EXERCICES SUR LES SUITES NUMERIQUES

1. Etudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$a)$	$a_n = n^2 - 2n$	$b)$	$a_n = (n+1)(n+2)\cdots(n+n)$
$c)$	$a_n = n^n - n!$	$d)$	$a_n = n\alpha + (-1)^n \quad (\alpha \text{ réel positif})$

2. Soit a, la suite de terme général $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^3+n^2+2}$. Trouver un entier N, tel que, si $n \geq N$, on ait $|a_n - 1| < 10^{-2}$.
Plus généralement, ε étant un nombre réel strictement positif, déterminer un entier N, tel que, si $n \geq N$, on ait $|a_n - 1| < \varepsilon$. Qu'a-t-on démontré pour la suite (a_n) ?

3. Montrer que si $\lim(a_n) = \ell$ (ℓ finie ou non), on a $\lim(|a_n|) = |\ell|$.
En déduire que si la suite $(|a_n|)$ est divergente, la suite (a_n) est divergente.
Que pensez-vous de la réciproque ?

4. Ecrire sous forme quantifiée les propriétés suivantes :

a) La suite (a_n) n'est pas bornée
b) La suite (a_n) est divergente
c) La suite (a_n) n'est pas monotone

5. Pour chacune des formules suivantes, on demande de dire s'il existe une suite (a_n) qui la vérifie, et le cas échéant, de reconnaître la propriété générale des suites (a_n) qui la vérifient.

$a)$	$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (a_n \leq M)$	$b)$	$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists M \in \mathbb{R})\ (a_n \leq M)$
$c)$	$(\forall M \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ (a_n \leq M)$	$d)$	$(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall M \in \mathbb{R})\ (a_n \leq M)$
$e)$	$(\forall M \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (a_n \leq M)$	$f)$	$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ (a_n \leq M)$

6. Calculer la limite des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ définies par

$a)$	$a_n = \dfrac{\ln(n+\ln n)}{\ln(2n+\ln n)}$	$b)$	$a_n = \dfrac{n+e^n}{2n+e^n}$
$c)$	$a_n = \dfrac{3\sqrt{n}+2\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3}+2\sqrt{n+1}}$	$d)$	$a_n = \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^n+\beta^n} \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels } > 0)$
$e)$	$a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$	$f)$	$a_n = \dfrac{1+3+9+\cdots+3^n}{3^{n+1}}$

7. Calculer la limite ℓ des suites ci-dessous, et trouver, pour chacune d'elles, un entier N, tel que, si $n \geq N$, on ait $|a_n - \ell| \leq 10^{-2}$

$a)\ a_n = \dfrac{n+\cos n}{n-\sin n}$ $\qquad$ $b)\ a_n = \dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$

8. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$$

converge et calculer sa limite. (On rappelle que la partie entière $[u]$ du nombre u vérifie $[u]\le u<[u]+1$).

9. Soit $(u_n)_{n\ge1}$ une suite numérique. On pose

$$v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\ .$$

a) Montrer que si (u_n) converge vers 0 alors (v_n) converge vers 0.

b) Etudier la réciproque en prenant $u_n=(-1)^n$

c) Déduire de a) que si (u_n) converge vers ℓ alors (v_n) converge vers ℓ.

10. Etudier si les suites $(a_n)_{n\ge0}$ définies ci-dessous possèdent une limite

$a)\quad a_n = n^{-2+(-1)^n}$ $\qquad$ $b)\quad a_n=\dfrac{n(-1)^n+1}{2n(-1)^n+3}$ $\qquad$ $c)\quad a_n=e^{n(-1)^n}$

$d)\quad a_n=(-1)^n e^{-n}$ $\qquad$ $e)\quad a_n=n^{-1+(-1)^n}$ $\qquad$ $f)\quad a_n=\cos(\pi\sqrt{n})$

11. Distinguer le vrai du faux. Soit (u_n) une suite réelle.

a) si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1$ et, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a$u_n\ge1$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

b) si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1$, alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\ge0$ pour tout $n\ge n_0$.

c) si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\ell$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.

d) si $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0, alors (u_n) possède une limite finie.

e) si la suite (u_n) ne tend pas vers l'infini, alors elle est bornée.

12. Soit α et β deux nombres réels. A quelle condition la suite $(a_n)_{n\ge0}$ définie par

$$a_n=\sin\sqrt{\alpha+\beta n+\pi^2n^2}$$

a-t-elle une limite ? Calculer cette limite lorsqu'elle existe.
(On commencera par chercher la limite de $b_n=\sqrt{\alpha+\beta n+\pi^2n^2}-n\pi$, puis on exprimera a_n en fonction de b_n).

13. Soit (a_n) une suite. On suppose que les suites extraites x, y et z de (a_n) de terme général $x_n=a_{2n}$, $y_n=a_{2n+1}$ et $z_n=a_{3n}$ convergent. Démontrer que (a_n) converge.

14. Soit α un nombre réel et $(a_n)_{n\geq 1}$, la suite définie par les relations $a_1 = \alpha$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{n+1} = \frac{2(n^2+n+1) + na_n}{(n+1)^2} \ .$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est monotone et bornée, et trouver sa limite ℓ.
Trouver une relation simple entre $a_{n+1} - \ell$ et $a_n - \ell$.
En déduire la valeur de a_n en fonction de α et de n.

15. Soit (u_n) une suite bornée telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n \leq \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \ .$$

Montrer que la suite (u_n) converge (Indication : étudier d'abord la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$).

16. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et on définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a,\ v_0 = b$, et pour tout entier $n \geq 0$ les relations

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \ .$$

a) Montrer que pour tout entier n, les nombres u_n et v_n sont positifs et inférieurs au plus grand des deux nombres a et b.

b) Etablir une relation simple entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$, et en déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n.

c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont une limite commune ℓ.

d) Etudier la suite $(u_n + 2v_n)$ et en déduire la valeur de ℓ.

17. Soit α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$. On pose $a_0 = \alpha$, $b_0 = \beta$ et si $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad ; \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

Montrer que les suites a_n et b_n convergent et ont la même limite ℓ que l'on calculera en fonction de α et de β.
Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{(b_n - a_n)^2}{4\alpha}$$

En déduire que

$$0 \leq b_n - a_n \leq 4\alpha \left(\frac{\beta - \alpha}{4\alpha}\right)^{2^n}$$

Application : trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

18. a) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

b) Soit (v_n) une suite réelle bornée telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{1+v_n^2} = 0$. Montrer que la suite (v_n) converge vers 0.

