Chapitre 5

L'ALGORITHME NUMÉRIQUE VISCOPLASTIQUE AVEC RUPTURE (VPR) (Validation et Exemples Numériques)

Ce chapitre constitue la suite logique du précédent dans lequel, nous avons détaillé la formulation et l'implémentation numérique de l'algorithme VPR. L'objectif de ce chapitre est de valider notre algorithme afin de pouvoir l'utiliser ultérieurement dans des cas d'écrouissage ou de chargements plus complexes. Cependant, cette validation est plus difficile que celle des modèles classiques de plasticité ou de viscoplasticité pour lesquels il existe des solutions analytiques connues dans la littérature.

Ce chapitre est divisé en trois paragraphes.

Dans le premier paragraphe, nous présentons les différents critères de viscoplasticité et de plasticité pour lesquels l'algorithme a été validé.

Dans le deuxième paragraphe nous présentons les résultats de la validation dans le cas particulier du modèle viscoplastique avec rupture sans écrouissage avec des critères de Tresca. La comparaison des résultats numériques avec ceux de la solution analytique du chapitre 3 constitue une validation originale. L'étude des cas extrêmes (seuil de plasticité infini ou seuil de viscoplasticité infini) nous montre également une bonne concordance des résultats et démontre ainsi la fiabilité de l'algorithme pour son utilisation soit en plasticité soit en viscoplasticité.

Le dernier paragraphe est consacré à l'analyse des résultats numériques. Nous montrons par exemple que dans le cas du modèle avec radoucissement, l'équilibre final du tunnel dépend de l'apparition ou non de la rupture pendant la phase transitoire.

5.1 CRITÈRES DE VISCOPLASTICITÉ

Nous présentons dans cette partie les critères pour lesquels l'algorithme de viscoplasticité avec rupture a été implanté dans le code de calcul GEOMEC91. Ces critères permettent de traiter plusieurs types de modèles viscoplastiques avec rupture pour des lois associées ou non.

Nous allons maintenant expliciter les quatre critères de viscoplasticité pour lesquels l'algorithme a été implanté. Cette présentation reste conforme à la formulation donnée par [Zienkiewicz&Cormeau, 1974] dans le cadre d'une approche unifiée dans la formulation des problèmes numériques en plasticité et en viscoplasticité. Ces quatre critères sont les suivants : Von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb, et Drucker-Prager qui par ailleurs sont ceux déjà existant dans GEOMEC91 pour la plasticité ou la viscoplasticité. Dans le cadre de cette formulation des critères, nous utilisons les notations suivantes [Bernaud, 1991].

NOTATIONS:

$\sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$: Contrainte moyenne

$\underline{\underline{\sigma}}^D = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{1}}$: Le tenseur déviateur des contraintes

$\left\|\underline{\underline{\sigma}}^D\right\| = \sqrt{\sigma_{ij}{}^D \sigma_{ij}{}^D}$: Norme du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^D$

$\theta = \frac{1}{3}\text{Arc}\sin\left(-3\sqrt{6}(\det \underline{\underline{\sigma}}^D)\left\|\underline{\underline{\sigma}}^D\right\|^{-3}\right)$: Angle de Lode $\in \left[-\frac{\pi}{6}, +\frac{\pi}{6}\right]$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$: Contraintes principales

$C(\alpha)$: Cohésion du matériau

ϕ_β, β : Angle et coefficient de dilatance du matériau

ϕ : Angle de frottement

$k = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}$: Coefficient de poussée

$\sigma_s = 2C(\alpha)$: Limite d'élasticité en traction simple

$S(\alpha) = 2C(\alpha)\sqrt{k}$

Critère de Von-Mises

Ce critère est beaucoup plus utilisé pour représenter le comportement des métaux. Cependant il est également appliqué aux géomatériaux pour sa forme simple et son utilisation numérique qui apparaît beaucoup plus aisée que certains critères. Selon la formulation adoptée, il s'exprime sous la forme :

$$F(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = \sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\underline{\underline{\sigma}}^D\right\| - \sigma_s(\alpha) \qquad (5.1)$$

Ce critère ne dépend ni du premier invariant du tenseur des contraintes, ni du troisième invariant du déviateur des contraintes.

