Chapitre 5

Circuits RL et RC

Ce chapitre présente les deux autres éléments linéaires des circuits électriques : l'inductance et la capacitance. On verra le comportement de ces deux éléments, et ensuite leur application dans des circuits. Les techniques d'analyse de circuit vues dans les chapitres précédents s'appliquent aux circuits contenant des inductances et des capacitances.

On verra en premier les circuits contenant seulement des inductances ou seulement des capacitances. Des circuits contenant ces deux éléments seront présentés au chapitre suivant.

5.1 Inductance

Une inductance est une composante électrique qui s'oppose au variations de courant. Elle est constituée de plusieurs boucles de fil électrique embobiné autour d'un noyau qui peut être magnétique ou non. La figure 5.1 montre un exemple d'inductance.

Figure 5.1 – Photo d'inductances

On utilise le symbole L pour représenter une inductance. Son unité est le Henry [H].

Le symbole typique d'une inductance est montré à la figure 5.2.

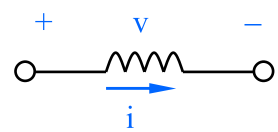


FIGURE 5.2 – Symbole typique d'une inductance

La relation qui relie la tension au courant pour une inductance est :

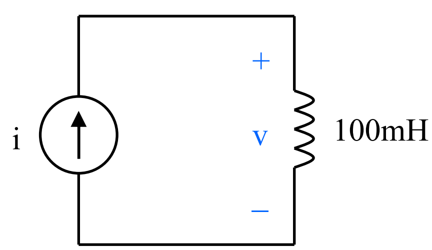
$$v = L\frac{di}{dt} \tag{5.1}$$

On peut faire quelques observations à partir de l'équation 5.1, à cause du terme de dérivée :

1. Si le courant est constant, la dérivée $\frac{di}{dt} = 0$, alors la tension $v = 0$. L'inductance se comporte comme un court-circuit en présence d'un courant constant (DC).
2. Il ne peut pas y avoir de variation instantanée de courant dans une inductance. On peut approximer :
$$\frac{di}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t}$$
Si $\Delta t = 0$, alors $v = \infty$, ce qui est impossible.

EXEMPLE 1

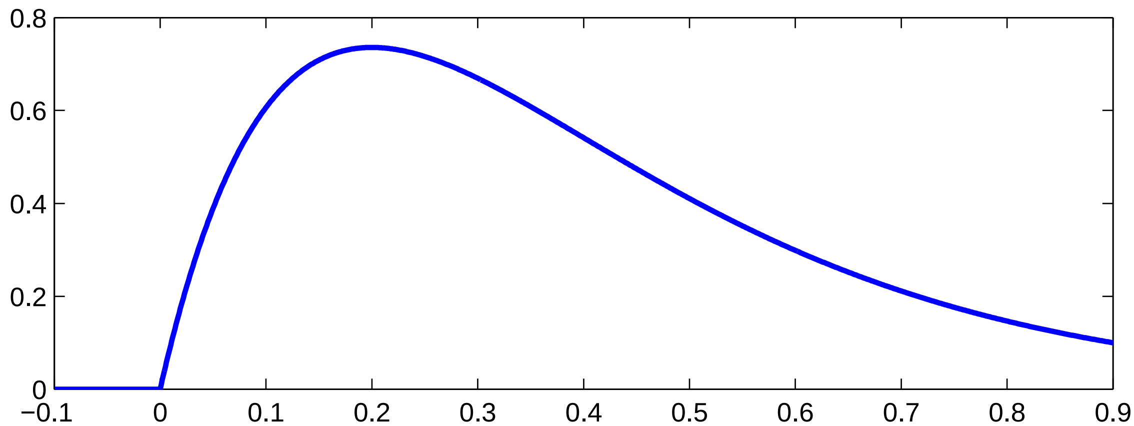
La source de courant du circuit suivant ne produit pas de courant pour $t < 0$ et un pulse $10te^{-5t}$A pour $t > 0$.



1. Tracer le graphe du courant.
2. À quel instant le courant est-il maximum ?
3. Tracer la courbe de la tension.

---

1. Le graphe du courant est donné à la figure suivante :



2. Pour trouver le point où le courant est maximum, il faut dériver l'équation du courant et mettre égal à zéro.

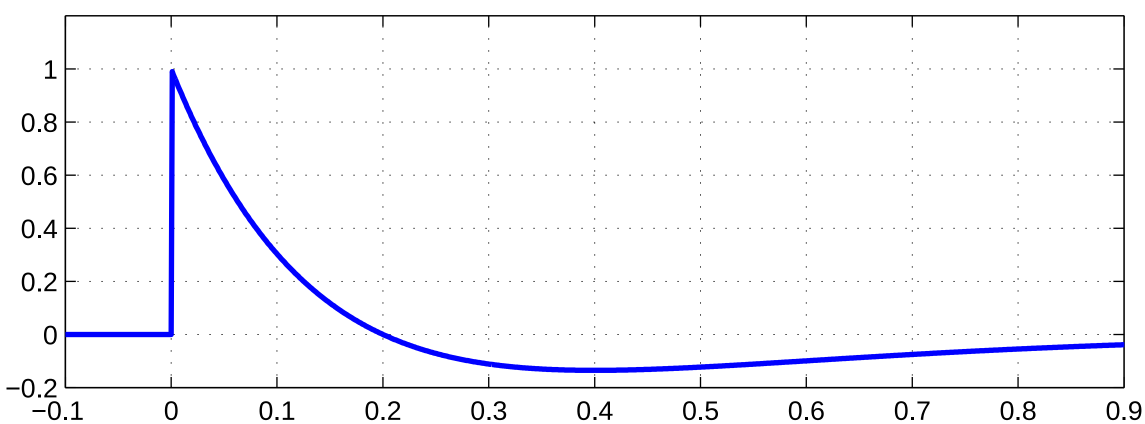
$$\frac{di}{dt} = 10(-5te^{-5t} + e^{-5t}) = 10e^{-5t}(1-5t) = 0$$

On solutionne pour trouver $t = 0.2$s.

3. Pour tracer le graphe de la tension, il faut appliquer directement l'équation 5.1.

$$v = L\frac{di}{dt} = 0.1(10e^{-5t}(1-5t)) = e^{-5t}(1-5t)$$

Le graphe est donné à la figure suivante.



Noter que la tension varie instantanément à $t = 0$; la tension passe de 0V à 1V.

Courant dans une inductance en fonction de la tension

On peut obtenir une équation du courant dans une inductance en fonction de la tension à ses bornes en réarrangeant l'expression de la tension. À partir de l'équation 5.1,

$$v\,dt = L\,di \tag{5.2}$$

On peut alors intégrer de chaque côté :

$$L\int di = \int v\,dt \tag{5.3}$$

ce qui donne :

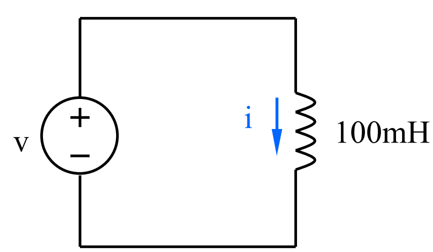
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0) \tag{5.4}$$

Le plus souvent, $t_0 = 0$, et on peut simplifier :

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v\,d\tau + i(0) \tag{5.5}$$

Exemple 2

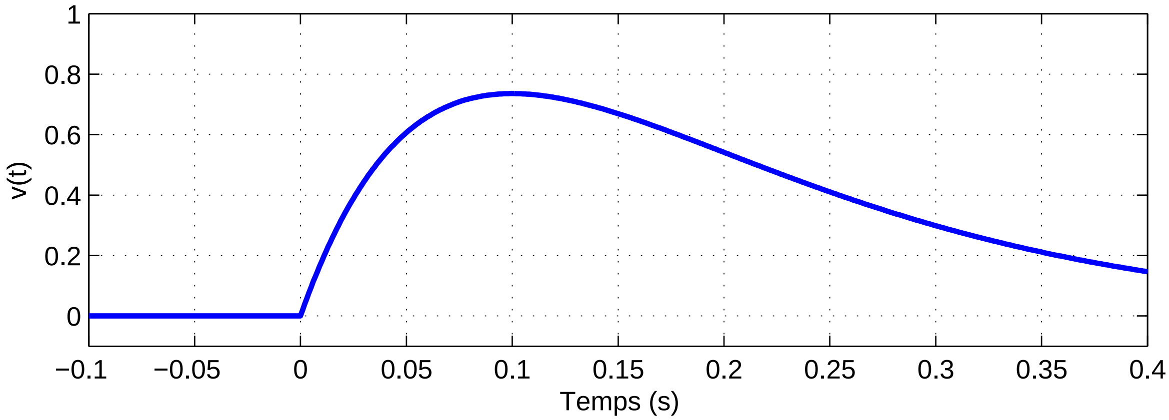
La source de tension du circuit suivant ne produit pas de tension pour $t < 0$ et une tension $20te^{-10t}$V pour $t > 0$. On suppose $i = 0$ pour $t < 0$.



