

Performances en probabilité d'erreur des modulations à grand nombre d'états en période d'évanouissements sélectifs

Armand J. LÉVY *

Analyse

Cet article présente une comparaison des modulations à grand nombre d'états, qui sont étudiées du point de vue de leur robustesse face aux phénomènes de trajets multiples. Afin d'aboutir à des résultats précis, cette étude a été menée en utilisant comme critère de qualité le taux d'erreur et non un critère indirect tel que l'ouverture de l'œil. A cette fin, une méthode d'évaluation du taux d'erreur a été développée, méthode qui se caractérise par sa souplesse et son faible coût de calcul. En particulier, elle a été appliquée à des modulations cohérentes courantes et à des modulations plus originales, à constellations hexagonales, dotées d'un bon coefficient de compacité.

Mots clés : Propagation onde électromagnétique, Evanouissement sélectif, Modulation m-aire, Probabilité erreur, Etude comparative, Brouillage intersymbole, Signal analytique, Approximation, Modulation cohérente, Signature, Transmission numérique.

ERROR RATE PERFORMANCE OF HIGH LEVEL MODULATION TECHNIQUES IN SELECTIVE FADING PERIODS

Abstract

The paper presents a comparison of high level modulation techniques and of their performance during multipath fading periods. In order to provide precise results, the author led this study using the error rate as quality criterion, thus avoiding the use of one of the other indirect criteria like eye opening. To this end, an error rate evaluation method was developed. The flexibility and low computing cost of this method allowed us to investigate current coherent modulation techniques and also, more original techniques with low « packing coefficient » such as hexagonal constellations.

Key words : Electromagnetic wave propagation, Selective fading, M-ary modulation, Error probability, Comparative study, Intersymbol interference, Analytic signal, Approximation, Coherent modulation, Signature, Digital transmission.

Sommaire

- I. Introduction.
 - II. Probabilité d'erreur en présence de brouillage intersymboles.
 - III. Signatures calculées de systèmes de transmission numériques.
 - IV. Conclusion.
- Bibliographie (12 réf.).*

I. INTRODUCTION

L'incidence des évanouissements sélectifs constitue vraisemblablement la cause majeure de dégradation des liaisons hertziennes numériques à haut débit. De nombreuses études ont en conséquence été conduites, portant d'une part sur la compréhension et la modélisation des phénomènes de propagation, et d'autre part, sur l'évaluation des performances des systèmes numériques durant ces périodes [1].

L'objet du présent article est double. Tout d'abord, nous présentons une technique de calcul de la probabilité d'erreur, en présence de brouillage intersymbole que provoquent les trajets multiples. La souplesse de la méthode autorise son application à la plupart des techniques de modulation cohérente. Sa rapidité permet, pour un coût de calcul raisonnable, l'évaluation de la probabilité d'erreur pour un grand nombre de situations de propagation, décrites par un modèle. Ainsi il devient possible d'utiliser la probabilité d'erreur comme critère de performance, en substitution d'autres critères d'usage courant, plus facilement accessibles mais moins fiables, tels que l'ouverture de l'œil ou sa valeur en moyenne quadratique [2-3].

En un deuxième temps, tirant parti des qualités de cette technique de calcul, nous évaluons la robustesse d'un certain nombre de types de modulation face aux phénomènes d'évanouissements sélectifs. En

* CNET/PAB/RPE, 4, avenue de Neptune, 94107 Saint-Maur-des-Fossés Cedex.

effet, les progrès technologiques prévisibles vont conduire, à des fins d'économie de spectre radio-électrique, à utiliser des modulations d'efficacité spectrale allant croissant. L'impact sur la disponibilité des liaisons, n'est pas immédiat. A débit fixé, la bande occupée par les modulations à plus grand nombre d'états se trouve réduite, ce qui est favorable car la fonction de transfert est statistiquement plus régulière sur une portion de spectre plus étroite. En revanche, ces modulations offrent une plus grande vulnérabilité au brouillage intersymbole, du fait de la diminution de la distance entre les symboles de leurs constellations.

Les modulations analysées comprennent celles couramment utilisées ou en voie de l'être : modulation de phase à huit états et modulations d'amplitude sur deux porteuses en quadrature à 16, 32 et 64 états. Par ailleurs, nous examinons des modulations à constellations hexagonales qui ont surtout été envisagées jusqu'à présent sur un plan théorique, mais dont les constellations présentent une régularité suffisante pour autoriser une réalisation effective sans une excessive complexité. Ces modulations, qui présentent la qualité de bénéficier d'un excellent coefficient de compacité, ont déjà suscité un certain nombre de travaux [4-6]. La conclusion qui se dégage de ces études est qu'en présence uniquement de bruit gaussien, l'avantage à escompter sur des modulations plus classiques reste faible au regard de l'accroissement de complexité nécessaire à leur mise en œuvre. Cependant, il nous a paru utile d'examiner si une telle supériorité existe en matière de résistance aux évanouissements sélectifs et d'en apprécier éventuellement l'ordre de grandeur.

II. PROBABILITÉ D'ERREUR EN PRÉSENCE DE BROUILLAGES INTERSYMBOLE

Une attention considérable a été portée au problème de la détermination de la probabilité d'erreur, en présence de bruit et de brouillage intersymbole, attention dont témoigne une très abondante littérature [8-15] (*).