19. Dans chacun des cas ci-dessous, trouver une suite simple équivalente à la suite (a_n) dont on donne le terme général. En déduire si elle possède une limite.

a) $\dfrac{2n^2-n-10}{n^3+n+2}$ *b)* $\sqrt{n^3+5n^2}-\sqrt{n^3+n}$ *c)* $\dfrac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^2+2^n)}$

d) $\dfrac{1}{n}+2(-1)^n$ *e)* $\dfrac{\alpha n^2+\beta n+\gamma}{n+1}$ $(\alpha,\,\beta,\,\gamma\in\mathbb{R})$ *f)* $\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\beta}$ $(\alpha,\,\beta\in\mathbb{R})$

g) $\dfrac{(-1)^n n+1}{n+\sqrt{n}}$ *h)* $\dfrac{n^\alpha+\alpha^n}{n^{2\alpha}+\alpha^{2n}}$ $(\alpha>0)$ *i)* $\dfrac{n^\alpha+2\sqrt{n}}{n^{2\alpha}+n}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

j) $\dfrac{2^{\lambda n}+3n+1}{2^{\lambda n}+1}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ *k)* $\dfrac{n!+2^n}{(n+1)!+3^n}$ *l)* $\dfrac{n!+n^n}{n^{n+2}+3^n}$

20. Montrer que si P est un polynôme non constant de degré q, on a l'équivalent

$$\ln|P(n)| \sim q\ln n\ .$$

21. On suppose que, à partir d'un certain rang, on a, $a_n\le b_n\le c_n$, et que $a_n\sim c_n$.
a) On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a $a_n>0$. Montrer que $a_n\sim b_n\sim c_n$.

b) Montrer que la conclusion est vraie sans hypothèse de signe sur a_n.

22. Soit (a_n) une suite pour laquelle il existe un nombre $\mu\in[\,0,\,1\,[$, et un nombre réel k tels que, pour tout entier n

$$|a_{n+1}-a_n|\le k\mu^n\ .$$

Montrer que la suite (a_n) converge.

23. Soit la suite de nombre complexes (u_n) définie par $u_0=\alpha$ et vérifiant, pour tout $n\ge 0$, la relation de récurrence

$$u_{n+1}=\frac{u_n+|u_n|}{2}\ .$$

a) Déterminer la suite $(\operatorname{Im} u_n)$ et sa limite.
b) Montrer que les suites $(|u_n|)$ et $(\operatorname{Re} u_n)$ sont monotones.
c) En déduire que la suite (u_n) converge et que sa limite est réelle.
d) Que se passe-t-il si α est réel ?

Corrigé

1. a) Formons la différence $a_{n+1} - a_n$. On a

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 2(n+1) - (n^2 - 2n) = 2n - 1 \ .$$

Cette expression est positive si $n \geq 1$, mais pas si $n = 0$. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est donc pas monotone. Par contre la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

b) Les termes de la suite étant positifs, on peut former le quotient de deux termes consécutifs. On a

$$a_{n+1} = (n+2)(n+3)\cdots(n+1+n+1) \ ,$$

donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} = 2(2n+1) \ .$$

Ceci est donc supérieur à 1 pour tout entier naturel n, et la suite est croissante.

c) Formons la différence $a_{n+1} - a_n$. On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^{n+1} - (n+1)! - (n^n - n!) \\ &= (n+1)^{n+1} - n^n - (n+1)n! + n! \\ &= (n+1)^{n+1} - n^n - nn! \ . \end{aligned}$$

Comme $n! = 1 \cdot 2 \cdots n \leq n \cdot n \cdots n = n^n$, on a alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &\geq (n+1)^{n+1} - n^n - nn^n \\ &\geq (n+1)^{n+1} - (n+1)n^n \\ &\geq (n+1)((n+1)^n - n^n) \ . \end{aligned}$$

On en déduit que la différence est positive et donc que la suite est croissante.

d) Formons la différence $a_{n+1} - a_n$. On a

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)\alpha + (-1)^{n+1} - (n\alpha + (-1)^n) = \alpha + 2(-1)^{n+1} \ .$$

Le membre de droite se minore par $\alpha - 2$. Donc, si $\alpha \geq 2$, le membre de droite est toujours positif, et la suite est croissante.
Si $0 \leq \alpha < 2$, le membre de droite vaut $\alpha + 2$, et est positif si n est impair. Il vaut $\alpha - 2$ et est négatif si n est pair. La suite n'est ni croissante, ni décroisante.

2. On a

$$|a_n - 1| = \left|\frac{-n^2 - 1}{n^3 + n^2 + 2}\right| = \frac{n^2 + 1}{n^3 + n^2 + 2} \ .$$

Mais si $n \geq 1$, on a

$$n^2 + 1 \leq n^2 + n \quad \text{et} \quad n^3 + n^2 + 2 > n^3 + n^2 \ ,$$

Alors

$$|a_n - 1| < \frac{n^2 + n}{n^3 + n^2 + 2} = \frac{1}{n} \ .$$

Si l'on veut rendre $|a_n - 1|$ strictement inférieur à 10^{-2}, il suffit de choisir n tel que

$$\frac{1}{n} \leq 10^{-2} \ ,$$

soit $n \geq 100$. On peut donc prendre $N = 100$.

Si l'on veut rendre $|a_n - 1|$ strictement inférieur à ε, il suffit de choisir n tel que

$$\frac{1}{n} \leq \varepsilon \ ,$$

soit

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon} \ .$$

On pourra prendre $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du nombre x. On a donc ainsi montré que la suite α converge vers 1.

3. Supposons tout d'abord la limite finie. En utilisant l'inégalité triangulaire

$$\Big| |a_n| - |\ell| \Big| \leq |a_n - \ell| \ ,$$

on déduit du théorème d'encadrement que, si (a_n) converge vers ℓ, alors $(|a_n|)$ converge vers $|\ell|$. Il en résulte que si (a_n) est convergente, alors $(|a_n|)$ est convergente, ou encore, en prenant la contraposée, que si $(|a_n|)$ est divergente, alors (a_n) est divergente.

Si $\ell = +\infty$, alors a_n est positif à partir d'un certain rang q, et donc à partir de ce rang q, on a $|a_n| = a_n$. Donc $(|a_n|)$ admet $+\infty$ comme limite.

Si $\ell = -\infty$, alors a_n est négatif à partir d'un certain rang q, et donc à partir de ce rang q, on a $|a_n| = -a_n$. Donc $(|a_n|)$ admet $+\infty$ comme limite.

L'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$, montre que $(|a_n|)$ converge (puisque c'est une suite constante), mais que (a_n) diverge.