1. Tracer le graphe de la tension.
2. Calculer l'expression du courant dans l'inductance.
3. Tracer la courbe du courant.

---

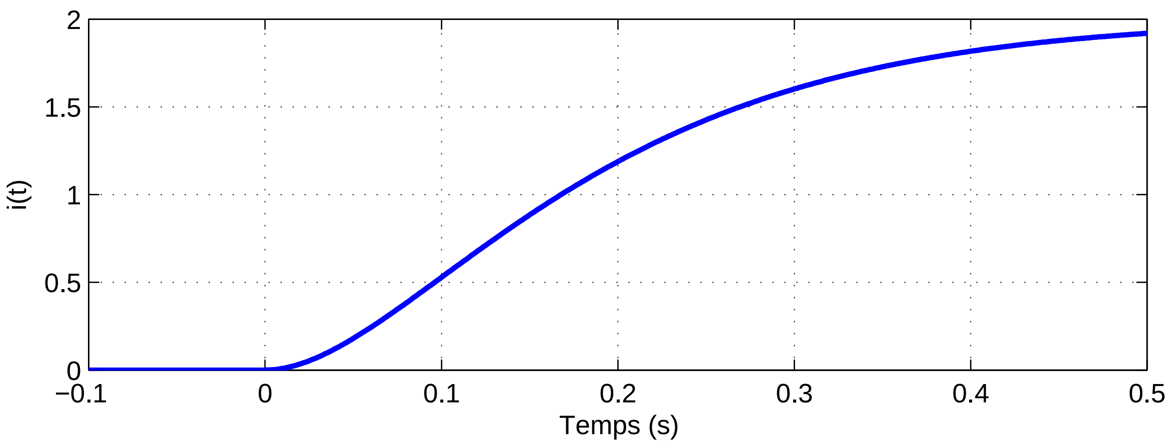
1. Le graphe de la tension est donné à la figure suivante :



2. Pour calculer le courant, il faut appliquer l'équation 5.5. Le courant initial $i(0) = 0$.

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{0.1}\int_0^t 20\tau e^{-10\tau}\, d\tau + 0 \\ &= 200\left[\frac{-e^{-10\tau}}{100}(10\tau+1)\right]\Bigg|_0^t \\ &= 2(1 - 10te^{-10t} - e^{-10t})\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

3. Le graphe du courant est le suivant :



Remarquer que le courant tend vers une valeur finale de 2A.

5.1.1 Puissance et énergie dans une inductance

On peut obtenir les équations de puissance et d'énergie d'une inductance directement à partir des relations de tension et de courant. Si le courant est dans le sens d'une chute de tension, la puissance est :

$$p = vi \tag{5.6}$$

Si on remplace la tension par l'équation 5.1,

$$p = Li\frac{di}{dt} \tag{5.7}$$

ou, si on remplace le courant,

$$p = v\left(\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, d\tau + i(t_0)\right) \tag{5.8}$$

Pour le calcul de l'énergie, on peut obtenir l'équation correspondante selon :

$$p = \frac{dw}{dt} = Li\frac{di}{dt} \tag{5.9}$$

et donc,

$$dw = Li\, di \tag{5.10}$$

En faisant l'intégrale, on obtient :

$$w = \frac{1}{2}Li^2 \tag{5.11}$$

Exemple 3

Pour le circuit de l'exemple 1,

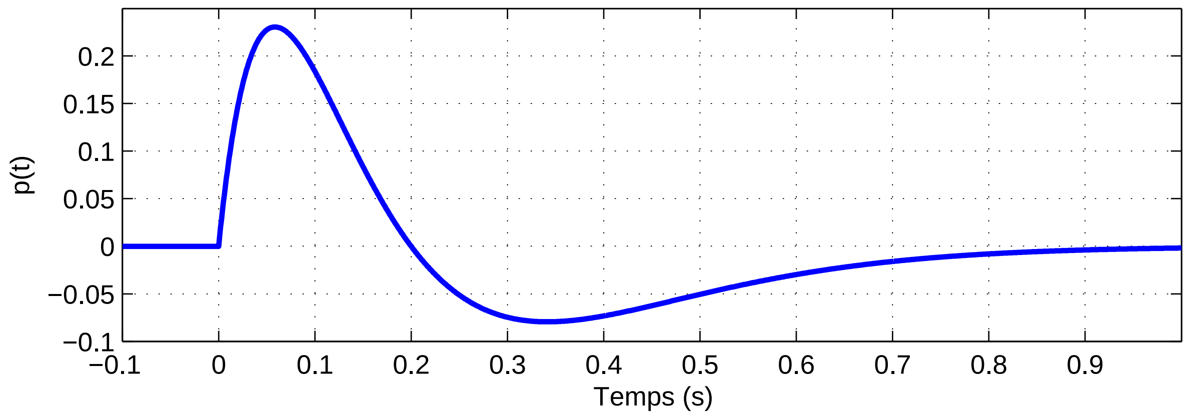
1. Tracer la courbe de p et w.
2. Pendant quel intervalle l'inductance emmagasine-t'elle de l'énergie ?
3. Pendant quel intervalle l'inductance fournit-elle de l'énergie ?
4. Quelle est l'énergie maximale emmagasinée dans l'inductance ?

---

1. Pour obtenir la puissance, il suffit de multiplier les équations de tension et de courant.

$$p(t) = vi = (e^{-5t}(1-5t))(10te^{-5t}) = 10te^{-10t}(1-5t)$$

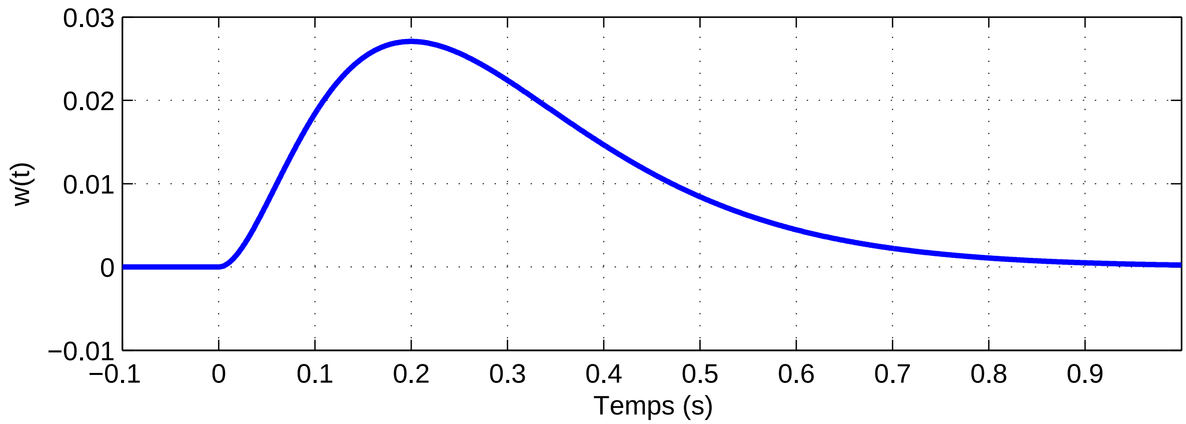
Le graphe est :



On calcule l'énergie :

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2 = 0.5(0.1)(10te^{-5t})^2 = 5t^2e^{-10t}$$

ce qui donne le graphe suivant :



2. L'inductance emmagasine de l'énergie si l'énergie augmente. D'après le graphe, l'énergie augmente de 0 à 0.2s. C'est aussi l'intervalle pendant lequel $p > 0$.

