Exercice 5.7 Déterminiser l'automate suivant :

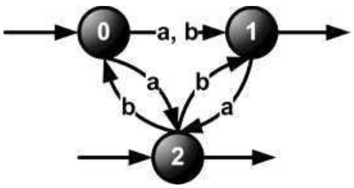

Figure 5.30

Exercice 5.8 Construire des automates déterministes qui reconnaissent les langages suivants. En déduire des automates déterministes qui reconnaissent les complémentaires de ces langages :

- (a) L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui contiennent **exactement** trois fois le symbole 1.
- (b) L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui contiennent **au moins** un 1.

Exercice 5.9 Construire un automate fini reconnaissant l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a,b\}$ qui **ne se terminent pas** par *abaab*. Le déterminiser et minimiser.

Exercice 5.10 Montrer que les automates déterministes calculés à l'exercice 6 sont tous minimaux sauf un. Lequel ?

Exercice 5.11 Déterminiser et minimiser les automates suivants :

- a)

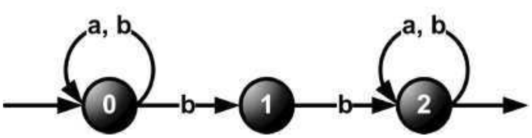

Figure 5.31

- b)

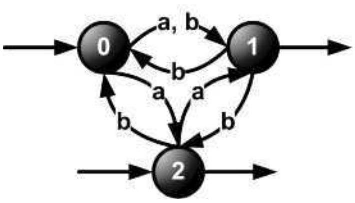

Figure 5.32

Exercice 5.12 On définit la famille d'automates suivants :

$$\widetilde{A}_n = (Q_n, I, T, E),\ n \geqslant 1$$

avec :
- $A = \{a, b\}$
- $Q_n = \{0,1, ..., n-1\}$
- $I = T = \{0\}$
- Comme flèches étiquetées par a l'ensemble de $(q.a.((q+1)\text{mod } n))$ pour $\forall q : 0 \leqslant q \leqslant n-1$
- Comme flèches étiquetées par b l'ensemble de $(q.b.0)$ et $(q.b.q)$ pour $\forall q\ :\ 1 \leqslant q \leqslant n-1$ (*attention : la première inégalité commence par 0, et la seconde, par 1*)

Dessiner $\widetilde{A_3}$ et $\widetilde{A_4}$.

Puis montrer que le déterminisé complet de $\widetilde{A_n}$ a toujours 2^n états.

Corrigés des exercices

Exercice 5.1

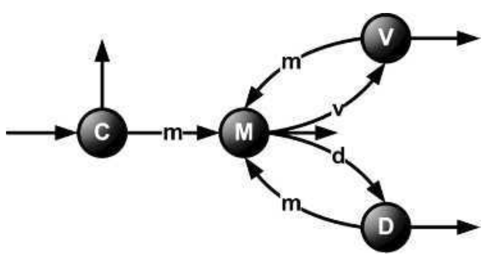

Figure 5.33 **Cet automate est déterministe.**

Exercice 5.2

Solution (a)

L'automate le plus simple qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ dont l'avant dernier symbole est 0, est le suivant :

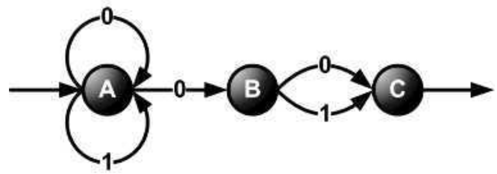

Figure 5.34 **Cet automate n'est pas déterministe.**

Solution (b)

L'automate le plus simple qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui commencent et qui finissent par 0, est le suivant :

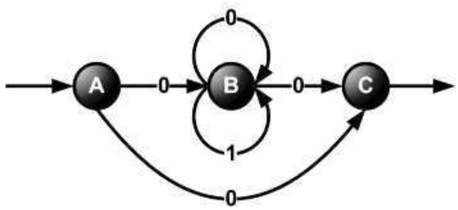

Figure 5.35 **Cet automate n'est pas déterministe.**

Solution (c)

Un des nombreux automates équivalents qui reconnaissent l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, .\}$ représentant en C les constantes numériques, est le suivant :