4. a) Ecrivons "la suite est bornée" :

$$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (|a_n| \leq M) \ .$$

Donc en la niant

$$(\forall M \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ (|a_n| > M) \ .$$

b) Ecrivons "la suite est convergente" :

$$(\exists \ell \in \mathbb{R})\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists q \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ((n \geq q) \Rightarrow (|a_n - \ell| < \varepsilon)) \ .$$

Donc en la niant

$$(\forall \ell \in \mathbb{R})\ (\exists \varepsilon > 0)\ (\forall q \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ ((n \geq q) \text{ et } (|a_n - \ell| \geq \varepsilon)) \ .$$

c) Ecrivons "la suite est monotone", c'est-à-dire, "la suite est croissante ou décroissante" :

$$((\forall n \in \mathbb{N})\ (a_{n+1} \geq a_n))\ \text{ou}\ ((\forall n' \in \mathbb{N})\ (a_{n'+1} \leq a'_n))\ .$$

Donc en la niant

$$((\exists n \in \mathbb{N})\ (a_{n+1} < a_n))\ \text{et}\ ((\exists n' \in \mathbb{N})\ (a_{n'+1} > a_{n'}))\ .$$

5. a) Ceci est la définition d'une suite majorée.

b) Cette propriété est vérifiée par toutes les suites. Il suffit de prendre pour tout n, le nombre M égal à a_n.

c) La négation de cette propriété s'écrit

$$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (a_n > M)\ ,$$

qui signifie que la suite est bornée inférieurement. Donc c) signifie que la suite n'est pas bornée inférieurement. Exemple la suite $(-n)$.

d) La négation de cette propriété s'écrit

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists M \in \mathbb{R})\ (a_n > M)\ .$$

Elle est vérifiée par toute suite (a_n) (il suffit de prendre $M = a_n - 1$). Donc aucune suite ne vérifie d).

e) La négation de cette propriété s'écrit

$$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ (a_n > M)\ .$$

Elle est vérifiée par toute suite (a_n) (il suffit de prendre $n = 1,\ M = a_1 - 1$). Donc aucune suite ne vérifie e).

f) Cette propriété est vérifiée par toutes les suites. Il suffit de prendre $n = 1,\ M = a_1$.

6. a) Pour le numérateur, on écrit

$$\ln(n + \ln n) = \ln\left(n\left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)\ .$$

De même pour le dénominateur

$$\ln(2n + \ln n) = \ln n + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{\ln n}{2n}\right)\ .$$

Alors en divisant le numérateur et le dénominateur de a_n par $\ln n$, on obtient

$$a_n = \frac{1 + \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{\ln n}{n}\right)}{\ln n}}{1 + \dfrac{\ln 2}{\ln n} + \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{\ln n}{2n}\right)}{\ln n}}\ ,$$

et la suite (a_n) converge vers 1 car $(\ln n/n)$ et $(1/\ln n)$ convergent vers zéro.

b) On divise numérateur et dénominateur par e^n. On obtient

$$a_n = \frac{1+ne^{-n}}{1+2ne^{-n}} \,,$$

et la suite (a_n) converge vers 1 car (ne^{-n}) converge vers zéro.

c) On cherche la plus grosse puissance figurant au numérateur et au dénominateur. Il s'agit dans les deux cas de $\sqrt{n} = n^{1/2}$. On divise par cette puissance. Il vient

$$a_n = \frac{3+2\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}+\dfrac{1}{n^{1/6}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{3}{n^2}}+2\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} \,,$$

et la suite (a_n) converge vers 5/3 car $(1/n^p)$ converge vers zéro si $p > 0$.

d) Si $\alpha > \beta$, on divise par α^n le numérateur et le dénominateur. On trouve

$$a_n = \frac{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n} \,,$$

et comme $0 < \beta/\alpha < 1$, la suite $((\beta/\alpha)^n)$ converge vers zéro, et (a_n) converge vers 1.

Si $\alpha < \beta$, on divise par β^n le numérateur et le dénominateur. On trouve

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n-1}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+1} \,,$$

et comme $0 < \alpha/\beta < 1$, la suite $((\alpha/\beta)^n)$ converge vers zéro, et (a_n) converge vers -1.

Enfin si $\alpha = \beta$ la suite (a_n) est constante et vaut zéro ainsi que sa limite.

e) On utilise la somme des termes d'une suite arithmétique

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

Alors

$$a_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \,,$$

et la suite (a_n) converge vers 1/2.

f) On utilise la somme des termes d'une suite géométrique

$$1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \ .$$

Alors

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}} \ ,$$

et la suite (a_n) converge vers $1/2$.

7. a) En divisant le numérateur et le dénominateur par n, on a

$$a_n = \frac{1 + \dfrac{\cos n}{n}}{1 - \dfrac{\sin n}{n}} \ .$$

Mais $(\sin n)$ et $(\cos n)$ sont des suites bornées, et $(1/n)$ converge vers zéro, donc $(\sin n/n)$ et $(\cos n/n)$ convergent vers zéro. Par suite (a_n) converge vers 1. On a alors

$$a_n - 1 = \frac{\cos n + \sin n}{n - \sin n} \ .$$

Mais

$$|\cos n + \sin n| \leq |\cos n| + |\sin n| \leq 2 \ ,$$

et pour $n \geq 2$,

$$|n - \sin n| \geq n - 1 > 0 \ .$$

Donc

$$|a_n - 1| \leq \frac{2}{n - 1} \ .$$

Si l'on veut rendre $|a_n - 1|$ inférieur à 10^{-2}, il suffit que

$$\frac{2}{n - 1} \leq 10^{-2} \ ,$$

soit $n \geq 201$. on peut donc prendre $N = 201$.

b) On a, pour tout entier j compris entre 1 et n,

$$\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + j} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n} \ .$$

Comme a_n est la somme des n termes $n/(n^2 + j)$ pour j compris entre 1 et n, on aura

$$\frac{n}{n+1} \leq a_n \leq 1 \ ,$$

et le théorème d'encadrement montre que (a_n) converge vers 1. Alors

$$0 \leq 1 - a_n \leq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \ .$$

Pour rendre $|a_n - 1| = 1 - a_n$ inférieur à 10^{-2}, il suffit de rendre $1/(n+1)$ inférieur à 10^{-2}, donc d'avoir $n \geq 99$. On peut donc prendre $N = 99$.