3. L'inductance fournit de l'énergie si l'énergie diminue. D'après le graphe, c'est la période où $t > 0.2s$. C'est aussi l'intervalle pendant lequel $p < 0$.

4. Pour trouver l'énergie maximale, il faut dériver l'équation de l'énergie.

$$\frac{dw}{dt} = 10te^{-10t} - 50t^2e^{-10t}$$

On solutionne pour trouver t = 0.2s. À cet instant, l'énergie est $w(0.2) = 27.07$mW.

5.2 Condensateur

Le condensateur est un composant électrique qui permet d'emmagasiner de l'énergie électrique. Un condensateur possède une capacitance C, et son unité est le Farad [F]. La plupart des condensateurs sont constitués de deux plaques métalliques séparées par un matériau non-conducteur qu'on appelle un diélectrique. La figure 5.3 montre différents condensateurs pratiques. Des condensateurs pratiques pour des circuits sont typiquement de l'ordre du picofarad (pF) au microfarad (μF). Cependant, dans certaines voitures électriques, on utilise des condensateurs de l'ordre du kilofarad (kF) pour emmagasiner l'énergie ou fournir un énorme pulse d'énergie lors du décollage.

FIGURE 5.3 – Photo de condensateurs

La relation entre le courant et la tension d'un condensateur est :

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{5.12}$$

De façon similaire à l'inductance, on peut faire quelques observations importantes :

1. La tension ne peut pas varier de façon instantanée aux bornes d'un condensateur.
2. Si la tension est constante aux bornes d'un condensateur, le courant est nul.

La tension en fonction du courant est :

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + v(0) \tag{5.13}$$

La puissance dans un condensateur est :

$$p(t) = vi = Cv\frac{dv}{dt} = i\left(\frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + v(0)\right) \tag{5.14}$$

Et l'énergie est :

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 \tag{5.15}$$

EXEMPLE 4

La tension aux bornes d'un condensateur de 0.5μF est donnée par l'équation suivante :

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4t & 0 \leq t \leq 1 \\ 4e^{-(t-1)} & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

1. Donner l'expression du courant, de la puissance et de l'énergie du condensateur.
2. Tracer le graphe de la tension, du courant, de la puissance et de l'énergie.
3. Donner l'intervalle de temps pendant lequel de l'énergie est emmagasinée dans le condensateur.
4. Donner l'intervalle de temps pendant lequel le condensateur fournit de l'énergie.

---

1. On utilise l'équation 5.12 pour calculer le courant :

$$i(t) = \begin{cases} (0.5 \times 10^6)(0) = 0 & t \leq 0 \\ (0.5 \times 10^6)(4) = 2\mu\text{A} & 0 \leq t \leq 1 \\ (0.5 \times 10^6)(-4e^{-(t-1)}) = -2e^{-(t-1)}\mu\text{A} & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

On calcule maintenant la puissance :

$$p(t) = v(t)i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ (4t)(2) = 8t\mu\text{W} & 0 \leq t \leq 1 \\ (4e^{-(t-1)})(-2e^{-(t-1)}) = -8e^{-2(t-1)}\mu\text{W} & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

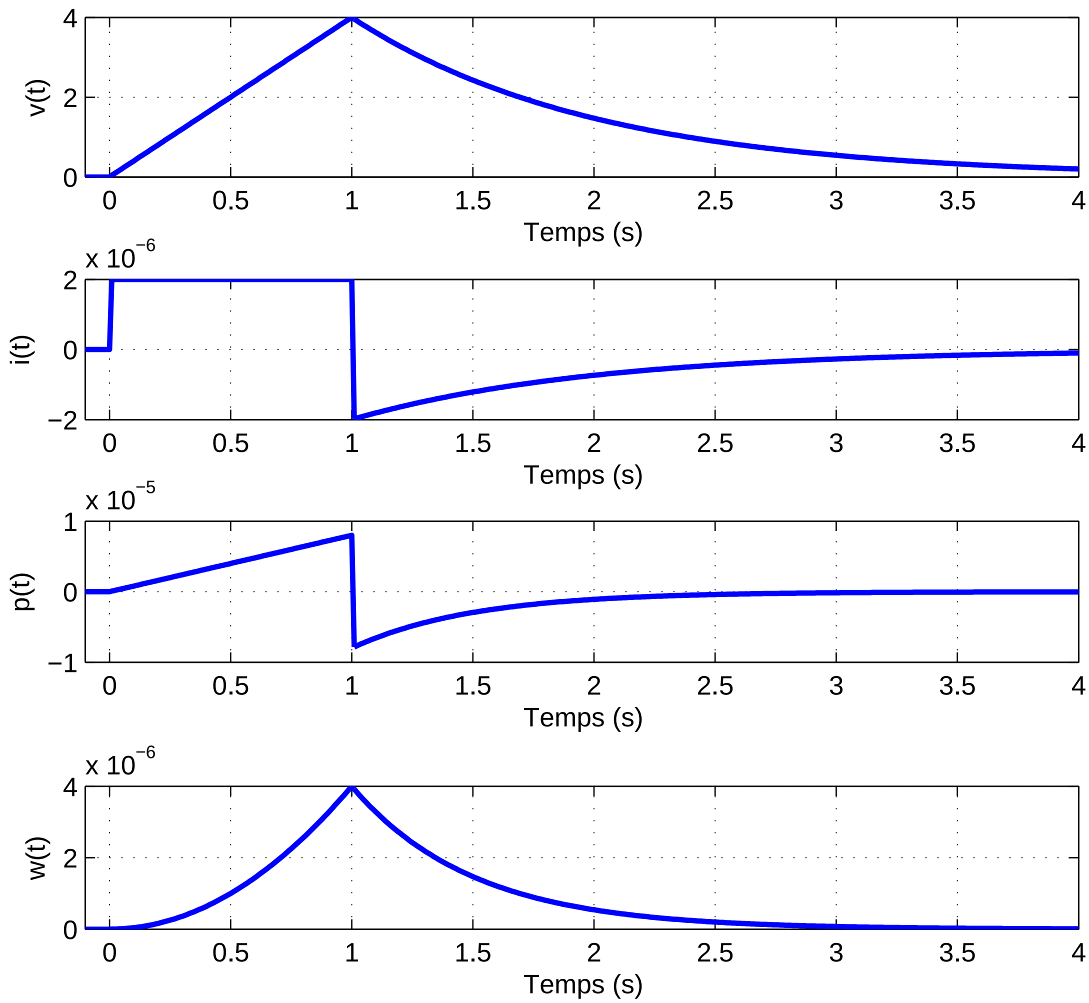
Puis l'énergie :

$$w(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0.5(0.5)(4t)^2 = 4t^2\mu\text{J} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0.5(0.5)(4e^{-(t-1)})^2 = 4e^{-2(t-1)}\mu\text{J} & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

2. Les graphes sont :

3. L'énergie est emmagasinée dans le condensateur si la puissance est positive. Il s'agit de l'intervalle 0 à 1s.

4. L'énergie est fournie par le condensateur pendant la période de puissance négative, pour $t > 1$s.



5.3 Combinaisons série-parallèle

Inductances

On additionne des inductances en série :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots \tag{5.16}$$

En parallèle, la relation est :

$$L_{eq} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots\right)^{-1} \tag{5.17}$$

Capacitances

La relation pour des capacitances en série est :

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots\right)^{-1} \tag{5.18}$$

Pour des capacitances en parallèle :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \tag{5.19}$$

5.4 Réponse naturelle des circuits RL et RC

On analyse ici les circuits composés de sources, résistances et une inductance ou une capacitance. Il y deux étapes principales d'analyse :

1. Réponse naturelle : on analyse des circuits où l'énergie emmagasinée dans une inductance ou une capacitance est soudainement dissipée dans une résistance (ou un circuit résistif).
2. Réponse forcée : on analyse des circuits où on applique soudainement une source DC (tension ou courant) à une inductance ou une capacitance.

