Mathématiques appliquées à l'Économie et à la Gestion

Mr Makrem Ben Jeddou

Mme Hababou Hella

Université Virtuelle de Tunis

2008

Continuité et dérivation1

1- La continuité

Théorème :

On considère un intervalle I de IR. Si f et g sont continues sur I (en tout point de I) alors f+g , f.g , lg et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I (g(x) $\neq$ 0).

Conséquence : Les fonctions constantes, affines, polynômes, rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

2- La dérivation

Dérivées de fonctions usuelles :

* $f : x \to K$, $x_0 \in IR$, $f'(x_0) = 0$

* $f : x \to ax$, $x_0 \in IR$, $f'(x_0) = a$

* $f : x \to ax + b$, $x_0 \in IR$, $f'(x_0) = a$

* $f : x \to ax^2 + bx + c$, $x_0 \in IR$, $f'(x_0) = 2ax_0 + b$

* $f : x \to \frac{1}{x}$, $x_0 \in IR^*$, $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

* $f : x \to \sqrt{x}$, $x_0 \in IR^*$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Opérations sur les fonction dérivables :

Théorème : Si f et g sont dérivables sur I (I $\in$ IR) alors f + g, λf $(\lambda \in IR)$, f.g(g$\neq$0), $\frac{f}{g}$et f^n sont dérivables et on a :

$$(f+g)'=f' + g'$$

$$(\lambda f)'= \lambda f'$$

$$(f.g)' = f'g+g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'= \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f^n)'= nf^{n-1}f'$$

Sens de variation d'une fonction

- $Si \quad \forall x \in I \;\; f'(x) = 0 \iff$ f est constante sur I
- $Si \quad \forall x \in I \;\; f'(x) > 0 \iff$ f est strictement croissante sur I
- $Si \quad \forall x \in I \;\; f'(x) < 0 \iff$ f est strictement décroissante sur I

:

Résolution d'une équation du second degré

Une équation du second degré a la forme suivante :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Le discriminant noté Δ est défini par $\Delta = b^2 - 4ac$

Si Δ< 0 alors l'équation n'admet pas de solutions réelles

Si Δ= 0 l'équation admet une solution double $x = -\dfrac{b}{2a}$

Si Δ> 0 alors l'équation admet deux solutions.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La somme des deux racines (ou solutions) : c

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Le produit des deux racines (ou solutions) :

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

Fonction logarithme et exponentielle

1- Introduction

Pour étudier une fonction numérique et tracer son graphe on doit :

- Rechercher son domaine de définition : La fonction doit dans son sens mathématique, être définie et continue. En outre, des conditions économiques (variables positives…) sont souvent à prendre en considération
- Calculer ses limites aux bords du domaine
- Rechercher ses branches infinies et ses asymptotes
- Calcul sa dérivée f' et étudier son signe
- En déduire le tableau de variation
- Pour plus de précisions on peut déterminer quelques points particuliers de son graphe C_f par exemple l'intersection de C_f avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
  L'étude peut être simplifiée si la fonction f est paire ou impaire.

2- Fonction logarithme népérien

a- Définition

La fonction $y = \frac{1}{x}$ est continue pour $x \in]0, +\infty]$, elle admet donc sur cet intervalle des primitives, qui se déduisent de l'une d'elles par addition d'une constante. On va considérer celle qui est nulle au point x =1.
On appelle logarithme népérien la fonction définie sur $]0, +\infty[$par :

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Cela est équivalent à :

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \text{ et } \log 1 = 0$$

Le logarithme népérien est souvent noté ln(x)

b- Propriétés

- Il existe un unique réel positive e tel que log e = 1 (e = 2,718282)

- La dérivée de la fonction étant toujours positive, la fonction logarithme est donc strictement croissante sur .
- Log x = log y   <=>   x = y
- Log x > log y   <=>   x > y
- Log x > 0   =>   x>1
- Log x $\leq$ 0   =>   0 < x $\leq$ 1

x et y étant deux réels strictement positifs on a alors :

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^m = m\log x \quad m \in \mathbb{R}$$

c- Limites et dérivées

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log u(x))' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$(U \text{ étant une fonction dérivable et prennant des valeurs dans l'intervalle }]0,+\infty[)$$

d- Etude de la fonction logarithme

$$f(x) = \log x$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

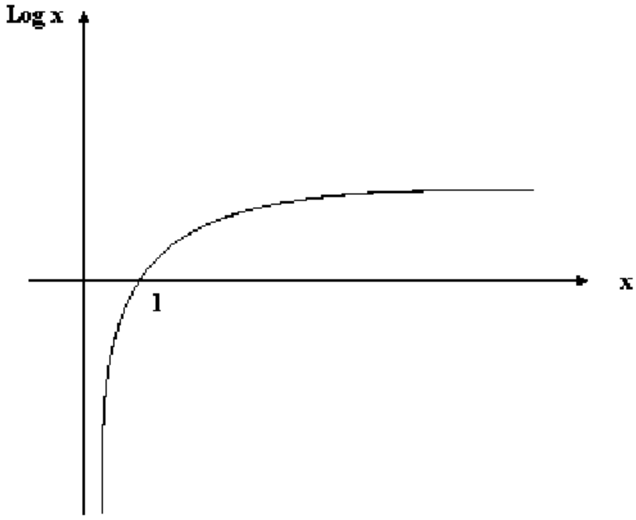
$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

$$f(x) = (\log x)' = \frac{1}{x} > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

D'où la fonction admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

x	0	1	e	$+\infty$
f '(x)		+		
f(x)		0	1	



3- Fonction exponentielle de base e

La fonction exponentielle de base e définit sur IR :

$$f(x) = e^x$$

e étant positif (e= 2,718282), la fonction f sera ainsi définie positive $e^x \succ 0$
e étant l'unique réel positif tel que $\log e = 1$

a- Propriétés

$$e^{x+y} = e^x . e^y$$
$$(e^x)^y = e^{xy}$$
$$e^0 = 1$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(e^{u(x)})' = U'(x)e^{U(x)}$$

b- Limites de e^x

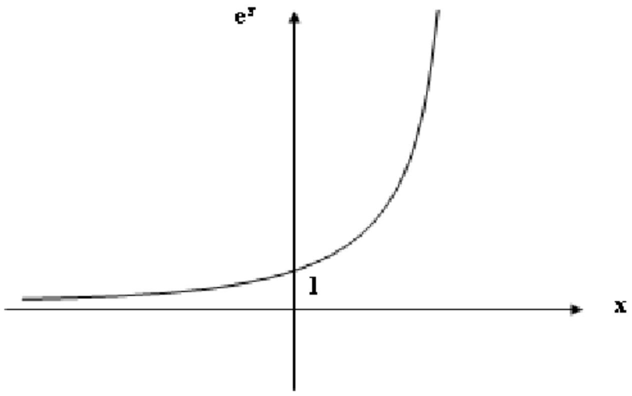
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

c- Etude de la fonction $f(x) = e^x$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

La fonction admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)			|	$+$	
f(x)	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Remarques :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\log x} = +\infty$$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^h}{\log x} = +\infty \qquad \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x \log x = 0$$

On retient que dans le calcul des limites et en présence d'une forme indéterminée, on s'intéresse à la limite de l'exponentielle qui l'emporte sur la puissance, l'emportant à son tour sur le logarithme.

Exercices : Voir le site

Matrices et déterminants

1.1. Définitions

1.1.1. Définitions

Une matrice A d'ordre (n,p) est un tableau de n x p nombre a_{ij} rangés sur n lignes et p colonnes.

Les nombres a_{ij} sont les termes de la matrice A. Le premier indice i indique le numéro de la ligne et le second indice j indique le numéro de la colonne. Le terme a_{ij} est donc l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

On note la matrice A : A = (a_{ij}) n.p

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1j} & --- & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2j} & --- & a_{2p} \\ : & : & : & : & : & : \\ a_{i1} & a_{i2} & --- & a_{ij} & --- & a_{ip} \\ a_{n1} & a_{n2} & --- & a_{nj} & --- & a_{np} \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A est une matrice à 4 lignes et 3 colonnes (4,3).

1.1.2. Matrices particulières

B = (1 2 0 -1)

est une matrice à une ligne et 4 colonnes (1,4), on dit que B est une matrice ligne d'ordre 4. Plus généralement les matrices d'ordre (1,p) sont dites matrices ligne d'ordre p.

- $$C=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice à 3 lignes et une colonne (3,1), on dit que C est une matrice colonne d'ordre 3. Plus généralement les matrices d'ordre (n,1) sont dites matrices colonnes d'ordre n.

- $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

  est une matrice à 3 lignes et 3 colonnes, on dit que D est une matrice carrée d'ordre 3. Plus généralement les matrices d'ordre (n,n) sont dites matrices carrées d'ordre n.

- $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  est une matrice identité d'ordre 3 notée I_3 .

- $$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  est une matrice nulle tous ses termes sont égaux à zéro.

Remarque : Deux matrices sont égales si et seulement si les termes correspondants sont identiques, c'est à dire qu'elles sont formées des mêmes éléments placés aux même endroits.

1.1.3. Transposée d'une matrice

Soit la matrice $A=(a_{ij})_{n,p}$. On appelle matrice transposée de A notée ${}^tA$ la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes dans la matrice A : ${}^tA = (a_{ji})_{p,n}$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Application : Calculez les transposées des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution : Voir le site

Remarque :

Matrice symétrique : ${}^tA = A$

Matrice antisymétrique : ${}^tA = -A$

1.2. Addition matricielle

1.2.1. Définition

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrice de même ordre (n,p). La matrice A + B est la matrice d'ordre (n,p) obtenue en additionnant terme à terme les éléments de A et B. d'où :

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Propriétés

Soient A, B et C trois matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes :
Commutativité : A+B=B+A

- Associativité : A+(B+C)=(A+B)+C
- Existence d'un élément neutre : A + (0) = A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Existence d'une symétrie : A + (-A)=0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'une manière générale si $A = (a_{ij})$ est une matrice à n lignes et p colonnes, sa symétrique par rapport à l'addition est la matrice (-A) de terme général $A = (-a_{ij})$

$$A + (-A) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0)$$

(-A) est la matrice symétrique de A.

Application :

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez les matrices (A+B), (B+A), (B+C), (C+A)

Solution Voir le site

1.3. Multiplication par un nombre

Si $k \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})$ alors : $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

Exemple : k =2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$kA = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Soient deux matrices A et B et deux réels k et l :

(k+l) A = kA + lA
k (A+B) = kA + kB
k (l.A) = (kl) A

Application : Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Calculez : 2A-4B ; 3A+2C ; 2A-2B+3C

Solution : Voir le site

1.4. Multiplication des matrices

1.4.1. Définition

Soit A = (a_{ij}) une matrice d'ordre (n,p) et B = (b_{ij}) une matrice d'ordre (p,q). La matrice AB est une matrice d'ordre (n,q) dont le terme général C_{ij} est obtenu en multipliant les éléments de la $i^{ème}$ ligne de A par les éléments de la $j^{ème}$ colonne de B et en additionnant les produits obtenus :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Ainsi pour effectuer le produit AB il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B :

$$A_{(n,p)} \cdot B_{(p,q)} = C_{(n,q)}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculez les produits : A.B et B.A

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a_{11} : 5 = 1*0 + 2*1 + 3*1
a_{12} : 4 = 1*1 + 2*0 + 1*3
a_{21} : 3 = 3*0 + 2*1 + 1*1
a_{22} : 4 = 3*1 + 2*0 + 1*1

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

a_{11} = 0*1 + 1*3 = 3 a_{21} = 1*1 + 0*3 = 1 a_{31} = 1*1 + 1*3 = 4
a_{12} = 0*2 + 1*2 = 2 a_{22} = 1*2 + 0*2 = 2 a_{32} = 1*2 + 1*2 = 4
a_{13} = 0*3 + 1*1 = 1 a_{23} = 1*3 + 0*1 = 3 a_{33} = 1*3 + 1*1 = 4

On remarque que la multiplication des matrices n'est pas commutative, car en général on a :

$$AB \neq BA$$

Application :

Calculez A.B dans chacun des cas suivants :

$$* A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$* A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Solution</u> : Voir le site

1.4.2. Puissances successives d'une matrice

Par analogie avec les nombre réels, on pose :

$$A^2 = A.A,\ A^3 = A.A.A = A^2.A = A.A^2$$

$$A^n = AA......A \quad \text{n termes}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$$

L'égalité $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ne se produira que dans le cas où AB=BA. De même :

$$(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2 \neq A^2 - B^2$$

Les formules usuelles ne s'appliquent pas aux matrices sauf dans le cas particulier où A et B commutent

Applications :

1- Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculer $(A+B), (A-B), (A+B)(A-B)$ *et* $(A^2 - B^2)$

2- Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

En posant $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ calculer et déterminer 2 réels a et b tel que A = a I + b J

<u>Solution</u>

1.5. Les matrices carrées

1.5.1. Matrices carrées particulières

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n, la suite $(a_{11},a_{22},......,a_{nn})$ forme la diagonale principale de A.