Critère de Tresca

Ce critère est plus représentatif du comportement des roches et des sols que celui de Von Mises. Il signifie que le seuil de plasticité est atteint quand la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite. Son expression générale ne dépend pas de la contrainte principale intermédiaire. Dans le cadre du formalisme adopté, il s'écrit sous la forme:

$$F(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s(\alpha) \qquad (5.2)$$

Exprimé à l'aide de l'angle de Lode, il s'écrit:

$$F(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = \sqrt{2}\cos\theta\left\|\underline{\underline{\sigma}}^D\right\| - \sigma_s(\alpha) \qquad (5.3)$$

Ce critère ne dépend pas du deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes, mais dépend via l'angle de Lode du troisième invariant.

Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb constitue une généralisation des critères de type Tresca pour lesquels la dépendance du critère par rapport à la contrainte moyenne n'est pas prise en compte. Dans le cadre de notre formalisme, son expression est donné par :

$$F(\underline{\underline{\sigma}},\alpha) = k\sigma_1 - \sigma_3 - S(\alpha) \qquad (5.4)$$

Expression qu'on peut également écrire sous la forme:

$$F(\underline{\underline{\sigma}},\alpha) = \frac{k-1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) + \frac{\sqrt{3}(k+1)\cos\theta - (k-1)\sin\theta}{\sqrt{6}}\left\|\underline{\underline{\sigma}}^D\right\| - S(\alpha) \qquad (5.5)$$

Critère de Drucker-Prager

Ce critère constitue une approximation du critère de Mohr-Coulomb. L'influence de la contrainte moyenne sur le critère est introduite en ajoutant un terme supplémentaire dans l'expression du critère de Von Mises. Ce critère est souvent utilisé pour représenter le comportement de certaines roches. Son expression est donnée par :

$$F(\underline{\underline{\sigma}},\alpha) = \frac{k-1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) + \frac{k_1}{\sqrt{6}}\left\|\underline{\underline{\sigma}}^D\right\| - S(\alpha) \qquad (5.6)$$

où $k_1 = 2k+1$ correspond au cône inscrit dans la pyramide de Mohr-Coulomb

$k_1 = k+2$ correspond au cône circonscrit à la pyramide de Mohr-Coulomb

Gradient du potentiel Plastique

Dans l'expression de la vitesse de déformation viscoplastique, le gradient du potentiel plastique s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = a\underline{\underline{1}} + b\frac{\underline{\underline{\sigma}}^D}{\left\|\underline{\underline{\sigma}}^D\right\|} + c\frac{\partial(\det \underline{\underline{\sigma}}^D)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^D} \qquad (5.7)$$

a, b, c sont des constantes dont la valeur varie selon le type de potentiel plastique choisi.

Les potentiels de Tresca et de Mohr-Coulomb présentent des points singuliers. Il s'ensuit que les gradients associés en ces points singuliers ne peuvent plus être définis à l'aide des constantes a, b, c. Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé la technique proposée par [Owen&Hinton ,1980] qui consiste à calculer le gradient en ces points en substituant au potentiel de Tresca celui de Von Mises et au potentiel de Tresca celui de Drucker-Prager.

Les valeurs des constantes a, b, c sont données par exemple dans [Bernaud, 1991]. C'est sur la base de ces critères que seront effectuées les applications et la validation de l'algorithme de résolution viscoplastique avec rupture qui a été implanté dans GEOMEC91.

5.2 VALIDATION ET TEST DE L'ALGORITHME VISCOPLASTIQUE AVEC RUPTURE (VPR)

On distingue généralement deux types de validation d'un algorithme de résolution par éléments finis : premièrement, les validations effectuées à l'aide de solutions explicites ou semi-explicites existant dans la littérature ou mises au point dans le cadre du problème envisagé avec des hypothèses simplificatrices, et deuxièmement les validations effectuées par comparaison avec d'autres codes de calcul ou algorithmes traitant de problèmes analogues. Les résultats de ces deux types de validation sont présentés dans ce chapitre.

Nous distinguons également deux types de chargement dans cette partie : le cas de chargement où la pression à la paroi du tunnel est constante au cours du temps avec chargement instantané, et celui pour lequel la pression à la paroi est une fonction explicite du temps. Ce dernier cas, conformément à la méthode convergence confinement, simule le creusement du tunnel. Cette pression vaut initialement P_∞ et décroît ensuite jusqu'à une valeur constante éventuellement nulle (tunnel non soutenu).