En premier, on analyse les circuits pour trouver la réponse naturelle.

5.4.1 Réponse naturelle d'un circuit RL

Pour faire l'analyse et trouver la réponse naturelle d'un circuit RL, on utilise le circuit de la figure 5.4. La source de courant produit un courant constant, et avant l'analyse ($t < 0$), l'interrupteur est fermé depuis longtemps. Ceci veut dire que les tensions et courants ont atteint des valeurs constantes.

On a vu qu'une inductance qui est traversée par un courant constant aura une tension nulle à ses bornes. En d'autres mots, l'inductance se comporte comme un court-circuit. Ce qui veut dire, que pour $t = 0^-$ (juste avant d'ouvrir l'interrupteur), tout le courant de la source traverse l'inductance. Il n'y a pas de courant dans R_0 ou R, puisque la tension à leur bornes est 0, puisqu'ils sont en parallèle avec l'inductance.

En résumé, pour $t = 0^-$:

$$i_L = I_s$$
$$v_L = 0$$

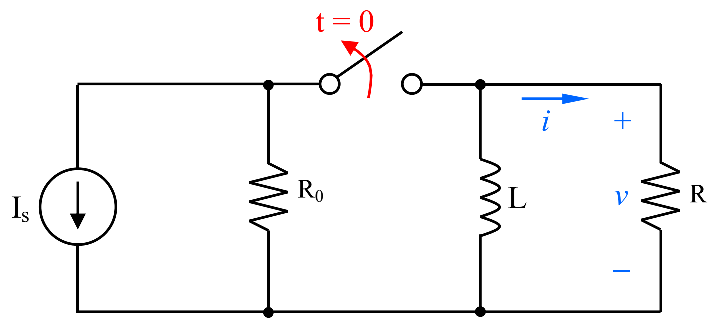


Figure 5.4 – Circuit RL

À $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. Le circuit est maintenant donné à la figure 5.5.

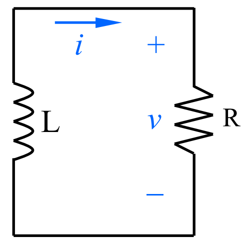


Figure 5.5 – Circuit RL, après l'ouverture de l'interrupteur

Pour calculer l'équation du courant, on applique la loi de Kirchhoff des tensions à la boucle. On obtient :

$$v_L + v_R = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{5.20}$$

ce qui est une équation différentielle de premier ordre.

On réarrange l'équation pour solutionner :

$$L\frac{di}{dt} = -Ri \tag{5.21}$$

ou bien,

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \tag{5.22}$$

On intègre de chaque côté,

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\int_{t_0}^{t} \frac{R}{L}dt \tag{5.23}$$

ce qui donne :

$$\ln\left(\frac{i(t)}{i(0)}\right) = -\frac{R}{L}t \tag{5.24}$$

et finalement,

$$i(t) = i(0)e^{-(R/L)t} \tag{5.25}$$

Rappel : le courant dans une inductance ne peut pas changer instantanément. Alors,

$$i(0^+) = i(0^-) = I_s$$

Donc, l'équation du courant devient :

$$i(t) = I_s e^{-(R/L)t} \tag{5.26}$$

Le graphe du courant est donné à la figure 5.6

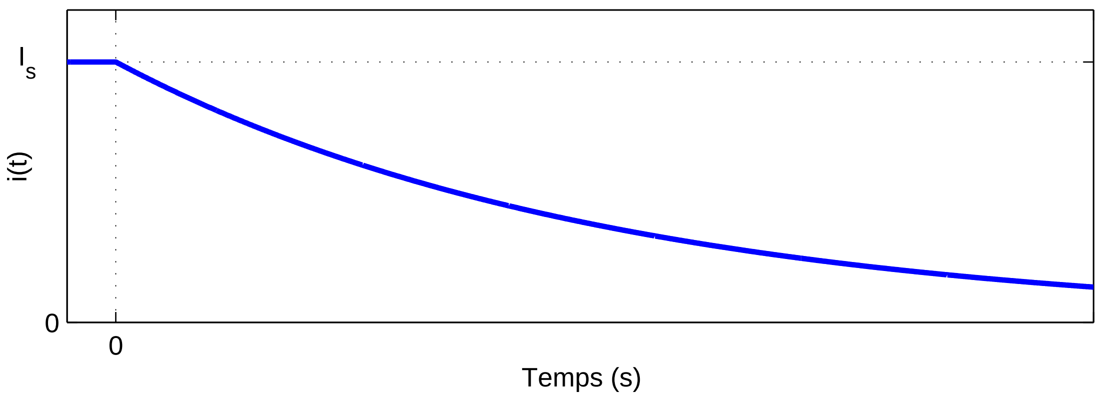


Figure 5.6 – Réponse naturelle d'un circuit RL (courant)

La tension aux bornes de l'inductance est :

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_s R e^{-(R/L)t} & t > 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

À $t = 0$, il y a un changement instantané de tension aux bornes de l'inductance.

La puissance dissipée dans la résistance est :

$$p = vi = Ri^2 = I_s^2 R e^{-2(R/L)t}, \quad t \geq 0^+ \tag{5.28}$$

L'énergie dissipée dans la résistance est :

$$w = \int_0^t p\, dx = \frac{1}{2} L I_s^2 \left(1 - e^{-2(R/L)t}\right), \quad t \geq 0^+ \tag{5.29}$$

5.4.2 Constante de temps

L'équation du courant (équation 5.26) possède le terme $e^{-(R/L)t}$. Le rapport R/L détermine le taux avec lequel le courant s'approche de zéro. Le réciproque de ce taux, L/R, est la *constante de temps* du circuit :

$$\tau = \text{constante de temps} = \frac{L}{R} \tag{5.30}$$

On peut donc réécrire l'équation du courant sous une autre forme,

$$i(t) = I_s e^{-t/\tau} \tag{5.31}$$

La constante de temps est un paramètre important des circuits RL et RC. Elle permet de rapidement déterminer si un circuit a atteint un régime permanent (une valeur stable). Par exemple, après une constante de temps, le courant a diminué à e^{-1} de sa valeur initiale, ou 0.37.

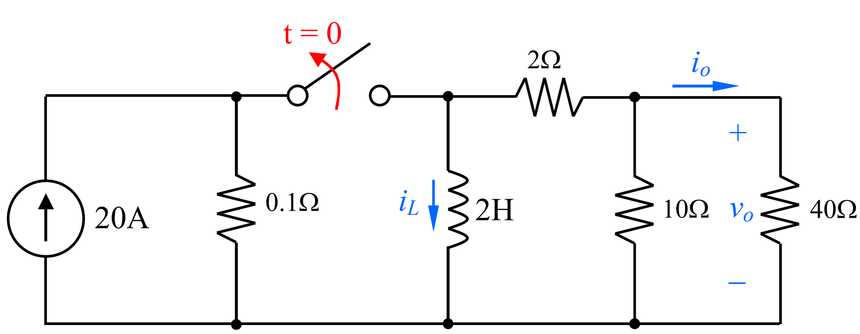
Après cinq constantes de temps, le courant a diminué à e^{-5}, ou 0.007 (0.7%) de sa valeur initiale. À ce moment, on peut dire que le courant est rendu à une valeur stable : le circuit est en *régime permanent*. Lorsqu'on dit qu'un circuit est à une certaine position depuis longtemps, il y a eu au moins cinq constantes de temps.

