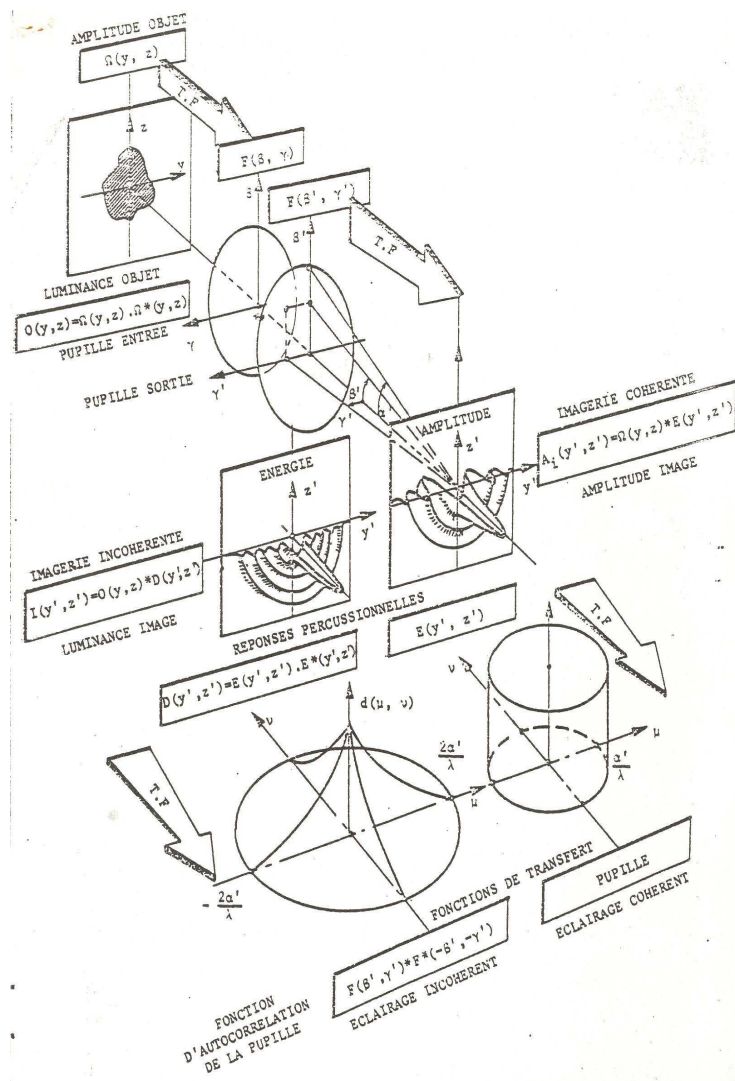


PHR 101

"Principes et outils pour l'analyse et la mesure"

Chapitre 9

Densité spectrale de puissance Convolution - Spectroscopie



9. Densité spectrale ou puissance – convolution - spectroscopie

9.1. Puissance du signal

Soit un signal quelconque, pouvant être complexe (il pourra s'agir, par exemple, d'un champ électrique complexe, dont l'amplitude et la phase sont fonction du temps).

On appelle puissance instantanée du signal la quantité

$$p(t) = f(t) f^*(t) \quad (267)$$

Lorsque la variable est le temps t , et lorsque f est un courant ou une tension, cette dénomination est explicite.

La puissance moyenne sur un intervalle T est définie par

$$P(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) f^*(t) dt \quad (268)$$

L'intégrale de la puissance instantanée est l'énergie associée au signal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt \quad (269)$$

Si le signal est nul en dehors de l'intervalle T , l'intégrale converge en général sans problème. Si ce n'est pas le cas, le signal peut présenter une énergie infinie, alors que sa puissance moyenne est finie.

Par exemple le signal

$$f(t) = \cos_2 \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \quad (270)$$

a pour puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \quad (271)$$

alors que son énergie est infinie.

$$\langle P \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) f^*(t) dt \quad (272)$$

Bien que les termes "énergie" et "puissance" ne correspondent à une signification physique classique que pour des signaux dépendant du temps, leur emploi, conformément aux définitions ci-dessus, est tout à fait général.

9.2. Spectre de puissance d'un signal

Signal à énergie finie. Si $f(t)$ est le signal, sa transformée de Fourier $F(\nu)$ peut être calculée, et la quantité

$$S(\nu) = F(\nu) F^*(\nu) = |F(\nu)|^2 \quad (273)$$

déjà définie comme **la densité spectrale** de $f(t)$, est également appelée **spectre de puissance de $f(t)$** . En analyse dimensionnelle, $S(\nu)$ est une énergie par intervalle de fréquence (densité spectrale énergétique) et non une puissance. La dénomination de **puissance spectrale** ou **Densité Spectrale de Puissance** (DSP) est néanmoins consacrée par l'usage.