Les étapes de la validation et du test sont les suivantes :
-premièrement, la comparaison des résultats éléments finis avec ceux du calcul semi-analytique du chapitre 3 est effectuée.
-deuxièmement, les deux cas extrêmes de plasticité et de viscoplasticité sont comparés aux solutions analytiques connues.

Maillage du calcul par élément finis

La modélisation numérique du tunnel de section circulaire par éléments finis utilise un maillage qui comprend 50 éléments isoparamétriques à 9 noeuds. Le rayon extérieur du maillage est assez grand pour que l'on puisse modéliser un milieu infini. Pour satisfaire la condition de déformation plane, les déplacements suivant la direction z sont imposés à une valeur nulle. La Figure 5.1 ci-dessous présente schématiquement le maillage utilisé tout au long des calculs éléments finis de ce chapitre.

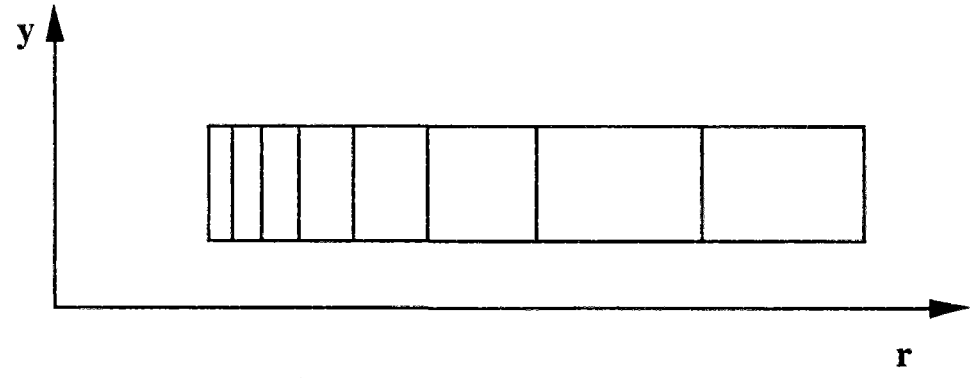

Figure 5.1 : Maillage du modèle

5.2.1 Comparaison avec la solution semi-analytique

Dans cette comparaison, l'évolution de la convergence en paroi du tunnel, est calculée à partir de l'algorithme VPR et de la solution semi-analytique du chapitre 3. Nous reprenons uniquement les données des calculs du chapitre 3 pour effectuer le calcul par élément finis, plus particulièrement on s'intéresse aux paramètres de chargement pour lesquels l'extension maximale du rayon de la zone de rupture a été significative.

Les figures (5.2 à 5.6) ci-dessous nous montrent l'évolution de la convergence en paroi pour les cas les plus significatifs (valeur différente du couple Po, Tp pour chaque cas). Notons que pour la comparaison, le temps est adimensionalisé après les résultats du calcul par éléments finis par l'expression suivante :

