\Sigma \partial\phi \eta_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}}_{=0} \tag{3.13}$$

car,

$$\oint_{\partial D} d^3\Sigma \partial\phi \eta_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \int_S d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \oint_{\partial D} d^3\Sigma \partial\phi \eta_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 \tag{3.14}$$

La variation de l'action

$$\delta S = \int d^4x \delta\phi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \tag{3.15}$$

conduit donc aux équations d'Euler Lagrange pour le champs :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{3.16}$$

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \tag{3.17}$$

Une transformation $\phi' = f(\phi)$ est une symétrie si $S[\phi'] = S[\phi]$.
Une symétrie est dite continue si elle dépend d'un paramètre continu : $\phi' = f_\alpha(\phi)$, avec

$\alpha \in \mathbb{R}$. Une symétrie qui n'est pas continue est dite discrète.

Exemple 1

Pour le groupe de symétrie discrète, prénons le Lagrangien ci-dessous

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{3.18}$$

Alors l'action est invariante par la transformation $\phi' = -\phi$: $S[\phi] = S[-\phi]$.
De plus, si ϕ_0 est une solution de vide, alors $-\phi_0$ l'est aussi.

Exemple 2

Soient deux champs complexes ϕ_1 et ϕ_2 et on notera $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. La forme des Lagrangiens invariants peut déterminer par $U(2)$. Soit $\phi' = U\phi$.
Alors,

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi'^{+}\partial^\mu\phi' \to (U\partial_\mu\phi)^{+}(U\partial^\mu\phi) &= (\partial_\mu\phi^{+})\underbrace{U^{+}U}_{1}(\partial^\mu\phi) \\ &= (\partial_\mu\phi^{+})(\partial^\mu\phi) \end{aligned}$$

Considérons maintenant le potentiel,

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}(m_1^2|\phi_1|^2 + m_2^2|\phi_2|^2)$$

Si $m_1^2 = m_2^2 = m^2$, ce qui implique que :

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}m^2(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)$$

Plus généralement, tout potentiel de la forme

$$V = V(\phi\phi^{+})$$

sera invariant.
Le groupe spécial unitaire est défini par [1.9] :
On a

$$U(2) = U(1) \times SU(2)$$

3.2 Théorème de Noether et courant conservés

En Physique, on appelle symétrie toute transformation inversible d'un état physique qui laisse invariante une ou plusieurs propriétés du système.

3.2.1 Théorème de Noether

Pour toute symétrie continue de l'action, il existe un courant conservé $j_\mu(x)$:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{3.19}$$

Ceci implique l'existence d'une charge conservé, définie par

$$Q(t) = \int d^3x\rho(t,x) \tag{3.20}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(t,x)d^3x = \int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\rho(t,x)d^3x & (3.21)\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} -\nabla J(t,x)d^3x = -\oint_{\partial\mathbb{R}^3} J.ndS = 0 & (3.22)\end{aligned}$$

Démontrons ce théorème :
Soit l'action dépend de n champs :

$$S[\phi_a] = \int d^4x\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) \tag{3.23}$$

on utilisera la conservation de sommation pour les indices des champs. Soit une transformation $\phi'_a = f^\alpha_a(\phi_b)$, alors si :
$\alpha = 0$, alors il s'agit de la transformation identité : $\phi'_a = \phi_a$
$\alpha \ll$, 1 il s'agit d'une transformation infinitésimale.

$$\begin{cases} x \to x = x + \delta x \\ \phi_\alpha \to \phi'_a(x') = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) \end{cases}$$

Avec $\delta\phi_a(x)$

$$\delta\phi_a(x) = \phi'_a(x') - \phi_a(x) \tag{3.24}$$

représente la variation du champs due à la fois à la transformation du champ et à la transformation des coordonnées. On définit alors la variation en un point fixé de l'espace par

$$\delta_0\phi_a(x) = \phi'_a(x') - \phi_a(x) \tag{3.25}$$

Lien entre d^4x' et d^4x.
On a

$$\begin{aligned} d^4x' &= det\left(\frac{d^4x'}{d^4x}\right)d^4x & (3.26)\\ &\approx (1+\partial_\mu \delta x^\mu)d^4x & (3.27)\end{aligned}$$

où $\det\left(\frac{d^4x'}{d^4x}\right)$ est le jacobien du changement de variable qui peut calculer par deux dimensions d'espace :

$$\begin{aligned} det\left(\frac{d^4x'}{d^4x}\right) &= \begin{vmatrix} \partial_0 x'^0 & \partial_1 x'^0 \\ \partial_0 x'^1 & \partial_1 x'^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\partial_0\delta x^0 & \partial_1 \delta x^0 \\ \partial_0 \delta x^1 & 1+\partial_1\delta x^1 \end{vmatrix} \\ &= (1+\partial_0\delta x^0)(1+\partial_1\delta x^1) - (\partial_1\delta x^0)(\partial_0\delta x^1) \\ &\approx 1+\partial_0\delta x^0 + \partial_1\delta x^1 \end{aligned}$$

en se limitant à l'ordre 1.
De [3.24], la relation entre $\delta\phi$ et $\delta_0\phi$ (à l'ordre 1) :

$$\begin{aligned} \delta\phi_a(x) &= \phi'_a(x') - \phi_a(x) \\ &= \phi'_a(x+\delta x) - \phi_a(x) \\ &\approx \phi'_a(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi'_a(x) - \phi_a(x) \\ &= \phi'_a(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \left(\phi_a(x) + \delta_0\phi_a(x)\right) - \phi_a(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\delta\phi_a(x) = \delta_0\phi_a + \delta x^\mu \partial_\mu \phi_a(x) \tag{3.28}$$

