Chapitre III: STRUCTURES

I. INTRODUCTION

- **Objectif : Détermination des forces intérieures d’action et de réaction qui existent entre les composants (généralement des barres) d’une structure mécanique en équilibre.**

- **Procédure:**

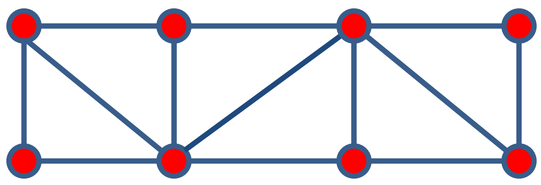
Analyse du diagramme du corps libéré par chaque composant de la structure.

- **Outil: Ecriture des équations de l’équilibre avec une application stricte du principe de l’action et de la réaction**

I. TREILLIS

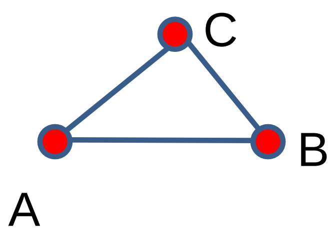
II.1 Définitions:

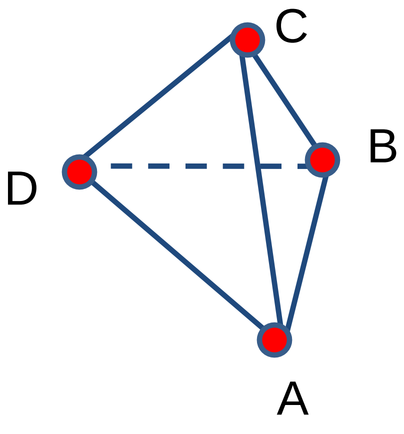
Un treillis est une structure rigide composée de barres assemblées à leurs extrémités par des joints qu’on appelle nœuds.



Lorsque les éléments d'un treillis occupent le même plan celui-ci est dit plan. Dans le cas contraire on parle de treillis spatial.

La forme de base d'un treillis plan est le triangle alors que celle correspondant à un treillis spatial est le tétraèdre.





• Le treillis plan (respectivement spatial) qui dérive d'un triangle élémentaire (respectivement d'un tétraèdre élémentaire) est appelé treillis simple.

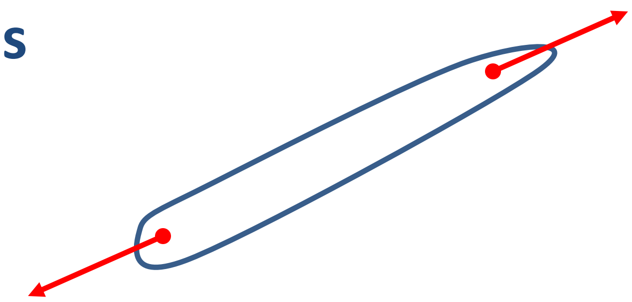
• La conception d'un treillis simple fait appel à:

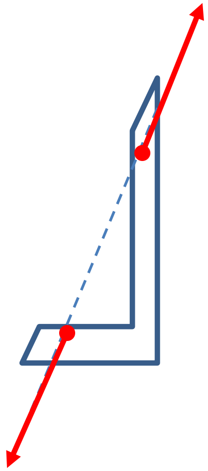
-LA détermination des forces agissant dans les diverses barres

-LA sélection des sections et des profils d'acier nécessaire pour résister à ces forces

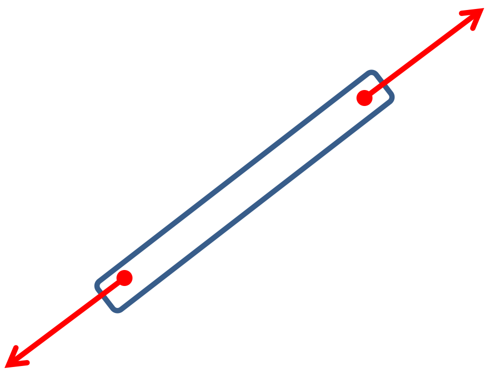
Dans ce cadre, plusieurs hypothèses sont postulées.