On nomme le *régime transitoire* le temps pendant lequel les valeurs (tensions et courants) du circuit varient encore : c'est donc pour moins de cinq constantes de temps. Pour plus de cinq constantes de temps, le circuit est en régime permanent.

La constante de temps peut même être déterminée de façon pratique, en mesurant le taux de variation de la réponse naturelle d'un circuit.

EXEMPLE 5

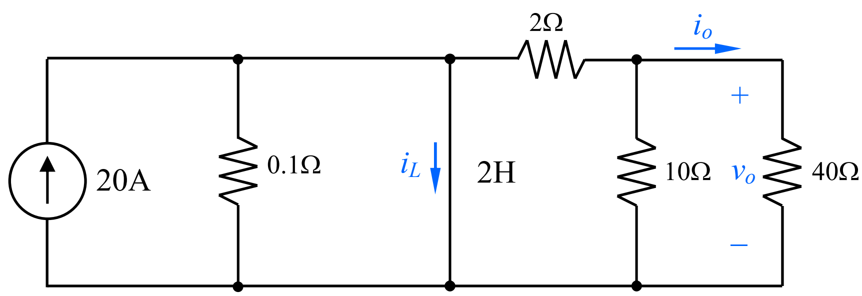
Pour le circuit suivant, l'interrupteur est à la position fermée depuis longtemps. À $t = 0$, on ouvre l'interrupteur.



1. Calculer $i_L(t)$, pour $t \geq 0$.
2. Calculer $i_o(t)$, pour $t \geq 0^+$.
3. Calculer $v_o(t)$, pour $t \geq 0^+$.
4. Le pourcentage de l'énergie totale emmagasinée dans l'inductance qui est dissipée dans la résistance de 10Ω.

---

1. On doit calculer les valeurs de courant et tension dans l'inductance pour $t = 0^-$, juste avant d'ouvrir l'interrupteur. Le circuit pour $t = 0^-$ est le suivant (rappel que l'inductance est un court-circuit) :

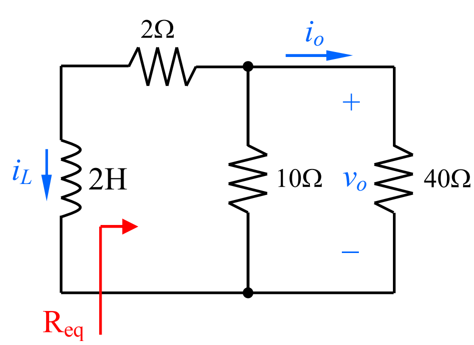


La tension aux bornes de l'inductance est nulle, et donc tout le courant de la source traverse l'inductance :

$$i_L(0^-) = 20\text{A}$$

Et puisque dans une inductance, il ne peut pas y avoir de changement instantané de courant, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 20\text{A}$.

Pour calculer la constante de temps, il faut remplacer le réseau de résistances par une résistance équivalente. Le circuit pour $t = 0^+$ est le suivant :



La résistance équivalente est :

$$R_{eq} = 2 + (40\|10) = 10\Omega$$

La constante de temps est :

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0.2\text{s}$$

Pour un circuit RL, l'expression du courant est donnée par l'équation 5.31, et on obtient :

$$i_L(t) = 20e^{-5t}\ \text{A}, \qquad t \geq 0$$

2. Pour calculer i_o, on utilise un diviseur de courant :

$$i_o = -\frac{10}{10+40} i_L(t) = -4e^{-5t}\ \text{A}, \qquad t \geq 0^+$$

Cette expression n'est valide que pour $t \geq 0^+$ parce qu'il n'y a pas de courant avant que l'interrupteur soit ouvert. La résistance aura donc un changement instantané de courant.

3. On obtient la tension v_0 en appliquant la loi d'Ohm :

$$v_o = 40 i_o = -160e^{-5t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0^+$$

4. La puissance dissipée dans la résistance de 10Ω est :

$$p_{10\Omega}(t) = \frac{v_o^2}{10} = 2560e^{-10t}\ \text{W}, \qquad t \geq 0^+$$

Ce qui veut dire que l'énergie totale dissipée dans la résistance est :

$$w_{10\Omega}(t) = \int_0^\infty 2560e^{-10t}\, dt = 256\ \text{J}$$

L'énergie initiale dans l'inductance est :

$$w_L(0) = \frac{1}{2} L i_L^2(0) = \frac{1}{2}(2)(20)^2 = 400\ \text{J}$$

Et donc le rapport est :

$$\frac{256}{400} = 0.64 = 64\%$$

5.4.3 Réponse naturelle d'un circuit RC

La réponse naturelle d'un circuit RC est semblable à celle d'un circuit RL. Le circuit RC de base est donné à la figure 5.7.

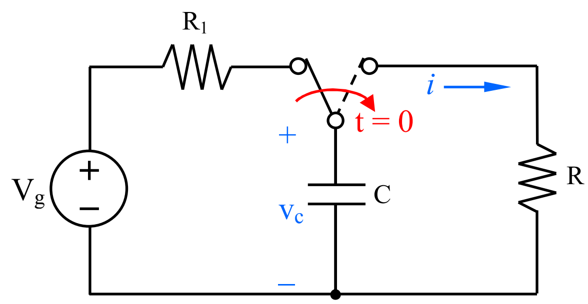


Figure 5.7 – Circuit RC

L'interrupteur est à sa position initiale depuis longtemps. Le condensateur se comporte alors comme un circuit ouvert : la tension aux bornes du condensateur, avant que l'interrupteur change de position, est la même que la tension de la source. Et puisque le condensateur agit comme circuit ouvert, le courant est nul.

Pour $t = 0^-$:

$$i_C = 0$$
$$v_C = V_g$$

À $t = 0$, l'interrupteur change de position. Le circuit est maintenant donné à la figure 5.8.

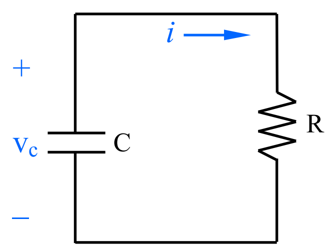


Figure 5.8 – Circuit RC, après le changement de l'interrupteur

On fait la somme des courants au noeud supérieur :

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \tag{5.32}$$

On utilise la même technique que celle utilisée pour le circuit RL, et on obtient :

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC}, \qquad t \geq 0 \tag{5.33}$$

On peut simplifier cette équation à l'aide de deux observations :

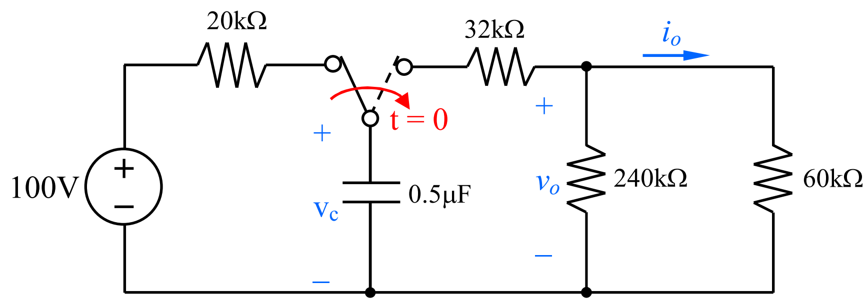
$$v(0) = v(0^+) = v(0^-) = V_g = V_0 \tag{5.34}$$
$$\tau = RC \tag{5.35}$$

et donc,

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \qquad t \geq 0 \tag{5.36}$$

Exemple 6

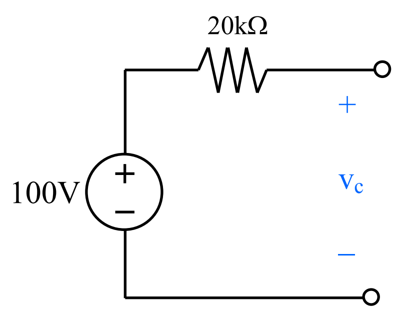
Pour le circuit suivant, l'interrupteur est à la position initiale depuis longtemps. À $t = 0$, on commute l'interrupteur.