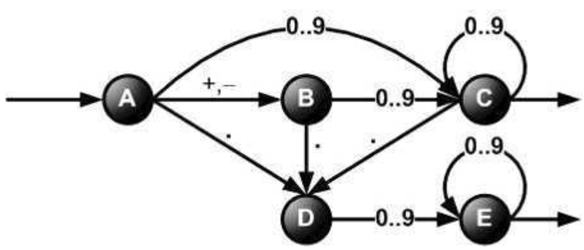

Figure 5.36 **Cet automate est déterministe.**

Solution (d)

Un des nombreux automates équivalents qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ comportant au moins une fois le motif 10 et au moins une fois le motif 01, est le suivant :

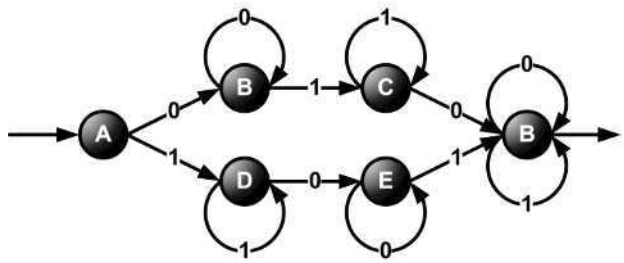

Figure 5.37 **Cet automate est déterministe.**

Solution (e)

Un des nombreux automates équivalents qui reconnaît le langage $\{a^n b^m | n + m \text{ pair}\}$, est le suivant :

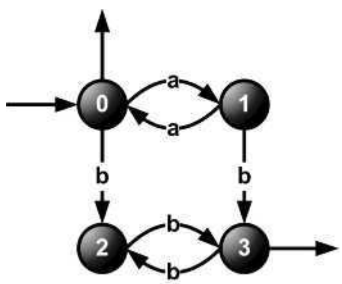

Figure 5.38 **Cet automate est déterministe.**

Exercice 5.3 Ajout d'un 0 à la fin d'un nombre binaire le multiplie par 2.
Ajout d'un 0 à la fin d'un nombre binaire le multiplie par 2 et lui ajoute 1.

Tableau 5.20

N	N mod 5	Ajout d'un 0 à la fin de l'écriture binaire donne N' :	N' mod 5	Ajout d'un 1 à la fin de l'écriture binaire donne N" :	N" mod 5
$5n$	0	$10n$	0	$10n + 1$	1
$5n + 1$	1	$10n + 2$	2	$10n + 3$	3
$5n + 2$	2	$10n + 4$	4	$10n + 5$	0
$5n + 3$	3	$10n + 6$	1	$10n + 7$	2
$5n + 4$	4	$10n + 8$	3	$10n + 9$	4

Cela se traduit par l'automate suivant :

Tableau 5.21

État	En lisant 0	En lisant 1
0	0	1
1	2	3
2	4	0
3	1	2
4	3	4

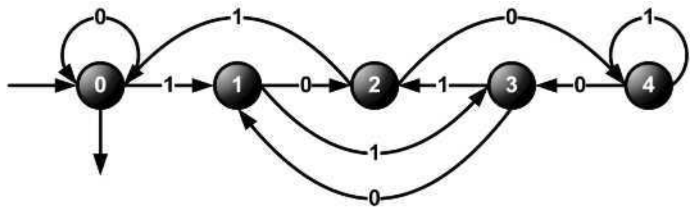

Figure 5.39

Exercice 5.4

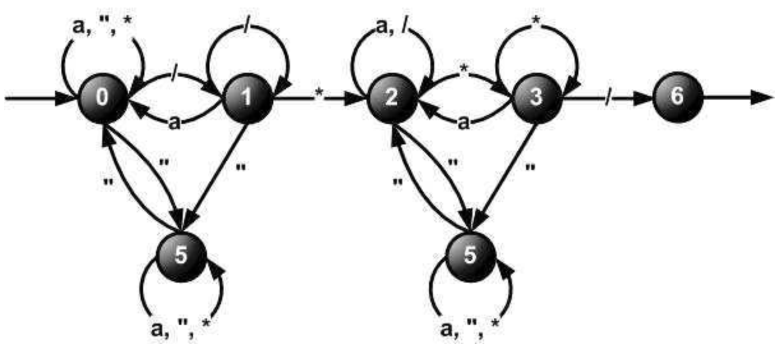

Figure 5.40

Exercice 5.5 États 2 et 3 ne mènent pas à la sortie. Ils sont donc inutiles. Le langage reconnu par cet automate est le même que le langage reconnu par :