$$T = t\frac{E'}{\eta}.$$

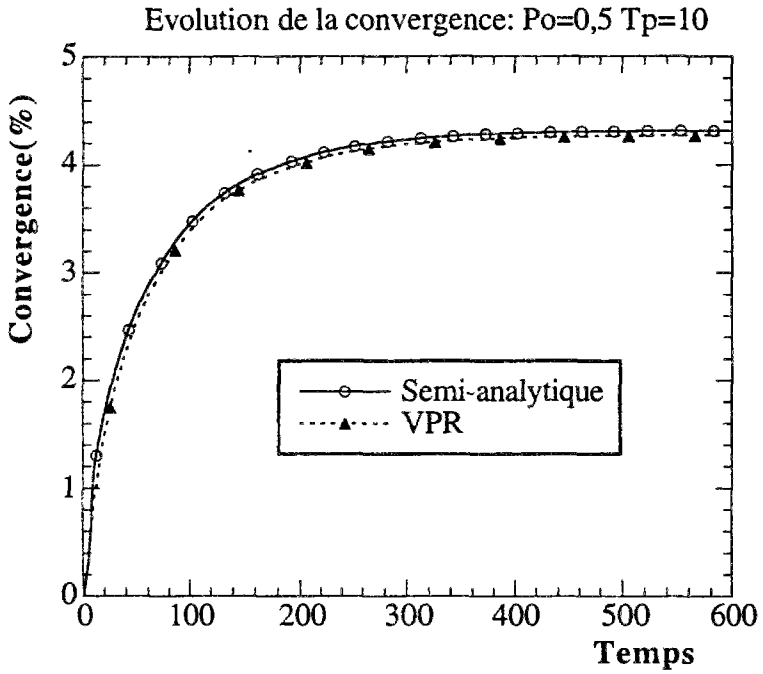

Figure 5.2 : Comparaison calcul analytique et éléments finis (VPR)

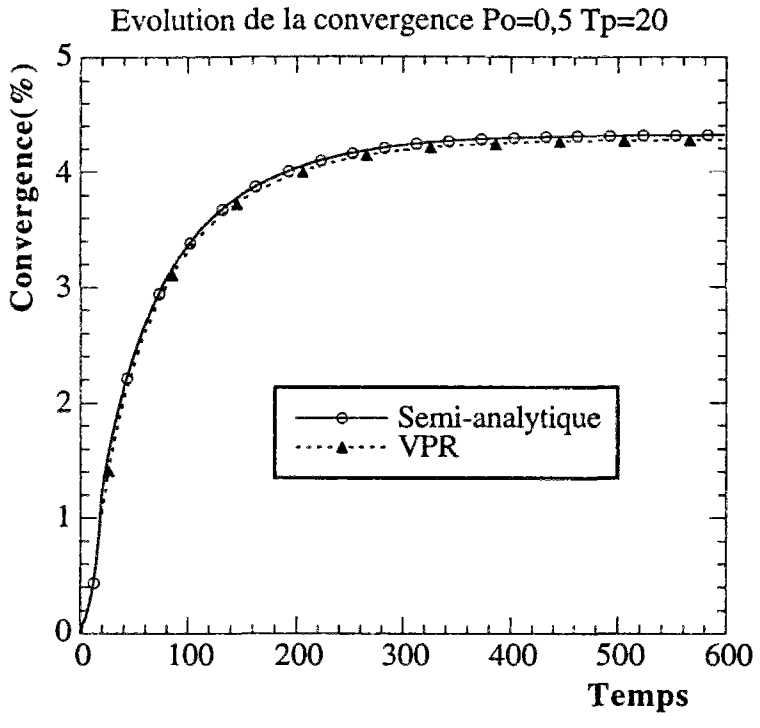

Figure 5.3 : Comparaison calcul analytique et éléments finis (VPR)

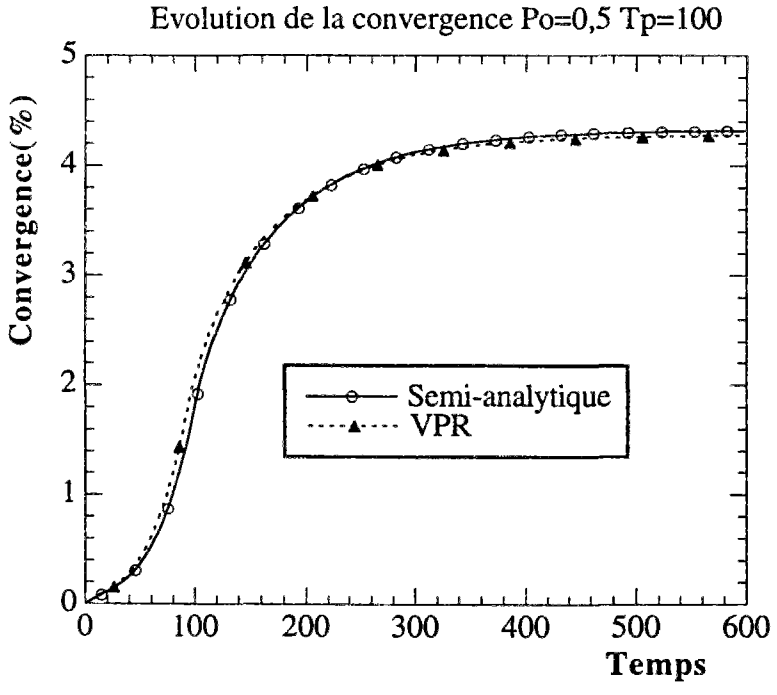

Figure 5.4 : Comparaison calcul analytique et éléments finis (VPR)