La méthode d'évaluation la plus simple procède par énumération exhaustive de toutes les valeurs possibles du brouillage. Son coût de calcul, croissant exponentiellement avec le nombre d'échantillons du brouillage, la rend concrètement impraticable. Ho et Yeh, parallèlement à Shimbo et Celebiler, ont les premiers développé une méthode dont le coût de calcul ne croît que linéairement avec le nombre de coefficients [8-11]. Cette méthode est basée sur un

(*) JOINDOT (M.). Synthèse bibliographique sur les méthodes de calcul de la probabilité d'erreur en présence d'interférence entre symboles dans un système de transmission numérique. Note technique CNET NT/ETN/5.

développement de Taylor et suppose le calcul des moments de la variable brouillage intersymbole.

Divers travaux ont suivi, ayant pour objectif d'accélérer la convergence et donc de réduire, à précision du résultat fixée, le nombre de moments à calculer. Nous présentons ici un cadre unique qui décrit la majorité des méthodes proposées à ce jour, parmi lesquelles celle de Ho et Yeh. De cette classe très générale, nous extrayons la méthode qui nous paraît présenter les meilleures qualités en matière de rapidité et de simplicité.

II.1. Expression de la probabilité d'erreur.

Nous adoptons pour tous les signaux, leur représentation par enveloppe complexe. Rappelons qu'un signal $x_r(t)$, réel et à bande étroite autour de ω_0 est relié à son enveloppe complexe $x(t)$ par la relation :

$$(1) \quad x_r(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(x(t) \exp(j\omega_0 t)).$$

L'enveloppe complexe de la réponse impulsionnelle du filtre en bande de base, équivalent à la totalité du système de transmission est désignée par $h(t)$.

Dans l'hypothèse d'un bruit additif stationnaire n , le signal reçu s'écrit :

$$(2) \quad y(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT) * h(t) + n(t),$$

où les a_k sont les symboles indépendants émis toutes les T secondes. L'échantillon y_0 , reçu à l'instant t_0 et sur lequel le récepteur prend la décision relative au symbole émis s'exprime par :

$$(3) \quad y_0 = a_0 h_0 + \sum_{k \neq 0} a_k h_k + n,$$

avec $h_k = h(t_0 - kT)$ $n = n(t_0)$.

Dans un premier temps, nous prenons exclusivement en considération la modulation d'amplitude binaire. Chaque symbole a_k peut prendre l'une des deux valeurs $+1$ ou -1 avec d'égales probabilités. Les échantillons h_k sont éventuellement complexes, mais dans ce cas seule leur partie réelle influe sur la décision. Nous ne restreignons donc pas le problème en supposant les h_k réels.

Par ailleurs, en principe, le nombre d'échantillons h_k est infini, mais nous admettons pouvoir ne retenir que les L échantillons les plus significatifs et négliger tous les autres.

Le symbole émis a_0 valant $+1$, la décision dépend du signe de l'échantillon y_0 et la probabilité d'erreur s'écrit :

$$(4) \quad P_e = \operatorname{Pr}\{h_0 + II + n < 0\},$$

$$\text{avec} \quad II = \sum_{k=1}^L a_k h_k.$$

Le brouillage intersymbole II a une densité de probabilité $g(x)$ dont le support est borné à l'intervalle I .

$$(5) \quad I = [-r, +r], \quad r = \sum_{k=1}^L |h_k|.$$

Enfin $F(x)$ désigne la densité cumulée du bruit n :

$$(6) \quad F(x) = \Pr\{n < x\}.$$

La probabilité d'erreur P_e peut alors s'écrire :

$$(7) \quad P_e = \int_I F(-h_0 - x) g(x) dx.$$

II.2. Une classe de méthodes.

Notre propos est maintenant de présenter un cadre général qui permet la description de diverses techniques d'évaluation de l'intégrale (7).

Tout d'abord, supposons défini un ensemble de M fonctions $b_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, M$. Ensuite, utilisons cette base de fonctions pour réaliser un développement limité de $F(-h_0 - x)$:

$$(8) \quad F(-h_0 - x) = \sum_{i=1}^M c_i b_i(x) + \varepsilon(x).$$

Il se déduit alors une valeur approchée de la probabilité d'erreur :

$$P_e \simeq \sum_{i=1}^M c_i E_i \quad \text{avec} \quad E_i = \int_I b_i(x) g(x) dx,$$

l'erreur sur cette évaluation étant : $\int_I \varepsilon(x) g(x) dx$.

Cette expression sera calculable sans peine pour peu que les fonctions b_i soient choisies de manière à permettre un calcul aisé des intégrales E_i .

II.2.1. Le développement.

De nombreuses méthodes de calcul entrent dans le cadre défini ci-dessus. La méthode proposée par Ho et Yeh utilise les fonctions $b_i(x) = x^i$ et décompose $F(-h_0 - x)$ suivant un développement de Taylor [8]. Les quantités E_i sont dans ce cas les moments de la variable du brouillage intersymbole.

Murphy observe que le développement de Taylor converge plus rapidement au centre de l'intervalle I qu'aux extrémités [14]. Il propose de lui substituer le développement constituant la meilleure approximation au sens des moindres carrés (c'est-à-dire minimisant $\int_I \varepsilon^2(x) dx$). Il choisit comme base $\{b_i\}$ les polynômes de Legendre orthogonaux sur I .

L'approximation au sens des moindres carrés est meilleure que le développement de Taylor en ce sens qu'un nombre moindre de termes du développement permet d'aboutir à une même précision du résultat [15].

Enfin Luvison, à la suite de travaux de Benedetto *et al.*, propose l'utilisation d'une formule de quadrature dont les nœuds sont régulièrement espacés. Ce qui revient à utiliser en (8) le polynôme de degré minimal coïncidant avec $F(-h_0 - x)$ pour un certain nombre d'échantillons de l'intervalle I [12-13].