Hypothèse 1: **Tous les éléments du treillis sont des éléments à deux forces**

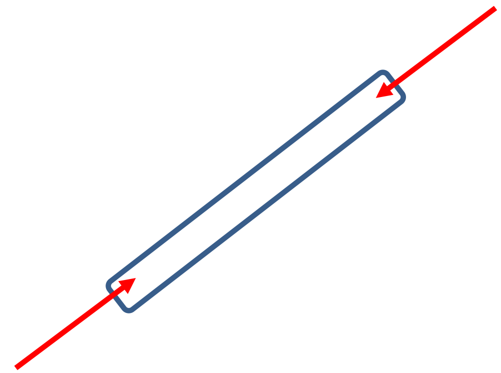




• **Il s'agit généralement d'une barre droite articulée aux deux points d'application des forces (Nœuds). Ces forces sont nécessairement égales de sens opposées et colinéaire pour assurer l'équilibre. Ces barres peuvent être soit en tension soit en compression**



Tension : La force sort du nœud



Tension : La force rentre dans le nœud

Hypothèse 2: **Tous les forces extérieures sont appliquées aux nœuds.**

Remarque: L'analyse des forces qui agissent sur les éléments constitutifs d'un treillis ne peut être entamée qu'après la détermination des forces agissant aux appuis (Nécessité d'isostaticité extérieure).

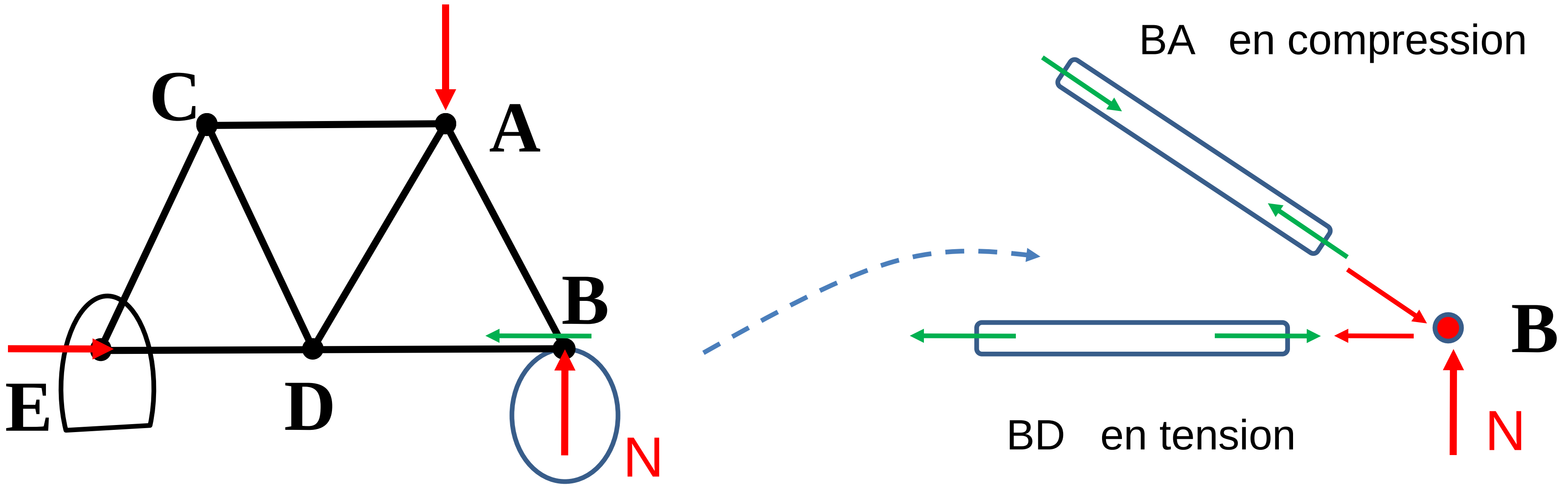
II.1 Détermination des forces intérieures:

Pour mettre en évidence l'effort dans une pièce quelconque, d'un treillis on doit absolument couper cette pièce. La grandeur et la nature de l'effort dans cette pièce (tension ou compression) peuvent être trouvées en utilisant plusieurs méthodes de calcul dont notamment la méthode des nœuds et la méthode des sections.