1. Calculer $v_C(t)$, pour $t \geq 0$.
2. Calculer $v_o(t)$, pour $t \geq 0^+$.
3. Calculer $i_o(t)$, pour $t \geq 0^+$.
4. L'énergie dissipée dans la résistance de 60kΩ.

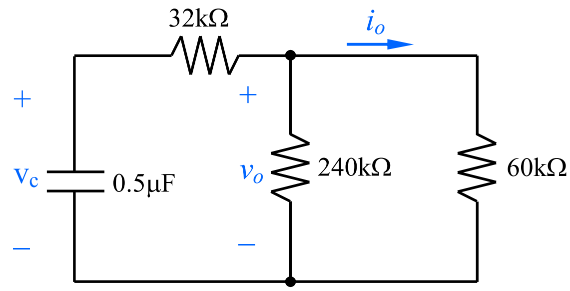
---

1. On calcule en premier les valeurs pour $t < 0$. Le circuit pour $t = 0^-$ est :



La tension aux bornes du condensateur à $t = 0^-$ est $v_C(0^-) = 100$V. Pour une capacitance, c'est aussi la tension à $t = 0^+$.

Pour calculer la constante de temps, il faut trouver la résistance équivalente. On utilise le circuit à $t = 0^+$:



La résistance équivalente est :

$$R_{eq} = 32 + (240\|60) = 80\text{k}\Omega$$

La constante de temps est :

$$\tau = RC = (80 \times 10^3)(0.5 \times 10^{-6}) = 0.04\text{s}$$

L'équation de la tension est :

$$v_C(t) = 100e^{-25t}\text{ V}, \qquad t \geq 0$$

2. Pour calculer $v_o(t)$, on utilise un diviseur de tension.

$$v_o(t) = \frac{240\|60}{32 + 240\|60} v_C(t) = 60e^{-25t}\text{ V}, \qquad t \geq 0^+$$

Cette dernière équation n'est valide que pour $t \geq 0^+$, puisque la tension aux bornes de la résistance à $t = 0^-$ est 0. Il y a un changement instantané dans la tension.

3. On calcule le courant à l'aide de la loi d'Ohm.

$$i_o(t) = \frac{v_o(t)}{60 \times 10^3} = e^{-25t}\text{ mA}, \qquad t \geq 0^+$$

4. La puissance dissipée dans la résistance de 60kΩ est :

$$p_{60k}(t) = Ri^2 = (60 \times 10^3)i^2 = 60e^{-50t}\text{ mW}, \qquad t \geq 0^+$$

et l'énergie totale :

$$w_{60k} = \int_0^\infty p(t)\,dt = 1.2\text{ mJ}$$

5.5 Réponse échelon des circuits RL et RC

La réponse échelon représente le comportement des circuits RL ou RC lorsqu'on applique soudainement une source de tension ou de courant au circuit. Ce genre d'analyse est très importante dans le calcul du délai des circuits intégrés.

5.5.1 Réponse échelon d'un circuit RL

Le circuit utilisé pour illustrer le comportement d'un circuit RL lorsqu'on applique soudainement une source de tension est donné à la figure 5.9.

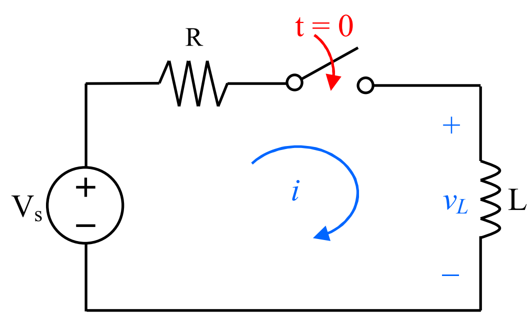


FIGURE 5.9 – Circuit RL, où on applique soudainement une source

Il est important de spécifier que l'inductance pourrait avoir un courant initial I_0 non nul, qui proviendrait d'un autre circuit.

On cherche l'équation de la tension dans l'inductance et le courant du circuit pour $t > 0$. On applique la loi de Kirchhoff des tensions à la boucle.

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{5.37}$$

On peut résoudre cette équation différentielle en isolant i d'un côté et t de l'autre. La solution est :

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t} \tag{5.38}$$

Cette équation indique que le courant initial à $t = 0$ est I_0, et que le courant final est V_s/R, ce qui fait du sens, puisque l'inductance se comportera alors comme un court-circuit.

La tension aux bornes de l'inductance est $L\frac{di}{dt}$:

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} = (V_s - I_0R)e^{-t/\tau}, \qquad t \geq 0^+ \tag{5.39}$$

Est-ce que la valeur de v_L à $t = 0^+$ fait du sens ?

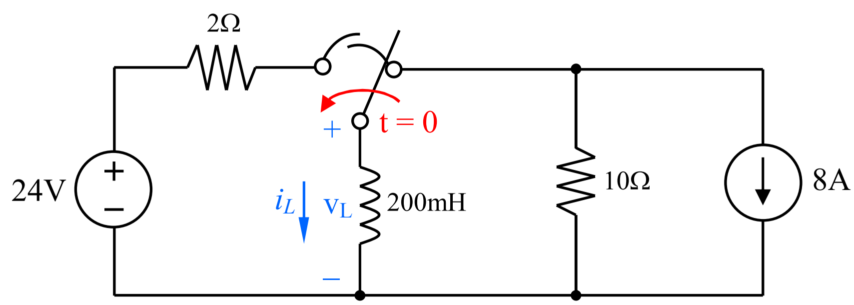
À $t = 0^+$, le courant dans le circuit est I_0. En appliquant la loi des tensions de Kirchhoff, on obtient :

$$-V_s + RI_0 + v_L = 0 \quad \text{ou} \quad v_L = V_s - RI_0 \tag{5.40}$$

ce qui est la même chose que ce qu'on obtient par l'équation 5.39 à $t = 0$.

EXEMPLE 7

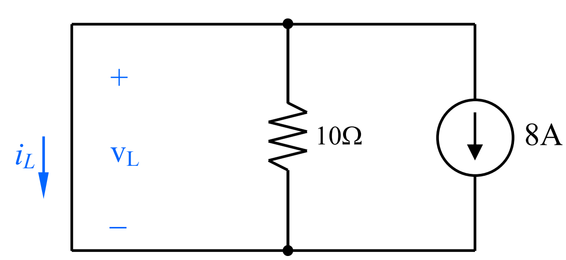
Pour le circuit suivant, l'interrupteur est à la position initiale depuis longtemps. À $t = 0$, on commute l'interrupteur.



1. Calculer $i_L(t)$, pour $t \geq 0$.
2. Calculer $v_L(0^+)$.
3. Est-ce que cette tension fait du sens ?
4. À quel temps la tension de l'inductance sera-t-elle 24V ?

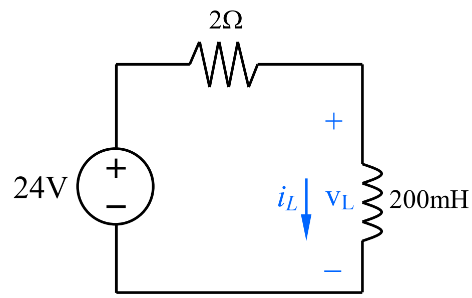
---

1. La première chose à faire est d'analyser le circuit pour $t = 0^-$.



L'inductance se comporte comme un court-circuit, et donc le courant initial est $I_0 = -8$A.

Le circuit pour $t = 0^+$ est :



La constante de temps est :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

En appliquant l'équation 5.38, on obtient :

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t} \\ &= 12 + (-8 - 12)e^{-10t} \\ &= 12 - 20e^{-10t} \text{ A}, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

2. La tension v_L est :

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} = 40e^{-10t} \text{ V}, \qquad t \geq 0^+$$

Donc $v_L(0^+) = 40$V.