Il est clair que la manière de réaliser la décomposition de $F(-h_0 - x)$ a fait l'objet de nombreuses

investigations, soulignant essentiellement que la préférence doit être donnée aux développements qui répartissent l'erreur sur tout l'intervalle I . Cependant, tous ces développements sont des polynômes alors que, comme nous allons le voir, il existe une plus large classe de fonctions, candidates comme composantes de ce développement.

II.2.2. Le jeu de fonctions b_i .

Le choix d'une fonction $b_i(x)$ dans le développement (8) est lié à la facilité d'évaluation des quantités

$$E_i = \int_I b_i(x) g(x) dx.$$

Or, le brouillage intersymbole est une somme de variables aléatoires discrètes. Si sa densité $g(x)$ n'admet pas d'expression simple, en revanche, sa fonction caractéristique $G(\omega)$ est connue et est le produit des fonctions caractéristiques de chacune des variables discrètes. Pour la modulation d'amplitude binaire, cette fonction s'exprime :

$$(9) \quad G(\omega) = \prod_{k=1}^L \cos(h_k \omega).$$

De la fonction caractéristique, il est possible de déduire les quantités E pour toute une gamme de fonctions $b_i(x)$. En effet, partant de la définition de la fonction caractéristique :

$$G(\omega) = \int g(x) \exp(j \omega x) dx,$$

il vient :

$$(10) \quad \left(\frac{d^{2n} G(\omega)}{d\omega^{2n}} \right)_{\omega=\omega_i} = E_{i,n} = \int b_{i,n}(x) g(x) dx,$$

avec :

$$b_{i,n} = (-1)^n x^{2n} \exp(\omega_i x) \exp(j \omega_i x),$$

et :

$$\omega_i = \omega_{i_2} - j \omega_{i_1}.$$

En résumé, une technique d'évaluation de la probabilité d'erreur est complètement définie par le choix, d'une part, d'un ensemble de fonctions b_i extraites de cette gamme et d'autre part, d'une manière de réaliser le développement de $F(-h_0 - x)$ sur cette base.

II.3. Une nouvelle méthode utilisant un développement en série de Fourier.

Nous nous proposons de décrire maintenant une méthode permettant, en toute généralité, d'évaluer :

$$(11) \quad P_e = \Pr\{h_0 + II + n < 0\},$$

lorsque sont connues, d'une part, la densité cumulée du bruit $F(x)$, et d'autre part, la fonction caractéristique $G(\omega)$ de la variable réelle et bornée II .

Il nous semble que de toutes les fonctions décrites dans l'équation (10), les plus adéquates sont les expo-

mentielles complexes $b_i(x) = \exp(\mathbf{j} \omega_i x)$, obtenues en précisant dans (10) $n = 0$ et $\omega_{i_1} = 0$. Tout d'abord, le calcul des intégrales E_i pour ces fonctions est simple ; contrairement au calcul des moments, il ne fait pas intervenir les dérivées de la fonction caractéristique mais seulement la fonction elle-même. Ensuite, la décomposition (8) peut alors être une décomposition en série de Fourier aux qualités et propriétés bien connues. En particulier, cette décomposition est une approximation aux sens des moindres carrés. Nous proposons de réaliser cette décomposition par échantillonnage de $F(-h_0 - x)$, suivie d'une transformation de Fourier discrète :

$$(12) \quad c_i = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N+1}^N F(-h_0 - kr/N) \exp(-\mathbf{j} ik\pi/N),$$

de laquelle résulte une décomposition de $F(-h_0 - x)$:

$$(13) \quad F(-h_0 - x) \approx \sum_{k=-N+1}^N c_k \exp(\mathbf{j} k\pi x/r).$$

Puis ne retenant que les $2M$ premiers termes de la série, la probabilité d'erreur est évaluée :

$$(14) \quad P_e = \sum_{k=-M+1}^M c_k G(k\pi/r).$$

En résumé, la méthode comprend les quatre étapes suivantes :

- évaluation de N échantillons de $F(-h_0 - x)$,
- transformation de Fourier discrète de cette séquence,
- évaluation de M échantillons de la fonction caractéristique $G(\omega)$,
- évaluation de la probabilité d'erreur par (14).

En raison du repliement du spectre dû à l'échantillonnage et de la troncature de la série, l'évaluation (14) est seulement une approximation. Cependant, pour un nombre croissant d'échantillons, la série de Fourier converge et l'erreur tend vers zéro. D'un point de vue qualitatif, la convergence est plus lente lorsque $F(-h_0 - x)$ présente des variations rapides sur l'intervalle I . En pratique, lorsque l'œil se fermera (r tendant vers h_0) et pour des faibles niveaux de bruit, l'évaluation nécessitera un nombre de termes M accru. Mais, alors que le coût de calcul des moments de II croît très vite avec leur ordre, le coût de calcul des termes de (14) ne dépend pas de leur indice.

Globalement, le temps de calcul croît linéairement non seulement en fonction du nombre d'échantillons du brouillage mais également avec la précision requise, mesurée par le nombre de termes calculés dans la série (14).

II.4. Application aux modulations cohérentes de constellation quelconque.

L'application de la méthode qui vient d'être présentée à la modulation d'amplitude binaire est immé-

diante, la fonction caractéristique du brouillage ayant été donnée en (9). Nous allons montrer à présent, de quelle manière il est possible de prendre en compte une modulation cohérente de constellation quelconque.

Pour les modulations d'amplitude et de phase, les signaux comportent une partie en phase et une autre en quadrature.