Notons que cette formule peut s'appliquer à tout champ $\mathcal{L}$.
Nous pouvons maintenant écrire la variation de l'action (en se limitant toujours à l'ordre 1 et en utilisant les formules) :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'_a(x'), \partial_\mu \phi'_a(x'), x') - \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu\phi_a(x), x) \\ &\approx \int d^4x(1+\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}(\phi'_a(x'), \partial_\mu \phi'_a(x'), x') - \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu\phi_a(x), x) \\ &= \int d^4x(\delta\mathcal{L} + (\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L} = \int d^4x(\delta_0\mathcal{L} + (\partial_\mu \mathcal{L})\delta x^\mu + (\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}) \\ &\approx \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta_0\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu(\partial_0\phi_a) + \partial_\mu(\delta x^\mu \mathcal{L})\right) \\ &= \int d^4x\delta_0\phi_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right) + \int d^4x\left[\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L}) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta_0\phi_a\right)\right]. \end{aligned}$$

Le premier terme redonne les équations d'Euler-Lagrange, tandis que le second est une 4-divergence. Concentrons- nous sur ce dernier et notons-le δS_v :

$$\begin{aligned}
\delta S_v &= \int d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a} \partial_0 \phi_a \right) \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} (\delta \phi_a - \delta x^\nu \partial_\nu \phi_a) \right) \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right].
\end{aligned}$$

Considérons le cas de transformation linéaire :

$$\begin{cases} \delta x^\mu = \varepsilon_r X^\mu_r \\ \delta \phi_a = \varepsilon_r \Phi_{ar} \end{cases}$$

où $\{\varepsilon_r\}$ est l'ensemble des paramètres de la transformation et qui représente un nombre quelconque d'indices et il soumis à la convention de sommation.
Donc, δS_v devient :

$$\begin{aligned}
\delta S_v &= \int d^4 \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right] \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \varepsilon_r \Phi_{ar} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) \varepsilon_r X^\nu_r \right]
\end{aligned}$$

Le courant conservé est donc :

$$J^\mu_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \Phi_{ar} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) X^\nu_r \tag{3.29}$$

Chapitre 4

Symétrie de jauge

En physique, plusieurs phénomènes peuvent être compris, ou à tout le moins simplifiés, si on en dégage tout d'abord les symétries.

4.1 Groupe de symétries internes

Intéressons- nous à présent aux symétries internes qui gouvernent les interactions sur les particules élémentaires. Deux familles de particules existent : les fermions et les bosons.

Fermions	Bosons
constituent la matière	liés aux interactions
spin demi-entier	spin entier, $\mathbb{N}$

TABLE 4.1 – Famille des particules

4.2 Interactions élémentaires

La physique a recensé quatre forces fondamentales et cherche à les unifier en groupes de symétrie. Pour cela, l'expérience a mis en évidence des particules élémentaires, plus précisément des bosons non massifs de spin 1, pour chacune des forces fondamentales (sauf encore pour le gravitons)

force fondamentale	électromagnétique	faible	forte	gravitationnelle
particule élémentaire	photon	bosons W et Z	gluons	"gravition"

TABLE 4.2 – Particules associées aux quatre forces fondamentales

4.3 Symétrie de jauge abélienne

Considérons la densité Lagrangienne d'un champ spinoriel libre.

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{4.1}$$

i$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$:Terme cinétique
m$\overline{\psi}\psi$:Terme de masse

4.3.1 Symétrie globale

$$Posons : \begin{cases} \psi \to \psi' = e^{iq\beta}\psi \\ \overline{\psi} \to \overline{\psi'} = e^{-iq\beta\psi} \end{cases} \tag{4.2}$$

où q et β sont des constantes réelles. Ce qui correspond à $\mathcal{L}'$

$$\mathcal{L}' = i\overline{\psi'}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi' - m\overline{\psi'}\psi' \tag{4.3}$$

Remplaçons ψ' et ψ par sa valeur, et $\mathcal{L}'$ devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\overline{\psi}e^{-iq\beta}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}e^{iq\beta}\psi - m\overline{\psi}e^{-iq\beta}e^{iq\beta}\psi & (4.4)\\ &= i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi & (4.5)\\ \mathcal{L}' &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

Le Lagrangien du champ spinoriel libre est invariant sous la transformation globale.