- A_1 est une matrice triangulaire supérieure.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Tous les termes en-dessous de la diagonale principale sont nuls.

- A_2 est une matrice triangulaire inférieure.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tous les termes au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

- A_3 est une matrice diagonale.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Tous les termes sont nuls, à l'exception de ceux de la diagonale principale.

1.5.2. Propriétés de la multiplication des matrices carrées

Soient 3 matrices carrées A, B et C d'ordre n :

- <u>Associativité</u> : A (BC) = (AB) C
- <u>Distributivité</u> : A(B+C) = AB + AC
- <u>Elément neutre</u> : Il existe une matrice I telle que : AI=IA=A
  La matrice I est la matrice diagonale dont les termes de la diagonale principale sont tous égaux à 1 c'est la matrice identité.

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

- <u>Non commutativité</u> : Le produit AB est généralement différent du produit B.A

1.5.3. Inverse d'une matrice carrée

On appelle inverse d'une matrice A carré d'ordre n, une matrice B telle que :

$$AB = BA = I$$

La matrice inverse de A est notée A^{-1}, elle est unique si elle existe.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Remarque :

Si A et B sont inversibles, la matrice (AB) est inversible et admet pour inverse la matrice $(B^{-1}A^{-1})$.

Exemple :

Soient les matrices :

$$M=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&-2&-4\\-1&1&-2\end{pmatrix}$$

Calculer MN et en déduire M^{-1} .

$$MN=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&2\\0&0&-4\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=-4I$$

$$\text{donc} MN = -4I \qquad \text{d'où} -\frac{1}{4}MN = I$$

$$M\left(-\frac{1}{4}N\right)=I \qquad \text{d'où } M^{-1}=-\frac{1}{4}N=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Application :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Calculez A² et en déduire A^{-1}

Solution : Voir le site

Remarque :

- En général, on ne peut pas simplifier par A dans l'égalité AB = AC.Par exemple pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = 2A$$

simplifier par A conduit à un résultat absurde.

- AB = 0 et A≠ 0 n'entraîne pas B = 0 par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.6. Le calcul des déterminants

1.6.1. Déterminant d'ordre 2

Soit la matrice :

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A noté det A, est égal à :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2x-4)-(3x1) = -11$$

Application :

Calculez les déterminants des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

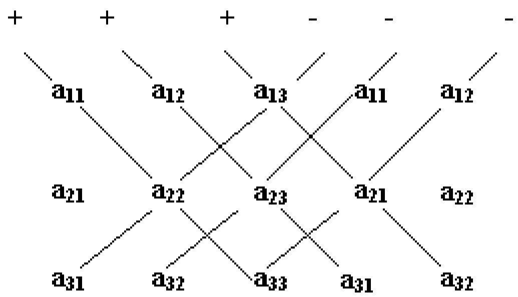
Solution : Voir le site

1.6.2. Déterminant d'ordre 3 (Méthode de Sarrus)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

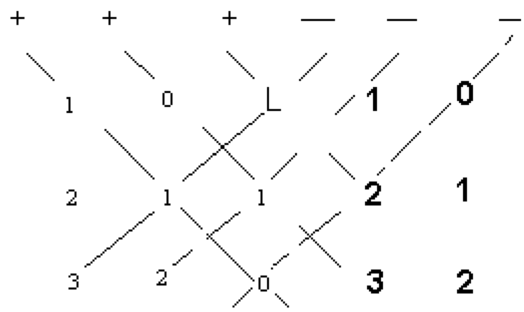
Pour calculer le déterminant d'ordre 3 de cette matrice, on utilise la règle de Sarrus. Ainsi, on écrit les trois colonnes de la matrice puis on répète la première et la deuxième colonne comme illustré ci-dessous. Ensuite, on fait le produit des nombres situés sur chacune des diagonales indiquées et on l'affecte du signe correspondant. Le déterminant est alors la somme des termes ainsi obtenus.



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



det A = [(1*1*0)+(0*1*3)+(1*2*2)]-[(3*1*1)+(2*1*1)+(0*2*0)]

= 0+0+4+-0-2-3=-1

Application :

Calculez les déterminants des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution : Voir le site

Remarque : Cette méthode n'est pas généralisable, elle n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3.

1.6.3. Règle générale du calcul des déterminants

Soit A une matrice carrée d'ordre n, pour calculer son déterminant on va utiliser un développement par rapport à une ligne ou une colonne comme suit:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ---- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ---- & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ---- & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On appelle mineur m_{ij} du terme a_{ij} , le déterminant obtenu en supprimant dans le déterminant la ligne i et la colonne j. C'est donc un déterminant d'ordre n-1

On appelle cofacteur C_{ij} du terme a_{ij} le nombre réel $(-1)^{i+j}$ m_{ij}. Pour calculer det A, on peut choisir une ligne et développer le déterminant par rapport à cette ligne.

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$$

On peut également choisir une colonne, et développer le déterminant par rapport à cette colonne.

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (-1)^{k+j} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$

Exemples :

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{calculer det A}$$

  On choisit la première ligne.

  $$\det \quad A = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2-0+1= -1$$

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  calculer le déterminant de A

  On choisit la première colonne.

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \text{pour le premier déterminant on choisit la première colonne et pour le second la deuxième colonne.}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\left(1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 4 - 1 + 2(0 - 0 - 1) = 3 - 2 = 1$$

Remarque :

Pour faciliter les calculs on choisit généralement la ligne ou la colonne où il y a le plus de termes nuls.

Application :

Calculez les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>Solution : </u>Voir le site

1.6.4. Propriétés

- Le déterminant d'une matrice diagonale est égale au produit des termes de la diagonale principale.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit des termes de la diagonale principale.
- det kA=k^n det A (A étant une matrice d'ordre n)
- det A = det ^tA

1.7. Le calcul des matrices inverses

Définition : A est inversible s'il existe une matrice B telle que : AB=BA=I
B est la matrice inverse de A et elle est notée A^{-1}.

Théorème : Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro. Dans ce cas A^{-1} donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[{}^{t}C(A)]$$

où ${}^{t}C(A)$ est la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

Exemple :

- <u>Inverse d'une matrice d'ordre 2</u>
  Soit :

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  det A= 3 donc A est inversible.

  $$C(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

  $${}^{t}C(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  $$A^{-1} = \frac{1}{\det}\left[{}^{t}C(A)\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- <u>Inverse d'une matrice d'ordre 3</u>

  soit :

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  det A = 2+6-1-3=4 donc A est inversible.

$$C(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\3&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\3&1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-3\\-3&-1&5\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$${}^{t}C(A)=\begin{pmatrix}1&3&1\\3&-1&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}[\,{}^{t}C(A)]=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&1\\3&-1&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{3}{4}&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Remarque :

Pour vérifier que le calcul de A^{-1} est correct, il suffit de calculer le produit: AA^{-1} qui devrait être égale à la matrice identité I.

Application :

Calculer l'inverse des matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\2&1&0\\3&-1&2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2&3\\8&-1\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&5\\0&1&0\end{pmatrix}$$

<u>Solution</u> : Voir le site

1.8. Utilisation des matrices en économie et gestion

Considérons une entreprise qui fabrique (P) produits O_1, O_2, -------O_p à partir de (n) composant I_1, I_2 -------I_n.

Les I_n peuvent être de la matière première, du travail, de l'énergie …etc. Ils sont appelés « inupts », ils entrent dans la chaîne de production.

Les O_j sont appelés « output », ils sortent de la chaîne de production. Désignons par a_{ij} le nombre d'unité de l'input Ii nécessaires à la fabrication de l'output O_j.

a_{ij} est le coefficient technique ou coefficient « input -output. »

La matrice A = (a_{ij}) est la matrice technologique de production ou la matrice d'input-output.

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} O_1 & O_2 \ldots\ldots\ldots\ldots O_p \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1p} \\ & & --- & \\ a_{i1} & a_{i2} & --- & a_{ip} \\ & & --- & \\ a_{n1} & a_{n2} & --- & a_{np} \end{pmatrix} & l_i \end{array}$$

Exemple :

On considère une entreprise qui fabrique deux produits P1 et P2 à partir de trois matières premières Ma, Mb et Mc.

La fabrication d'une unité de P1 nécessite deux unités de la matière première Ma, trois unités de Mb et une seule unité de Mc.

La fabrication d'une unité de P2 nécessite trois unités de la matière première Ma, quatre unités de Mb et deux unités de Mc.

La matrice technologique relative à cette exemple de production est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.9. Exercices généraux : Voir le site

Objectif

1- Résoudre les systèmes d'équations linéaires avec plusieurs méthodes.

Systèmes linéaires

1- Définition

On appelle système linéaire à n équations et à p inconnues tout système de la forme :

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{------} \; a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \text{------} \; a_{2p}x_p = b_2 \\ \\ a_{n}x_1 + a_{n2}x_2 + \text{------} \; a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} et b_i sont des réels donnés, alors que (x_1, x_2, -----x_p) sont les inconnues du système.

Exemple :

$$S:\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

(S) est un système linéaire de 3 équations et à 4 inconnues.

2- Représentation matricielle

On définit :

- La matrice A = (a_{ij}) c'est la matrice du système
- Le vecteur $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ c'est le vecteur du second membre du système.

- Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ c'est le vecteur des inconnues du système.

Un système linéaire à (n) équations et (p) inconnues est équivalent à l'écriture matricielle suivante :

$$A_{(n,p)}X_{(p,1)}=B_{(n,1)}$$

Ecrivons alors l'exemple précédent sous forme matricielle:

- La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Le vecteur du second membre :

$$B=\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Application :

Ecrivez sous forme matricielle les systèmes suivants:

$$\begin{cases} 8 = 2x_1 - x_2 \\ 10 = 3x_1 + x_3 \\ 13 = x_2 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = x_3 - x_2 + x_1 \\ y_2 = x_2 - x_1 \\ y_3 = -3x_3 + x_2 \\ y_4 = x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7 = 2x_1 - x_2 \\ 5 = x_2 - x_1 + 3x_3 \end{cases}$$

<u>Solution</u>

Remarques :

- La résolution du système revient à déterminer l'ensemble des solutions (x_1, x_2, -----x_n).Le système sera impossible s'il n'a pas de solution, et indéterminé s'il en a une infinité.
- Deux systèmes linéaires seront équivalents s'ils ont un même ensemble de solutions.

Résolution par la méthode de Gramer

1- Définition

Le système AX=B (forme matricielle) est dit système de Cramer si A est une matrice carrée et det A est non nul. Dans ce cas le système de Cramer admet une solution unique vérifiant AX=B.

2- Résolution

La résolution à l'aide de la méthode de Cramer n'est donc possible que dans le cas où le nombre d'équations est égal à celui des inconnues.

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad ----- \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad ----- \quad + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2}x_2 + \quad ----- \quad + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On note :

$$\Delta = \det A = \det[A_1 A_2 ----A_n] \qquad \text{avec} \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det[\ B\ A_2 ----A_n] = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & ----- & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ----- & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{2n} & ----- & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det[A_1\ B\ ----A_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} ----- & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} ----- & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} ----- & a_{nn} \end{bmatrix}$$

D'une façon générale :

$$\Delta_i = \det[A_1\ A_2 - - - -\ A_{i1} B A_{i+1} - - - -\ A_n]$$

L'unique solution du système de Cramer est donnée par :

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

et d'une façon générale :

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Exemple :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

On peut appliquer la méthode de Cramer du fait qu'on a 3 équations et 3 inconnues mais il faut vérifier que det A est non nul.