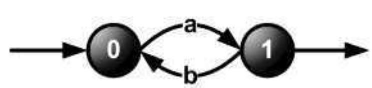

Figure 5.41

Il consiste en mots *a*, *aba*, *ababa*, *abababa*... qu'on peut écrire comme *a(ba)** ou *(ab)*a*.

Exercice 5.6

Solution A_1

- Cet automate lit tous les mots se terminant par *bbb*.
- Il est émondé.
- *Déterminisation*

Tableau 5.22

État	a	b
0	0	01
01	0	012
012	0	0123
0123	0	0123

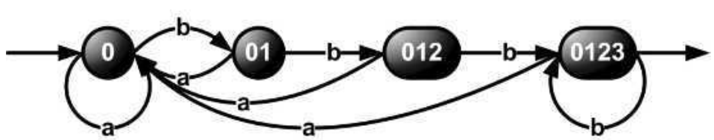

Figure 5.42 A_1

Solution A_2

- Cet automate lit tous les mots avec un *b* en 3ième position de la fin.
- Il est émondé.
- *Déterminisation*

Tableau 5.23

	État	A	b
Initial	0	0	01
	01	02	012
	012	023	0123
	02	03	013
Terminal	0123	023	0123
Terminal	023	03	013
Terminal	03	0	01
Terminal	013	02	012

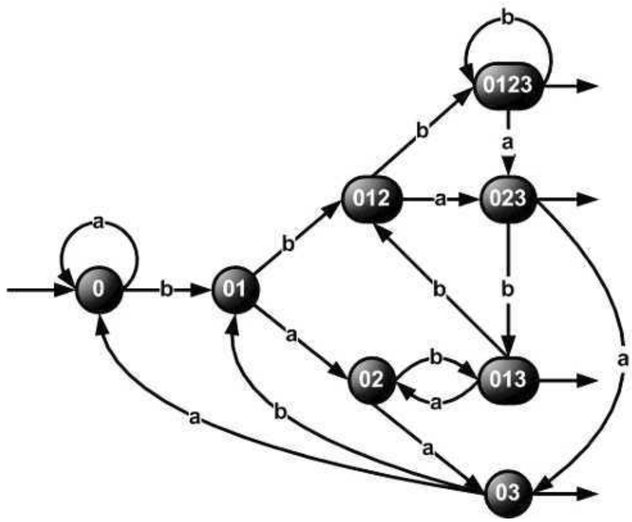

Figure 5.43

Solution A_3

- Cet automate lit tous les mots contenant au moins trois caractères ...*a*...*b*...*a*... où « ... » peut être vide.
- Il est émondé.
- • *Déterminisation*

Tableau 5.24

État	a	b
0	01	01
01	01	012
012	0123	012
0123	0123	0123

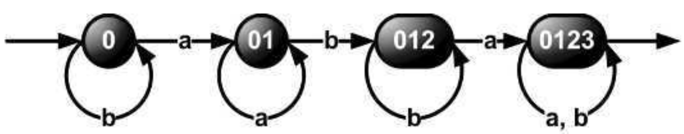

Figure 5.44

Solution A_4

- Cet automate lit tous les mots consistant en des 0 ou en des 0 suivis d'un seul 1, ou le mot 1.

- Il est accessible mais non pas coaccessible.
- *Déterminisation*

Tableau 5.25

État	0	1
A	AB	B
AB	ABC	BC
ABC	ABC	BC
B	C	C
C	C	C
BC	C	C

On voit que C est l'état poubelle.