4.3.2 Symétrie locale

Pour une transformation local, β est une fonction.

$$Posons : \begin{cases} \psi \to \psi' = e^{iq\beta(\overline{x})}\psi \\ \overline{\psi} \to \overline{\psi'} = e^{-iq\beta(\overline{x})}\overline{\psi} \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\mathcal{L}' = i\overline{\psi'}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi' - m\overline{\psi'}\psi' \tag{4.7}$$

Remplaçons $\overline{\psi'}$ et ψ' par sa valeur.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= i\overline{\psi}e^{-iq\beta(\overline{x})}\gamma^\mu\partial_\mu e^{iq\beta(\overline{x})}\psi - m\overline{\psi}e^{-iq\beta(\overline{x})}e^{iq\beta(\overline{x})}\psi \\ &= i\overline{\psi}e^{-q\beta(\overline{x})}\gamma^\mu[(\partial_\mu e^{iq\beta(\overline{x})})\psi + e^{iq\beta(\overline{x})}\partial_\mu\psi] - m\overline{\psi}e^{-iq\beta(\overline{x})}e^{iq\beta(\overline{x})}\psi\end{aligned} \tag{4.8}$$

La densité Lagrangienne devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \overline{\psi}\gamma^\mu(q\partial_\mu\beta)\psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - q\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\beta)\psi \\ \mathcal{L}' &= \mathcal{L} - q\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\beta)\psi \\ \mathcal{L}' &\neq \mathcal{L}\end{aligned} \tag{4.9}$$

La densité Lagrangienne du champ libre n'est donc pas invariant. Pour rendre le Lagrangien invariante, on doit remplacer la dérivée usuelle par la dérivée covariante.

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{4.10}$$

où A_μ est un champ vectoriel qui se transforme comme suit :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \tag{4.11}$$

On peut vérifier que le Lagrangien modifié soit.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\overline{\psi}\psi} + \mathcal{L}_{\overline{\psi}\psi A} &= i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + q\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - \overline{\psi}\gamma^\mu q(\partial_\mu\beta)\psi - q\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &- \overline{\psi}\gamma^\mu q(\partial_\mu\alpha)\psi\end{aligned}$$

Elle est invariante par rapport à une transformation de jauge local [4.10] et [4.11].Par conséquent, en demandant que la théorie soit invariante par U(1), il dévient nécessaire d'introduire un champ A^μ. C'est ce qu'on appelle champ de jauge qui se couple aux particules représentées ψ . En fait, A^μ est associé au photon physique, c'est à dire le particule bosonique qui est le responsable de l'interaction électromagnétique. En réalité, pour que A^μ puisse être associé au photon, il est nécessaire d'introduire le terme dynamique.

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.12}$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur de champs du photon.
Il est intéressant de noter que l'introduction d'un terme de masse pour le photon n'est pas permise puisque $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ n'est pas invariant par rapport à la transformation de jauge locale. Alors le photon doit être sans masse.
La densité Lagrangienne totale possédant la symétrie locale est :

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - q\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.13}$$

On obtient la densité Lagrangienne de l'électrodynamique spinorielle, m et q qui s'identifient à la masse et à la charge des particules correspondant au champ spinoriel et au champs vectoriel, sa masse qui est le champ de jauge et s'identifie au champ de photon.
Remarque : $\partial'_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{iq\beta}\psi) = (\partial_\mu e^{iq\beta}\psi) + e^{iq\beta}\partial_\mu \psi \neq e^{iq\beta}\partial_\mu \psi$ entraine la non invariance.

4.4 Symétrie de jauge non abélienne

Dans le cas général, le groupe de jauge G est un groupe non abéliene (si on prend $(U_1, U_2) \in G$).
On a $U_1 U_2 \neq U_2 U_1$ qui peut être souvent identifié à un groupe de Lie de matrice unitaire à coefficient complexe. Si le groupe s'identifie à un groupe de matrice carrée $n \times n$, les champs ψ sur lesquels agissent les éléments du groupe de jauge sont considérés comme un multiplet à n composantes $\psi^i (i = 1, ..., n)$.
Puisque $U \in G$ alors :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ . \\ . \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad \overline{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0 = \overline{\psi}_1(x), ..., \overline{\psi}_n(x)$$

D'après la théorie de groupe de Lie, les éléments du groupe de Lie agissant sur les éléments de la représentation SU(n) sont de la forme.

$$U = exp(-iq \sum_{a=1}^{n} \alpha_a T^a) \tag{4.14}$$

Ce groupe de Lie associé, à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont les bases sont formées par T^a, vérifiant :

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \tag{4.15}$$

où $T^c = 1, ..., n^2 - 1$ (générateurs infinitésimaux de $\mathfrak{g}$)
α_a : paramètre réel arbitraire
q : constante de couplage
f^{abc} : constante de structure de $\mathfrak{g}$
Reprenons la densité Lagrangienne du champ spinoriel libre [4.1]. La densité lagrangienne est invariante sous les transformations de jauge globale ($\partial_\mu = 0$). La transformation définie par les éléments de G sont :

$$U \in G \begin{cases} \psi' \to U\psi \\ \overline{\psi'} \to \overline{\psi}U^\dagger = \overline{\psi}U^{-1} \\ \partial'_\mu\overline{\psi'} \to \partial_\mu(U\psi) = U(\partial_\mu\psi) \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\mathcal{L}' = i\overline{\psi}\gamma^\mu(U^\dagger U)\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}(U^\dagger U)\psi = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi = \mathcal{L} \tag{4.17}$$