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 6 - 8 + 3 - 1 = -8$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 3 + 4 + 6 + 1 = 16$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 2 - 8 + 1 + 1 = -8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 12 + 4 - 3 - 2 = -16$$

$$\text{d'où : } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16}{-8} = -2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = -2$$

La solution du système est donnée par (-2, 1, 2)

Application :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + 5y + 4z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = -6 \end{cases}$$

<u>Solution</u>

Résolution par la méthode du pivot de Gauss

1- Résolution par la méthode du pivot de Gauss

On considère le système à 4 équations et 4 inconnues suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 & (1) \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 & (2) \\ \quad\quad 2x_3 - x_4 = 6 & (3) \\ \quad\quad\quad 3x_4 = 12 & (4) \end{cases}$$

Ce système d'équations particulier est dit système triangulaire supérieur du fait que sa matrice est triangulaire supérieure.
Un tel système est particulièrement simple à résoudre :

$$\begin{array}{lll} (4) & \Rightarrow & x_4 = 3 \\ (3) & \Rightarrow & x_3 = 5 \\ (2) & \Rightarrow & x_2 = 0 \\ (1) & \Rightarrow & x_1 = 4 \end{array}$$

Un système triangulaire inférieur peut être aussi résolu de la même manière pourvue que tous les termes de la diagonale principale soient différents de zéro.

2- Méthode de Gauss ou du pivot

Elle consiste à transformer un système d'équations linéaires en un système triangulaire équivalent qui est plus simple à résoudre.
Cette démarche est basée sur le fait qu'on ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire lorsqu'on effectue les transformations élémentaires suivantes :

- Echanger deux équations du système
- Multiplier une équation par nombre réel non nul.
- Ajouter à une équation le produit d'une autre équation par un nombre réel.

3- Principe

La méthode de Gauss permet donc de transformer un système de (m) équations linéaires à (n) inconnues en un système triangulaire équivalent :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad + - - - - - - \quad + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad + - - - - - - \quad + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \quad + - - - - - - \quad a_{mn}x_n = b_m & (L_m) \end{cases}$$

- Si $a_{11} \neq 0$
  Pour tout i tel que $2 \leq i \leq m$ on procède à l'opération :

$$L_i \rightarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

Le terme a_{11} s'appelle le pivot de cet ensemble d'opérations. On « élimine » ainsi l'inconnue x_1 des équations L_2, L_3-----L_m et l'on obtient le système équivalent (S').

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}a_2 + - - - - - - + a_{1n}x_n = b_i \\ \qquad a'_{22}\, x_2 + - - - - - - + a'_{2n}\, x_n = b'_2 \\ \quad \vdots \\ \qquad a'_{m2}\, x_2 + - - - - - - + a'_{mn}\, x_n = b'_m \end{cases}$$

Le système (S') est formé de la première équation de (S) et d'un système de (m-1) équations à (n-1) inconnues avec lequel on se trouve ramené à la solution initiale. Il reste à trouver un second Pivot et à recommencer le même ensemble d'opérations.

- Si $a_{11} = 0$ deux situations sont possibles :
  1. Il existe i tel que $a_{i1} \neq 0$, on procède alors l'opération $L_1 \longrightarrow L_i$ et on se retrouve dans la situation initiale.
  2. $\forall i \in [1, m] \quad a_{i1} = 0$, l'inconnue x_1 n'apparaît pas dans le système. On considère alors l'inconnue suivante x_2 comme la première inconnue et on vérifie si l'on peut prendre a_{12} comme Pivot.

Remarques :

1. Cette chaîne d'opérations a forcément une fin puisqu'à chaque pas on laisse de côté une nouvelle équation et une nouvelle inconnue.
2. Si l'on fait apparaître au cours des opérations, une équation :

$$0x_1 + 0x_2 + - - - - - + 0x_n = b_i \qquad \text{avec} \quad b_i \neq 0$$

Le système est alors impossible et il est inutile de continuer.

Exemple 1 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 & (1) \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 & (2) \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 20x_4 = 50 & (3) \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 16x_4 = 39 & (4) \end{cases}$$

—> On garde (1) et (2) et on élimine x_1 dans (3) et (4).

$$\begin{array}{l} \\ (3)-(1) \\ (4)-(1) \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 27 \\ x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 16 \end{cases}$$

—> On élimine x_2 dans (3) et (4).

$$\begin{array}{l} \\ (3)-3(2) \\ (4)-(2) \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

—> Il ne reste plus qu'à éliminer x_3 dans (4).

$$(4)-2(3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 23 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -2$$

Le système admet une solution unique qui est (-2, 1, 1, 2).

Exemple 2 :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (2) - 2(1) \\ (3) - \frac{3}{2}(1) \end{matrix} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(3) - (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad\quad -4x_3 = -1 \end{cases}$$

Le système admet une solution unique (1 , 5/4 , 1/4) .

Application :

Résoudre les systèmes suivants :

$$S_1 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x + y + z - t = -1 \\ -x - y + z - 3t = 2 \\ -x + y - z - t = 0 \\ x - y - z - t = -1 \end{cases}$$

Solution : Voir le site

Résolution par inversion de la matrice du système

L’écriture matricielle d’un système d’équations linéaires est de la forme :

$$A_{(n,p)}X_{(p,1)}=B_{(n,1)}$$

La résolution d'un tel système n'est possible que si la matrice A est inversible.
On note A^{-1} la matrice inverse de A, multiplions alors les deux membres de l'équation par A^{-1}.

D'où : $A^{-1}. A.X = A^{-1}.B$ ainsi $X = A^{-1}B$

Exemple :

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y+z=8 \\ y+z=4 \\ 3x+y+2z=10 \end{cases}$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Notons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4} \\ \frac{10}{4} \\ \frac{6}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Application :

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+z=4 \\ x-z=1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ x+2y+3z=13 \\ 2x+2y+4z=9 \end{cases}$$

<u>Solution</u> : Voir le site

Exercices généraux : Voir le site

2- Fonction à plusieurs variables

1.1 Définition

Si on considère un sous ensemble D de IR^n, une application f: D —> IR est dite fonction réelle des p variables x_1, x_2, -------,x_p. On note :

$$u=f\ (x_1,\ x_2,\ \text{-------},x_p)$$

Il est donc possible d'envisager des fonctions, qui à deux ou plusieurs éléments de l'ensemble de départ, font correspondre un élément de l'ensemble d'arrivée. On note par exemple :

$x,y \xrightarrow{f} z$ avec $x,y,z \in IR$
où $z = f(x,y)$

Exemple :

$F(x,y,z) = 2x^2yz - 3xyz + 4yz - 3yz - 3xy + 8$

Exemples en économie :

1. Un industriel produit deux biens en quantités x et y suivant la fonction de coût :
   $C(x,y)=2x^2 + xy + 2y^2$
2. Une fonction de production est l'illustration d'une technologie de production à facteurs substituables (K : le capital et L : le travail) : $f\ (K,L) = K^{1/2}\ L^{1/2}$

1.2. Dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables

Définition :

f admet une dérivée partielle par rapport à x si la fonction d'une seule variable :
x —> f (x, y, z, ……) est dérivable. Sa dérivée est appelée dérivée partielle de f par rapport à x et est notée :

$$f'_x = f'_x\ (x, y, z---) = \frac{\partial f(x, y; z ----)}{\partial x}$$

Exemple :

Soit la fonction $Z = f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 5 + xy$
Il est possible de déterminer la dérivée partielle de cette fonction par rapport à la variable x en traitant la variable y comme une constante :

$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + y$$

On détermine de même :

$$f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + x$$

Application :

Soit la fonction f (x,y,z) = 4 x^2zy^3 + 3 xy^2 - xz + $3x^2y$ + 5x - 4z
Calculer f'_x , f'_y et f'_z

Solution :voir le site

Remarque :

De la même façon que précédemment, on peut étudier les dérivées par rapport à x de $f'_x(x,y)$ et de $f'_y(x,y)$. On définit ainsi les dérivées partielles secondes que l'on note :
$f''_{x^2}(x,y)$ et $f''_{xy}(x,y)$. On peut définir de même $f''_{y^2}(x,y)$ et $f''_{yx}(x,y)$.

$$f''_{xx}(x,y) = f''_{x^2}(x,y) = \frac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x}$$
$$f''_{yy}(x,y) = f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y}$$
$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y} \qquad f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial f'_y(x,y)}{\partial x}$$

Il est à noter que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Application :

Soit la fonction : f(x,y) = $2x^2y^3 + 5xy^2 - 3x^2y + 7x - 4y$
Calculez f'_x , f'_y , f''_{x^2} , f''_{y^2} , f''_{xy} , f''_{yx}

Solution : voir le site

2. Optimisation libre ou sans contrainte

2.1 Cas d'une fonction à une seule variable

Il s'agit d'une fonction à une seule variable du type y = f(x)
Pour déterminer les extremums de cette fonction on passe par deux étapes :

- Condition nécessaire du premier ordre : $f'(x_0)=0$

  Ainsi le point d'abscisse x_0 est un extremum éventuel

- Condition du second ordre :
  - Si $f''(x_0) > 0$ alors le point d'abscisse x_0 est un minimum
  - Si $f''(x_0) < 0$ alors le point d'abscisse x_0 est un maximum

Application économique :

Le coût d'un produit varie selon le niveau de production, il se traduit par :

$$C(Q) = Q^2 - 6Q + 10$$

Déterminez le niveau de production donnant un coût minimal.

Solution :voir le site

3. Optimisation sous contrainte

3.1 Optimisation sous contrainte

En économie, il est fréquent qu'on cherche à maximiser une fonction sous des contraintes (maximiser un profit ou une utilité compte tenu de contraintes budgétaires, minimiser une dépense compte tenu d'un besoin à satisfaire….).

Mathématiquement, le problème se pose sous la forme d'une optimisation d'une fonction à plusieurs variables ($f(x,y)$) sous la contrainte d'une autre fonction ($g(x,y)$).

Cette méthode d'optimisation fait appel à ce qu'on appelle le multiplicateur de Lagrange (λ). La fonction Lagrangienne notée $L(x,y,\lambda)$ est définie ainsi :

$L(x,y,\lambda)$ = Fonction à optimiser + λ(contrainte annulée)
$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(G(x,y))$
$G(x,y)$ n'est autre qu'une reformulation de la contrainte tel que $g(x,y)= 0$

Le Lagrangien est donc une fonction à trois variables x , y et λ. Son optimisation passe par deux étapes :

- Condition du premier ordre : Les dérivées premières sont nulles.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda G'_x = 0 \\ f'_y + \lambda G'_x = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

On détermine ainsi les coordonnés des points extremums éventuels.

- Condition du second ordre :

Pour déterminer la nature de l'extremum il faut calculer les dérivées secondes et établir la matrice Hessienne avant de calculer son déterminant.

$$H = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix}$$

Règle de décision :

Si det H> 0 alors on est en présence d'un maximum
Si det H< 0 alors on est en présence d'un minimum

Exemple :

Etudier les extremums éventuels de la fonction f(x,y)=xy sous la contrainte
g (x,y) = x+2y -1

Il faut commencer par définir la fonction Lagrangienne :
G(x,y) = x + 2y – 1 d'où :

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + 2y - 1)$$

- <u>Condition du premier ordre</u> :

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda = 0 & (1) \\ L'_y = x + 2\lambda = 0 & (2) \\ L'_\lambda = x + 2y - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \quad \Rightarrow \quad y = -\lambda$

$(2) \quad \Rightarrow \quad x = -2\lambda$

$(3) \quad \Rightarrow \quad -2\lambda - \lambda = 1 \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{4}$

$\mathbf{(x, y, \lambda) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})}$ est un extremum éventuel.

- <u>Condition du second ordre</u> :

$$H = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H = 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 = 4 > 0$$

Donc le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ est un maximum.

3.2 Application à l'économie : Fonction d'utilité sous contrainte budgétaire

Un individu consomme deux biens X et Y en quantités x et y aux prix respectifs de 2 unités monétaire et 1 unité monétaire. Sa satisfaction est exprimée par sa fonction d'utilité. Cette dernière dépend des quantités consommées des deux biens.

Elle est de la forme suivante : $U(x,y) = -x^2 + xy$.

Il désire maximiser sa satisfaction ou son utilité sachant qu'il ne détient que 20 unités monétaires pour l'achat des biens X et Y.

Problème :

Max $f(x,y) = -x^2 + xy$
Sous la contrainte: $2x+y = 20$ => $G(x ;y) = 2x+y - 20 = 0$

Solution :

Le Lagrangien : $L(x, y, \lambda) = -x^2 + xy + \lambda(2x + y - 20)$

- <u>Condition du premier ordre</u> :

$$\begin{cases} L'_x = -2x + y + 2\lambda = 0 & (1) \\ L'_y = x + \lambda = 0 & (2) \\ L'_\lambda = 2x + y - 20 = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow$ $x = -\lambda$

(1) $\Rightarrow$ $y = -4\lambda$

(3) $\Rightarrow$ $-2\lambda - 4\lambda = 20$ $\Rightarrow \lambda = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$

d'où $x = \frac{10}{3}$ $y = \frac{40}{3}$

Le point $(x, y, \lambda) = (\frac{10}{3}, \frac{40}{3}, -\frac{10}{3})$ de coordonnées est un extremum éventuel.