II.1.1 TRELLIS PLANS

1ère méthode : Méthode des nœuds

Comme le treillis est en équilibre, chaque nœud doit se trouver parfaitement en équilibre. Par conséquent, le fait d'isoler un nœud du treillis, en coupant toutes les barres articulées à cet endroit, permet d'obtenir un système de forces concourantes, l'équilibre du nœud se traduit alors par deux équations indépendantes.



Dans le cas d'un treillis isostatique pour les forces extérieures, il existe une relation précise entre le nombre de ses éléments et le nombre de ses nœuds nécessaire pour réaliser une stabilité intérieure sans redondance. En effet

i/ - Pour chaque nœud deux équations de forces scalaires.
- Pour un treillis de J nœuds, on dispose de 2 J équations scalaires.

ii/ - Pour l'ensemble du treillis composé de M barres à deux forces et comportant un maximum de trois réactions d'appui inconnues le nombre des inconnues est M+3.

On distingue trois cas:

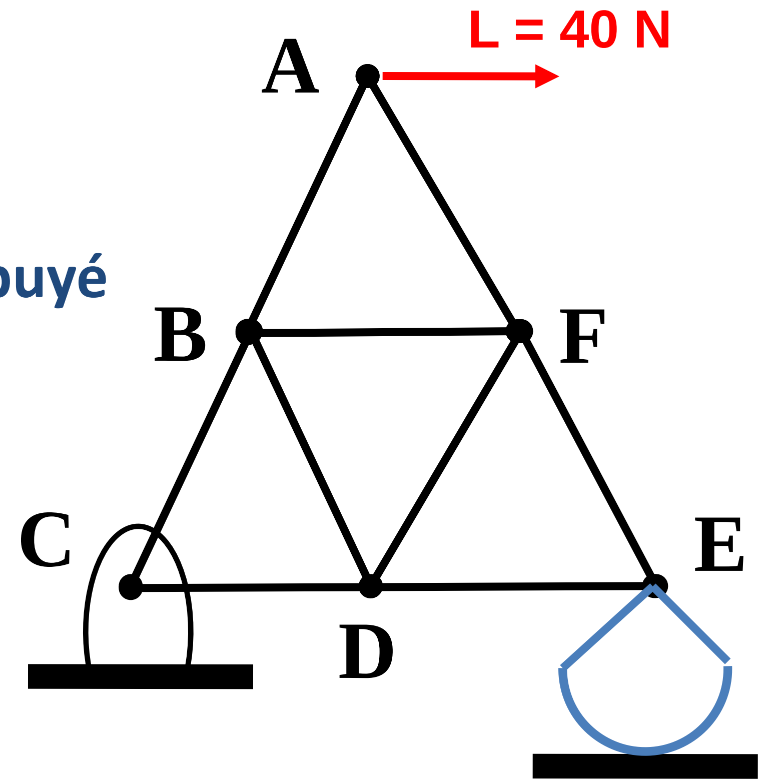
M+3 = 2 J Le treillis est statiquement déterminé par ses forces intérieures (Isostaticité interne)

M+3 < 2 J Le nombre de barres internes est en déficit, le treillis est instable et s’effondreras sous l’action d’une charge

M+3 > 2 J Il ya redondance de barres (Treillis statiquement indéterminé)

Exemple d’application:

Le treillis equi-angulaire est chargé et appuyé comme sur la figure. Déterminer les forces dans toutes Les barres en fonction de la charge L = 40 N