L'énergie totale du signal est évidemment

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) d\nu \quad (274)$$

Signal à énergie infinie. Dans ce cas $F(\nu)$ ne peut être calculée. Néanmoins, la fonction d'autocorrélation de $f(t)$ peut exister et a pour expression :

$$R(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (275)$$

or, on montre que **la fonction d'onde d'autocorrélation $R(t)$ et la DSP $S(\nu)$ sont liées par une transformée de Fourier, c'est le théorème de Wiener-Khintchine :**

$$S(\nu) = \text{TF} [R(t)] \quad (276)$$

ici, au sens de l'analyse dimensionnelle et par cohérence avec les définitions précédentes. $S(\nu)$ est une énergie, soit encore une puissance par intervalle de fréquence, et le terme de **densité spectrale de puissance** est approprié. Par exemple, s'agissant d'un signal sous forme de tension électrique $V(t)$, la DSP se mesurera en $V^2 \text{ Hz}^{-1}$, et le spectre de d'amplitude en $V \text{ Hz}^{-1/2}$.

9.3. Filtrage et convolution

Supposons que nous connaissions la réponse $r(t)$ à une excitation unitaire et impulsionnelle $U\delta(t)$, U représentant l'unité de la grandeur excitation, et $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac centrée en $t = 0$. On montre à partir des propriétés de linéarité et de stationnarité du système que la réponse $s(t)$, que nous appellerons le signal, à une excitation quelconque $e(t)$ est :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) r(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t - \tau)r(\tau) d\tau = e(t) * r(t) \quad (277)$$

où $e(t) * r(t)$ représente le **produit de convolution de l'excitation** $e(t)$ par la réponse impulsionnelle $r(t)$. Ce produit est commutatif, comme le montrent les règles du calcul intégral aussi bien qu'un raisonnement physique sur les propriétés de linéarité et de stationnarité du système.

Le **théorème de Plancherel**, capital en traitement du signal et en instrumentation, permet d'écrire la relation (277) sous la forme suivante :

$$S(v) = E(v) \cdot R(v) \quad (278)$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit simple des transformées de Fourier des facteurs de ce produit.

Le **produit de convolution** de l'excitation $e(t)$ par la réponse impulsionnelle $r(t)$ se traduira essentiellement par un effet d'intégration sur les variations de $e(t)$ comprises sur un intervalle de temps inférieur ou égal à la largeur δt de la réponse impulsionnelle. Cet effet est essentiellement une atténuation des variations plus rapides qu'une certaine fréquence ν_M appelée fréquence de coupure et peu différente de $1/\delta t$. C'est une atténuation dans le spectre $E(v)$ de l'excitation $e(t)$ des fréquences ν plus grandes que la fréquence de coupure ν_M , atténuation se traduisant par une perte de pouvoir de résolution temporel dans le signal.

Le spectre du signal est multiplié par la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle appelée **fonction de transfert** du dispositif.

Cette technique est utilisée pour sélectionner des bandes de fréquence dans le signal $s(t)$. Par exemple, elle sert à éliminer les fréquences de bruit autres que celles contenues dans le signal. C'est un filtrage. Il existe plusieurs manières de définir la largeur temporelle Δt de $e(t)$ et la largeur fréquentielle Δv de $E(v)$, de même pour les limites de résolution temporelle δt et fréquentielle δv . Mais, quelle que soit la définition choisie, les mathématiques nous disent que les produits $\Delta t \cdot \delta v$ et $\delta t \cdot \delta v$ ne peuvent être inférieurs à une certaine valeur. Avec les fonctions physiques rencontrées par l'expérimentateur, cette valeur est de l'ordre de l'unité. Il s'agit là d'une relation très fondamentale, d'où sont issus les **principes d'incertitude**, et en particulier le principe d'incertitude temps et fréquence.

Transformation de Fourier et spectroscopie

Dans les trente dernières années, le terme Transformation de Fourier est apparu successivement dans la dénomination de trois techniques différentes d'analyse de la matière : la **spectrométrie optique infrarouge**, la **résonance magnétique nucléaire** et la **spectrométrie de masse**. Cette démarche n'est pas fortuite. Elle repose sur le concept fondamental suivant : les phénomènes physiques que l'on observe sont souvent caractérisés par une variable aléatoire stationnaire $X(t)$ d'ordre 2 (par exemple, le champ électromagnétique) et nous sommes intéressés par les valeurs certaines qui les caractérisent, en particulier leur valeur moyenne et leur spectre de puissance.