(car $U^\dagger U = UU^\dagger = U^{-1}U = UU^{-1} = 1$). Mais elle n'est pas invariante sous les transformation de jauge locale ($\partial_\mu \neq 0$)

$$U \in G \begin{cases} \psi' \to U\psi \\ \overline{\psi'} \to \overline{\psi}U^\dagger = \overline{\psi}U^{-1} \\ \partial'_\mu\psi' \to \partial_\mu(U^\dagger\psi = U(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu)\psi \\ \partial'_\mu\psi' \to \partial_\mu(U\psi) = U(\partial_\mu\psi)D'_\mu\psi' \to D'_\mu(U\psi) = U(D_\mu\psi) \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\overline{\psi}\gamma^\mu(U^\dagger U)\partial_\mu\psi + i\overline{\psi}U^\dagger(\partial_\mu U)\psi - m\overline{\psi}(U^\dagger U)\psi && (4.19) \\ &= i\overline{\psi}U^\dagger(\partial_\mu U)\psi + \mathcal{L} && (4.20) \end{aligned}$$

Pour remedier à la forme initiale, on introduit le champ A^i_μ :

$$A_\mu = A^i_\mu\Gamma_i \tag{4.21}$$

Supposons que la transformation est unitaire et considérons plus en détail les champs $A_\mu = A^i_\mu\Gamma_i$ pour déduire ce que doivent être les Γ_i.
Nous avons :

$$\begin{aligned} A_\mu \to A'_\mu &= UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1} && (4.22) \\ Tr[A'_\mu] &= Tr[UA_\mu U^1] + \frac{i}{q}Tr[(\partial_\mu U)U^{-1}] && (4.23) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu U)U^{-1} &= \partial_\mu ln(U) && (4.24)\\
Tr[A'_\mu] &= Tr[A_\mu] + \frac{i}{q}Tr[\partial_\mu(lnU)] && (4.25)\\
&= Tr[A_\mu] + \frac{i}{q}\partial_\mu Tr[lnU] && (4.26)
\end{aligned}$$

D'après la transformation unitaire,

$$\begin{aligned}
U &= e^{iH} \Longrightarrow lnU = ln(e^{iH})\\
lnU &= iH\\
det[U] &= e^{iTr[H]}\\
iTr[H] &= ln(det[U])\\
Tr[lnU] &= ln(det[U])\\
det[U] &= 1 \; car \; U \in SU(n), SO(n)
\end{aligned}$$

Ce qui entraine que $Tr(ln[U]) = ln(det[U]) = 0$ car $ln1 = 0$
$\Longrightarrow \partial_\mu Tr[(lnU)] = 0$
Alors, la transformation U ne change pas la trace

$$Tr[A'_\mu] = Tr[A_\mu] \tag{4.27}$$

et on peut donc choisir Γ_i tels que $Tr[\Gamma_i] = 0$. Supposons que les champs A^i_μ sont réels. Donc,

$$\begin{aligned}
A^\dagger_\mu &= (UA_\mu U^{-1})^\dagger - \frac{i}{q}[(\partial_\mu U)U^{-1}]^\dagger\\
&= UA^\dagger U^{-1} - \frac{i}{q}U(\partial_\mu U^\dagger)\\
or\; \partial_\mu(UU^\dagger) &= 0 = \partial_\mu(U)U^\dagger + U\partial(U^\dagger)
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $A'^\dagger_\mu = UA^\dagger_\mu U^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1}$
donc $A'^\dagger_\mu - A'_\mu = U(A'^\dagger_\mu - A_\mu U^{-1}) \quad \forall A_\mu, U.$
Ceci est possible si

$$A^\dagger_\mu = A_\mu \tag{4.28}$$

A partir de [4.28], il en découle que les Γ_i sont hermitiens et on écrit $\Gamma_i \to T_i$
Avec : $[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k$, (f_{ijk} sont les constantes de structure)

Conlusion : $A_\mu = A_\mu^a T_a$
Pour obtenir l'invariance de jauge.
Soit :

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu + igA_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu^a T_a \\
D_\mu \psi &= \partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi \\
(D_\mu \psi)' &= (\partial_\mu \psi)' + (igA_\mu \psi)' \\
D'_\mu \psi' &= \partial'_\mu \psi' + iqA'_\mu \psi'
\end{aligned}$$