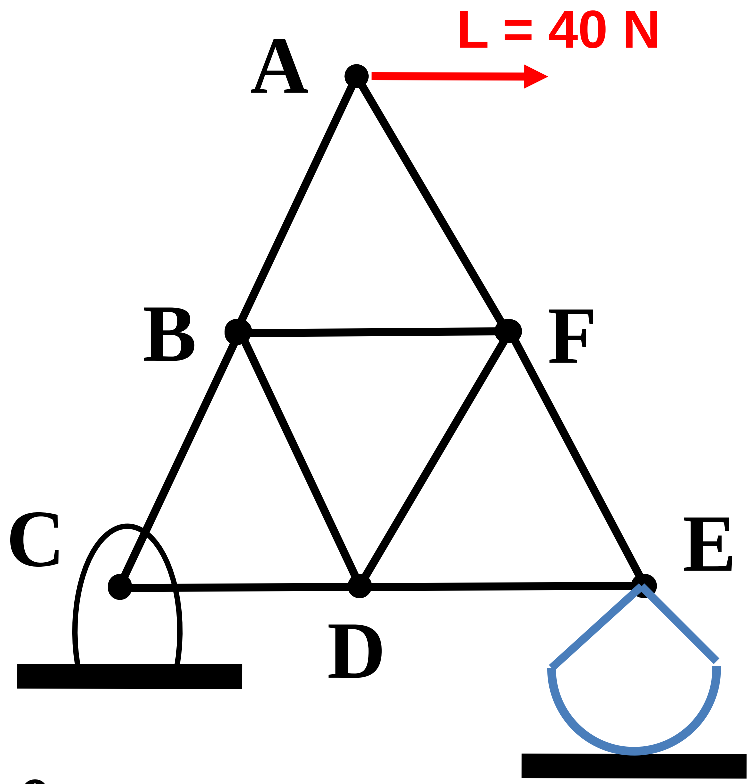
Nombre d'inconnues de liaisons = 3

Nombre de barres = 9, Nombre de nœuds = 6

9 + 3 = 2 x 6   (Isostaticité intérieure)

1ère étape:

Détermination des forces aux appuis.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_X + L = 0$$

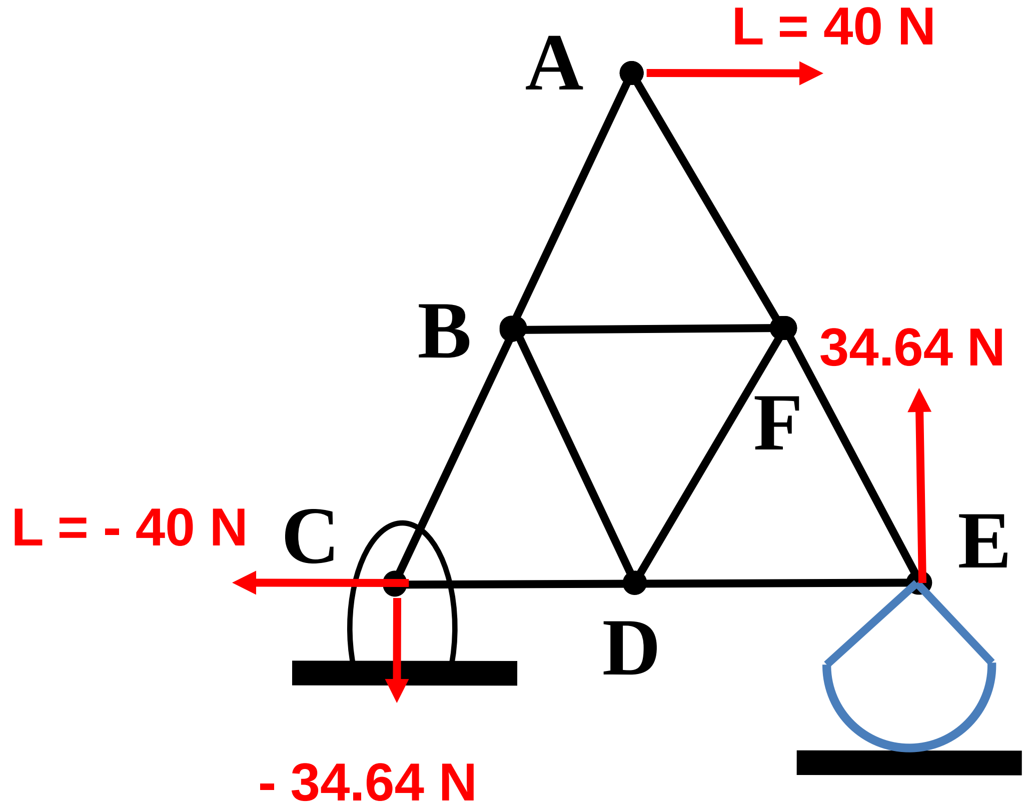
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_Y + E_Y = 0$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 2\,a\,E_Y - 2\,a\cos(30°)\,L = 0$$