8. On a donc pour tout nombre réel u, les inégalités $u - 1 < [u] \leq u$, donc, pour tout entier p

$$px - 1 < [px] \leq px ,$$

et en sommant ces inégalités pour p variant de 1 à n,

$$\sum_{p=1}^{n}(px - 1) < \sum_{p=1}^{n}[px] \leq \sum_{p=1}^{n} px ,$$

mais

$$\sum_{p=1}^{n} px = x \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}\, x ,$$

et

$$\sum_{p=1}^{n}(px - 1) = \sum_{p=1}^{n} px - nx = \frac{n(n+1)}{2}\, x - nx .$$

Alors

$$x\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq x\,\frac{n+1}{2n} .$$

Comme le membre de gauche et celui de droite convergent vers la même limite $x/2$, il résulte du théorème d'encadrement que la suite (u_n) converge et a pour limite $x/2$.

9. a) Soit $\varepsilon > 0$. il existe N tel que $n \geq N$ implique $|u_n| < \varepsilon/2$. Alors, si $n \geq N$,

$$|v_n| \leq \frac{|v_1| + \cdots + |v_{N-1}| + |v_N| + \cdots + |v_n|}{n} \leq \frac{|v_1| + \cdots + |v_{N-1}| + (n - N + 1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} .$$

Si l'on pose

$$w_n = \frac{|v_1| + \cdots + |v_{N-1}| + (n - N + 1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} ,$$

la suite (w_n) converge vers $\varepsilon/2$. Il existe donc N' tel que $n \geq N'$ implique

$$\left|w_n - \frac{\varepsilon}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

On en déduit

$$w_n - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

donc

$$w_n < \varepsilon ,$$

Alors si $n \geq \max(N, N')$, on obtient $|v_n| < \varepsilon$, ce qui montre que la suite (v_n) converge vers 0.

b) Si $u_n = (-1)^n$, on trouve

$$u_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} ,$$

et les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 0. Donc (u_n) converge vers 0. Par contre (u_n) n'a pas de limite.

c) Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(u_n - \ell)$ converge vers 0. Mais

$$v_n - \ell = \frac{(u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n} ,$$

et la suite $(v_n - \ell)$ converge vers 0 d'après a). Il en résulte que (v_n) converge vers ℓ.

10. a) On a $a_{2n} = 1/(2n)$ et $a_{2n+1} = 1/(2n+1)^3$. Les deux suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers zéro, donc (a_n) également.

b) On divise numérateur et dénominateur par $(-1)^n n$. Il vient

$$\frac{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}}{2 + \dfrac{3(-1)^n}{n}} .$$

Or la suite $((-1)^n)$ est bornée, et la suite $(1/n)$ converge vers zéro. Donc $((-1)^n/n)$ converge vers zéro, et (a_n) converge vers $1/2$. (On peut voir également que les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent toutes deux vers $1/2$.

c) On a $a_{2n} = e^{2n}$ et la suite (a_{2n}) admet $+\infty$ comme limite. On a également $a_{2n+1} = e^{-2n-1}$ et la suite (a_{2n+1}) converge vers zéro. La suite (a_n) n'a donc pas de limite.

d) La suite $((-1)^n)$ est bornée, et la suite (e^{-n}) converge vers zéro. Donc le produit (a_n) de ces suites converge aussi vers zéro.

e) On a $a_{2n} = (2n)^0 = 1$, et la suite $(a_{2n})_{n\geq 1}$ converge vers 1. On a également $a_{2n+1} = 1/(2n+1)^2$, et la suite $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers 0. Les deux suites extraites ayant des limites différentes, la suite (a_n) n'a pas de limite.

f) On a $a_{n^2} = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Cette suite extraite n'a pas de limite, donc la suite (a_n) n'a pas de limite.

11.) a) FAUX Soit la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$. On a

$$|u_n - 1| \leq \frac{2}{n} ,$$

et il résulte du théorème d'encadrement que (u_n) converge vers 1. Par ailleurs $u_n = 1$ si n est impair et $u_n = 1 + 2/n$ si n est pair, donc, pour tout entier $n > 0$, on a $u_n \geq 1$. Enfin, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{2n+1} - u_{2n+2} = -\frac{1}{n+1} < 0$, et la suite n'est pas décroissante.

b) VRAI Soit $\varepsilon = 1/2$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $|u_n - 1| < 1/2$, ce qui implique $u_n - 1 > -1/2$, donc $u_n > 1/2 > 0$.

c) VRAI (u_{n+1}) est une suite extraite de (u_n) et a donc même limite. Alors $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell - \ell = 0$.

d) FAUX Si $u_n = \sqrt{n}$, la suite (u_n) n'a pas de limite finie, mais

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \ ,$$

et $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.

e) FAUX Si $u_n = n(-1)^n$, alors (u_{2n}) a pour limite $+\infty$ et (u_{2n+1}) a pour limite $-\infty$, donc (u_n) n'a pas de limite, mais elle n'est pas bornée.

12. En multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur, on a

$$b_n = \frac{\alpha + \beta n}{\sqrt{\alpha + \beta n + \pi^2 n^2} + n\pi} \ ,$$

puis, en divisant par n le numérateur et le dénominateur,

$$b_n = \frac{\beta + \dfrac{\alpha}{n}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{\alpha}{n^2}}} \ ,$$

et (b_n) converge vers $\beta/(2\pi)$. Mais

$$\sin b_n = \sin(\sqrt{\alpha + \beta n + \pi^2 n^2} - n\pi) = (-1)^n \sin \sqrt{\alpha + \beta n + \pi^2 n^2} \ .$$

Donc

$$a_n = (-1)^n \sin b_n \ .$$

Alors (a_{2n}) converge vers $\ell = \sin(\beta/(2\pi))$ et (a_{2n+1}) converge vers $\ell' = -\sin(\beta/(2\pi))$. La suite a_n a une limite si et seulement si $\ell = \ell'$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\sin \frac{\beta}{2\pi} = 0 \ ,$$

soit

$$\frac{\beta}{2\pi} = k\pi$$

avec k entier. Finalement a_n a une limite si et seulement si $\beta = 2k\pi^2$, et dans ce cas la limite est nulle.

13. La suite (a_{6n}) est une suite extraite de (a_{2n}). Elle converge donc vers $\alpha = \lim a_{2n}$. Mais c'est aussi une suite extraite de (a_{3n}). Elle converge donc vers $\gamma = \lim a_{3n}$. Il en résulte que $\alpha = \gamma$.

La suite (a_{6n+3}) est une suite extraite de (a_{2n+1}) car $6n+3 = 2(3n+1)+1$. Elle converge donc vers $\beta = \lim a_{2n+1}$. Mais c'est aussi une sous-suite de a_{3n}. Elle converge donc vers γ. Il en résulte que $\beta = \gamma$.

On a donc $\alpha = \beta$. Et comme les suites des termes de rang pair et de rang impair de (a_n) convergent vers la même limite, la suite (a_n) converge également vers cette limite commune.