D'après la transformation [4.18], remplaçons ψ' par sa valeur et on a :

$$\begin{aligned}
D'_\mu \psi' &= \partial_\mu (U\psi) + iqA'_\mu (U\psi) \\
&= (\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu \psi) + iqA'_\mu U\psi \\
(\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu \psi) + iqA'_\mu U\psi &= U(\partial_\mu \psi) + iqUA_\mu \psi \\
iqA'_\mu U\psi + (\partial_\mu U)\psi &= iqUA_\mu \psi \\
iqA'_\mu \psi &= -(\partial_\mu \psi + iqUA_\mu \psi \\
&= UA_\mu \psi - \frac{1}{q}(\partial_\mu U^\dagger \\
A'_\mu &= UA_\mu U^\dagger - \frac{1}{iq}(\partial_\mu U)U^\dagger \\
D'_\mu \psi' &= \partial'_\mu \psi' + iqA'_\mu \psi' \\
&= \partial'_\mu \psi' + iqUA_\mu U^\dagger \psi' - (\partial_\mu)U^\dagger \psi' \\
&= \partial_\mu U^\dagger \psi' - (\partial_\mu U^\dagger \psi' + iqUA_\mu U^\dagger \psi' \\
&= U(\partial_\mu U^\dagger \psi') + (\partial_\mu)U^\dagger \psi - (\partial_\mu)U^\dagger \psi' + iqUA_\mu U^\dagger \psi' \\
&= U(\partial_\mu U\psi) + iqUA_\mu U^\dagger \psi' \\
&= U(\underbrace{[\partial_\mu + iqA_\mu]}_{D_\mu} U^\dagger)\psi'
\end{aligned}$$

$$D'_\mu = UD_\mu U^\dagger$$

La densité Lagrangienne invariante est :

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - qA_\mu^a T_a \tag{4.29}$$

On sait que le Lagrangien, n'a pas du terme relatif (champ de jauge). Par annalogie en QED.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.30}$$

On note que sous une transformation de jauge

$$A'_\nu = UA_\nu U^{-1} + \frac{1}{q}(\partial_\nu U)U^{-1} \tag{4.31}$$

$$donc\ \ \partial_\mu A'_\mu = \partial_\mu[UA_\nu U^{-1} + \frac{1}{q}(\partial_\nu U)U^{-1}] \tag{4.32}$$

$$(\partial_\mu U)A_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu A_\nu)U^{-1} + UA_\nu(\partial_\mu U^{-1}) \tag{4.33}$$

Alors, on a $F_{\mu\nu} \neq F'_{\mu\nu}$.

$$\mathcal{L}_\mathcal{A} \neq \mathcal{L}'_\mathcal{A}$$

C'est à dire $F_{\mu\nu}$ n'est pas invariant. Le résultat [4.29], suggère de remplacer le terme cinétique pour A_μ qu'on voit par le QED :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu & (4.34)\\ F_{\mu\nu} &= D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu & (4.35) \end{aligned}$$

Une transformation de jauge aura pour effet

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= D'_\mu A'_\nu - D'_\nu A'_\mu \\ &= (\partial_\mu + iqA'_\mu)A'_\nu - (\partial_\nu + iqA'_\nu)A'_\mu \\ &= (\partial_\mu + iq\{UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1}\})\{UA_\nu U^{-1} \\ &+ \frac{i}{q}(\partial_\nu U)U^{-1}\}) - (\partial_\nu + iq\{UA_\nu U^{-1} \\ &+ \frac{i}{q}(\partial_\nu U)U^{-1}\}\{UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1}\}) \end{aligned}$$

En développant et en utilisant la dérivée en chaîne, on obtient

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= (\partial_\mu U)A_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu A_\nu)U^{-1} + UA_\nu(\partial_\mu U^{-1}) \\
&+ \frac{i}{q}(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) \\
&+ iqU(A_\mu A_\nu)U^{-1} - UA_\mu U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - (\partial_\mu U)A_\nu U^{-1} \\
&- \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - \{(\partial_\nu UA_\mu)U^{-1} + U(\partial_\nu A_\mu)U^{-1} + UA_\mu(\partial_\nu U^{-1}) \\
&+ \frac{i}{q}(\partial_\nu\partial_\mu U)U^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) + \frac{i}{q}U(A_\nu A_\mu)U^{-1} - UA_\nu U^{-1}(\partial_\mu)U^{-1} \\
&- (\partial_\nu U)A_\mu U^{-1} - \frac{i}{q}(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}\}
\end{aligned}
$$

Après simplification il reste,

$$
\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= U(\partial_\mu + iqA_\mu)A_\nu U^{-1} - UA_\mu(\partial_\nu + iqA_\nu)U^{-1} \\
F'_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \\
\mathcal{L}'_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

On peut écrire aussi :

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \frac{1}{iq}[\partial_\mu + iqA_\mu, \partial_\nu + iqA_\nu] \\
&= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + iq[A_\mu, A_\nu] \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a + iq[A^b_\nu T_b, A^c_\nu T_c] \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a + iqA^b_\mu A^c_\nu[T_b, T_c] \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a + iqA^b_\mu A^c_\nu(if^a_{bc}T_a) \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a - qA^b_\mu A^c_\nu f^a_{bc}T_a
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

On factorise T_a, on a :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - qA^b_\mu A^c_\nu f^a_{bc} \tag{4.38}$$