$$C_X = -L = -40N$$

$$E_Y = \frac{\sqrt{3}}{2} L = 34.64N$$

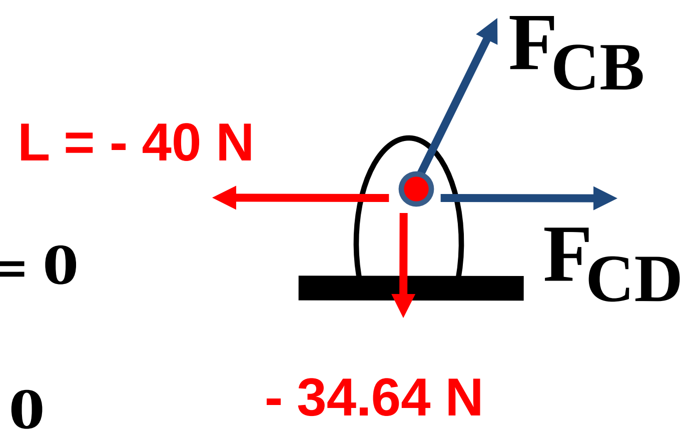
$$C_Y = -E_Y = -34.64N$$



2ème étape:

Choix du nœud dont le nombre des barres concourantes doit être égal à 2. Pour chaque nœud à l'équilibre, on est en effet en mesure d'écrire 2 équations au maximum.

Nœud C:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} - 40 + F_{CB}\cos(60°) = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -40\frac{\sqrt{3}}{2} + F_{CB}\cos(30°) = 0$$

$$F_{CB} = 40N$$

(F$_{CB}$ sort du nœud: Il s’agit d’une traction sur la barre BC)

$$F_{CD} = 40 - 40x0.5 = 20N = \frac{L}{2}$$

(F$_{CD}$ sort du nœud: Il s’agit d’une traction sur la barre CD)

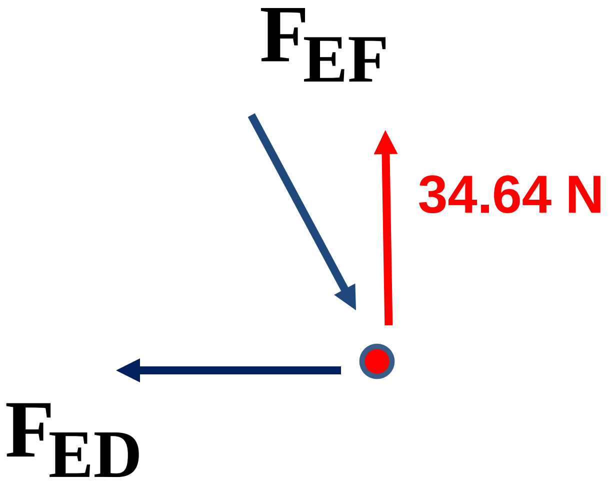
Nœud E

$$\sum F_{xA} = 0 \Rightarrow -F_{ED} - F_{EF}\cos(60°) = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 40\frac{\sqrt{3}}{2} + F_{EF}\cos(30°) = 0$$