14. Remarquons tout d'abord que la suite (a_n) est positive (Cela se démontre par récurrence). Pour étudier la monotonie de la suite, évaluons $a_{n+1} - a_n$. On obtient

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n^2+n+1) + na_n}{(n+1)^2} - a_n \\ &= \frac{(2-a_n)(n^2+n+1)}{(n+1)^2} \ . \end{aligned}$$

La différence $a_{n+1} - a_n$ est donc du signe de $2 - a_n$. Calculons alors $2 - a_{n+1}$. On obtient

$$\begin{aligned} 2 - a_{n+1} &= 2 - \frac{2(n^2+n+1) + na_n}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n(2-a_n)}{(n+1)^2} \ . \end{aligned}$$

Il en résulte que si $n \geq 1$, les nombres $2 - a_{n+1}$ et $2 - a_n$ ont le même signe. Cela signifie que ce signe ne dépend pas de n. C'est celui de $2 - a_1$. On a alors les cas suivants :

(i) Si $a_1 \leq 2$, on a, pour tout n, l'inégalité $a_n \leq 2$ et la suite est majorée par 2. Par ailleurs, pour tout n , le nombre $2 - a_n$ est positif donc $a_{n+1} - a_n$ également. La suite est donc croissante.

(ii) Si $a_1 \geq 2$, on a , pour tout n, l'inégalité $a_n \geq 2$ et la suite est minorée par 2. Par ailleurs, pour tout n, le nombre $2-a_n$ est négatifdonc $a_{n+1}-a_n$ également. La suite est donc décroissante.

Dans tous les cas la suite est convergente. Pour trouver sa limite écrivons par exemple

$$a_{n+1} = 2\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} + a_n\frac{n}{(n+1)^2} \ .$$

La suite $2\dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$ converge vers 2. La suite de terme général $\dfrac{n}{(n+1)^2}$ vers zéro, et la suite a_n vers ℓ. Alors par passage à la limite on en déduit que

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 2 + \ell \times 0 = 2 \ .$$

Donc $\ell = 2$.

En reprenant un calcul fait plus haut, on a, si $n \geq 1$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{n(a_n - 2)}{(n+1)^2} \ ,$$

soit, pour $p \geq 2$

$$a_p - 2 = \frac{(p-1)(a_{p-1} - 2)}{p^2} \ .$$

On en déduit alors que

$$a_n - 2 = \frac{n-1}{n^2}\frac{n-2}{(n-1)^2}\cdots\frac{2}{3^2}\frac{1}{2^2}(a_1-2)\ .$$

On a donc

$$a_n - 2 = \frac{(n-1)!}{(n!)^2}(a_1-2) = \frac{1}{nn!}(a_1-2)\ ,$$

et finalement

$$a_n = \frac{1}{nn!}(a_1-2)+2\ .$$

15. La relation donnée équivaut à

$$u_{n+1} - u_n \geq u_n - u_{n-1}\ ,$$

soit $v_{n+1} \geq v_n$. La suite (v_n) est donc croissante. Mais, si pour tout entier n, on a $|u_n| \leq M$, alors

$$|v_n| \leq |u_n| + |u_{n-1}| \leq 2M\ ,$$

et la suite (v_n) est bornée. C'est donc une suite croissante majorée. Elle converge vers une limite ℓ. Il y a alors trois cas :

Si $\ell < 0$, la suite (v_n) est négative à partir d'un certain rang, donc, à partir de ce rang $u_n \leq u_{n-1}$ et la suite (u_n) est décroissante minorée, donc converge.

Si $\ell = 0$, la suite (v_n) est croissante et converge vers 0, donc elle est négative, et comme dans le cas précédent la suite (u_n) est décroissante minorée, donc converge.

Si $\ell > 0$, la suite (v_n) est positive à partir d'un certain rang, donc, à partir de ce rang $u_n \geq u_{n-1}$ et la suite (u_n) est croissante majorée, donc converge.
En fait cette dernière situation ne peut avoir lieu. Sinon, il existerait N tel que $p \geq N$ implique

$$u_p - u_{p-1} \geq \frac{\ell}{2}\ ,$$

d'où en sommant ces inégalités pour p variant de N à n

$$u_n - u_{N-1} = \sum_{p=N}^{n}(u_p - u_{p-1}) \geq \sum_{p=N}^{n}\frac{\ell}{2} = (n-N+1)\,\frac{\ell}{2}\ ,$$

ce qui donne

$$u_n \geq u_{N-1} + (n-N+1)\,\frac{\ell}{2}\ .$$

Et comme le membre de droite tend vers $+\infty$ il en serait de même de celui de gauche.

16. a) Notons M le plus grand des deux nombres a et b. On montre alors par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq u_n \leq M$ et $0 \leq v_n \leq M$. C'est vrai pour $n = 0$. Si l'on suppose la propriété vraie à l'ordre n, alors u_{n+1} est la moyenne de deux nombres compris entre 0 et M et donc est aussi compris entre 0 et M, puis il en est de même de v_{n+1}. La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$ donc pour tout entier $n \geq 0$.

b) On obtient

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{u_n + v_n}{2}\right) = \frac{u_n - v_n}{4} \ .$$

La suite $(u_n - v_n)$ est donc une suite géométrique de raison $1/4$, et

$$u_n - v_n = \frac{a-b}{4^n} \ .$$

c) D'après ce qui précède

$$u_{n+1} - u_n = -2(u_{n+1} - v_{n+1}) = \frac{2(b-a)}{4^{n+1}} \ ,$$

cette expression est du signe de $b-a$. La suite (u_n) est donc monotone. Comme elle est bornée elle converge vers une limite ℓ. Mais

$$v_n = u_n - \frac{a-b}{4^n} \ ,$$

donc (v_n) converge aussi vers ℓ.

d) On a

$$u_{n+1} + 2v_{n+1} = 2u_{n+1} + v_n = u_n + 2v_n \ .$$

La suite $(u_n + 2v_n)$ est donc constante et vaut $a + 2b$. Par ailleurs elle admet 3ℓ comme limite. On en déduit donc que

$$\ell = \frac{a+2b}{3} \ .$$

17. On montre tout d'abord par récurrence, que pour tout entier n, les nombres a_n et b_n existent et sont strictement positifs. C'est vrai à l'ordre 0 par hypothèse. Si on suppose la propriété vraie à l'ordre n, alors $a_n + b_n$ et $a_n b_n$ sont strictement positifs, donc a_{n+1} et b_{n+1} existent et sont positifs.