- <u>Condition du second ordre</u>

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & +1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & +1 \end{vmatrix} = +2 + 4 = +6 > 0$$

Il s'agit donc d'un maximum .

Ainsi, la structure de consommation : $\frac{10}{3}$ Pour le bien X , $\frac{40}{3}$ Pour le bien Y assure à l'individu une utilité, ou une satisfaction maximale.

Application :

Déterminer les extremums éventuels de la fonction f(x,y) = 2x+xy sous la contrainte 2x+4y=6

<u>Solution</u>

4. Exercices généreaux : Voir le Site

Objectifs

- Modéliser les problèmes de programmation linéaire

- Résoudre les problèmes de programmation linéaire graphiquement

Modélisation d'un problème de programmation linéaire

1- Introduction

La programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts.

Il s'agit de répondre au problème d'allocation optimale des ressources compte tenu de certaines contraintes.
On entend par programmation linéaire, la planification à l'aide d'une fonction linéaire.

Dans ce chapitre, notre approche pour résoudre de tels problèmes passera par deux étapes principales :

- La modélisation du problème : Il s'agit d'exprimer le problème sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires permettant, d'une part de bien identifier et structurer les contraintes que doivent respecter les variables du modèle, d'autre part de définir l'apport de chaque variable au niveau de l'objectif poursuivi par l'entreprise, ce qui se traduira par une fonction linéaire à optimiser.
- La détermination de l'optimum : Il s'agit de trouver l'optimum mathématique à l'aide de certaines techniques propres à la programmation linéaire.

2- Modélisation d'un problème de programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire sous sa forme générale consiste à chercher l'extremum ou l'optimum d'une fonction linéaire de n variables liées par des équations et/ou inéquations linéaires appelées contraintes. Il s'agit de trouver la valeur des variables de décision $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ qui rendent optimum la fonction linéaire.

Le problème se présente ainsi :

Optimiser : $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + - - - - - - - c_n x_n$

Avec :

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + - - - - + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + - - - - + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ &\vdots \\ &a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + - - - - + a_{kn}x_n \leq b_k \end{aligned}$$

et : $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 - - - - x_n \geq 0$

Notations :

X_j : (j varie de 1à n) : Les variables de décision

Z : La fonction objectif

C_j : Les coefficients des variables dans la fonction économique. Ce sont les contributions unitaires de chaque variable au niveau de la fonction économique.

a_{ij} : Les coefficients des variables dans les contraintes (i varie de 1 à k et j varie de 1 à n). Ce sont les coefficients techniques , c'est le nombre d'unités requises de la ressource i pour réaliser une unités d'activité j

b_i : Les coefficients du second membre des contraintes. Ce sont les ressources disponibles

Exemple :

Une entreprise fabrique deux produits P1 et P2 qui passent dans 3 ateliers différents : usinage, assemblage, finition.

Les heures de travail disponibles dans chaque atelier sont :

Usinage : 100 heures
Assemblage : 120 heures
Finition : 200 heures

Le temps nécessaire pour chaque unité produite de P1 ou P2 au sein des différents ateliers est :

	P1	P2
Usinage	1h	2h
Assemblage	3h	4h
Finition	2h	6h

Le département de comptabilité de l'entreprise a estimé la contribution au bénéfices de chaque produit :

Produit	Bénéfice (Dinars/unité)
P1	6
P2	7

En supposant qu'il n'existe aucune restriction sur le marché c'est à dire qu'il peut absorber toute la production, quelle quantité de chaque produit doit fabriquer l'entreprise pour maximiser son bénéfice ?

Modélisation du problème :

- <u>Les variables</u> :

x :quantité du produit de P1à fabriquer
y : quantité du produit P2 à fabriquer

- La fonction économique :

  Maximiser Z= 6x + 7 y où Z est le bénéfice total en dinars

- Les contraintes :

  $x + 2y \leq 100$ heures (usinage)
  $3x + 4y \leq 120$ heures (assemblage)
  $2x + 6y \leq 200$ heures (finition)

  $x \geq 0$; $y \geq 0$ (non négativité)

Pour résoudre ce problème il faut chercher les valeurs de x et y qui répondent aux contraintes tout en maximisant (optimisant) la fonction économique.

Terminologie :

- Fonction économique : C'est la fonction linéaire que nous voulons optimiser. Elle peut être maximisée ou minimisée selon le cas.
- Solutions réalisables : Tout ensemble de valeurs x_j satisfaisant simultanément à toutes les contraintes du problème de programmation linéaire.
- Solution optimale : Toute solution qui rend optimale (maximale ou minimale) la fonction économique est appelée solution optimale ou programme linéaire .

Résoudre un problème de programmation linéaire consiste à déterminer la solution optimale si elle existe.

2- Résolution graphique du problème linéaire

1- Résolution graphique du problème linéaire

La résolution graphique ne s'applique que lorsqu'on est en présence d'un programme linéaire contenant au maximum deux variables qui sont facilement identifiées dans un repère à deux dimensions.

Cette résolution graphique se base sur les étapes suivantes :

1. On reporte sur un graphique chacune des contraintes du problème et on détermine la région commune à l'ensemble de ces contraintes. On obtient ainsi la région ou le domaine des solutions réalisables, c'est à dire, la délimitation des valeurs possibles de x_j satisfaisant simultanément toutes les contraintes.
2. On détermine les coordonnées des points extrêmes ou sommets du domaine des solutions réalisables.
3. On substitue ensuite les coordonnées de chaque point extrême dans l'expression de la fonction économique et on retient comme solution optimale celui (ou ceux) qui optimise cette dernière, c'est à dire celui

(ou ceux) qui selon le cas maximise ou minimise la fonction économique.

L'illustration de la résolution graphique d'un problème de programmation linéaire se fera à partir de l'exemple suivant :

Exemple :

Une entreprise industrielle fabrique deux modèles A et B d'appareils électroménagers.
Ces deux modèles passent par trois étapes de fabrication dans trois différents ateliers. Le tableau suivant résume le nombre d'heures requises pour fabriquer chaque modèle au niveau des ateliers, le temps disponible à chaque atelier et les bénéfices unitaires dans chaque atelier :

	A	B	
Ateliers	Nombre d'heures requises		Temps disponible
Assemblage	3	4	4200 heures
Vérification	1	3	2400 heures
Empaquetage	2	2	2600 heures
Contribution aux bénéfices en dinars	100/unité	120/unité	

Déterminer la quantité optimale à produire de chaque modèle afin de maximiser le bénéfice.

Il faut d'abord formuler le modèle mathématique relatif à ce problème de fabrication et déterminer ensuite à l'aide de la méthode graphique, le planning optimal de fabrication.

2- Formulation du modèle

On Note x_1 le nombre d'unités à fabriquer du modèle A et x_2, le nombre d'unités à fabriquer du modèle B

Les contraintes sont :

(assemblage) $3x_1+4x_2 \leq 4200$ heures (1)

(vérification) $x_1+3x_2 \leq 2400$ heures (2)

(empaquetage) $2x_1+2x_2 \leq 2600$ heures (3)

(non- négativité) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

La fonction économique que l'on veut maximiser est $Z = 100\ x_1 + 120\ x_2$
où Z représente le bénéfice totale en dinars

3- Tracé des contraintes

$$\begin{cases} (1) & 3x_1 + 4x_2 \leq 4200 \\ (2) & x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ (3) & 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 \\ (4) & x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

L'axe x_1 représente la quantité du modèle A à fabriquer et l'axe x_2 la quantité du modèle B. La contrainte de non négativité nous restreint ou premier quadrant (positif).

En général pour représenter graphiquement une inégalité de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$ ou $a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$ il faut d'abord tracer l'équation de la droite $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$.

On obtient les coordonnées des points se situant :

- Sur l'axe x_2 en passant par $x_1 = 0$ d'où $x_2 = \frac{b}{a_2}$ => $\left(0, \frac{b}{a_2}\right)$
- Sur l'axe x_1 en passant par $x_2 = 0$ d'où $x_1 = \frac{b}{a_1}$ => $\left(0, \frac{b}{a_1}\right)$

Il s'agit de relier les coordonnées de ces deux points pour obtenir le tracé de la droite correspondante. Cette droite partage alors le plan en deux demi-plans ; On obtient le demi-plan correspondant à une inéquation en vérifiant si les coordonnées d'un point situé dans un des demi-plans vérifie ou non l'inéquation. Généralement, on substitue l'origine (0,0) dans l'inéquation pour déterminer quelle partie du plan satisfait l'inéquation, si cette dernière ne passe pas elle-même par l'origine.

(1) $\quad 3x_1 + 4x_2 \leq 4200$

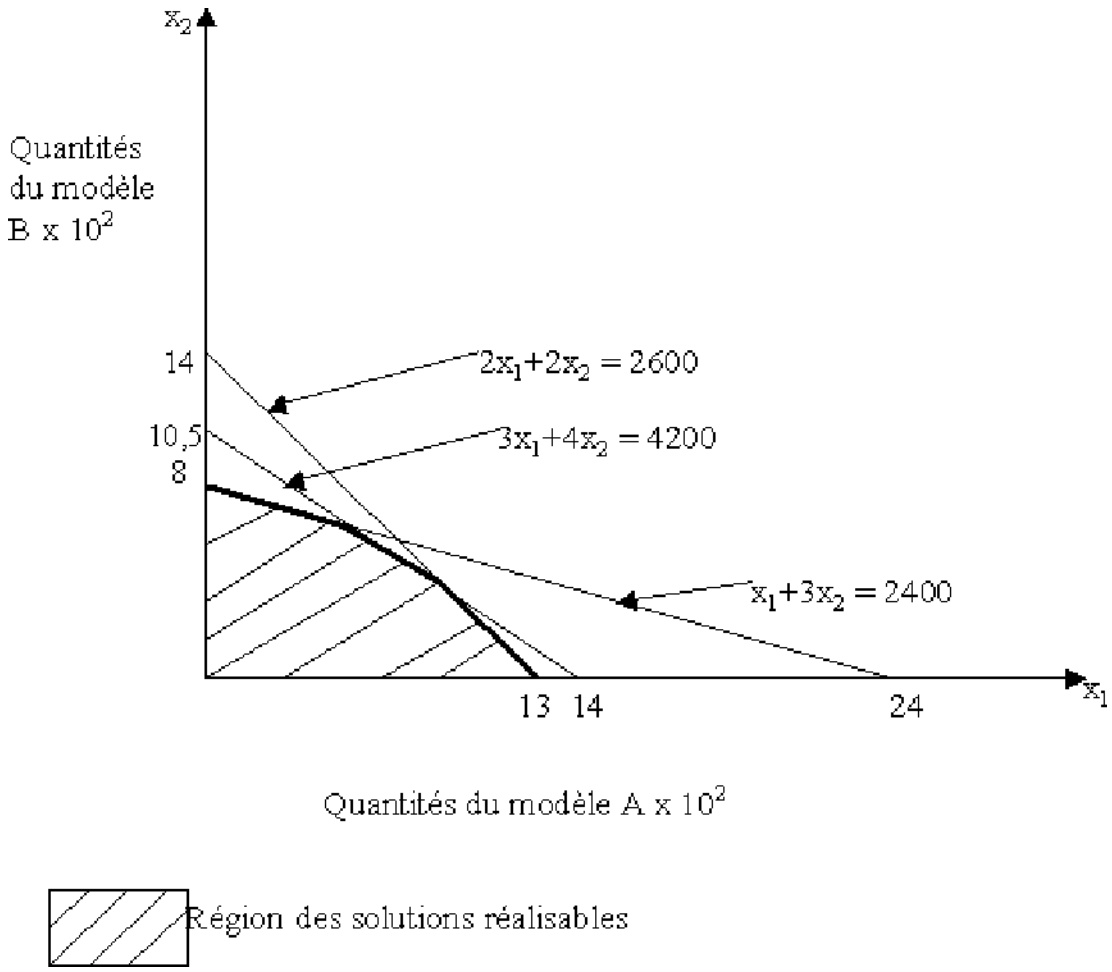
$$3x_1 + 4x_2 = 4200 \Rightarrow \text{si} \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1050 \quad (0,1050)$$
$$\text{et si} \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2400 \quad (1400,0)$$

(2) $\quad x_1 + 3x_2 \leq 2400$

$$x_1 + 3x_2 = 2400 \Rightarrow \text{si} \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 800 \quad (0,800)$$
$$\text{et si} \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2400 \quad (2400,0)$$

(3) $\quad 2x_1 + 2x_2 \leq 2600$

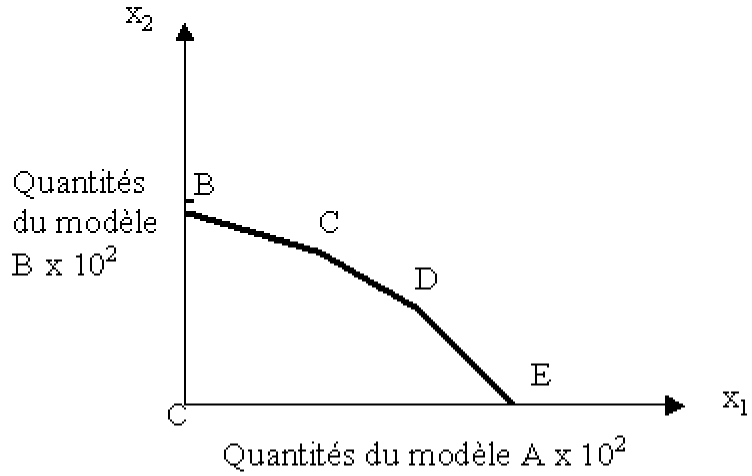
$$2x_1 + 2x_2 = 2600 \Rightarrow \text{si} \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1300 \quad (0,1300)$$
$$\text{et si} \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1300 \quad (1300,0)$$



Tous les points de cette région sont des solutions réalisables pour le problème de fabrication de l'entreprise industrielle. Toutefois, notre intérêt portera seulement sur les points extrêmes de cette région.