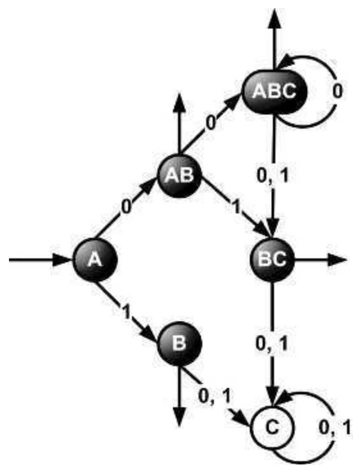

Figure 5.45

Ici on a obtenu donc un automate déterministe avec poubelle. Mais il y avait une « poubelle » dès le début – l'état C dont on ne pouvait pas revenir. On aurait pu construire d'abord un automate non déterministe plus simple qui reconnaît le même langage qu'A_4 :

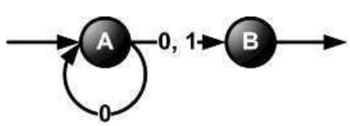

Figure 5.46

et le déterminiser. En ce faisant on arrive à un automate déterministe nettement plus simple que tout à l'heure :

Tableau 5.26

État	0	1
A	AB	B
AB	AB	B
B	P	P
P	P	P

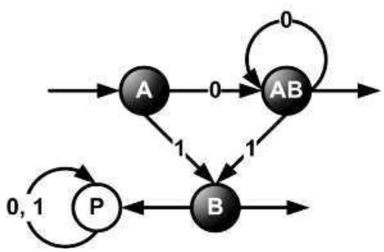

Figure 5.47

Dans l'exercice 10 on va voir que cet automate est en effet minimal.

Solution A_5

- On ne décrit pas le langage (c'est trop compliqué à ce stade).
- Il est émondé.
- *Déterminisation :*

Tableau 5.27

État	a	b
0	12	P
12	12	0

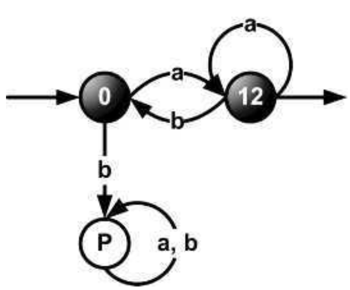

Figure 5.48

(Maintenant il devient bien plus facile de décrire$L(A_5)$ si l'on veut : il consiste en tous les mots commençant par *a*, finissant par *a*, et où tout *b* est entouré par des *a* de façon à ne jamais avoir *bb*).

Exercice 5.7

Tableau 5.28

État	a	b
02	12	01
01	12	1
12	2	01
1	2	P
2	P	01
P	P	P

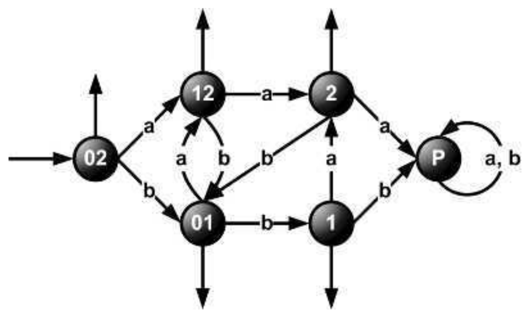

Figure 5.49

Exercice 5.8

Solution (a)

Un automate déterministe complet qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui contiennent exactement trois fois le symbole 1 se construit directement, sans qu'on ait besoin de construire un automate non déterministe d'abord :

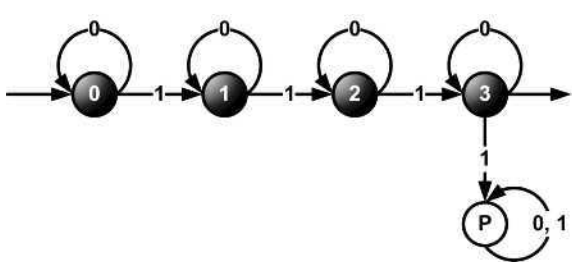

Figure 5.50

D'où l'automate reconnaissant le complément de ce langage :

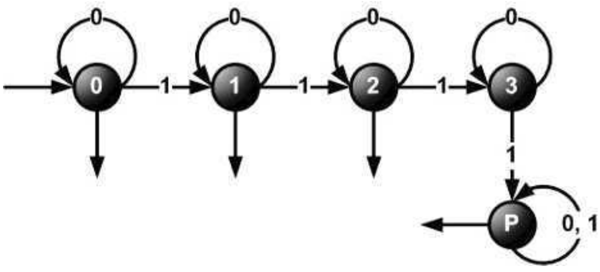

Figure 5.51

L'état P n'est plus un état poubelle, car il est un état terminal.