$qA^b_\mu A^c_\nu f^a_{bc}$: Terme cinétique du champ de jauge A_μ
Or

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.39}$$

On remplace $F_{\mu\nu}$ en utilisant 4.37

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{A}} &= -\frac{1}{4}tr(UF_{\mu\nu}U^{\dagger}UF^{\mu\nu}U^{\dagger}) \\
&= -\frac{1}{4}tr(UF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}U^{\dagger}) \\
\mathcal{L}_{\mathcal{A}} &= -\frac{1}{4}\{[(\partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu}A^{\mu}_{a})] \\
&- 2qf^{a}_{bc}(\partial^{\mu}A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu}A^{\mu}_{a})A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu} + q^{2}f^{a}_{bc}f^{de}_{a}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}A^{\mu}_{d}A^{\nu}_{e}\}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Donc, le Lagrangien pour une théorie de jauge non-abélienne s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\hat{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - m\hat{\psi}\psi \\
&= -\frac{1}{4}\{[(\partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu}A^{\mu}_{a})] \\
&- 2qf^{a}_{bc}(\partial^{\mu}A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu}A^{\mu}_{a})A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu} + q^{2}f^{a}_{bc}f^{de}_{a}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}A^{\mu}_{d}A^{\nu}_{e}\}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Cette densité lagrangienne est formée des trois termes :

— Le terme des particules libres : $-\frac{1}{4}[(\partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu}A^{\mu}_{a})]$

— Le terme d'une interaction 3 gluons : $-2qf^{a}_{bc}(\partial^{\mu}A^{\nu}_{a} - \partial^{\nu}A^{\mu}_{a})A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}$

— Le terme d'une interaction 4 gluons : $q^{2}f^{a}_{bc}f^{de}_{a}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}A^{\mu}_{d}A^{\nu}_{e}$

Chapitre 5

Interaction forte et symétrie

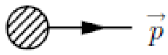
L'interaction forte est le responsable du confinement des protons et des neutrons dans les noyaux atomiques. Son intensité est considérable et elle dominerait toutes les autres forces de la nature si son rayon d'action n'était pas aussi minuscule (de l'ordre de la taille des noyaux atomiques, soit 10^{-15} mètre.

5.0.1 Règles de Feynman

A partir de la densité Lagrangienne, nous pouvons voir les règles de Feynman de la chromodynamique quantique, suivante

Règle de Feynman pour le propagateur et le vertex

Fermion sortant

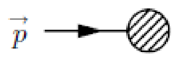


$\bar{u}(p,s)$

anti-fermion sortant

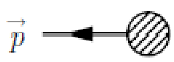
$v(p,s)$

Fermion entrant



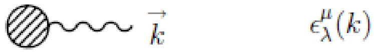
$u(p,s)$

Anti-fermion entrant



$\bar{v}(p,s)$

Vecteur entrant

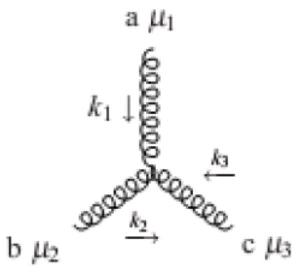


Vecteur sortant

Propagateur du gluon

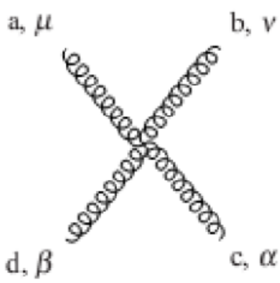
$$\frac{i\delta_{ab}}{k^2 + i\varepsilon}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k\nu}{k^2}\right] \tag{5.1}$$

Couplage à 3 gluons



$$V = g_s f^{abc}\{(g^{\mu_1\mu_2}(k_1-k_2)^{\mu_3} + g^{\mu_2\mu_3}(k_2-k_3)^{\mu_3} + g^{\mu_1\mu_3}(k_3-k_1)^{\mu_2}\} \tag{5.2}$$

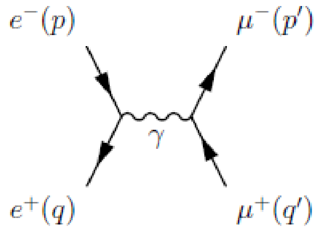
Couplage à 4 gluons



$$W = -ig_s^2 f^{abc} f^{cde}\left[(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} + f^{abc}f^{cde}(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})\right] \tag{5.3}$$

Exemple d'application règle de Feynman

Pour comprendre comment utiliser les règles de Feynman on va considérer le processus $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$



$$M = e^2\hat{v}_\alpha(q)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}u_\beta(p)\frac{i}{k^2}\hat{u}_\lambda(p')(\gamma_\mu)_{\lambda\sigma}v_\sigma(q') \tag{5.4}$$

où les indice $\alpha\beta\gamma\sigma$ étiquettent les éléments de matrices et les vecteurs. Souvent ces indices ne sont pas indiqués dans les calculs, mais ils sont nécessaires pour les comprendre en détail. Dans la formule [5.4], on a déjà utilisé le $g^{\mu\nu}$ du propagateur pour faire la contraction des deux matrices γ. Pour simplifier ultérieurement la formule on choisi le paramètre de jauge $\xi = 1$. Dans les dénominateurs des propagateurs la prescription de calcul $i\epsilon$ n'a pas été indiquée. Si on connait l'utilisation de la règle de Feynman on va faire une application, au lagrangien de la chromodynamique quantique.
La construction de la chromodynamique quantique, autrement dit la théorie de l'interaction forte, s'obtient à partir de l'interaction engendrée par le groupe de jauge $SU(3)$ dont on verra qu'il produit huit champs de jauge qu'on appelle des gluons. Quant aux spineurs de la théorie, ce sont les six quarks, dont chacun forme un triplet par rapport au groupe de symétrie. Dans cette application, on choisit le lagrangien du chromodynamique quantique du Gluons

$$\mathcal{L}_{gluons} = -\tfrac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu a}$$
$$\text{avec } D_\mu \equiv \partial\nu - ig_s\hat{G}\mu \text{ et } \hat{G}_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu}T^a = D_\nu\hat{G}_\nu - D\nu\hat{G}\nu.$$