4- Détermination des points extrêmes

On peut toujours obtenir exactement les coordonnées des points extrêmes en résolvant le système formé des équations des droites qui se coupent deux à deux. Si on reproduit la région des solutions réalisables avec les points extrêmes notés de (B) à (E).



$$\Rightarrow \quad 3x_1 + 4x_2 = 4200 \quad (1)$$
$$x_1 + 3x_2 = 2400 \quad (2)$$
$$(1) - 3(2) \quad \Rightarrow 3x_1 + 4x_2 - 3x_1 - 9x_2 = 4200 - (3 \times 2400)$$
$$\Rightarrow -5x_2 = -3000 \Rightarrow x_2 = 600 \quad \text{et}\ x_1 = 600$$

Le point C est l'intersection de (1) et (2).

De même pour les coordonnées des points A,B,D et E.

Points extrêmes	Coordonnées
O	(0,0)
B	(0,800)
C	(600,600)
D	(1000,300)
E	(1300,0)

5- Détermination du point extrême optimal

Il s'agit tout simplement de substituer les cordonnées de chaque point extrême à l'exception de l'origine O, dans l'expression de la fonction économique ($Z = 100\ x_1 + 120\ x_2$ le bénéfice total en dinars). On obtient alors les valeurs suivantes :

Points extrêmes	Coordonnées (x_1,x_2)	$Z = 100\ x_1 + 120\ x_2$
B	(0,800)	96.000
C	(600,600)	132.000
D	(1000,300)	136.000
E	(1300,0)	130.000

La valeur maximale de la fonction économique est 136000 dinars elle est relative au point extrême D de coordonnées x_1=1000 et x_2=300 .

La fabrication de 1000 unités de A et de 300 unités de B permettra d'avoir un bénéfice maximal de 136000 dinars.

Remarque :

On peut déterminer la solution optimale en utilisant l'équation de la droite D* obtenue à partir de la fonction économique :

$Z = C_1\ x + C_2\ y$

D'où D* : $y = -\dfrac{C_1}{C_2}x + \dfrac{z}{C_2}$

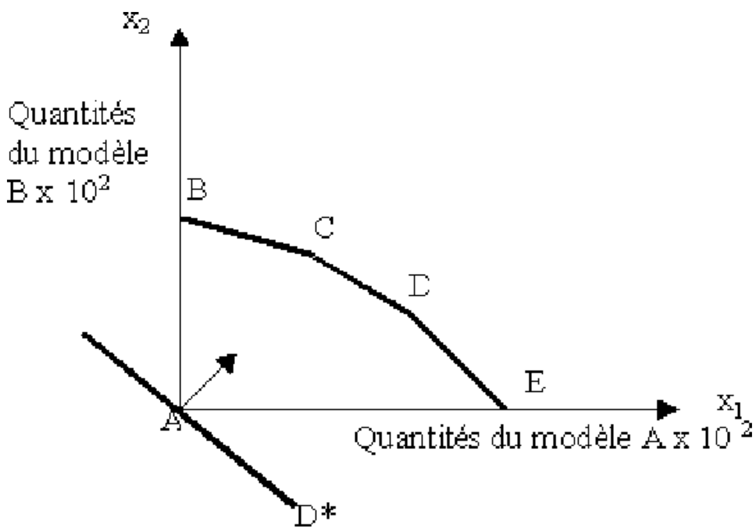
En faisant varier Z on aura différentes droites qui ont la particularité d'être parallèles. Ainsi en donnant la valeur zéro à Z, on peut représenter la droite D* correspondante qui passe par l'origine tout en ayant une pente de :

$$-\frac{C_1}{C_2}.$$

Ensuite, s'il s'agit d'un cas de maximisation, on fait la translation de la droite parallèlement à elle-même jusqu'à atteindre le point extrême (le sommet) du domaine des solutions réalisables, le plus éloigné de l'origine. Ce point représente alors la solution optimale.
Dans le cas d'une minimisation on effectue la translation de la droite jusqu'à atteindre le sommet du domaine des solutions réalisables qui est le plus proche de l'origine. Ce point représentera ainsi la solution optimale.

En ce qui concerne l'exemple précédent, on aura :

D* : $Y = -\frac{10}{12}x + \frac{Z}{12}$



La solution est aussi le point D de coordonnées (10*102,3*102) donc (1000,300)

Application :

Résoudre le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Max Z = $2\ x_1 + x_2$

<u>Solution</u> : Voir le site

Les solutions particulières

Ces solutions particulières seront traitées à partir d'exemples.

1- Cas des solutions multiples

Exemple :

Résoudre le problème programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} x \leq 8 \\ y \leq 5 \\ x + 2y \leq 14 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Max Z = 3x + 6y

<u>Solution</u> : Voir le site

2- Cas d'une solution infinie

Exemple :

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} 4x - y \geq 8 \\ 2x - y \leq 6 \\ x \geq \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Max Z = x+y

<u>Solution</u> : Voir le site

3- Cas d'une solution impossibles

Exemple :

Résoudre le problème de programmation linéaire suivante

$$\begin{cases} x - y \geq 2 \\ y - x \leq -2 \\ x_1 \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Min Z = 3x + y

<u>Solution</u> : Voir le site

Exercices généraux : Voir le site

Objectifs

- Calculer les valeurs actuelle et acquise à intérêts simples

- Calculer les valeurs actuelle et acquise à intérêts composés

- Calculer les valeurs actuelle et acquise d'une série d'annuités

L'intérêt simple

1- Notion d'intérêt simple

Un intérêt est la rémunération que génère une somme placée ou prêtée. Cette rémunération est dite à intérêts simples lorsque les intérêts ne se rajoutent pas au capital pour porter eux même des intérêts. L'intérêt simple est versé à la fin de l'unité de temps convenue du prêt ou du placement, cette dernière est appelée généralement période. Pour les prêts et placements à intérêts simples, cette période est généralement une année au moins. L'intérêt est calculé proportionnellement à la durée du prêt ou du placement, les intérêts sont la résultante de trois paramètres qui sont :

- Le capital prêté ou placé : C
- La durée du placement ou de l'emprunt : n
- Le taux d'intérêt : t

Intérêt = I

$$I = C \frac{t}{100} \frac{n}{360}$$ si n désigne le nombre de jours

$$I = C \frac{t}{100} \frac{n}{12}$$ si n désigne le nombre de mois

$$I = C \frac{t}{100} n$$ si n désigne le nombre d'années

L'année financière est fixée à 360 jours, et chaque mois a son nombre exact de jours.

Exemples :

- Un capital de 1500 dinars est prêté pendant deux ans au taux de 4,5% fournira quel l'intérêt ?

  $I = 1500 \times 4{,}5/100 \times 2 = 135^{D}$

L'emprunteur, à l'expiration du délai des deux ans, devra remettre à son prêteur la somme de 1500 + 135 = 1635^D.

- La durée de placement est de 6 mois, le capital placé est de 1000 et le taux est de 5%, quel sera le montant des intérêts ?

$$I = 1000 \times \frac{5}{100} \times \frac{6}{12} = 250 \text{ dinars}$$

- Un capital de 72000^D est placé du 17 janvier au 13 mars au taux de 10%. Quel intérêt rapporte-t-il sachant que l'année est bissextile ?

  Du 17 au 31 janvier : 14 jours
  Du 1er au 28 février : 28 jours
  Du 1er au 13 mars : 13 jours

  nombre de jours = 14+28+13=55

$$I = \frac{72000 \times 10 \times 55}{36000} = 110 \text{ dinars}$$

2- Valeur acquise

On appelle valeur acquise la valeur obtenue au bout de n jours ou n années d'une somme placée ou empruntée. C'est la somme du capital placé ou emprunté et de l'intérêt produit.
Soit S_0 une somme placée ou empruntée pendant n jours au taux t. Au bout de n jours, on aura :

$$S_0 + \frac{S_0 \times t \times n}{36000}$$

$$VA = S_0 (1 + \frac{t \times n}{36000})$$

Exemple :

Calculer la valeur acquise pour un capital de 2400^D placé à 4% pendant 45j

$$VA = 2400(1 + \frac{4 \times 45}{36000}) = 2412 \text{ dinars}$$

3- Valeur actuelle

C'est la valeur à l'instant 0 d'une somme réalisée après n jours ou n années. Soit S_1 la somme obtenue après un placement de n jours, et S_0 la valeur actuelle.

$$S_0 = \frac{S_1}{1 + \frac{tn}{36000}}$$

Applications :

1. Un individu place 45000^D pour 3 mois à partir du 10 juin au taux de 10%, de combien dispose-t-il à l'issue du placement ?
2. Un individu place 75000^D du 15 mai au 18 septembre sur un compte rapportant 9,5% par an. De combien dispose-t-il à l'issue du placement ?
3. Un individu place 34800^D pendant 7 mois au taux de 4,5 % par an. Déterminer le montant des intérêts.
4. Quelle somme doit-on placer aujourd'hui sur un compte rapportant des intérêts simples au taux de 7,5% par an pour obtenir 30000^D dans 11 mois ?
5. Un individu place 27000^D, cent jours plus tard il récupère 28140^D. Déterminer le taux d'intérêt.

   Solution : voir le site

L'intérêt composé

1- Notion d'intérêt composé

Un placement ou un emprunt est fait à intérêts composés lorsque à chaque fin de période l'intérêt simple est ajouté au capital pour produire à son tour un intérêt simple lors de la période suivante. On dit que l'intérêt est capitalisé.

Exemple :

Soit un capital de 5000^D placé pendant 3 ans à 4 % l'an.
Pour la première année, on ajoute l'intérêt simple au capital => nous obtenons:

I = 5000 x 0,04 = 200
C+I = 5200

On dit que 5200 est la valeur acquise(Vacq) du capital placé au bout d'une année. La deuxième année, l'intérêt est calculée sur la base de 5200.

I= 5200 x 0,04 = 208

VAcq = 5200 + 208 = 5408

Intérêts composés = 5408 - 5000= 408

La troisième année les intérêts sont calculés sur la base de la VAcq = 5408

I= 5408 x 0,04 = 216,320

VAcq = 5408+216,320 = 5624,320

Depuis le début du placement les intérêts composés s'élèvent à :

5624,320 - 5000= 624,320

Si le placement a été fait avec des intérêts simples, on aura :

$$VAcq = 5000(1+\frac{4\times 3}{100}) = 5600$$

La distinction fondamentale entre intérêts simples et intérêts composés réside donc dans la capitalisation à la fin de chaque période, la capitalisation est l'addition des intérêts au capital à la fin de la période.

2- La valeur acquise

a- La période est formulée en nombre entier

Soit :

C : Capital prêté ou placé
n : Nombre de périodes
i : Le taux par dinar et par période

=> Fin de 1ère année VAcq = C+I= C+C i = C(1+i)

La deuxième année est entamée avec la somme de C(1+i) sur la base de laquelle les intérêts vont être calculés.

=> Fin de 2ème année VAcq= C(1+i) + C(1+i)i= C(1+i) (1+i) = $C(1+i)^2$

La troisième année est entamée avec la somme de $C(1+i)^2$ sur la base de laquelle les intérêts vont être calculés.