$$F_{ED} = 20N \quad \text{(Traction)}$$

$$F_{EF} = -40N \quad \text{(Compression)}$$

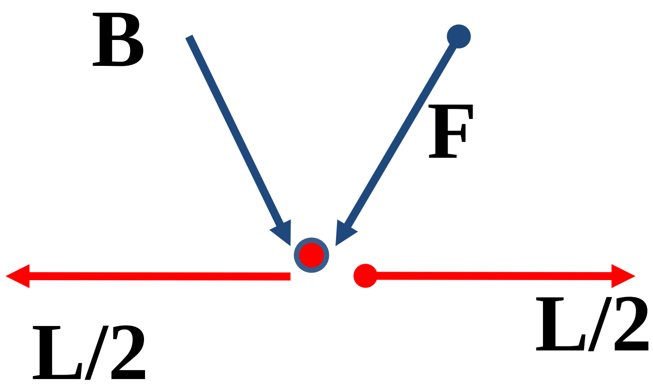


Nœud D

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DE} + F_{DF}\cos(60°) - F_{DB}\cos(60°) - F_{DC} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{DF} + F_{DB} = 0$$

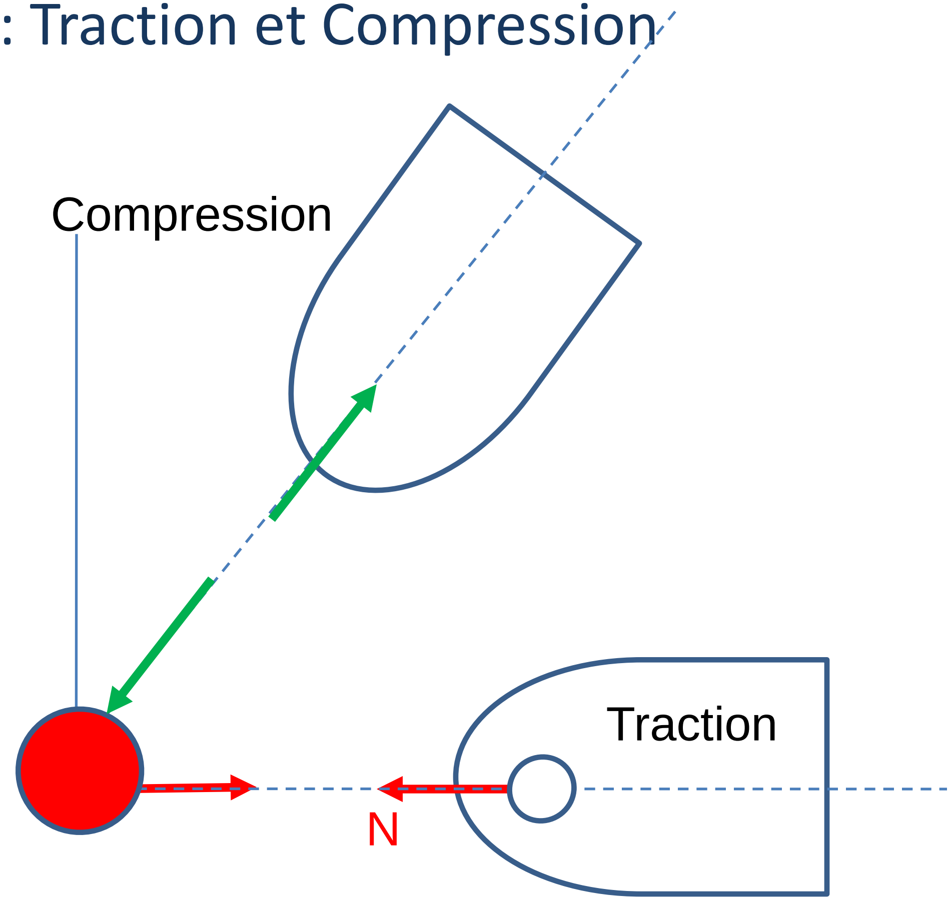
$$\mathbf{F_{DF} = F_{DB} = 0}$$



Les deux forces en rouge s'annulent entre elles

Remarque:

Méthode des Nœuds: Traction et Compression



- Lorsqu'une barre est en tension (Traction) la force correspondante sort du nœud.
- Lorsqu'une barre est en compression, la force correspondante entre dans le nœud.