3. À $t = 0^+$, l'inductance fournit un courant de 8A dans le sens anti-horaire (dans le circuit de gauche). Il y a donc une chute de tension de (8)(2) = 16V dans la résistance. Si on additionne la chute de tension dans la source, on obtient $16 + 24 = 40$V.

4. On cherche le temps où $v_L = 24$V. On a :

$$24 = 40e^{-10t} \Rightarrow t = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{40}{24}\right) = 51.08 \text{ ms}$$

À ce moment-là, la tension aux bornes de l'inductance est égale à la tension aux bornes de la source. Le courant est donc nul (on peut vérifier en plaçant cette valeur de t dans l'équation de $i_L(t)$).

5.5.2 Réponse échelon d'un circuit RC

On utilise le circuit de la figure 5.10 pour analyser la réponse échelon d'un circuit RC. Noter que la tension initiale $v(0^-)$ aux bornes du condensateur peut être non nulle.

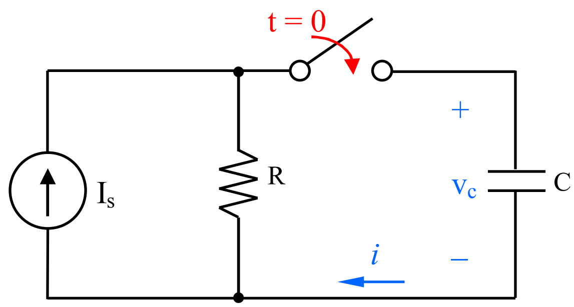


FIGURE 5.10 – Circuit RC, où on applique soudainement une source

On fait la somme des courants au noeud supérieur, après avoir fermé l'interrupteur :

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_c}{R} = I_s \tag{5.41}$$

On peut résoudre cette équation différentielle pour obtenir :

$$v_C(t) = RI_s + (V_0 - RI_s)e^{-t/(RC)}, \qquad t \geq 0 \tag{5.42}$$

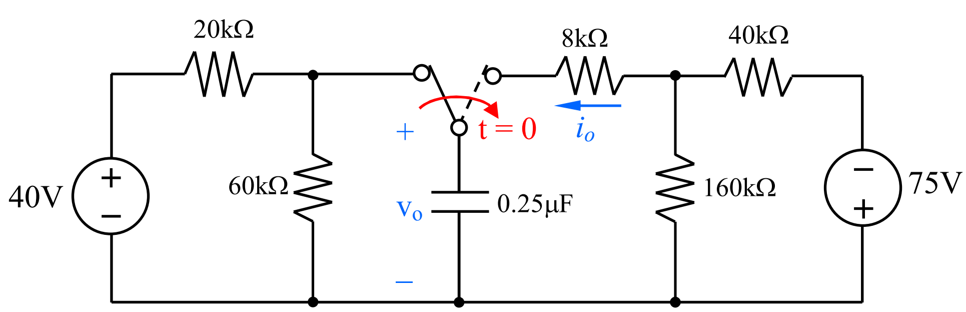
où $V_0 = v(0^+) = v(0^-)$.

Le courant dans la capacitance est :

$$i_C = C\frac{dv_C(t)}{dt} = \left(I_s - \frac{V_0}{R}\right)e^{-t/RC}, \qquad t \geq 0^+ \tag{5.43}$$

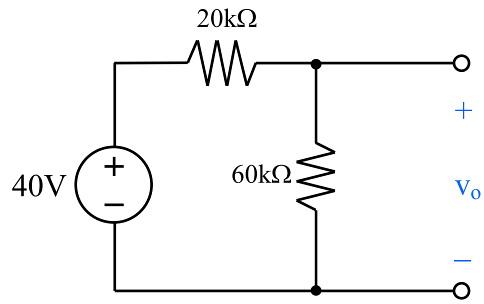
EXEMPLE 8

Pour le circuit suivant, l'interrupteur est à la position initiale depuis longtemps. À $t = 0$, on commute l'interrupteur.



1. Calculer $v_o(t)$, pour $t \geq 0$.
2. Calculer $i_o(t)$, pour $t \geq 0^+$.

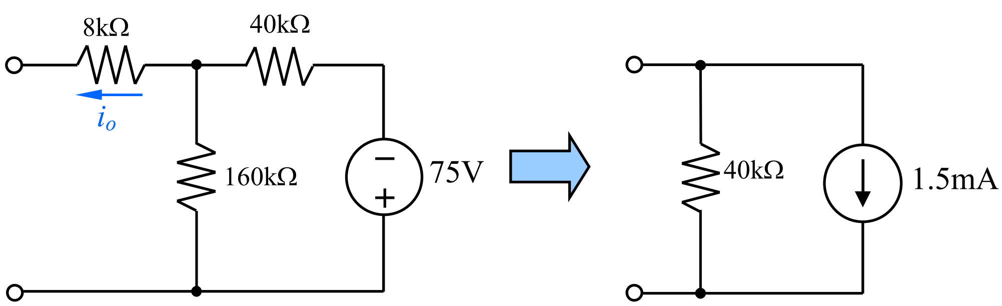
1. On analyse en premier le circuit à $t = 0^-$. Le circuit à $t = 0^-$ est :



La tension initiale du condensateur est :

$$v_C(0^-) = \frac{60}{60+20}(40) = 30\text{ V} = v_C(0^+)$$

On analyse maintenant le circuit pour $t \geq 0^+$. On doit transformer la partie de droite du circuit à un circuit équivalent Norton afin de pouvoir appliquer les équations développées auparavant.



La tension v_{TH} de circuit ouvert est donnée par :

$$v_{TH} = \frac{160}{40+160}(-75) = -60\text{ V}$$

La résistance Thévenin (Norton) est :

$$R_{TH} = 8 + 40||160 = 40\text{ k}\Omega$$

Le courant Norton est donc :

$$i_N = \frac{v_{TH}}{R_{TH}} = -1.5\text{ mA}$$

Après cette simplification du circuit, on peut appliquer les équations développées auparavant. La constante de temps est $\tau = RC = 0.01$s.

$$\begin{aligned} v_C(t) &= RI_s + (V_0 - RI_s)e^{-t/(RC)} \\ &= (40\times 10^3)(-0.0015) + (30 - (40\times 10^3)(-0.0015))e^{-100t}, \qquad t \geq 0 \\ &= -60 + 90e^{-100t}\text{ V}, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

2. L'équation du courant est obtenue en appliquant directement l'équation 5.12.

$$i_o = i_C = -2.25e^{-100t} \text{ mA}, \qquad t \geq 0^+$$

5.6 Réponse générale des circuits RL et RC

Si on analyse de plus près équations du courant du circuit RL et de la tension du circuit RC, on s'aperçoit que les équations sont de la même forme :

$$x(t) = x_f + [x(t_0) - x_f]e^{-t/\tau} \tag{5.44}$$

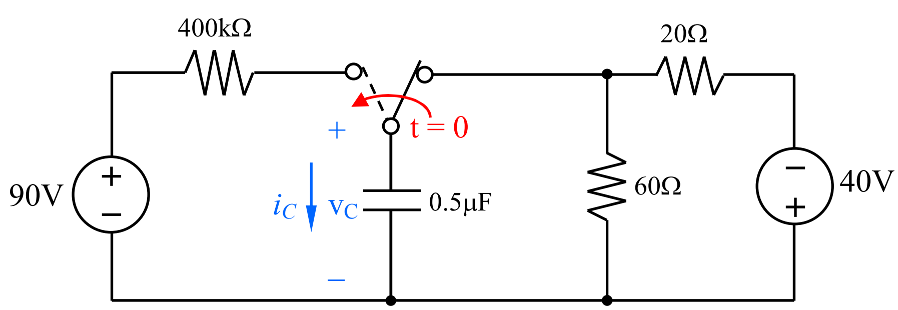
où x est la variable d'intérêt, x_f est la valeur finale ($t > 5\tau$) et $x(t_0)$ est la valeur initiale.