L'échantillon reçu admet toujours pour expression :

$$(15) \quad y_0 = a_0 h_0 + \sum_k a_k h_k + n,$$

mais les symboles a_k comme les échantillons h_k appartiennent au plan complexe.

Il y a une erreur de décision sur le symbole émis lorsque y_0 sort d'une région de bonne décision R , formant un polygone autour de $a_0 h_0$. La forme de ce polygone dépend de la constellation (ensemble des symboles a_k) et du symbole a_0 concerné.

II.4.1. Taux d'erreur sur un symbole complexe.

Il est possible de tenir, à deux dimensions, un raisonnement calqué sur celui développé en II.3.

Désignons par $f(x)$ la densité de probabilité du bruit et définissons la densité intégrée $F(x)$.

$$(16) \quad F(x) = \iint_R f(t + x) du dv,$$

avec $t = u + \mathbf{j}v$.

$F(-x)$ est la probabilité pour que le bruit n centré en x , appartienne au domaine R . Soit également $g(x)$ la densité de probabilité de la variable complexe $II = \sum_{k=1}^L a_k h_k$. Cette variable appartient à un domaine borné et on peut définir dans le plan complexe une région carrée I de côté $2r$, telle que $g(x)$ soit nulle en dehors de I . La probabilité d'erreur admet pour expression :

$$(17) \quad P_e = \iint_I F(-h_0 - x) g(x) du dv,$$

avec $x = u + \mathbf{j}v$.

La transformation de Fourier discrète bidimensionnelle de $4N^2$ échantillons sur I de $F(-h_0 - x)$ fournit un développement de cette fonction :

$$(18) \quad F(-h_0 - x) = \sum_{k=-N+1}^N \sum_{i=-N+1}^N c_{k,i} \exp(\mathbf{j}\pi(ku + iv)/r) + \varepsilon(x),$$

avec $x = u + \mathbf{j}v$, duquel se déduit une expression de la probabilité d'erreur :

$$(19) \quad P_e = \sum_{k=-M}^M \sum_{i=-M}^M c_{k,i} G(k\pi/r + \mathbf{j}i\pi/r),$$

où G est la fonction caractéristique de II .

Le calcul est donc réalisable, pour une constellation quelconque, sans complexité théorique grandement accrue mais avec cependant un volume de calcul nettement plus important. En particulier, la densité cumulée F est souvent difficile à évaluer. C'est pour-

quoi nous allons proposer maintenant, un majorant étroit de la probabilité d'erreur, basé sur des projections qui ramènent le problème à une dimension, et donc sensiblement plus rapide à évaluer.

II.4.2. Un majorant de la probabilité d'erreur.

La région R étant un polygone délimité par les droites $\mathcal{D}_i, i = 1, 2, \dots, K$, chacune de ces droites définit un demi-plan D_i qui ne contient pas R. La réunion de ces demi-plans étant complémentaire de R, il est possible d'exprimer la borne supérieure suivante de la probabilité d'erreur :

$$(20) \quad P_e = \Pr\{y_0 \notin R\} < \sum_{i=1}^k \Pr\{y_0 \in D_i\}.$$

Il reste, pour calculer cette borne, à savoir évaluer la probabilité pour que l'échantillon y_0 franchisse une droite \mathcal{D}_i quelconque. Considérons le complexe q , de module minimal, tel que $q + a_0 h_0$ appartienne à \mathcal{D}_i (Fig. 1).

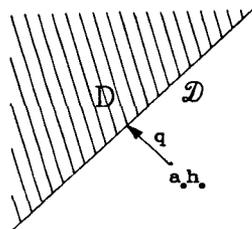


FIG. 1. — Vecteur q définissant le demi-plan D.
The vector q defines the half-plane D.

Par projection, cette probabilité s'exprime :

$$(21) \quad \Pr\{y_0 \in D_i\} = \Pr\{|q| + \sum_k \operatorname{Re}(a_k h_k q^* / |q|) + \operatorname{Re}(n q^* / |q|) < 0\},$$

où q^* désigne le complexe conjugué de q .

Une telle expression est du type de celles décrites par l'équation (11) et est donc calculable par l'algorithme décrit en II.3. Le terme de brouillage intersymbole étant une somme de variables discrètes, sa fonction caractéristique s'exprime sans difficultés :

$$(22) \quad G(\omega) = \prod_{k=1}^L \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \exp(j \omega \operatorname{Re}(a_i h_k q^* / |q|)).$$

J étant le nombre d'états de la modulation considérée.

Ceci complète la méthode d'évaluation de la borne (20). Pour les taux d'erreur faibles, il est légitime de considérer que l'essentiel de la densité de probabilité d'erreur intégrée, est concentrée à la frontière de la région R. Par simple observation de la figure 2, il est clair que, près de cette frontière, la probabilité d'erreur est comptabilisée au maximum deux fois dans la borne (20) que nous désignerons par B. En conséquence, l'inégalité suivante est vérifiée dans tous les cas présentant un intérêt :

$$(23) \quad B/2 < P_e < B.$$

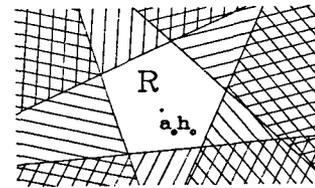


FIG. 2. — Le majorant de la probabilité d'erreur évalué vaut la somme des probabilités, pour y_0 , d'appartenir à chacun des demi-plans représentés.

The evaluated error rate overbound is the sum of the probabilities that y_0 belongs to each half-plane represented.