=> Fin de 3ème année VAcq = $C(1+i)^2+ (1+i)^2 i = C(1+i)^2 (1+i) = C(1+i)^3$

=> Fin de nième année : la valeur acquise au bout de la n année sera donc :

$$\mathbf{VAcq = C(1+i)^n}$$

Les intérêts composés produits par un placement pendant n périodes sont égaux à la différence entre la valeur acquise à la fin de la nième période et le capital placé.

I= VAcq - C = $C (1+i)^n – C$ => $\mathbf{I = C[(1+i)^n - 1]}$

La formule VAcq = $C(1+i)^n$ est toujours valable, s'il y a concordance entre la période dans laquelle est exprimé la placement et celle qui est relative au taux ainsi :

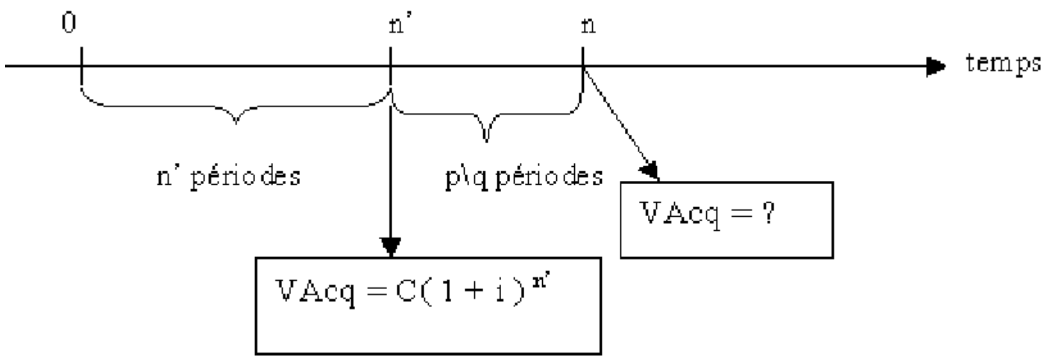
-n doit désigner les années si i est un taux annuel
-n doit désigner les trimestres si i est un taux trimestriel

b- La durée est un nombre fractionnaire de période

Soit :

C : Capital placé au prêté
i = taux d'intérêt
n = n' + P/q   n' : nombre entier

On peut illustrer la situation comme suit :



VAcq = $C(1+i)^{n'} + C(1+i)^{n'}$ P/q i   => **VAcq = $C(1+i)^{n'}[1+ P/q\ i]$**

Exemple :

Quelle est la valeur acquise par le placement d'une somme C au bout de 8 ans et 3 mois au taux de 4% avec capitalisation annuelle?

VAcq = $C(1.04)^8$ (1+ 3/12 x 0,04) = C x 1,382

Pratiquement, on n'emploie pas cette formule rationnelle. On lui préfère une formule approchée ou commerciale fondée sur l'utilisation directe de la formule générale VAcq =$(1+i)^n$ où n est un nombre fractionnaire.

3- Taux proportionnels et taux équivalents

a- Taux proportionnels

On dit que deux taux sont proportionnels quand leur rapport est égal au rapport des durées de leur période de capitalisation respectives.

D'une façon générale si i est le taux annuel pour 1 dinar et si i_q le taux relatif à une période plus petite qu'une année q :

$$\frac{i}{i_q} = \frac{q}{1} \quad \text{d'où} \quad i_q = \frac{i}{q}$$

Ainsi au taux annuel 6% correspond le taux semestriel 3% et le taux trimestriel 1,5%

Dans le système des intérêts simples, les taux proportionnels produisent sur un même capital les mêmes intérêts au bout d'une même durée, les valeurs acquises sont les mêmes.

Pour un capital C =1000 à placer à intérêts simples pendant un an au taux de 6% l'an, on aura :

$$VAcq = 1000(1 + \frac{6}{100}) = 1060$$

Au taux 3% le semestre : VAcq = $1000(1 + \frac{3}{100} \times 2) = 1060$

Au taux 1,5% le trimestre : VAcq = $1000\ (1 + \frac{1,5}{100} x4) = 1060$

Il n'est pas de même pour les intérêts composés, les valeurs acquises par un même capital pendant une même durée augmentent quand les périodes de capitalisation deviennent plus petites. Si on considère le même exemple, le calcul de la valeur acquise au bout d'une année nous ramène à :

t = 6% / an => VAcq = 1000 x $(1,06)^1$ = 1060

t = 3% /semestre => VAcq = 1000 x $(1.03)^2$ = 1060,900

t = 1,5% /trimestre => VAcq = 1000 x $(1,015)^4$ = 1061,300

b- Taux équivalents

On appelle deux taux équivalents, deux taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes, produisant la même valeur acquise pour un capital donné pendant une même durée de placement à intérêts composés. Soit :

i' => période q fractionnaire

i => période n

VAcq' = VAcq <=> $(1+i')^q = (1+i)$ <=> $1+i' = (1+i)^{1/q}$

<=> $i' = (1+i\ )^{1/q} - 1$

Exemple : Déterminer les taux équivalents au taux annuel de 9%

Taux semestriel = $i_S = (1+0,09)^{1/2} - 1$ = 4,403%

Taux trimestriel = $i_T = (1+0,09)^{1/4} - 1$ = 2,18%

Taux mensuel = $i_m = (1+0,09)^{1/12} - 1$ = 0,72%

Taux bisannuel = $i_b = (1+0,09)^2 - 1$ = 18,81%

On aura donc $(1+ 0{,}0072)=(1+0{,}04403)^{1/6}$

4- La valeur actuelle

Il est possible d'envisager le problème inverse, c'est à dire déterminer à partir d'une valeur acquise la somme qu'il faut placer. Il ne s'agit plus de capitalisation mais d'actualisation.

$$C = \frac{VAcq}{(1+i)^n}$$

$VAcq = C(1+i)^n \Rightarrow C = VAcq\,(1+i)^{-n}$

Exemple: quelle somme faut-il placer à intérêts composés au taux de 5,6% pour obtenir un capital de 27000 dinars dans deux ans et sept mois ?

$C = 27000(1{,}056)^{-(2+7/12)} = 23454{,}81$dinars

5- Applications

1. Soit un capital de $C = 500^D$ placé au taux i = 8% pendant 2 ans à intérêts composés. Quelle est la valeur acquise au bout de deux ans?
2. Quelle est au bout de 7 ans la valeur acquise d'un capital de 5000^D placé à intérêts composés au taux de 5% par an ?
3. Calculer la valeur acquise (intérêts composés), en tenant compte des taux proportionnels et des taux équivalents :

   a. 1000^D après 10 ans au taux annuel de 15%
   b. 2000^D après 12 ans et 6 mois au taux annuel de 16%, la capitalisation est semestrielle.
   c. 3000^D après 5 ans et 7 mois au taux nominal de 13% capitalisé mensuellement.
   d. 850^D après 7 ans et 9 mois au taux nominal de 17% capitalisé trimestriellement.

4. Que devient après 5 ans et 7 mois un capital de 3500^D placé au taux annuel de 20%, en supposant que la capital initial est placé à intérêts composés pendant 5 ans puis la valeur acquise a été placée à intérêt simple pendant 7 mois.
5. On a placé 1200^D à intérêts composés à 14% pendant 10 ans. Pendant combien de temps, il aurait fallu laisser la même somme au même taux et à intérêt simple pour qu'elle subisse la même augmentation ?
6. Une société projette un important investissement et veut effectuer dans la poursuite de cet objectif plusieurs placements successifs :

Date	Sommes
01/04/96	60000
01/01/98	36000
01/01/99	90000
01/07/99	50000

7.
   Ces placements étant effectués au taux annuel de 5%, quel sera le capital constitué le 1er janvier 2000.
8. Deux capitaux dont la somme est 100 000^D sont placés: L'un à intérêts simples au taux de 5 %, l'autre à intérêt composés a taux de 4 %.
   Au bout de 20 ans, ils ont acquis la même valeur, quels étaient ces deux capitaux ?
9. Un placement à intérêts composés d'une somme de 20000^D est complété un an après par un nouveau dépôt de 20 000^D. Un an après ce nouveau placement, on dispose de 44 050^D,640. Calculer le taux semestriel de placement (capitalisation semestrielle).

Solutions : voir le site

Les annuités

1- Définition des annuités

a- Cas d'un placement

Une suite d'annuité est une suite de sommes (constantes ou variables) placées régulièrement à intérêts composés. Ce sont les annuités de capitalisation ou de placement.

b- Cas d'un emprunt

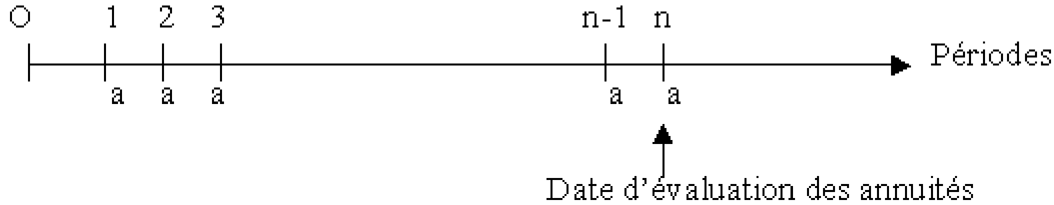
On désigne par annuités, une suite de règlements effectués à intervalles égaux. Ils peuvent être égaux ou non en valeurs et servent au remboursement du capital. On parle d'annuité de remboursement ou d'amortissement.

Les annuités d'amortissement sont généralement versées en fin de périodes alors que les annuités de placement sont assimilées à des annuités de début de période. D'une façon générale la période qui sépare 2 annuités est constante.

2- Les annuités constantes

a- Les annuités de fin de périodes

a1- Valeur acquise



a : Montant de l'annuité = valeur de l'annuité constante de fin de période
VAcq : Valeur acquise d'une série de n annuités à la date du dernier versement

On appellera VAcq la somme du capital emprunté et des intérêts produits.
VAcq = la somme des valeurs acquises des tous les versements

Fin de l'année 1	a	=>	$a\ (1+i)^{n-1}$
Fin de l'année 2	a	=>	$a\ (1+i)^{n-2}$
Fin de l'année 3	a	=>	$a\ (1+i)^{n-3}$
.			
.			
.			
Fin de l'année n	a	=>	$a\ (1+i)^{n-n}=a$

$VA = a\ (1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + a\ (1+i)^{n-3}+ \text{------} +a(l+i)+a$

$= a\ (1+ (1+i) + (1+i)^2+\text{-----} +(1+i)^{n-1})$

C'est une suite géométrique de raison (1+i) à n termes, son premier terme est 1.

La somme d'une suite géométrique de raison q et de 1er terme U0 à n termes est de la forme :

$$Sn = U_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

d'où :

$$VA \quad = a\left[1\times\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}\right] = a\times\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Exemple :

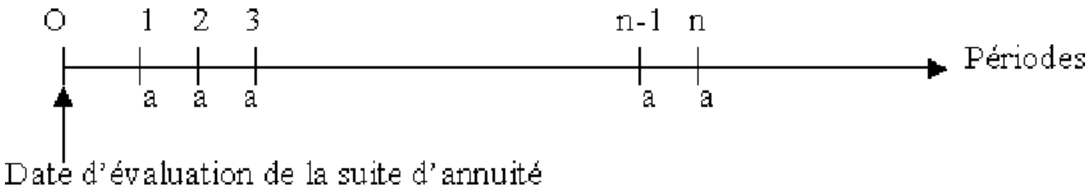
Une société X a placé à la fin de chaque année pendant 15 ans une somme égale à 5000D au taux i = 7% . Quelle est la valeur acquise en fin de période?

$$VA=5000\times\frac{(1+0{,}07)^{-15}-1}{0{,}07}=125645{,}110$$

S'il s'agit de calculer la valeur de cette suite d'annuité à la date O, on parle dans ce cas d'un problème de valeur actuelle ou d'actualisation.

a2- Valeur actuelle

Il est d'usage que le prêteur prélève l'intérêt au moment de la transaction, pour lui se pose alors la question " combien vaut aujourd'hui la somme que me remboursera mon client à la fin de la période ? " C'est cette valeur qu'on appelle valeur actuelle.