La procédure générale de résolution des circuits RL et RC est la suivante :

1. Identifier la variable d'intérêt du circuit. Pour un circuit RL, le plus facile est le courant dans l'inductance ; pour un circuit RC, le plus facile est la tension aux bornes de la capacitance.
2. Déterminer la valeur initiale de la variable d'intérêt.
3. Calculer la valeur finale de la variable d'intérêt.
4. Déterminer la constante de temps du circuit.

Exemple 9

Pour le circuit suivant, l'interrupteur est à la position initiale depuis longtemps. À $t = 0$, on commute l'interrupteur.

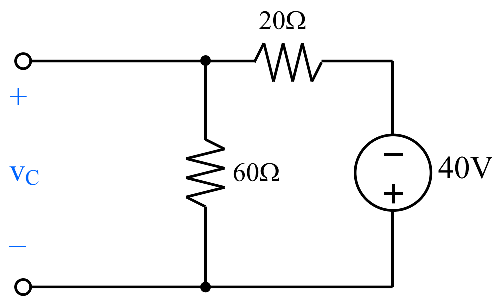


1. Calculer la valeur initiale de v_C.
2. Calculer la valeur finale de v_C.
3. Calculer la constante de temps du circuit, lorsque l'interrupteur est commuté.
4. Donner l'expression de $v_C(t)$ pour $t \geq 0$.
5. Donner l'expression de $i_C(t)$ pour $t \geq 0^+$.
6. À quel temps $v_C(t)$ devient-il 0 ?

7. Tracer le graphe de $v_C(t)$ et $i_C(t)$.

---

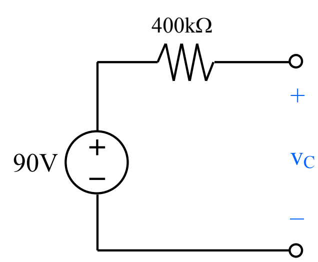
1. Pour $t < 0$, la capacitance se comporte comme un circuit ouvert. Le circuit est le suivant :



La tension à ses bornes est donc la même tension que celle aux bornes de la résistance de 60Ω.

$$v_C(0^-) = \frac{60}{20+60}(-40) = -30 \text{ V} = v_C(0^+)$$

2. La valeur finale de la tension aux bornes du condensateur est la tension de la source de 90V, puisque le condensateur se comportera comme un circuit ouvert. Le circuit à $t = \infty$ est :



ce qui donne :

$$v_C(\infty) = 90 \text{ V} = v_f$$

3. La constante de temps est :

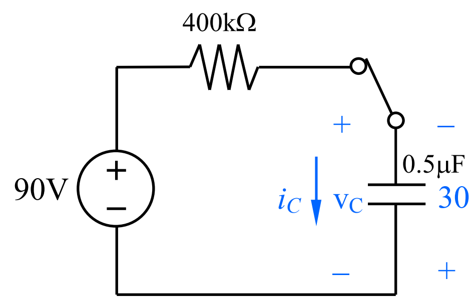
$$\tau = RC = 0.2 \text{ s}$$

4. On a toutes les données nécessaires pour obtenir l'expression de $v_C(t)$:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_f + [v(t_0) - v_f]e^{-t/\tau} \\ &= 90 + [-30 - 90]e^{-t/0.2} \\ &= 90 - 120e^{-5t} \text{ V}, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

5. On va appliquer la méthode générale pour calculer $i_C(t)$: il faut $i_C(0^+)$ et $i_C(\infty)$. Le courant final $i_C(\infty)$ est facile à calculer : la capacitance, à $t = \infty$, se comporte comme un circuit ouvert, et donc le courant $i_C(\infty) = 0$.

Pour calculer $i_C(0^+)$, on calcule le courant dans la résistance (dans le circuit suivant), à $t = 0^+$. Il ne faut pas oublier que la tension initiale aux bornes du condensateur est −30V.



La tension aux bornes de la résistance est 90 − (−30) = 120V. Le courant est donc :

$$i(0^+) = \frac{120}{400 \times 10^3} = 0.3 \text{ mA}$$

On applique la même équation générale (équation 5.44) :

$$\begin{aligned} i_C(t) &= i_f + [i(t_0) - i_f]e^{-t/\tau} \\ &= 0 + [0.3 - 0]e^{-t/0.2} \\ &= 0.3e^{-5t} \text{ mA}, \qquad t \geq 0^+ \end{aligned}$$

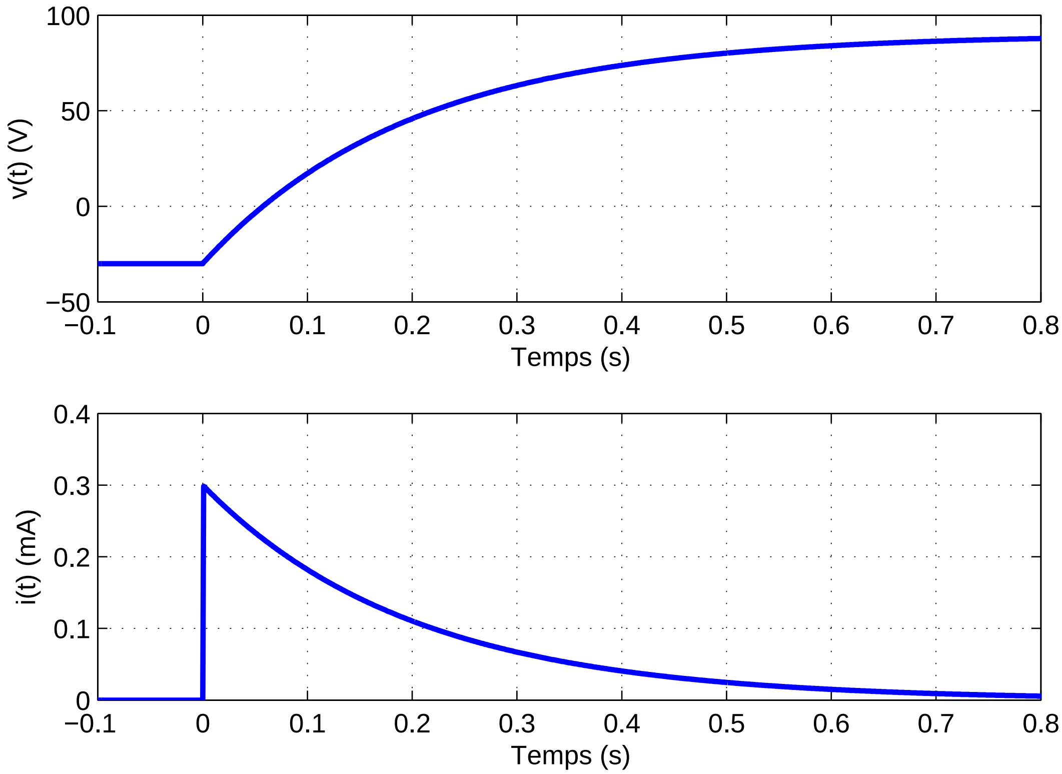
On obtiendrait la même solution en appliquant la dérivée $i = C\frac{dv}{dt}$.

6. Pour calculer le temps où $v_C(t) = 0$, on utilise l'équation de $v_C(t)$:

$$v_C(t) = 90 - 120e^{-5t} = 0$$

qu'on solutionne pour trouver $t = 57.45$ms.

7. Les graphes sont les suivants :



5.7 Résumé

Le tableau 5.1 résume les équations principales des circuits RL et RC.

Circuits RL	Circuits RC
$v_L = L\dfrac{di}{dt}$	$i_C = C\dfrac{dv}{dt}$
$i_L(0^-) = i_L(0^+)$	$v_C(0^-) = v_C(0^+)$
$\tau = \dfrac{L}{R_{eq}}$	$\tau = R_{eq}C$
R_{eq} est R_{TH} vue par l'élément	
$x(t) = x_f + (x(0) - x_f)e^{-t/\tau}$	

Table 5.1 – Résumé bref des équations