Or, dans ce cas, le **théorème de Wiener-Khintchine** montre que ce spectre n'est autre que la transformée de Fourier en cosinus de la partie paire de la fonction d'autocorrélation $R(t)$ de la variable aléatoire :

$$E(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t) \cos 2\pi\nu t \, dt \quad (279)$$

A partir de là, deux voies sont possibles :

- l'une consiste à employer des méthodes dites classiques avec des instruments qui réalisent eux-mêmes l'opération et dispersent le spectre qu'il faut ensuite explorer séquentiellement avec un récepteur ;
- l'autre revient à enregistrer la fonction d'autocorrélation $R(t)$ et à en effectuer la transformation de Fourier a posteriori, par exemple numériquement.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser la relation entre la fonction de corrélation temporelle liée à l'émission spontanée d'un photon pour en déduire sa densité spectrale de puissance.

9.4. Probabilité de présence du photon et courbe de Lorentz

Si nous savons qu'un atome est excité à l'instant zéro, la probabilité pour que nous observions l'émission du photon à l'instant t varie comme $e^{-t/\tau}$. Cette probabilité est donc proportionnelle au carré de l'amplitude du train d'onde classique :

$$E_0^2 = a^2 e^{-t/\tau} \quad (279)$$

Compte tenu de l'interprétation probabiliste de l'onde, le train d'onde amorti de l'électromagnétisme classique décrit correctement le comportement du photon d'émission spontanée : et nous pouvons associer à ce photon la fonction d'onde :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cdot e^{j\omega_0 t}, \text{ avec l'amplitude } \begin{cases} \mathcal{E}_0(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ \mathcal{E}_0(t) = a e^{-t/2\tau} \text{ pour } t > 0 \end{cases} \quad (280)$$

Cette fonction $\mathcal{E}(t)$ n'est pas une véritable fonction harmonique puisque son amplitude dépend du temps ; et nous devons, comme dans le chapitre 7, rechercher sa décomposition spectrale en fonctions harmoniques à l'aide de la transformation de Fourier. Nous effectuons donc le calcul de l'amplitude complexe $A(\omega)$ dans ce nouveau cas : (on introduit un facteur $1/2\pi$ pour des raisons de normalisation de la probabilité de présence)

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_0(t) e^{j(\omega_0 - \omega)t} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} a e^{[j(\omega_0 - \omega) - (1/2\tau)]t} \, dt \quad (281)$$

$$= \frac{a}{2\pi} \frac{-1}{j(\omega_0 - \omega) - (1/2\tau)} \quad (282)$$

La probabilité de présence des photons est proportionnelle au carré du module de l'amplitude complexe :

$$|A(\omega)|^2 = A(\omega) A^*(\omega) = \frac{a^2}{4\pi^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (1/4\tau^2)} = \frac{a^2}{4\pi^2} \frac{1}{\delta\omega^2 + (1/4\tau^2)} \quad (283)$$

La variation de $|A|^2$ en fonction de l'écart $\delta\omega = \omega - \omega_0$ est représentée par une courbe fréquemment appelée courbe de Lorentz (figure n°88). $|A|^2$ passe par un maximum lorsque $\delta\omega = 0$, et ne vaut plus que la moitié de ce maximum lorsque l'écart $\delta\omega = 1/2 \tau$. Le double de cet écart, soit la quantité $\Delta\omega = 1/\tau$, constitue la largeur à mi-hauteur de la courbe ; cet écart lui-même est parfois appelé la demi-largeur à mi-hauteur.

Remarque 1. On se méfiera cependant de ces appellations. Certains auteurs utilisent la locution "demi-largeur" comme un raccourci signifiant en fait la largeur à mi-hauteur.

Remarque 2. Si l'on veut normaliser la probabilité, on se rappellera que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + 1/4\tau^2} = 2\pi\tau \quad (284)$$

Remarque 3. On notera les deux tangentes à mi-hauteur qui se croisent au sommet et qui caractérisent bien la forme de la courbe de Lorentz.

Ce calcul nous conduit, là encore, à une incertitude sur la pulsation ω et nous en tirerons les conclusions dans deux directions distinctes :

a) En ce qui concerne les mesures de spectroscopie. Du fait de l'amortissement du train d'onde, la fréquence spectrale produite par l'émission spontanée des atomes est entachée d'une certaine imprécision. Il y a là une cause naturelle d'élargissement de raies spectrales, indépendante des conditions d'observation expérimentales. La largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ de la courbe de Lorentz (figure n°88) est encore appelée la largeur naturelle de la raie spectrale correspondante.