Il faut se placer à l'instant 0 et actualiser toutes les annuités postérieures à cette date :

1ère année	a	=>	a $(1+i)^{-1}$
2ème année	a	=>	a $(1+i)^{-2}$
3ème année	a	=>	a $(1+i)^{-3}$
.			
.			
.			
nième année	a	=>	a $(1+i)^{-n}$

Valeur actuelle = Somme des valeurs actuelles
Valeur actuelle = a $(1+i)^{-1}$ + a $(1+i)^{-2}$ + -------+ a $(1+i)^{-(n-1)}$ + a $(1+i)^{-n}$

=> Vact= a $[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \text{-------}+ (1+i)^{-n}]$

C'est une suite géométrique de n termes, de premier terme $(1+i)^{-1}$ et de raison $(1+i)^{-1}$.

$$S_n = (1+i)^{-1} \frac{1-\left[(1+i)^{-1}\right]^n}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$\text{d'où Vactuelle} = a\left[(1+i)^{-1} \frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1}\right] \times \frac{(1+i)}{(1+i)} = a\left[\frac{(1+i)^{-n}-1}{1-(1+i)}\right]$$

$$\text{d'où Vactuelle} = a\left[\frac{(1+i)^{-n}-1}{-i}\right]$$

On peut retrouver cette valeur actuelle d'une autre manière, en actualisant la valeur acquise.

$$V_0 = V_n(1+i\,)^{-n}$$

$$V_0 = a\left(\frac{(1+i)^n-1}{i}\right)(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = a\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)}$$

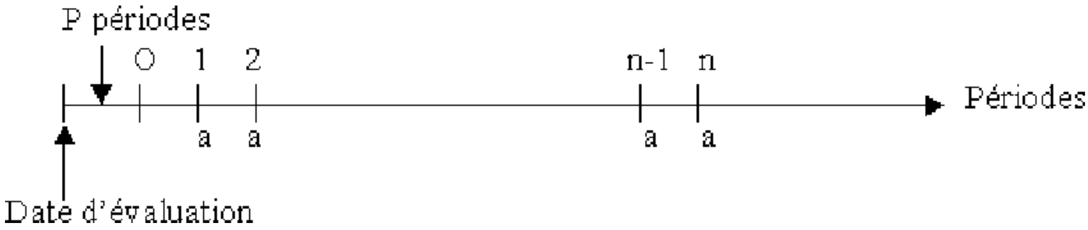
a3- Valeur à date quelconque

La date d’évaluation d’une suite d’annuités peut être quelconque. Trois cas peuvent se présenter :

d'où Vactuelle

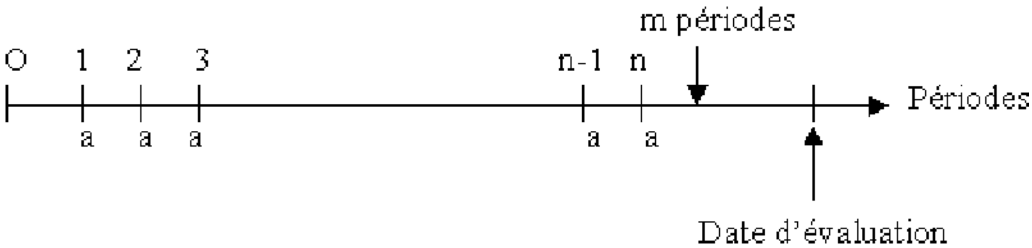
- <u>Cas 1 :</u> La date d’évaluation vient avant la date 0

Il s’agit d’actualiser la suite d’annuité à la date p.



$$V_p = V_0 (1+i)^{-p} \Rightarrow Vp = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} (1+i)^{-p}$$

- <u>Cas 2 :</u> La date d’évaluation vient après la date n

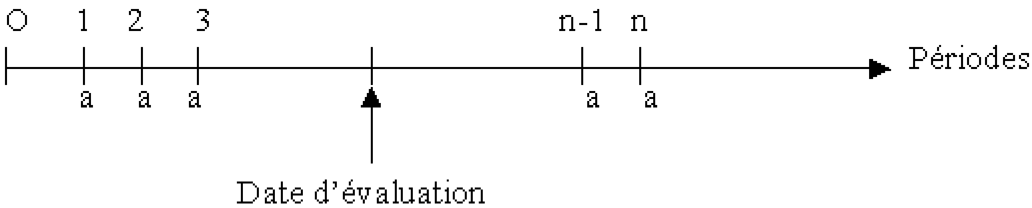


$$V_m = VAcq (1+i)^m \Rightarrow V_m = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^m$$

ou $\quad V_m = V_0 (1+i)^{n+m}$

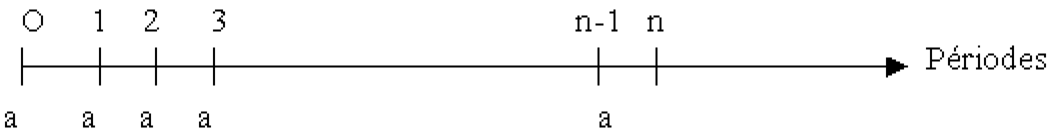
$$\Rightarrow \quad Vm = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} (1+i)^{n+m}$$

- <u>Cas 3 :</u> La date d’évaluation est entre les dates 0 et n



Les annuités antérieures à la date d'évaluation doivent être capitalisées et les annuités postérieures à la date d'évaluation doivent être actualisées.

b- Les annuités de début de périodes



b1- Valeur acquise

La valeur acquise de cette suite est la somme des valeurs acquises des annuités.

Début 1ère année	a	=>	$a\,(1+i)^{n}$
Début 2ème année	a	=>	$a\,(1+i)^{n-1}$
Début 3ème année	a	=>	$a\,(1+i)^{n-2}$
.			
.			
.			
Début nième année	a	=>	$a\,(1+i)$

$VA = a\,(1+i)^{n} + a\,(1+i)^{n-1} + a\,(1+i)^{n-2} + \text{-------} + a\,(1+i)$

$\quad = a\,[\,(1+i) + (1+i)^{2} + \text{------------} + (1+i)^{n}\,]$

C'est une suite géométrique de n termes, de premier (1+i) et de raison (1+i).
On aura donc :

$$VA = a\left[(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)-1}\right]$$

=> $$VA = a(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

b2- Valeur actuelle

La valeur actuelle est la somme de valeur actuelle des annuités

Début 1ère année	a	=>	a
Début 2ème année	a	=>	$a\,(1+i)^{-1}$
Début 3ème année	a	=>	$a\,(1+i)^{-2}$
.			
.			

.

Début nième année   a   =>   a $(1+i)^{-(n-1)}$

Vact = a [1+ $(1+i)^{-1}$ + $(1+i)^{-2}$+ ------------ + $(1+i)^{-(n-1)}$]

C'est une suite géométrique de n termes, de premier 1 et de raison $(1+i)^{-1}$.

$$V_0 = a\left(1 \times \frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1}\right)\frac{(1+i)}{(1+i)} \quad \text{D'où} \quad Vact = a\left((1+i) \times \frac{(1+i)^{-n}-1}{-i}\right)$$

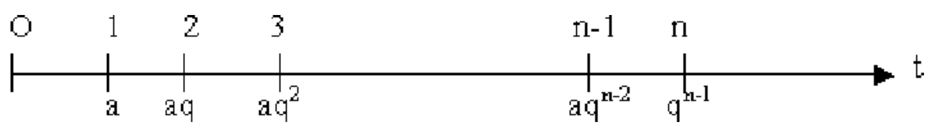
On trouve le même résultat si on actualise la valeur acquise.

$$Vact = a\left((1+i) \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right)(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a\left((1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

Remarque: C'est le même résultat que les annuités de fin de périodes multiplié par (1+i). Ceci est du au décalage d'une période qui existe entre les deux cas d'évaluation.

3- Les annuités en progression géométrique de fin de période



L'annuité a augmente annuellement suivant une suite géométrique de raison q.

a- Valeur acquise

La valeur acquise est égale à la somme des valeurs acquises des annuités.

Fin 1ère année	a	=>	$a(1+i)^{n-1}$
Fin 2ème année	aq	=>	$aq\,(1+i)^{n-2}$
Fin 3ème année	aq^2	=>	$aq^2\,(1+i)^{n-3}$
.			
.			
.			
Fin nième année	$aq^{(n-1)}$	=>	$aq^{(n-1)}\,(1+i)^{-(n-1)}$

$$VAcq = a(1+i)^{n-1} + aq(1+i)^{n-2} + aq^2(1+i)^{n-3} + - - - - - - - + aq^{n-1}$$

$$VAcq = a[q^{n-1} + q^{n-2}(1+i) + q^{n-3}(1+i)^2 + - - - + q(1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

C'est une suite géométrique à n termes, de premier terme $(1+i)^{n-1}$ et de raison $q(1+i)^{-1}$.

$$VAcq = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{1-q^{n}(1+i)^{-n}}{1-q(1+i)^{-1}}\right]$$

$$= a\left[\frac{(1+i)^{n-1}-q^{n}(1+i)^{-1}}{1-q(1+i)^{-1}}\right]\times\frac{(1+i)}{(1+i)}$$

D'où : $$VA = a\frac{(1+i)^{n}-q^{n}}{1+i-q}$$

Exemple :

t = 8%
Durée = 20 ans
Raison = 1,1
chaque année l' annuité augmente de 10%
1er placement 5000D

$$VA = 5000\,\frac{(1{,}08)^{20}-(1{,}1)^{20}}{(1{,}08)-1{,}1} = 516635{,}480$$

Application :

Un industriel a loué un local pour un forfait annuel de 10 000 dinars avec une majoration de 5% chaque année (Taux d'intérêt 10%). Calculer la valeur des annuités perçue par le propriétaire au bout de sept ans.

Solution : Voir le site

b- Valeur actuelle

La valeur actuelle est égale à la somme des valeurs actuelles des annuités.

Fin 1ère année	a	=>	$a(1+i)^{-1}$
Fin 2ème année	aq	=>	$aq\,(1+i)^{-2}$
Fin 3ème année	aq^2	=>	$aq^2\,(1+i)^{-3}$
.			
.			
.			
Fin nième année	$aq^{(n-1)}$	=>	$aq^{(n-1)}\,(1+i)^{-n}$

$$\text{Valeur actuelle} = a\left[(1+i)^{-1} + q(1+i)^{-2} + ----+q^{n-1}(1+i)^{-n}\right]$$

C'est une suite géométrique à n termes, de premier terme $(1+i)^{-1}$ et de raison $q(1+i)^{-1}$.

On aura ainsi :

$$\text{Vact} = a\left[(1+i)^{-1}\,\frac{1-q^{n}(1+i)^{-n}}{1-q(1+i)^{-1}}\right] = a\left[\frac{1-q^{n}(1+i)^{-n}}{(1+i)-q}\right]\times\frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}}$$

$$\text{Vactuelle} = a\times\frac{(1+i)^{n}-q^{n}}{(1+i)-q}\times(1+i)^{-n}$$

On retrouve le même résultat avec la méthode d'actualisation de la valeur acquise.

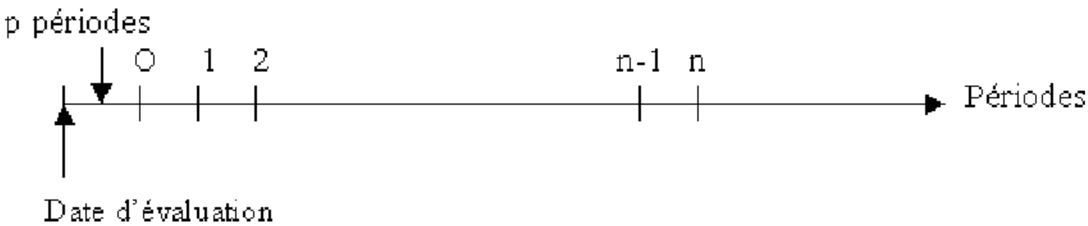
$$\text{Vactuelle} = \text{VA} \times (1+i)^{-n} = a\times\frac{(1+i)^{n}-q^{n}}{(1+i)-q}\times(1+i)^{-n}$$

c- Date d'évaluation quelconque

La date d'évaluation d'une suite d'annuités peut être quelconque. Trois cas peuvent se présenter :

- Cas 1 : La date d'évaluation vient avant la date 0

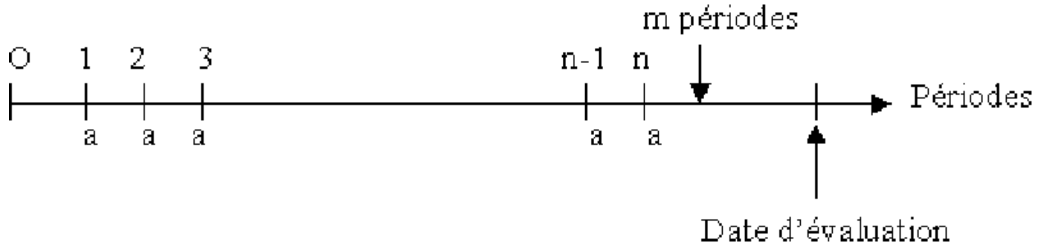
  Il s'agit d'actualiser la valeur actuelle



$$\mathbf{Vp} = \mathbf{a}\,\frac{(1+i)^{n}-q^{n}}{(1+i)-q}\times(1+i)^{-(n+p)}$$

- Cas 2 : La date d'évaluation vient après la date n

  Il s'agit de capitaliser la valeur acquise :



$$Vm = a \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q} \times (1+i)^m$$

- Cas 3 : La date d'évaluation est entre la date 0 et la date n

  Il s'agit de capitaliser les annuités antérieures à la date d'évaluation et d'actualiser les annuités postérieures à cette date.