On a vu encore que :

$$\hat{G}_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu}T^a = D_\mu\hat{G}_\nu - D_\nu\hat{G}_\mu = \left(\partial\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g_s f^{abc}G^b_\mu G^c_\nu\right)T^a$$

Soit :

$$G^a_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} + g_s f^{abc}G^b_\mu G^c_\nu \text{ avec } F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu.$$

Le terme $F^a_{\mu\nu}$ est identique à celui apparaissant dans le lagrangien de Maxwell. Le lagrangien des gluons s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gluons} &= -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu a} \\
&= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2}g_s f^{abc}F^a_{\mu\nu}G^{\mu b}G^{\nu c} - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade}G^b_\mu G^c_\nu G^{\nu d}G^{\nu e} \\
&= \underbrace{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}}_{Maxwell} \underbrace{-\frac{1}{2}g_s f^{abc}\left(\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu\right)G^{\mu b}G^{\nu c}}_{couplage\,3\,gluons} \underbrace{-\frac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade}G^b_\mu G_{\nu c}G^{\nu d}G^{\nu c}}_{couplage\,4\,gluons}
\end{aligned}$$

D'après la transformation du champ de jauge est :

$$\begin{aligned}
G^{a'}_\mu T^a &= (iw^bT^b)G^a_\mu T^a(1 - iw^bT^b + \frac{1}{g_s}(\partial\mu w^a)T^a(1 - iw^bT^b) \\
&= G^a_\mu T^a + iw^bG^a_\mu T^c + \frac{1}{g_s}(\partial_\mu w^a)T^a \\
&= \left[G^a_\mu + f^{abc}G^b_\mu w^c + \frac{1}{g_s}(\partial_\mu w^a)\right]T^a
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\delta G^a_\mu = \frac{1}{g_s}\partial\mu w^a + f_{abc}G^b_\mu w^c.$$

D'après la formule ci- dessus et la transformation infinitésimale on :

$$\begin{aligned}
G^{a'}_{\mu\nu} &= \underbrace{\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g_s f^{abc}G^b_\mu G^c_\nu}_{G^a_{\mu\nu}} \\
&+ \underbrace{\partial_\mu\delta G^a_\nu - \partial_\nu\delta G^a_\mu + g_s f^{abc}\left(G^b_\mu\delta G^c_\mu + \delta G^b_\mu G^c_\nu + \overbrace{\delta G^b_\mu\delta^c_\nu}^{0(w^2)}\right)}_{\delta G^a_{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

Donc la variation de la courbure de jauge $\delta G^a_{\mu\nu}$ est alors :

$$\begin{bmatrix} \delta G^a_{\mu\nu} & = & \frac{1}{g_s}\underbrace{\left(\partial_\mu\partial_\nu w^a - \partial_\nu\partial_\mu w^a\right)}_{=0} \\ & + & f^{abc}\left(\partial_\mu G^b_\nu - \partial_\nu G^b_\mu\right) w^c + f^{abc}\left(G^b_\nu \partial_\mu w^c - G^b_\mu \partial_\nu w^c\right) \\ & & + \underbrace{g_s f^{abc}\frac{1}{g_s}\left(G^b_\mu G_\nu w^c + G^c_\nu \partial_\nu w^b\right)}_{=-f^{abc}(G^b_\nu \partial_{nu} w^c - G^b_\mu \partial_\nu w^c)} \\ & = & f^{abc}(\partial_\mu G^b_\nu - \partial_\nu G^b_\mu)w^c + g_s f^{abc}(f^{cde}G^b_\mu G^d_\nu w^e + f^{bde}G^d_\mu G^c_\nu w^e) \end{bmatrix}$$

Si on fait le calcul le dernier terme de la somme peut se simplifier en utilisant l'identité de Jacobi :

$$f^{abc}f^{cde} + f^{adc}f^{ceb} + f^{aec}f^{cbd} = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f^{abc}(f^{cde}G^b_\nu G^d_\nu w^e + f^{bde}G^d_\mu G^c_\nu w^e &= (f^{abc}f^{cde} + f^{acd}f^{bce})G^b_\mu G^d_\nu w^e \\ &= -f^{aec}f^{cbe}G^b_\mu G^d_\nu w^e \\ &= f^{abc}f^{bde}G^d_\mu G^e_\nu w^c \end{aligned}$$