III. SIGNATURES CALCULÉES DE SYSTÈMES DE TRANSMISSION NUMÉRIQUES

III.1. La part du système et celle de la propagation.

La technique de calcul développée dans la partie II a pour objet l'analyse du comportement de diverses modulations en présence d'évanouissements sélectifs. Or, les phénomènes de propagation varient considérablement en fonction du bond hertzien ou de la période de l'année en considération. Il est cependant possible de s'affranchir de cette variabilité et d'analyser intrinséquement le comportement d'un système numérique, et ce, en calculant la signature de ce système, associée à un modèle de propagation [20-21].

En effet, si une fonction de modélisation paramétrée est capable de décrire la fonction de transfert de tout canal hertzien, à tout instant,

— d'une part, la propagation sur un bond hertzien particulier est alors liée à la loi statistique des paramètres de la fonction modèle relative à ce bond,

— d'autre part, le comportement d'un système de transmission est bien représenté par la région de l'espace des paramètres correspondant au bon fonctionnement du système.

Le fonctionnement correct correspondra à un taux d'erreur binaire inférieur à un taux seuil et la signature du système désignera, par définition, la surface frontière de la région ainsi délimitée.

III.2. La fonction modèle et la représentation des signatures.

La fonction modèle utilisée ici est celle adoptée par de nombreux auteurs et principalement proposée et exploitée par Rummler [16, 17].

$$(24) \quad H_{a,b,f_0}(f) = a(1 - b \exp(j2 \pi (f - f_0) \tau)),$$

avec $\tau \simeq 1/6 \Delta f$.

La fonction de transfert est affectée d'une part d'un affaiblissement global (paramètre a), d'autre

part d'un évanouissement de profondeur relative b et situé à une distance f_0 du centre de la bande.

L'existence du paramètre a , multiplicatif sur l'ensemble de la fonction entraîne une particularité utile de ce modèle : lorsque, toutes choses égales par ailleurs, la marge brute d'un système est modifiée, sa signature subit une simple translation (la marge brute est l'affaiblissement apériodique maximal possible sans dépassement du seuil de probabilité d'erreur).

La signature, qui est une surface dans l'espace tridimensionnel des paramètres a , b , f_0 , sera représentée par un jeu de courbes donnant la valeur de b en fonction de f_0 , paramétrées par la différence $A-M$, entre l'affaiblissement A en décibels ($A = -20 \log_{10}(a)$) et la marge brute du système M , également exprimée en décibels.

Il est à noter que, si a et f_0 sont fixés, la probabilité d'erreur est une fonction croissante de b . Pour le calcul des signatures, la recherche de la valeur de b correspondant à la probabilité d'erreur seuil a donc pu être réalisée par une méthode de recherche dichotomique.

Le seuil de probabilité d'erreur a été fixé à 10^{-3} et nous avons utilisé la méthode d'évaluation approchée de la probabilité d'erreur décrite en II.4.2. A ce sujet, il est important de signaler que, si les signatures diffèrent très sensiblement lorsque le seuil est fixé à 10^{-6} au lieu de 10^{-3} , en revanche, nous n'avons pu observer que de très faibles variations pour un seuil variant entre $0,5 \times 10^{-3}$ et 10^{-3} . Ce résultat rend pleinement légitime, en raison de l'inégalité (23), l'usage de la borne (20) moins précise mais beaucoup moins coûteuse à calculer que l'évaluation exacte proposée en II.4.1.

III.3. L'indisponibilité d'une liaison.

Le temps durant lequel une liaison particulière est indisponible se déduit de la signature du système par intégration de la loi statistique des paramètres du modèle (loi relative au bond et à la période considérée) sur le domaine que délimite la signature. Rummler a proposé une technique de calcul approchée qui n'utilise qu'une partie de l'information contenue dans la signature (la courbe limite lorsque $A-M$ tend vers $-\infty$ [18]). Si cette procédure se justifie tout à fait lorsque la signature doit être expérimentalement mesurée, elle nous paraît présenter un moindre intérêt dans le cas où cette signature peut être calculée complètement sans difficulté.

En ce qui concerne la comparaison des systèmes, lorsque deux signatures délimitent deux domaines dont l'un contient l'autre, il est possible d'affirmer que l'un des deux systèmes se comporte mieux que l'autre, quel que soit le canal hertzien qu'ils équipent. Au contraire, si ces deux signatures se recoupent, en général, selon le bond hertzien considéré, l'un ou l'autre des systèmes pourra s'avérer le meilleur.

C'est pourquoi nous présentons dans la suite, les signatures des systèmes analysés, avec également les performances calculées sur un bond particulier.

A cette fin, nous avons utilisé des données de l'expérience de propagation en air clair et météorologie (PACEM), relevées durant l'été 1982, sur un bond hertzien de 36 km reliant Marcheville et Viabon [19]. L'intégration de la loi statistique a été réalisée par une méthode de Monte-Carlo, les jeux de paramètres étant déduits des fonctions de transfert expérimentalement mesurées et modélisées. Plus précisément la procédure a consisté à tirer aléatoirement dans la base de données un certain nombre de triplets de paramètres (a , b , f_0), et à déterminer, après interpolation entre les points calculés de la signature, si chaque triplet est à l'intérieur de la région de fonctionnement dégradé. Ainsi est déterminé le temps durant lequel la probabilité d'erreur limite de 10^{-3} est dépassé, comme portion du temps durant lequel les évanouissements se produisent (taux d'indisponibilité relatif).

III.4. Les systèmes et modulations analysés.