Solution (b)

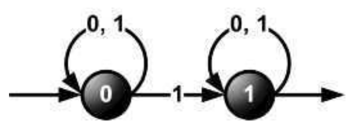

Figure 5.52

Cet automate n'est pas déterministe, il faut le déterminiser.

- *Déterminisation*

Tableau 5.29

État	0	1
0	0	01
01	01	01

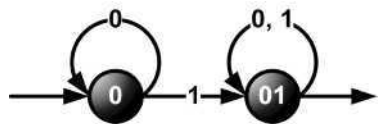

Figure 5.53

(En fait, on aurait pu dessiner cet automate dès le début).

Cet automate déterministe est complet ; donc pour construire l'automate reconnaissant le complément du langage, il suffit de modifier la position de la sortie :

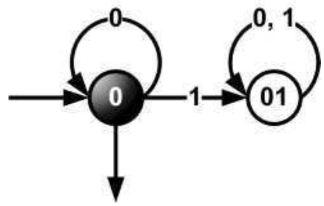

Figure 5.54 **Il est facile de voir qu'ici l'état 01 est la poubelle.**

Exercice 5.9 Nous construisons d'abord un automate qui lit tous les mots qui **se terminent** par *abaab*. Puis nous le déterminiserons et compléterons, et puis nous ferons de tous les états finaux, états non finaux et vice versa. La minimisation se fera ensuite.

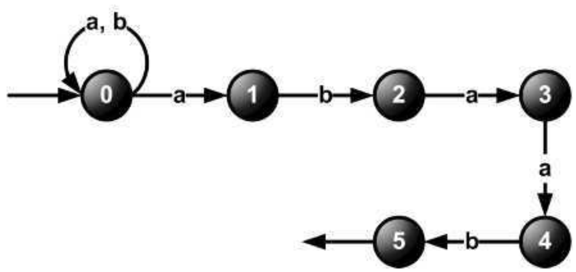

Figure 5.55

Cet automate lit tous les mots se terminant en .

- *Déterminisation*

Tableau 5.30

État	a	b
0	01	0
01	01	02
02	013	0
013	014	02
014	01	025
025	013	0

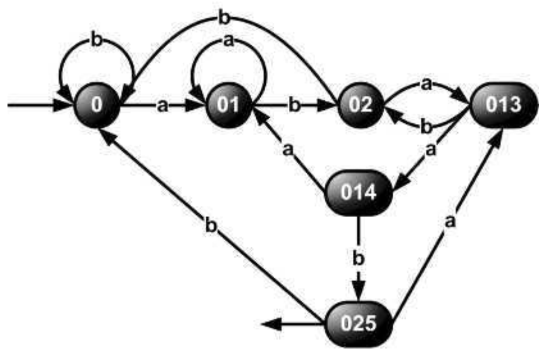

Figure 5.56

Cet automate est déjà complet, sinon il faudrait le compléter en ajoutant une poubelle.
L'automate déterministe lisant tous les mots **ne se terminant pas** par *abaab*, s'obtient comme suit :

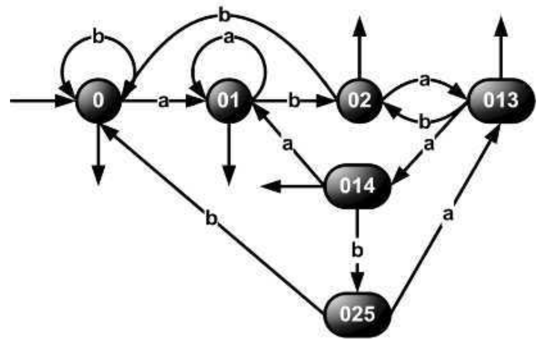

Figure 5.57

Il n'est pas minimisable, c.-à-d. qu'il est déjà minimal. Pour le voir, il faut essayer de le minimiser :
$\Theta_0 = \{I, II\}$ avec $I = \{025\}$, $II = \{0{,}01, 02{,}013, 014\}$