Finalement :

$$\delta G^a_{\mu\nu} = f^{abc}\partial_\mu G^b_\nu - \partial_\nu G^b_\mu + g_s f^{bde}G^d_\mu G^e_\nu)w^c = f^{abc}G^b_{\mu\nu}w^c$$

D'où l'invariance du Lagrangien :

$$\mathcal{L}'_{gluons} = \frac{1}{4}(G^a_{\mu\nu} + \delta G^a_{\mu\nu})(G^{\mu\nu a} + \delta G^{\mu\nu a}) = \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu a} = \mathcal{L}_g luons$$

Car :

$$G^a_{\mu\nu}\delta G^{\mu\nu a} = f^{abc}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu b}w^c = f^{bac}G^b_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}w^a = -f^{abc}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu b}w^c = 0$$

Conclusion

Dans l'histoire de la physique théorique, les années 20 marquèrent un formidable développement dans la compréhension des phénomènes atomiques. Succédant à l'ancienne théorie des quanta de Bohr, une nouvelle mécanique quantique se constitua en 1925-1926, avec les contributions de Broglie et Schrodinger puis en 1925 Pauli propose son principe d'exclusion. Le groupe et l'algèbre de Lie appliqués à la physique des particules comme le groupe $GL(n, \mathbb{K})$, U(n), SU(n),... possèdent une importance particulière en physique de particules, le groupe U(1) qui est isomorphe à SO(2) constitue le groupe de jauge, et le SU(2) est celui associé à l'interaction faible, le groupe SU(3) correspond à l'interaction forte qui permet de lier les quarks entre eux pour former des particules composites appelées hadrons. Ces groupes sont nécessaires à la théorie des représentations pour généraliser le principe de symétrie. Par ailleurs, la représentation y tient une grande place, car son importance en physique permet de décrire le système de transformation sur les applications de cette théorie. Elle varie selon l'utilisation vis à vis de leur groupe et de l' algèbre de Lie. Elle est profondément liée à la géométrie via la théorie des invariants. L'effet de rotation ou de réflexion ou de l'inversion est dicté par la nature géométrique, scalaire, spinoriel, vectorielle, tensorielle etc...et, dans ce travail, la symétrie reste invariante, en dépit de la transformation utilisée. Le progrès de la recherche scientifique évolue mais, jusqu'à maintenant, le rêve des grands physiciens pour unifier les quatre "forces fondamentales" reste encore une imagination. Si le rêve réussissait, quel serait son impact envers le physique, pour le physicien et pour la nature ?

Bibliographie

[1] Mikhaïl Shaposhnikou, 2007, Champs Quantiques Relativistes

[2] Yvette Kosmann- Schwarzbach, 2003, Groupes et Symétries

[3] Claudio Scrucca, Institue de Théorie des phénomènes physique EPFL

[4] M. Hamermesh,Group theory and its applications to physical problems,Addison-Wesley

[5] James E. Humphreys, 1972, Introduction to Lie Algebras and Representation, Theory

[6] Marc Henneaux, Goupe des rotations à 3 dimensions, groupe de Lorentz et groupe de Poincaré

[7] David Renard- Laurent Schwartz, 2009, Groupes et Représentations

[8] Jean-Bernard Zuber, Invariance en physique et théorie des groupes

[9] N. Bourabaki,1960-1983 Groupes et algèbre de Lie, Chap. 1-9, Hermann

[10] Olivier Wang, 2010, Symétrie en physique et représentations

[11] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory, Springer

[12] Michel Rausch de Taubenberg, 2008, Algèbre de Lie- Applications aux particules élémentaires

[13] Mathieu Hemery - Daniel Suchet, 2010, Modèle standard et théorie de jauge

[14] J.D. Bjorken and S. Drell,Relativistic Quantum Mechanics, McGraw Hill

[15] Peskin and D.V. Schroeder,An Introduction to Quantum Fiel Theory, Addison Wesley

Symétrie en physique des particules

Résumé

Ce travail concerne l'étude de la symétrie en physique des particules par la théorie des groupes et l' algèbre de Lie, a commencée à la fin du XIXème siècle avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie. Ces groupes sont nécessaires pour pouvoir procéder à étudier la représentation appliquée en physique. Sous une transformation infinitésimale, les résultats obtenus sont invariants et qui conduit à la notion de symétrie. Certaines branches de la physique utilisent ce théorie mathématique selon leur application et selon l'étude de ce travail.

Mots clefs : *Groupe, Algèbre, Représentation, Symétrie, Particules, Invariance*

Abstract

This work concerns the study of symmetry in particle physics by group theory and Lie algebras, They began at the end of the 19th century with the work of the Norwegian mathematician Sophus Lie. These groups are necessary to perform the study of applied representation in physics.Under an infinitesimal transformation, the results obtained are invariant and which leads to the notion of symmetry. Some branches of physics use mathematical theory according to their application and according to the study of this work.

Keywords : *Group, Algebra, Representation Symmetry Particles, Invariance*

Encadreur :	Impétrant :
Dr. HANITRIARIVO Rakotoson	RATIARIMANANA Jean Rodolphe
	Tél : +26133 80 275 30 ou +26134 46 275 03
	E-mail : ratiarimananaj@gmail.com