Pour étudier la monotonie des suites, on calcule

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} - a_n = \frac{a_n(b_n - a_n)}{a_n + b_n}$$

et

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

et l'on constate que le signe de ces différences dépend de celui de $b_n - a_n$.
Or

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \ .$$

Il en résulte que $b_{n+1} - a_{n+1}$ est positif pour tout $n \geq 0$. Comme par ailleurs $b_0 - a_0 = \beta - \alpha$ est positif par hypothèse, on en déduit que $b_n - a_n$ est positif pour tout $n \geq 0$. Alors, d'une part $a_{n+1} - a_n$ est positif pour tout entier n et la suite a_n est croissante, et d'autre part $b_{n+1} - b_n$ est négatif pour tout n et la suite b_n est décroissante.

On a donc
$$0 < a_0 = \alpha \leq a_n \leq b_n \leq b_0 = \beta \ .$$
Il en résulte que a_n est une suite croissante majorée par β. Elle converge vers une limite ℓ. De même la suite b_n est décroissante et minorée par α. Elle converge vers une limite ℓ'. Mais en passant à la limite dans la relation
$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \ ,$$
on obtient
$$\ell' = \frac{1}{2}(\ell + \ell') \ ,$$
d'où l'on déduit que $\ell = \ell'$. Cette limite ℓ est positive.

Pour trouver cette limite, on remarque que pour tout entier n
$$a_{n+1}\, b_{n+1} = a_n\, b_n \ .$$
Cette suite est donc constante, et sa limite est égale à son premier terme. On en déduit que
$$\ell^2 = \alpha\beta \ ,$$
et donc, puisque ℓ est positive, que $\ell = \sqrt{\alpha\beta}$.

En partant de l'égalité
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \ ,$$
et en minorant a_n et b_n par α, on en déduit que
$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{(a_n - b_n)^2}{4a} \ .$$
On démontre alors par récurrence la propriété suivante :
$$b_n - a_n \leq 4a \left(\frac{\beta - \alpha}{4a}\right)^{2^n} \ .$$
A l'ordre 0, on a une égalité :
$$b_0 - a_0 = \beta - \alpha = 4a \left(\frac{\beta - \alpha}{4a}\right)^{2^0} \ .$$
Supposons l'inégalité vraie à l'ordre n. On a
$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{(a_n - b_n)^2}{4a} \ ,$$
donc en utilisant la relation à l'ordre n
$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} \ &\leq \ \frac{\left(4a\left(\frac{\beta-\alpha}{4a}\right)^{2^n}\right)^2}{4a} \\ &\leq \ 4a\left(\frac{\beta-\alpha}{4a}\right)^{2\cdot 2^n} \\ &\leq \ 4a\left(\frac{\beta-\alpha}{4a}\right)^{2^{n+1}} \ . \end{aligned}$$

On obtient la relation à l'ordre $n+1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Pour obtenir $\ell = \sqrt{2}$, il suffit de prendre $b = 2$ et $a = 1$. Dans ce cas

$$0 \leq \sqrt{2} - a_n \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{4^{2^n - 1}} \ .$$

Et de même

$$0 \leq b_n - \sqrt{2} \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{4^{2^n - 1}} \ .$$

Si l'on veut rendre le membre de droite inférieur à 10^{-4} il suffit de prendre $n = 3$. On calcule alors les premiers termes :

$$a_1 = \frac{4}{3} \quad b_1 = \frac{3}{2} \quad a_2 = \frac{24}{17} \quad b_2 = \frac{17}{12} \quad a_3 = \frac{816}{577} \quad b_3 = \frac{577}{408} \ .$$

Il en résulte que a_3 est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$ et que b_3 est une valeur approchée par excès de ce nombre.
On remarque que $a_3 = 1,414211\ldots$ et que $\sqrt{2} = 1,414213\ldots$. La valeur approchée obtenue est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-6}$ c'est-à-dire meilleure que le prévoyait la majoration précédente.

18. 1) Posons $\alpha_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$. On en déduit facilement que

$$u_n = \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} \ ,$$

et puisque (α_n) converge vers 0, il résulte du théorème sur les limites que (u_n) converge aussi vers 0.

2) Comme (v_n) est bornée, il en est de même de $(1 + v_n^2)$, alors

$$v_n = \frac{v_n}{1 + v_n^2} (1 + v_n^2) \ ,$$

et (v_n) est le produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0. Elle converge aussi vers 0.

19. Dans la plupart des exercices suivants, la méthode consiste à mettre en facteur au numérateur et au dénominateur le terme "prépondérant" (pas nécessairement le même). Lorsque ces deux termes sont identiques, cela revient à diviser numérateur et dénominateur par leur valeur commune.

Pour les exercices comportant une différence de radicaux, on commence par multiplier par la quantité conjuguée.

On se rappellera que si ℓ est une valeur finie non nulle, il est identique de dire "(a_n) converge vers ℓ" ou "(a_n) est équivalente à la suite constante (ℓ)".

a) On met en facteur au numérateur et au dénominateur le terme de puissance la plus élevée.

$$\frac{2n^2-n-10}{n^3+n+2} = \frac{2n^2\left(1-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}\right)} = \frac{2}{n}\left(\frac{1-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}\right) .$$

En raison des théorèmes sur les limites, la quantité entre parenthèses converge vers 1, et donc, par définition des équivalents

$$\frac{2n^2-n-10}{n^3+n+2} \sim \frac{2}{n} .$$

Et puisque $(1/n)$ converge vers 0, on en déduit que (a_n) converge vers 0.

b) En utilisant la quantité conjuguée du dénominateur, on écrit

$$a_n = \frac{5n^2-n}{\sqrt{n^3+5n^2}+\sqrt{n^3+n}} .$$

Puis en mettant en facteur au numérateur et au dénominateur la puissance la plus élevée,

$$a_n = \frac{n^2\left(5-\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)} .$$

On a donc

$$a_n \sim \frac{5n^2}{2\sqrt{n^3}} = \frac{5}{2}\sqrt{n} ,$$

et (a_n) admet $+\infty$ comme limite.

c) On peut écrire a_n en faisant apparaître les quantités prépondérantes.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^2+2^n)} \\
&= \frac{\ln\left[n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]}{\ln[2^n(1+n^2 2^{-n})]} \\
&= \frac{2\ln n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\ln 2+\ln(1+n^2 2^{-n})} \\
&= \frac{2\ln n}{n\ln 2}\ \frac{1+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{2\ln n}}{1+\dfrac{\ln(1+n^2 2^{-n})}{n\ln 2}}
\end{aligned}$$

Comme la fraction de droite converge vers 1, on en déduit que

$$a_n \sim \frac{2\ln n}{n\ln 2} ,$$

et la suite (a_n) converge vers zéro.

d) On met en facteur $(-1)^n$.