Les modulations cohérentes entrant ici en considération sont la modulation par déplacement de phase à 8 états (MDP-8), les modulations d'amplitude sur deux porteuses en quadrature à 16, 32 et 64 états (MAQ-16, MAQ-32 et MAQ-64), et des modulations à 8, 16, 32 et 64 états dont les constellations répartissent les états aux centres d'hexagones formant un pavage régulier (HEX-8, 16, 32 et 64). Les figures 3, 4 et 5 présentent les constellations retenues parmi les diverses possibilités offertes par ce maillage.

La distance minimale séparant les états d'une constellation constitue un élément déterminant en ce qui

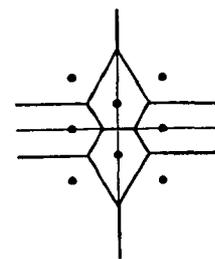


FIG. 3. — Constellation hexagonale à 8 états.
Hexagonal constellation with 8 states.

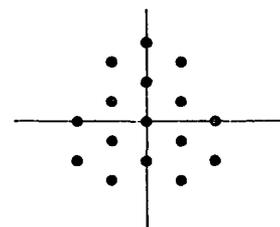


FIG. 4. — Constellation hexagonale à 16 états.
Hexagonal constellation with 16 states.

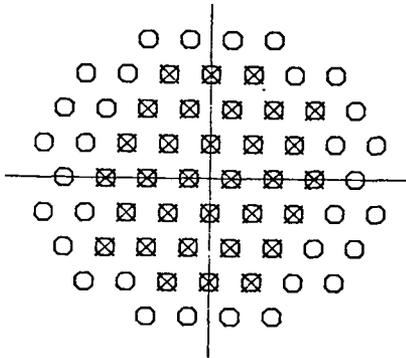


FIG. 5. — Constellations hexagonales à 32 (x) et 64 (o) états
Hexagonal constellation with 32 (x) and 64 (o) states.

concerne la probabilité d'erreur. De ce point de vue, les modulations hexagonales sont celles qui occupent le mieux l'espace complexe. Pour mieux chiffrer cet avantage, nous avons calculé les coefficients de compacité C_p , rapport de la puissance moyenne des symboles S , au carré de δ , moitié de la distance minimale entre deux signaux de la constellation (Tabl. I).

$$C_p = S/\delta^2.$$

TABL. I. — Coefficients de compacité des modulations analysées.
Packing coefficients of analysed modulations.

Modulation	C_p	Modulation	C_p
MDP-8	6,83	HEX-8	4,50
MAQ-16	10,0	HEX-16	9,00
MAQ-32	23,1	HEX-32	17,8
MAQ-64	42,0	HEX-64	35,3

Il est clair au regard de ce tableau, qu'à nombre d'états égal, ce coefficient est meilleur pour les modulations hexagonales que pour les modulations plus classiques envisagées. En présence uniquement de bruit gaussien cet avantage se traduit par de meilleures performances en probabilité d'erreur [4]. Mais cette amélioration des performances reste faible au regard de l'accroissement de complexité des équipements. Nous examinerons si ces modulations présentent une robustesse sensiblement meilleure face aux évanouissements sélectifs.

Relativement aux autres caractéristiques des systèmes examinés, nous avons supposé que les filtres d'émission et de réception réalisaient un filtre équivalent en cosinus surélevé de coefficient de retombée 0,3 vérifiant donc le critère de Nyquist. A la réception, nous avons considéré que la phase récupérée annule la partie imaginaire de l'échantillon central h_0 de la réponse impulsionnelle. L'instant de décision t_0 est fourni par le dispositif classique qui extrait une raie à $1/T$ du spectre de l'enveloppe du signal reçu [7].

III.5. Les résultats.

Nous avons tout d'abord supposé que les différentes techniques de modulations équipaient un système de transmission à 140 Mbit/s. La bande occupée est en conséquence moitié moindre pour les modulations à 64 états que pour celles à 8 états. Le paramètre de la fonction modèle a été lui uniformément fixé à 3,037 ns, afin de pouvoir comparer les signatures par observation directe. La figure 6 présente les différentes signatures pour chacune des modulations envisagées et la figure 7 compare les performances sur le bond hertzien servant de référence. La première observation, relativement à ces résultats, concerne les modulations hexagonales qui, à nombre d'états égal, se comportent toujours mieux que les modulations classiques, mais dans des proportions relativement faibles. Il semble donc qu'en matière de robustesse face aux évanouissements sélectifs, tout comme en matière de résis-

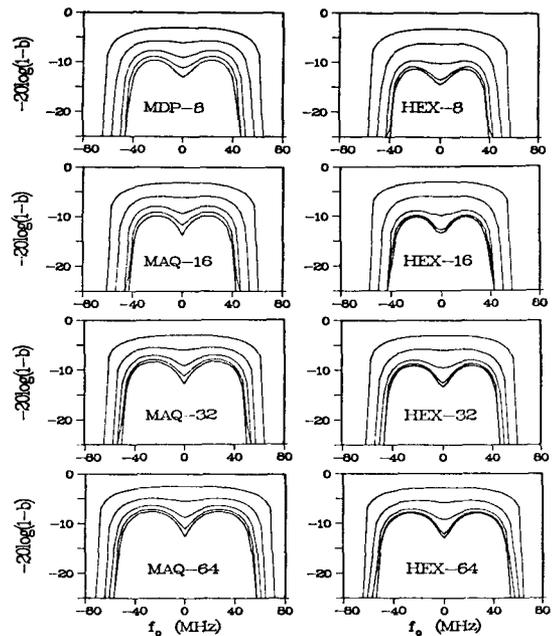


FIG. 6. — Signatures calculées de systèmes de transmission à 140 Mbit/s pour différents types de modulation. De haut en bas les courbes correspondent aux valeurs respectives du paramètre $M-A$: 3 dB, 6dB, 10dB, 15dB, $+\infty$ ($\tau = 3,037$ ns).