Exercices généreaux : Voir le site

Objectifs

- Maîtriser l'analyse combinatoire

- Maîtriser le calcul de probabilité

- Utiliser le théorème de Bayes

Dénombrement

1- Définitions

Soit un ensemble E contenant n éléments. Une disposition est formée de n éléments choisis parmi ceux composant E.

- Une disposition est sans répétition, si elle ne comporte aucun élément qui figure plus d'une fois.

- Une disposition est avec répétition, si un ou plusieurs des éléments qu'elle comporte figure plus d'une fois.

- Une disposition est ordonnée si l'ordre des éléments qui la composent est pris en considération.

- Une disposition n'est pas ordonnée si l'ordre des éléments qui la composent n'est pas pris en considération.

- Les éléments d'un ensemble sont dits discernables lorsqu'ils peuvent être distingués les uns des autres.

2- Les permutations

On appelle permutation de n éléments d'un ensemble, toute suite ou toute disposition ordonnée de ces n éléments. Deux permutations ne différent donc que par l'ordre des éléments qui les composent.

- Permutation sans répétition

Le nombre de permutations de ces n éléments, noté P_n, est donné par :

$$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\ldots\ldots 3 \times 2 \times 1 = n!$$

- Permutation avec répétition

Si parmi les n éléments de l'ensemble, k sont identiques, les n-k autres étant distincts, alors le nombre de permutations de l'ensemble, noté $P_{n,k}$, est donnée par :

$$\boxed{P_{n,k} = \frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}}$$

D'une façon générale si on considère un ensemble formé de n éléments avec a_1, a_2 , ... ,a_n sous ensembles distincts mais contenant des éléments identiques, alors le nombre de permutations serait donné par :

$$\boxed{P_{n,a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n} = \frac{n!}{a_1!a_2!\ldots\ldots\ a_n!}}$$

Application :

Combien de nombres peut on former avec les chiffres

a. 3, 8, 9, 1.
b. 1, 4, 4, 4, 6, 9, 9.

Solution : Voir le site

3- Les combinaisons

Soit un ensemble E composé de n éléments. On appelle combinaison de p éléments parmi les n, toute partie ou sous ensemble de E comportant p éléments. Ainsi deux combinaisons ne différent que par la nature des éléments choisis.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\ (n-p)!}$$

Application :

Dans une classe de 20 étudiants un enseignant veut désigner un groupe de 5 étudiants pour faire un exposé en mathématique. Combien de groupes peut-il former ?

<u>Solution</u> : voir le site

Propriétés :

- $C_n^p = C_n^{n-p}$ le nombre de possibilités de choisir p éléments parmi n, est aussi égal au nombre de possibilité de ne pas choisir n-p éléments parmi n.
- $C_n^n = C_n^0 = 1$
- $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

4- Les arrangements

Soit un ensemble de n éléments. On appelle arrangement de p éléments parmi les n, toute disposition ordonnée de ces p éléments. Ainsi deux arrangement ne différent que par l'ordre ou/et la nature des éléments choisis.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Application:

Combien y-a-t-il de possibilités pour recruter quatre ouvriers parmi six candidats afin d'occuper quatre postes différents au sein d'une entreprise ?

<u>Solution</u>

Propriétés :

- $\mathbf{A_n^n = P_n = n!}$
- $\mathbf{A_n^p = p!\,C_n^p}$

Calcul de probabilités

1- Vocabulaire des événements

L'étude de la formule de Bayes sera effectuée à partir de l'exemple suivant :

Au sein de la société « Alpha » 20% des employés ont un diplôme en gestion, parmi eux 70% ont des postes de cadres.

Cependant parmi ceux qui n'ont pas de diplômes en gestion, 15% occupent un poste de cadre.

Si un cadre est sélectionné au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit un diplômé en gestion ?

Soient les événements suivants :

E1 : employés ayant un diplôme en gestion => P(E1) = 0,2
E2 : employé n'ayant pas un diplôme en gestion => P(E2) = 0,8
A : L'employé choisi est un cadre

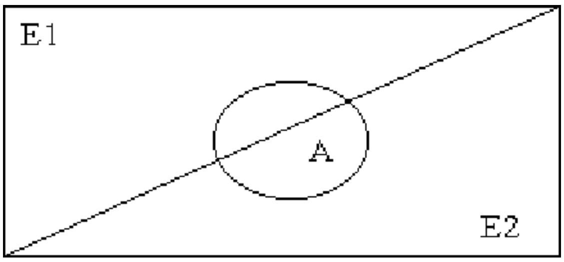
La probabilité recherchée est : P(E1/A) ?

On a : P(A/E1) =0,7 et P(A/E2)=0,15

Ainsi : $P(E_1/A) = \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1)\ .\ P(E_1)}{P(A)}$

or $P(A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A)$

d'où $P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1).P(E_1)}{P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A)}$



Ce résultat constitue le théorème de Bayes qui peut être formulé autrement :

$$\boxed{P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1).P(E_1)}{P(A/E_1).P(E_1) + (A/E_2).P(E_2)}}$$

A.N :

$$P(E_1/A) = \frac{0{,}7x0{,}2}{(0{,}7x0{,}2)+(0{,}15x0{,}8)} = 0{,}5384$$

Remarque : L'expression générale de la formule de Bayes est donnée par :

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i).P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i).P(A/E_i)}$$

2- Calcul de probabilité

La notion de probabilité est le résultat d'un raisonnement dans lequel on évalue le nombre de chances d'obtenir la réalisation d'un événement. Ainsi la probabilité d'un événement A peut être définie comme le rapport entre le nombre des cas favorables à un évènement A et le nombre de cas possibles.

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Ainsi la probabilité d'un événement impossible est nulle et celle d'un événement certain est égale à un.

a- Axiomes de probabilité :

Soit Ω un univers fini, associé à une épreuve aléatoire notée X.

Axiome 1 : $P(\Omega) = 1$.
Axiome 2 : $0 \leq P(X) \leq 1$
Axiome 3 : Pour tous événements X et Y, si $X \cap Y = \varnothing$ (voire figure 1), alors :
$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$

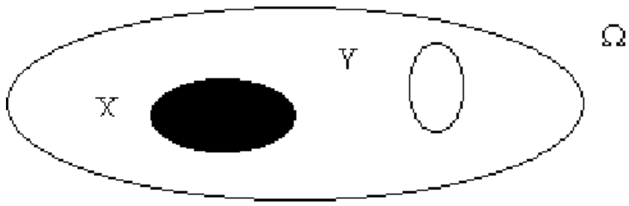


Figure 1

b- Propriétés :

- Pour tout événement A : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (voir figure 2)

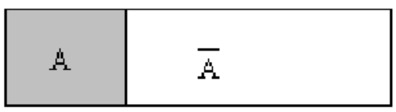


Figure 2

- pour tous événements A et B :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (voir figure 3)
  Dans le cas ou A et B sont incompatibles alors $P(A \cap B) = 0$ et la formule devient :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

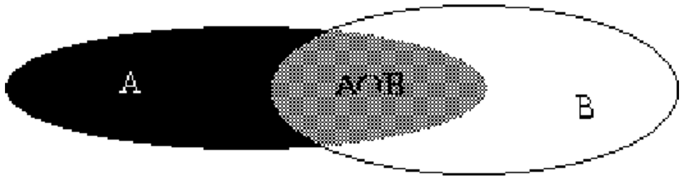


Figure 3

Application :

Une enquête auprès de 400 étudiants d'une faculté portant sur la lecture de deux publications hebdomadaires : le journal de la faculté publié par l'administration et le journal des étudiants publié par le comité des étudiants, a donné les résultats suivants :

165 lisent le journal de la faculté.
240 lisent le journal des étudiants.
90 lisent les deux journaux.

On choisit un étudiant au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il lise l'un ou l'autre de ces deux journaux ?

b. Quelle est la probabilité qu'il lise uniquement le journal des étudiants ?

Solution : voir le site

3- Probabilité conditionnelle

Soient deux événements A et B avec A un événement de probabilité non nulle.

On appelle probabilité conditionnelle de B par rapport à A appelée aussi probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité notée P(B/A) qui est calculée comme suit :

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A) \neq 0}$$

Conséquences

- A partir de la formule de la probabilité conditionnelle on peut tirer la relation suivante : P($A \cap B$) = P(B/A)*P(A) = P(A/B)*P(B)

- Si A et B sont indépendants alors P(B/A) = P(B). Ainsi en cas d'indépendance des événements A et B on a : P($A \cap B$) = P(A)*P(B)

Application :

Une urne combinent 15 boules numérotées de 1 à 15 . On tire une boule au hasard, on sait que le numéro tiré est impair. Quelle est alors la probabilité que cette boule porte un numéro multiple de 3 ?

Solution : voir le site

Théorème de Bayes

L'étude de la formule de Bayes sera effectuée à partir de l'exemple suivant :

Au sein de la société « Alpha » 20% des employés ont un diplôme en gestion, parmi eux 70% ont des postes de cadres.

Cependant parmi ceux qui n'ont pas de diplômes en gestion, 15% occupent un poste de cadre.

Si un cadre est sélectionné au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit un diplômé en gestion ?

Soient les événements suivants :

E1 : employés ayant un diplôme en gestion => P(E1) = 0,2
E2 : employé n'ayant pas un diplôme en gestion => P(E2) = 0,8
A : L'employé choisi est un cadre

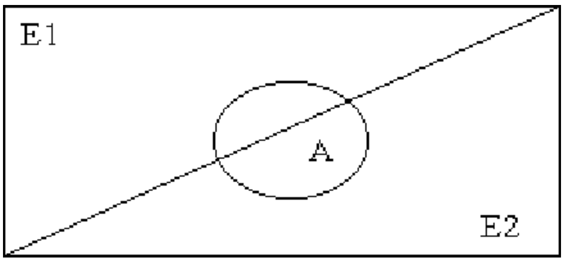
La probabilité recherchée est : P(E1/A) ?

On a : P(A/E1) =0,7 et P(A/E2)=0,15

Ainsi : $P(E_1/A) = \dfrac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/E_1)\ .\ P(E_1)}{P(A)}$

or $P(A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A)$

d'où $P(E_1/A) = \dfrac{P(A/E_1).P(E_1)}{P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A)}$



Ce résultat constitue le théorème de Bayes qui peut être formulé autrement :

$$\boxed{P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1).P(E_1)}{P(A/E_1).P(E_1) + (A/E_2).P(E_2)}}$$

A.N :

$$P(E_1/A) = \frac{0{,}7 x 0{,}2}{(0{,}7 x 0{,}2) + (0{,}15 x 0{,}8)} = 0{,}5384$$

Remarque : L’expression générale de la formule de Bayes est donnée par :

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i).P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i).P(A/E_i)}$$

Bibliographie

Titre	Auteur(s)	Edition
Introduction à la programmation linéaire	Gérald Baillergeon	SMG 1997
Manuel de mathématiques financières	Samir Srairi	Clé 1997
Mathématiques appliquées à l'économie	Jacqueline Fourastie Gilbert Laffond	Dunod 1995
Mathématiques appliquées à l'économie	Jacqueline Fourastie	Dunod 1992
Mathématiques de base	Franck Ayres Philip Schmidt	Schaum 1993
Mathématiques en sciences économiques	Tahar Abdessalem	CEREP 1989
Mathématiques financières	Mohamed Choyakh	-
Mathématiques pour économistes	Alain Planche	Dunod 1992
Matrices	Franck Ayres	Schaum 1993
Méthodes mathématiques appliquées à l'économie et la gestion	Jean David AvenelElie Azoulay	Ediscience 1999
Modèles mathématiques en gestion	André Ross	Le griffon d'argile 1993
Probabilités	René Sandretto	Dunod 1996