$$\frac{1}{n} + 2(-1)^n = 2(-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right) .$$

L'expression entre parenthèses converge vers 1, donc (a_n) est équivalente à $(2(-1)^n)$, et n'a pas de limite.

e) Il faut discuter suivant les valeurs des nombres $\alpha\ \beta\ \gamma$.
Si α est non nul, $a_n \sim \alpha\, n$ et (a_n) admet $+\infty$ comme limite si α est positif, et $-\infty$ sinon.
Si α est nul et β non nul, la suite (a_n) converge vers β.
Si α et β sont nuls et γ non nul, $a_n \sim \gamma/n$, et la suite (a_n) converge vers 0.
Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, on a $a_n = 0$, donc $a_n \sim 0$, et (a_n) converge vers 0.

f) On met $\sqrt{n}$ en facteur.

$$\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\beta} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}} + \sqrt{1+\frac{\beta}{n}}\right) .$$

La quantité entre parenthèses converge vers 2, donc

$$\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\beta} \sim 2\sqrt{n} ,$$

et la suite (a_n) admet $+\infty$ comme limite..

g) On met $(-1)^n n$ en facteur au numérateur et n au dénominateur.

$$\frac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}} = \frac{(-1)^n n \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)} = (-1)^n \left(\frac{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}\right) .$$

La quantité entre parenthèses converge vers 1, donc

$$\frac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}} \sim (-1)^n ,$$

et la suite (a_n) n'a pas de limite.

h) La quantité prépondérante au numérateur et au dénominateur dépend de la position de α par rapport à 1. On a les trois cas suivants :

(i) $\alpha > 1$. Dans ce cas

$$n^\alpha + \alpha^n = \alpha^n(1 + n^\alpha \alpha^{-n}) \sim \alpha^n ,$$

et

$$n^{2\alpha} + \alpha^{2n} = \alpha^{2n}(1 + n^{2\alpha} a^{-2n}) \sim \alpha^{2n} ,$$

d'où

$$a_n \sim \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}} = \frac{1}{\alpha^n} \ ,$$

et (a_n) converge vers zéro.

(ii) $\alpha < 1$. Dans ce cas

$$n^\alpha + \alpha^n = n^\alpha \left(1 + \frac{\alpha^n}{n^\alpha}\right) \sim n^\alpha \ ,$$

et

$$n^{2\alpha} + \alpha^{2n} = n^{2\alpha} \left(1 + \frac{\alpha^{2n}}{n^{2\alpha}}\right) \sim n^{2\alpha} \ ,$$

d'où

$$a_n \sim \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^\alpha} \ ,$$

et (a_n) converge vers zéro.

(iii) $\alpha = 1$. Dans ce cas

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n} \ ,$$

et (a_n) converge vers zéro.

Dans tous les cas la suite converge vers zéro.

i) La quantité prépondérante au numérateur et au dénominateur dépend de la position de α par rapport à $1/2$. On a les trois cas suivants :

(i) $\alpha > 1/2$. Dans ce cas

$$n^\alpha + 2\sqrt{n} = n^\alpha \left(1 + 2n^{1/2-a}\right) \sim n^\alpha \ ,$$

et

$$n^{2\alpha} + n = n^{2\alpha}(1 + n^{1-2a}) \sim n^{2\alpha} \ ,$$

d'où

$$a_n \sim \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^\alpha} \ ,$$

et (a_n) converge vers zéro.

(ii) $\alpha < 1/2$. Dans ce cas

$$n^\alpha + 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n} \left(1 + \frac{n^{a-1/2}}{2}\right) \sim 2\sqrt{n} \ ,$$

et

$$n^{2\alpha} + n = n(1 + n^{2a-1}) \sim n \ ,$$

d'où

$$a_n \sim \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \ ,$$

et (a_n) converge vers zéro.

(iii) $\alpha = 1/2$. Dans ce cas

$$a_n = \frac{3\sqrt{n}}{2n} = \frac{3}{2\sqrt{n}} ,$$

et (a_n) converge vers zéro.

Dans tous les cas la suite converge vers zéro.

j) La quantité prépondérante au numérateur et au dénominateur dépend de la position de 2^λ par rapport à 1, c'est-à-dire du signe de λ. On a les trois cas suivants :

(i) $\lambda > 0$. Dans ce cas

$$2^{\lambda n} + 3n + 1 = 2^{\lambda n}(1 + (3n+1)2^{-\lambda n}) \sim 2^{\lambda n} ,$$

et

$$2^{\lambda n} + 1 = 2^{\lambda n}(1 + 2^{-\lambda n}) \sim 2^{\lambda n} ,$$

Donc

$$a_n \sim 1 ,$$

et (a_n) converge vers 1.

(ii) $\lambda < 0$. Dans ce cas

$$2^{\lambda n} + 3n + 1 = 3n\left(1 + \frac{2^{\lambda n}+1}{3n}\right) \sim 3n ,$$

et le dénominateur converge vers 1. Donc

$$a_n \sim 3n ,$$

et (a_n) admet $+\infty$ pour limite.

(iii) $\lambda = 0$. Dans ce cas

$$a_n = \frac{3n+2}{2} \sim \frac{3n}{2} ,$$

et (a_n) admet $+\infty$ pour limite.

k) Les factorielles étant prépondérantes, on met $n!$ en facteur au numérateur et $(n+1)!$ au dénominateur

$$\frac{n! + 2^n}{(n+1)! + 3^n} = \frac{n!\left(1 + \dfrac{2^n}{n!}\right)}{(n+1)!\left(1 + \dfrac{3^n}{(n+1)!}\right)} = \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{1 + \dfrac{2^n}{n!}}{1 + \dfrac{3^n}{(n+1)!}}\right) .$$

La quantité entre parenthèses converge vers 1. Donc

$$\frac{n! + 2^n}{(n+1)! + 3^n} \sim \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} ,$$

et la suite (a_n) converge vers zéro.

l) Remarquons tout d'abord que, si $n \geq 2$,

$$n! = 2 \times \cdots \times n \leq n^{n-1} \ ,$$

on en déduit que

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \ .$$

D'autre part, si $n \geq 3$,

$$3^n \leq n^n \ ,$$

et

$$0 \leq \frac{3^n}{n^{n+2}} \leq \frac{1}{n^2} \ .$$

Et, en utilisant le théorème d'encadrement, les suites $(n!/n^n)$ et $(3^n/n^{n+2})$ convergent vers zéro. En mettant n^n en facteur au numérateur et n^{n+2} au dénominateur, on obtient

$$\frac{n! + n^n}{n^{n+2} + 3^n} = \frac{n^n \left(1 + \dfrac{n!}{n^n}\right)}{n^{n+2}\left(1 + \dfrac{3^n}{n^{n+2}}\right)} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1 + \dfrac{n!}{n^n}}{1 + \dfrac{3^n}{n^{n+2}}}\right) \ .$$

La quantité entre parenthèses converge vers 1, donc

$$\frac{n! + n^n}{n^{n+2} + 3^n} \sim \frac{1}{n^2} \ ,$$

et la suite (a_n) converge vers 0.