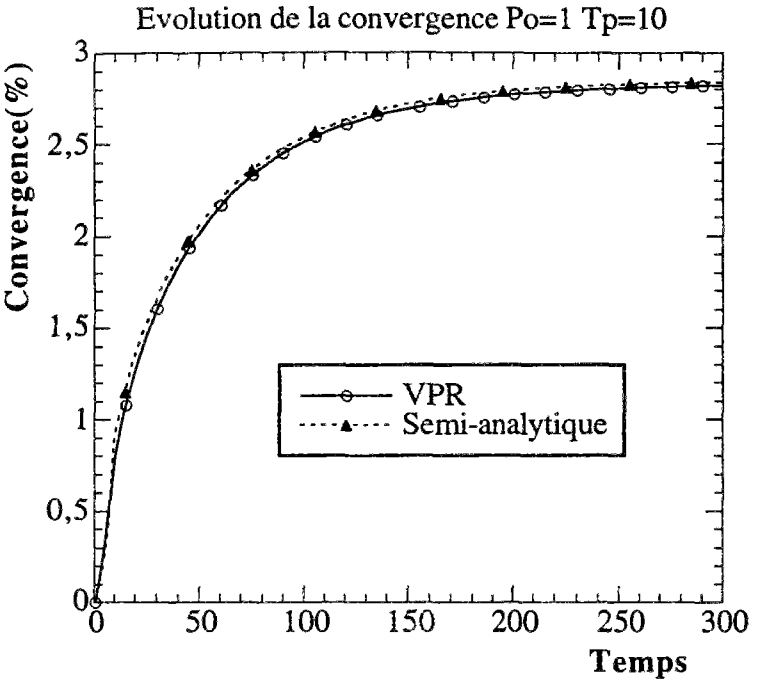

Figure 5.5 : Comparaison calcul analytique et éléments finis (VPR)

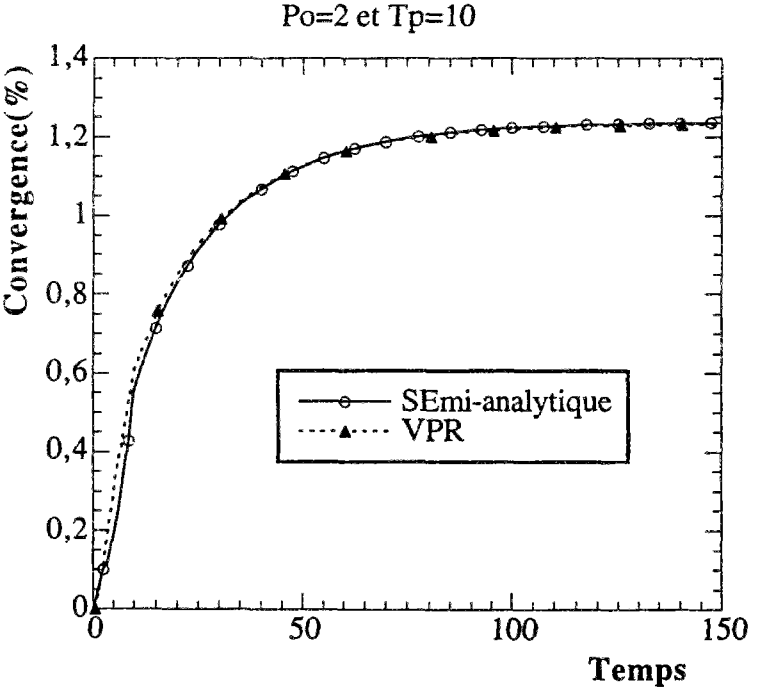

Figure 5.6 : Comparaison calcul analytique et éléments finis (VPR)

L'analyse des courbes semi-analytiques et éléments finis nous montre que l'écart relatif entre les deux solutions reste inférieur à 2%. Les deux solutions convergent toujours vers la solution plastique avec critère de Tresca de cohésion C_1.