Computed signatures of 140 Mbit/s transmission systems. From top to bottom curves correspond to respective values of the parameter $M-A$: 3dB, 6dB, 10dB, 15dB, $+\infty$ ($\tau = 3,037$ ns).

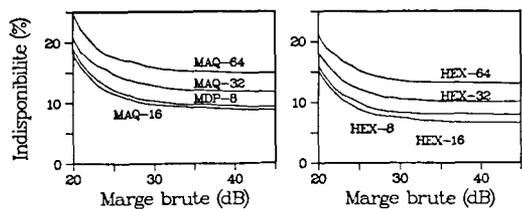


FIG. 7. — Performances théoriques sur le bond hertzien Marcheville-Viabon, de systèmes à 140 Mbit/s.

Theoretical performances on the link Marcheville-Viabon of 140 Mbit/s systems.

tance au bruit gaussien, les modulations hexagonales présentent plus un intérêt théorique que pratique, leurs meilleures performances ne valant pas, pour le moment, l'investissement technique que suppose leur mise en œuvre. Ensuite remarquons que, dans une même famille de modulation (HEX ou MAQ) l'accroissement de l'efficacité spectrale se paie par une dégradation des performances. Typiquement, une bande occupée moitié moindre l'est, au prix d'un doublement du temps d'indisponibilité. Comme indiqué en introduction, ce résultat n'était pas clair *a priori*, dans la mesure où la bande occupée par les modulations de meilleure efficacité spectrale, se trouve réduite. Il faut enfin noter une « anomalie » : la modulation d'amplitude en quadrature à 16 états se comporte mieux que la modulation à déplacement de phase à 8 états, tout en occupant moins de spectre. Cette caractéristique doit être attribuée à la mauvaise occupation du plan complexe par les constellations de cette dernière modulation.

Dans un deuxième temps, nous avons voulu observer le comportement de ces modulations à bande occupée constante. La bande de Nyquist a été fixée à 46,7 MHz, de sorte qu'aux modulations à 8, 16, 32 et 64 états correspondent des débits numériques respectifs de 140, 187, 234 et 280 Mbit/s. La figure 8 présente les signatures des systèmes concernés et la figure 9 donne les performances sur le bond témoin. Il faut

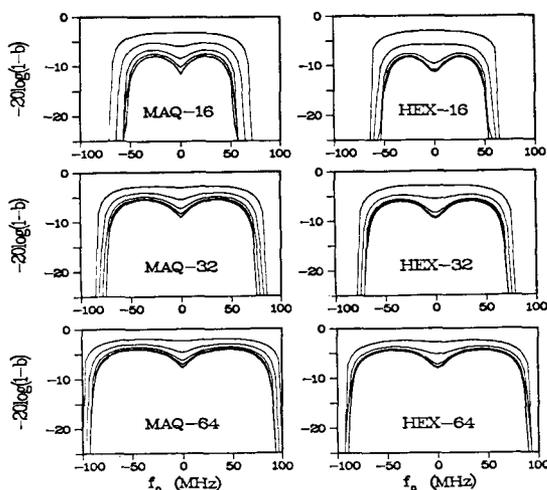


FIG. 8. — Signatures calculées de systèmes de transmission pour différents types de modulation. Bande de Nyquist constante : 46,8 MHz. De haut en bas les courbes correspondent aux valeurs respectives du paramètre $M-A$: 3dB, 6dB, 10dB, 15dB, $+\infty$ ($\tau = 3,037$ ns).

Computed signatures of transmission systems for various modulation techniques. The Nyquist bandwidth is constant : 46.8 MHz. From top to bottom curves correspond to respective values of the parameter $M-A$: 3dB, 6dB, 10dB, 15dB, $+\infty$ ($\tau = 3.037$ ns).

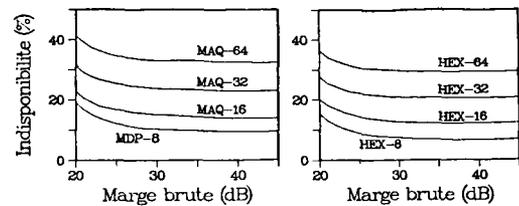


FIG. 9. — Performances théoriques sur le bond hertzien Marcheville-Viabon, de systèmes occupant la même largeur de bande (bande de Nyquist : 46,8 MHz).

Theoretical performances on the link Marcheville-Viabon of systems using the same bandwidth : (Nyquist bandwidth : 46.8 MHz).

noter la très nette dégradation des performances lorsque l'efficacité spectrale croît, puisqu'un doublement du débit, à bande occupée constante, correspond typiquement à un quadruplement du temps d'indisponibilité. Il faut en conclure une grande vulnérabilité aux évanouissements sélectifs de ces systèmes à bande large et haute efficacité spectrale.