$2^{ème}$ méthode : Méthode des sections

Pour la méthode précédente nous avons utilisé seulement 2 des trois équations de l’équilibre car les forces considérées pour un nœud donné sont concourantes. On peut exploiter la troisième équation (équation des moments) en considérant la méthode des sections.

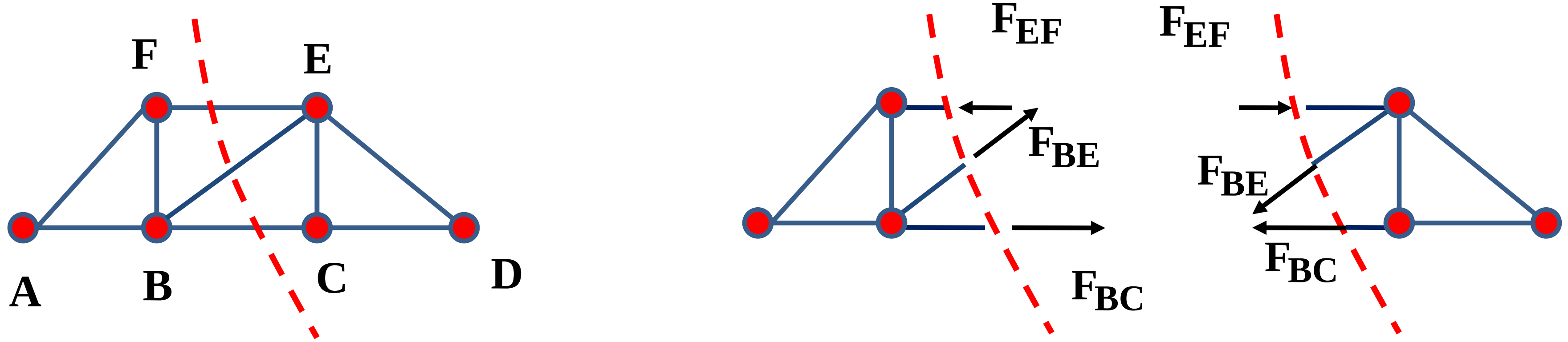
1°) On calcule dans un premier temps les réactions extérieures su le D.C.L de l’ensemble du treillis.

2°) On divise le treillis en deux tronçons au moyen d’une ligne de coupe imaginaire (Cette ligne doit traverser trois barres au maximum).