Cependant, dans les expériences courantes de spectroscopie, cette largeur naturelle reste négligeable devant la largeur Doppler due à l'agitation thermique des atomes et ce n'est pas elle qui limite la précision des mesures ; en effet, les durées de vie des niveaux d'énergie couramment observés sont rarement inférieures à la nanoseconde : $\tau \geq 10^{-9}$ seconde.

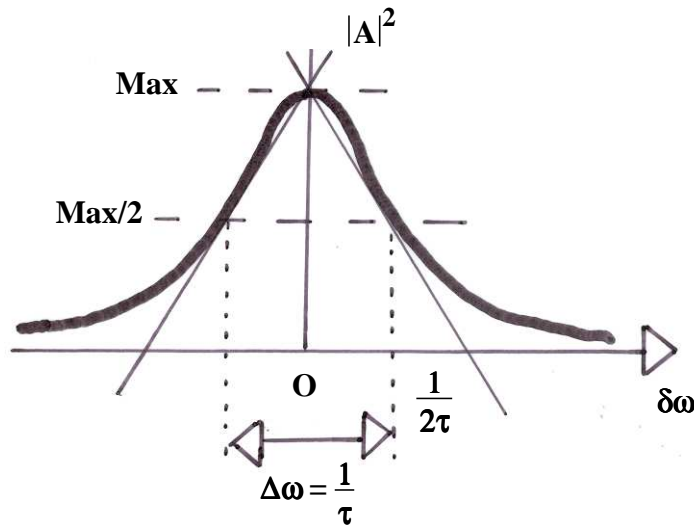


Figure 88 :

Décomposition spectrale du train d'onde amorti (courbe de Lorentz)

b) En ce qui concerne les caractéristiques des photons. Nous pouvons interpréter la courbe de la figure n°88 comme représentant la probabilité $|A|^2$ pour qu'un photon soit émis spontanément avec une énergie $W = W_0 + \hbar \delta\omega$; et nous notons que la dispersion des valeurs possibles de W sur un intervalle de l'ordre de grandeur $\Delta W = \hbar \Delta\omega = \frac{\hbar}{\tau}$. Bien que dans ce nouveau problème l'extension temporelle de l'onde soit théoriquement infinie, elle se trouve, en effet, pratiquement limitée à une durée de quelques τ . Ceci tient au fait que nous supposons connu l'instant d'excitation de l'atome, et que nous sommes ainsi capables de dater l'émission spontanée du photon avec une quasi-certitude à l'intérieur d'un intervalle de temps δt valant quelques τ (la probabilité, par exemple, pour que l'émission spontanée du photon se produise au-delà de la durée 10τ vaut $e^{-10} \approx 1/20\,000$; elle est tout à fait négligeable).

Et dans ce problème, l'incertitude δW sur l'énergie varie en raison inverse de l'incertitude δt avec laquelle nous sommes capables de dater le passage du photon : $\delta W \cdot \delta t \sim \hbar$.

Ce résultat est absolument général, et il ne dépend pas de la forme particulière du trains d'onde étudié. Un raisonnement qualitatif permet de comprendre pourquoi : la transformation de Fourier permet d'exprimer l'onde $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) e^{i\omega_0 t}$ à partir de fonctions harmoniques : $A(\omega) e^{i\omega t}$, dont la somme reconstitue donc une amplitude $\mathcal{E}_0(t)$ importante sur un intervalle de durée δt mais au contraire très faible en dehors de cet intervalle. Cela signifie que les relations de phase entre ces fonctions harmoniques conduisent à une interférence constructive au temps t_0 centre de l'intervalle de temps δt . Mais lorsque le temps croît à partir de t_0 , les différentes fonctions harmoniques de

fréquences différentes se déphasent les unes par rapport aux autres, et c'est ce qui conduit au bout d'un certain temps, à des interférences destructives donnant une amplitude ξ_0 très faible. Si la différence des pulsations entre deux de ces fonctions harmoniques vaut $\delta\omega$, elles se trouveront au bout du temps δt déphasées de l'angle $\delta\omega \cdot \delta t$; pour que les interférences demeurent constructives pendant la durée δt , il faut donc que cet angle de déphasage ne soit pas trop grand : $\delta\omega \cdot \delta t \sim 1$ radian et en multipliant par \hbar : $\delta W \cdot \delta t \sim \hbar$.