IV. CONCLUSION

La technique d'évaluation de la probabilité d'erreur que nous avons décrite est tout à la fois assez souple pour prendre en compte une grande variété de modulations cohérentes et d'un coût de calcul suffisamment réduit pour permettre de mener de bout en bout de manière directe, l'évaluation des performances de systèmes numériques. Nous souhaitons que cet outil trouve son utilité dans l'étude de l'impact des évanouissements sélectifs. Il a été appliqué ici à l'étude de la relation entre l'efficacité spectrale et la robustesse face aux trajets multiples, des systèmes de transmission à 140 Mbit/s. Pour l'essentiel, notons tout d'abord que les modulations hexagonales envisagées, d'une mise en œuvre plus complexe que les modulations classiques, conduisent à une amélioration des performances qui n'est pas réellement décisive. Remarquons ensuite que, à débit numérique constant, l'accroissement de l'efficacité spectrale se paie d'une certaine dégradation de la disponibilité des liaisons. Enfin, au-delà de 140 Mbit/s, les modulations à haute efficacité spectrale semblent présenter une vulnérabilité particulière aux évanouissements sélectifs.

Manuscrit reçu le 29 avril 1985,
accepté le 8 juillet 1985.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SYLVAIN (M.). Panorama des études sur les trajets multiples. *Ann. Télécommun.*, Fr. (1985), **40**, n° 11-12, pp. 547-564.
- [2] GREENSTEIN (L. J.), CZEKAJ-AUGUN (B. A.). Performance comparison among digital radio techniques subjected to multipath fading. *IEEE Trans. COM*, USA (May 1982), **30**, pp. 1184-1197.
- [3] COUTTS (R. P.), CAMPBELL (J. C.). Mean square error analysis of QAM digital radio systems subject to frequency selective fading. *Australian Telecommunications Research* (1982), **16**, n° 1, pp. 23-38.
- [4] SIMON (M. K.), SMITH (J. G.). Hexagonal multiple phase and amplitude shift keyed signal sets. *IEEE Trans. COM*, USA (oct. 1973), **21**, pp. 1108-1115.
- [5] KAWAI (K.), SHINTANI (S.), YANAGIDAIRA (H.). Optimum combination of amplitude and phase modulation scheme and its application to data transmission MODEM. *Int. Conf. Communications Rec.*, Philadelphia, Pa. (1972).
- [6] FOSCHINI (G. J.), GITLIN (R. D.), WEINSTEIN (S. B.). Optimization of two-dimensional signal constellations in the presence of gaussian noise. *IEEE Trans. COM*, USA (jan. 1974), **22**, pp. 28-38.
- [7] LECLERT (A.), VANDAMME (P.). Influence of transitions between minimum phase and non-minimum phase fading on decision feedback equalizer. *Globecom Conf. Rec.*, Atlanta (nov. 1984).
- [8] HO (E. Y.), YEH (Y. S.). A new approach for evaluating the error probability in the presence of intersymbol interference and additive noise. *Bell Syst. tech. J.*, USA (1970), **49**, n° 9, pp. 2249-2265.
- [9] HO (E. Y.), YEH (Y. S.). Error probability of a multilevel digital system with intersymbol interference and Gaussian noise. *Bell Syst. tech. J.*, USA (mars 1971), **50**, pp. 1017-1023.
- [10] SHIMBO (O.), CELEBILER (M. I.). The probability of error due to intersymbol interference and Gaussian noise in digital communication systems. *IEEE Trans. COM*, USA (Apr. 1971), **19**, n° 2, pp. 113-119.
- [11] SHIMBO (O.), FANG (R. J.), CELEBILER (M. I.). Performance of M-ary PSK systems in Gaussian noise and intersymbol interference. *IEEE Trans. IT*, USA (jan. 1973), **19**, n° 1 pp. 44-58.
- [12] BENEDETTO (S.), DE VINCENTIIS (G.), LUVISON (A.). Error probability in the presence of intersymbol interference and additive noise for multilevel digital signals. *IEEE Trans. COM*, USA (Mars 1973), **21**, pp. 181-188.
- [13] LUVISON (A.). Interpolations quadrature rules and error rate of digital communication systems. *Electronics Letters*, UK (jan. 1980), **16**, pp. 16-17.
- [14] MURPHY (J. V.). Binary error rate caused by intersymbol interference and Gaussian noise. *IEEE Trans. COM*, USA (sept. 1973), **21**, pp. 1039-1046.
- [15] BATES (R. J. S.). Methods of calculating the error rate of digital transmission systems. *IEE Conf. Proc.* **193**, (1980).
- [16] RUMMLER (W. D.). A new selective fading model : application to propagation data. *Bell Syst. tech. J.*, USA (1979), **58**, n° 5, pp. 1037-1072.
- [17] RUMMLER (W. D.). More on the multipath fading channel model. *IEEE Trans. COM*, USA (mars 1981), **29**, n° 3, pp. 346-352.
- [18] RUMMLER (W. D.). A simplified method for the laboratory determination of multipath outage of digital radio in the presence of thermal noise. *IEEE Trans. COM*, USA (mars 1982), **30**, n° 3, pp. 487-494.
- [19] SYLVAIN (M.), BAUDIN (F.), KLAPISZ (C.), LAVERGNAT (J.), MAYRARGUE (S.), MON (J. P.), NUTTEN (B.), ROORYCK (M.), MARTIN (L.). The PACEM experiment on line of sight multipath propagation. *Proc. of URSI. Commission F Symposium* (Louvain, Belgique, 9-15 juin 1983), ESA-SP-194, pp. 13-23.
- [20] SYLVAIN (M.), LAVERGNAT (J.). Modelling the transfer function in medium bandwidth radio channels during multipath propagation. *Ann. Télécommun.*, Fr. (1985), **40**, n° 11-12, pp. 000-000.
- [21] BORGNE (M.). Comportement et comparaison des modulations numériques à grand nombre d'états dans un canal de transmission hertzienne. *Ann. Télécommun.*, Fr. (sept.-oct. 1983), **39**, n° 9-10, pp. 411-423.