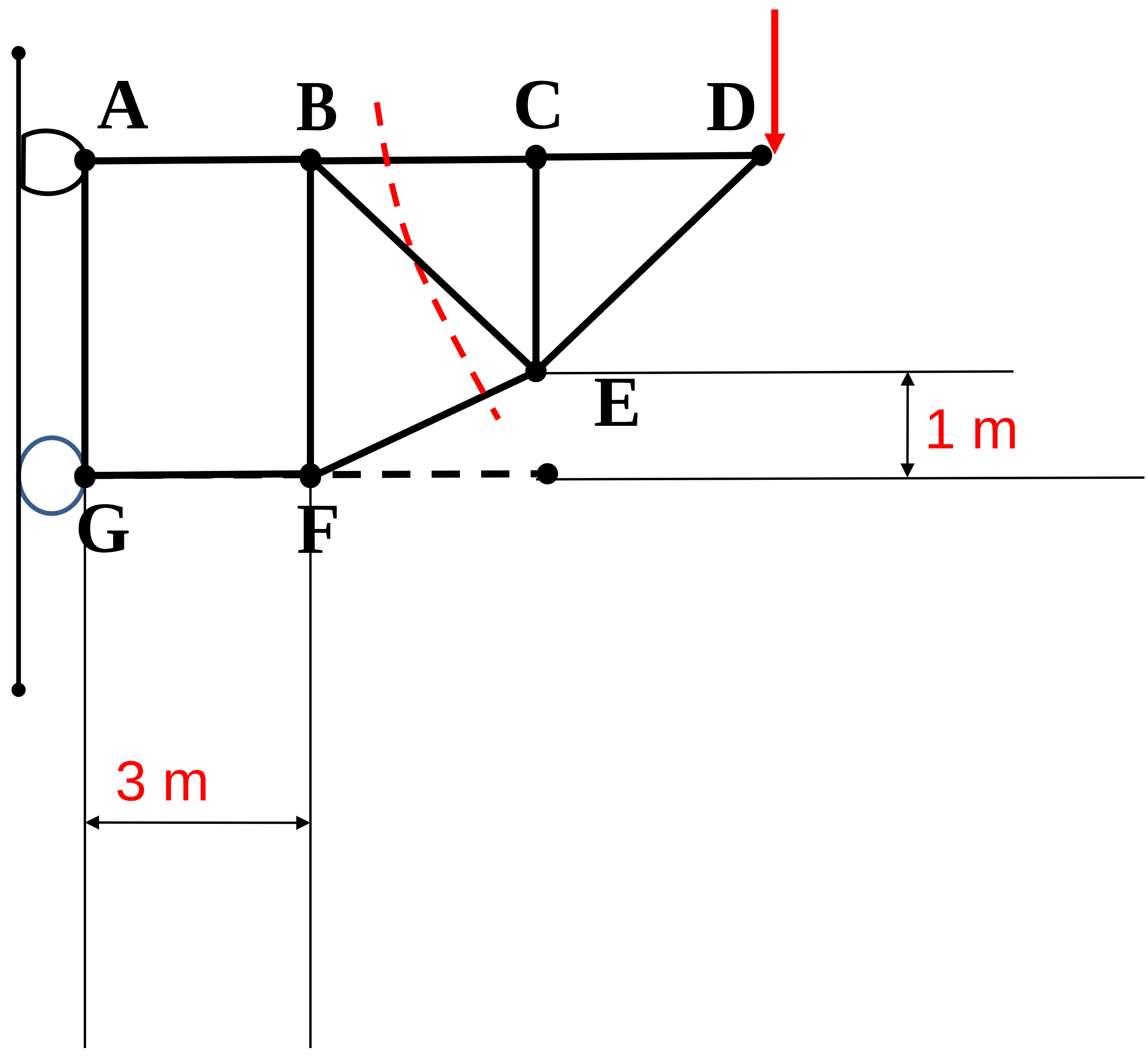
3°) On écrit les trois équations d’équilibre pour chaque tronçon en respectant le principe de l’action et de la réaction.

Principale Avantage: Permettre de trouver directement l’effort de la barre qu’on veut.

Pour un problème donné on peut coupler les deux méthodes



Méthode des sections-Exemple 1



II.1.2 TRELLIS SPATIAL

Pour un treillis spatial appuyé à l'extérieur da façon qu'il soit globalement isostatique, il existe une relation entre le nombre de nœuds et le nombre de barres nécessaires pour assurer la stabilité interne sous liaison s surabondante.

L'équilibre de chaque nœud est décrit par trois équations scalaire de forces: On dispose au total de 3 J équations pour J Nœuds.

Pour un treillis de M Barres, il y a M inconnues plus six inconnues provenant des réactions aux appuis: Le total est de M + 6 inconnues.

Pour un treillis spatial, l'équation $3\,J = M + 6$ est vérifiée si le treillis est isostatique à l'intérieur

Pour un treillis spatial, on peut appliquer l'une des méthodes précédentes pour la détermination des forces supportées par chaque barre.

Pour la méthode des nœuds, l'analyse commence par un nœud ou agit au moins une force connue et qui n'est pas sollicitée par plus de trois forces

Pour la méthode des sections, la section de coupe ne doit pas, en général, couper plus de six barres dont les efforts sont inconnues.

Dans certains cas, on peut utiliser les deux méthodes pour la simplification des calculs.