20. On peut écrire

$$P(x) = a_q x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots + a_0 \ ,$$

avec a_q non nul. On calcule $\ln |P(n)|$ en mettant n^q en facteur et en prenant le logarithme, il vient

$$\ln |P(n)| = \ln n^q + \ln \left| a_q + \frac{a_{q-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^q} \right| \ ,$$

puis en mettant $\ln n^q = q \ln n$ en facteur

$$\ln |P(n)| = q \ln n \left(1 + \frac{\ln \left| a_q + \dfrac{a_{q-1}}{n} + \cdots + \dfrac{a_0}{n^q} \right|}{q \ln n} \right) \ .$$

La quantité entre parenthèses converge vers 1, donc

$$\ln |P(n)| \sim q \ln n \ .$$

21. a) Si l'on suppose $a_n > 0$ à partir d'un certain rang, on a alors

$$1 \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \frac{c_n}{a_n} \ .$$

Mais comme $c_n \sim a_n$, la suite (c_n/a_n) converge vers 1, donc d'après le théorème d'encadrement, la suite (b_n/a_n) converge également vers 1, et l'on a bien $b_n \sim a_n$.

b) Si l'on ne suppose plus $a_n > 0$ à partir d'un certain rang, on procède de la manière suivante.

Puisque $c_n \sim a_n$, il existe une suite (ε_n) qui converge vers 1 et telle que, à partir d'un certain rang

$$c_n = \varepsilon_n a_n \ .$$

On pose

$$\eta_n = \begin{cases} \varepsilon_n & \text{si } a_n = 0 \\ \dfrac{b_n}{a_n} & \text{si } a_n \neq 0 \end{cases}$$

Si a_n est non nul, on a $b_n = \eta_n a_n$.

Si a_n est nul, alors à partir d'un certain rang, c_n l'est aussi, et les inégalités $0 \leq b_n \leq 0$, entrainent que b_n est nul. On a donc également $b_n = \eta_n a_n = 0$.

Donc à partir d'un cetrain rang, on a $b_n = \eta_n a_n$. Il reste à montrer que la suite η_n tend vers 1.

Etudions suivant le signe de a_n :

(i) Si $a_n > 0$, on a

$$1 \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \frac{c_n}{a_n} \ ,$$

donc

$$1 \leq \eta_n \leq \varepsilon_n \ ,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \eta_n - 1 \leq \varepsilon_n - 1 \ ,$$

et finalement

$$|\eta_n - 1| \leq |\varepsilon_n - 1| \ .$$

(ii) Si $a_n < 0$, on a

$$1 \geq \frac{b_n}{a_n} \geq \frac{c_n}{a_n} \ ,$$

donc

$$1 \geq \eta_n \geq \varepsilon_n \ ,$$

c'est-à-dire

$$0 \geq \eta_n - 1 \geq \varepsilon_n - 1 \ ,$$

et de nouveau

$$|\eta_n - 1| \leq |\varepsilon_n - 1| \ .$$

(iii) Si $a_n = 0$, on a

$$|\eta_n - 1| = |\varepsilon_n - 1| \ .$$

Donc, pour n assez grand, on a

$$|\eta_n - 1| \leq |\varepsilon_n - 1| \ ,$$

alors, comme (ε_n) converge vers 1, la différence $(\varepsilon_n - 1)$ converge vers zéro, et il résulte du théorème d'encadrement que $(|\eta_n - 1|)$ converge aussi vers zéro, c'est-à-dire que (η_n) converge vers 1. On a donc bien démontré que $b_n \sim a_n$.

22. En écrivant
$$a_{n+p} - a_n = (a_{n+p} - a_{n+p-1}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \ ,$$
et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient
$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \ ,$$
et donc
$$|a_{n+p} - a_n| \leq k(\mu^{n+p-1} + \cdots + \mu^n) \ .$$
Le membre de droite est la somme des termes d'une suite géométrique qui se calcule, et l'on obtient
$$|a_{n+p} - a_n| \leq k\mu^n \, \frac{1-\mu^p}{1-\mu} \ .$$
On majore encore le membre de droite pour obtenir finalement
$$|a_{n+p} - a_n| \leq k \, \frac{\mu^n}{1-\mu} \ .$$
Comme le membre de droite converge vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, il existera, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier N, tel que $n \geq N$ implique
$$k \, \frac{\mu^n}{1-\mu} < \varepsilon \ .$$
Alors, quel que soit $n \geq N$ et quel que soit p entier
$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \ .$$
Cela montre que la suite (a_n) est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge vers une limite ℓ.

23. Si l'on pose $x_n = \operatorname{Re} u_n$ et $y_n = \operatorname{Im} u_n$, on a donc
$$x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{x_n + iy_n + |u_n|}{2} \ ,$$
et donc
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + |u_n|}{2} \\[2ex] y_{n+1} = \dfrac{y_n}{2} \ . \end{cases}$$
a) La suite (y_n) est donc une suite géométrique de raison $1/2$ et $y_n = y_0/2^n$, donc la suite (y_n) converge vers 0.

b) D'après l'inégalité triangulaire
$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n| + |u_n|}{2} = |u_n| \ ,$$

et la suite $(|u_n|)$ est une suite décroissante.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + |u_n|}{2} - x_n = \frac{|u_n| - x_n}{2} ,$$

mais, puisque la partie réelle d'un nombre complexe est toujours inférieure au module, on en déduit que $x_{n+1} - x_n$ est positive donc que la suite (x_n) est croissante.
c) D'après ce qui précède, on a

$$|x_n| \leq |u_n| \leq |u_0| ,$$

donc la suite (x_n) est bornée. Comme elle est croissante elle converge vers une limite réelle ℓ. Alors puisque $u_n = x_n + iy_n$, la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.

d) Si α est un réel positif, alors on démontre par récurrence que la suite (u_n) est constante. En effet, si $u_n = \alpha$, alors $|u_n| = \alpha$ et $u_{n+1} = \alpha$.

Si α est un réel négatif, alors $|u_0| = -\alpha$, donc $u_1 = 0$ et par récurrence, si $n \geq 1$, on a $u_n = 0$. La suite (u_n) est stationnaire.