Tableau 5.31

État	a	b	a	b
0	01	0	II	II
01	01	02	II	II
02	013	0	II	II
013	014	02	II	II
014	01	025	II	I
025	013	0	II	II

Le groupe non terminal consiste en un seul état et n'a pas lieu à se séparer.
Le groupe terminal se sépare en deux :
$\Theta_1 = \{I, II, III\}$ avec $I = \{025\}$, $II = \{0{,}01, 02{,}013\}$, $III = \{014\}$

Tableau 5.32

État	a	b	a	b
0	01	0	II	II
01	01	02	II	II
02	013	0	II	II
013	014	02	III	II

Le groupe II se sépare en deux :
$\Theta_2 = \{I, II, III, IV\}$ avec $I = \{025\}$, II = {0, 01, 02}, III={014}, IV = {013}

Tableau 5.33

État	a	b	a	b
0	01	0	II	II
01	01	02	II	II
02	013	0	IV	II

Le groupe II se sépare en deux :
$\Theta_3 = \{I, II, III, IV, V\}$ avec $I = \{025\}$, II = {0, 01}, III = {014}, IV = {013}, V={02}

Tableau 5.34

État	a	b	a	b
0	01	0	II	II
01	01	02	II	V

$\Theta_4 = \Theta_3$; tout les états se sont séparés ; l'automate était minimal.

Exercice 5.10

Solution A_1

Reprenons l'automate déterministe complet A_1 :

Tableau 5.35

État	a	b
0	0	01
01	0	012
012	0	0123
0123	0	0123

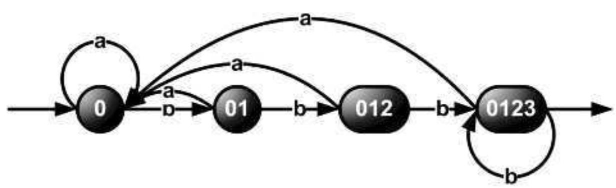

Figure 5.58

• *Minimisation*

$Q_0 = \{\mathrm{I},\ \mathrm{II}\}$ avec $\mathrm{I} = \{0,\ 01,\ 012\}$, $\mathrm{II} = \{0123\}$.

Tableau 5.36

État	a	B	A	b
0	0	01	I	I
01	0	012	I	I
012	0	0123	I	II

Le groupe I se sépare en deux. Modifiant la notation, on a :
$Q_1 = \{\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III}\}$ avec $\mathrm{I} = \{0,\ 01\}$, $\mathrm{II} = \{012\}$, $\mathrm{III} = \{0123\}$.

Tableau 5.37

État	a	B	a	b
0	0	01	I	I
01	0	012	I	II

Les deux états du groupe I se sont séparés, donc tous les états se sont séparés – l'automate était minimal dès le début.

Solution A_2

Reprenons l'automate déterministe complet A_2 mais modifions la notation des états pour plus de clarté :

Tableau 5.38

				En renommant les états		
	État	**a**	**b**	**État**	**a**	**b**
Initial	0	0	01	A	A	B
	01	02	012	B	D	C
	012	023	0123	C	F	E
	02	03	013	D	G	H
Terminal	0123	023	0123	E	F	E
Terminal	023	03	013	F	G	H
Terminal	03	0	01	G	A	B
Terminal	013	02	012	H	D	C

(Le dessin n'est pas trop utile pour cet automate.)

- *Minimisation*

$\Theta_0 = \{I, II\}$ avec $I = \{A, B, C, D\}$, $II = \{E, F, G, H\}$.

Tableau 5.39

	État	**a**	**b**	**a**	**b**
Groupe non terminal	A	A	B	I	I
	B	D	C	I	I
	C	F	E	II	II
	D	G	H	II	II
Groupe terminal	E	F	E	II	II
	F	G	H	II	II
	G	A	B	I	I
	H	D	C	I	I

$\Theta_1 = \{I, II, III, IV\}$ avec $I = \{A, B\}$, $II=\{C, D\}$, $III=\{E, F\}$, $IV=\{G, H\}$.