Pour chaque couple (P_0, T_p) de paramètre de chargement, P_0 caractérise essentiellement la valeur de la convergence à l'infini alors que T_p caractérise l'évolution de la convergence pendant la phase transitoire (chargement). Plus Po est faible plus la valeur de la convergence au bout d'un temps infini est élevée.

Pour Po=0,5 MPa fixé, en comparant les courbes correspondant à T_p=10 (figure 5.2) et à T_p=100 (figure 5.4) on observe premièrement que la convergence à l'infini est la même dans les deux cas (3,9%). La valeur de la convergence au cours de la phase transitoire est plus élevée pour T_p=10 (2%) que celle correspondant à T_p=100. Autrement dit, T_p=10 représente un chargement plus rapide que dans le cas avec T_p=100.

D'une façon générale, on observe une bonne concordance (écarts inférieurs à 2%) entre la solution semi-analytique établie au chapitre 3 et la solution obtenue par la modélisation numérique par éléments finis.

5.2.2 Test dans les cas extrêmes

Test en plasticité

Paramètres des calculs et caractéristiques mécaniques

Les calculs sont effectués dans le cas d'un chargement instantané, c'est-à-dire d'une durée infiniment courte devant la durée des effets de déformations différées (T_p=0). La valeur du paramètre de chargement qui est la pression en paroi du tunnel est le seul paramètre de chargement pour cette validation en plasticité. Le seuil viscoplastique aura tout au long de ces calculs une valeur très élevée de façon à valider le modèle en plasticité. Nous rappelons que les caractéristiques mécaniques du matériau sont calées sur la base des essais de laboratoire que nous avons effectués et qui sont données dans la première partie de ce mémoire. Le tableau 5.1 ci-dessous présente les valeurs de toutes les caractéristiques des calculs effectués.

Calcul N°	E (MPa)	ν	C (MPa)	C_1 (MPa)	η MPa.j	P_∞ MPa	P_i MPa
1	1500	0,498	1	∞	5000	6	0,5
2	1500	0,498	1	∞	5000	6	1
3	1500	0,498	0,8	∞	5000	6	2,5
4	1500	0,498	1	∞	5000	6	3,5
5	2000	0,498	0,8	∞	5000	6	2
6	1500	0,400	1,5	∞	5000	6	1

Tableau 5.1. Paramètres des calculs en plasticité

Comparaison avec les résultats d'une solution analytique

Nous nous intéressons à la valeur de la convergence en paroi du tunnel ainsi qu'à la répartition des contraintes autour du tunnel. La convergence est comparée à la solution analytique connue donc l'expression est la suivante :

$$U_i = \frac{2}{E} C.\exp\left(\frac{P_\infty - P_i}{C} - 1\right) \qquad (5.8)$$

Les contraintes sont comparées à celles obtenues avec l'algorithme de plasticité de GEOMEC91. En ce qui concerne la convergence en paroi, on remarque d'une façon générale que l'écart relatif entre la solution analytique et la solution obtenue par l'algorithme VPR est inférieur à 2%. Ce qui constitue un résultat satisfaisant compte tenu de la valeur de la tolérance imposée dans les calculs numériques (on peut imposer une valeur de tolérance beaucoup plus grande pour améliorer la solution numérique). Le tableau 5.2 ci-dessous présente les valeurs des différentes solutions obtenues.

	Convergence U_i(%)	
Numéro de calcul	Solution analytique	Solution numérique Algorithme VPR
1	9	8,82
2	5,45	5,34
3	2,33	2,30
4	0,448	0,446
5	3,27	3,20

Tableau 5.2. Comparaison en plasticité

La répartition des contraintes (radiale, orthoradiale, et axiale) dans le massif est présentée sur les deux figures ci-dessous. La figure 5.7 nous montre la comparaison entre la solution analytique et la solution obtenue avec l'algorithme VPR. Sur cette figure, on observe un léger écart entre les couples de courbes, cet écart s'explique du fait que la courbe VPR est obtenue en calculant la valeur moyenne des contraintes dans les éléments, alors que la courbe analytique correspond à la valeur exacte des contraintes en chaque point du massif.
Sur figure 5.8, nous avons la comparaison entre les courbes du calcul avec l'algorithme de plasticité de GEOMEC91 et l'algorithme VPR. On observe cette fois que la concordance entre les deux courbes est parfaite.

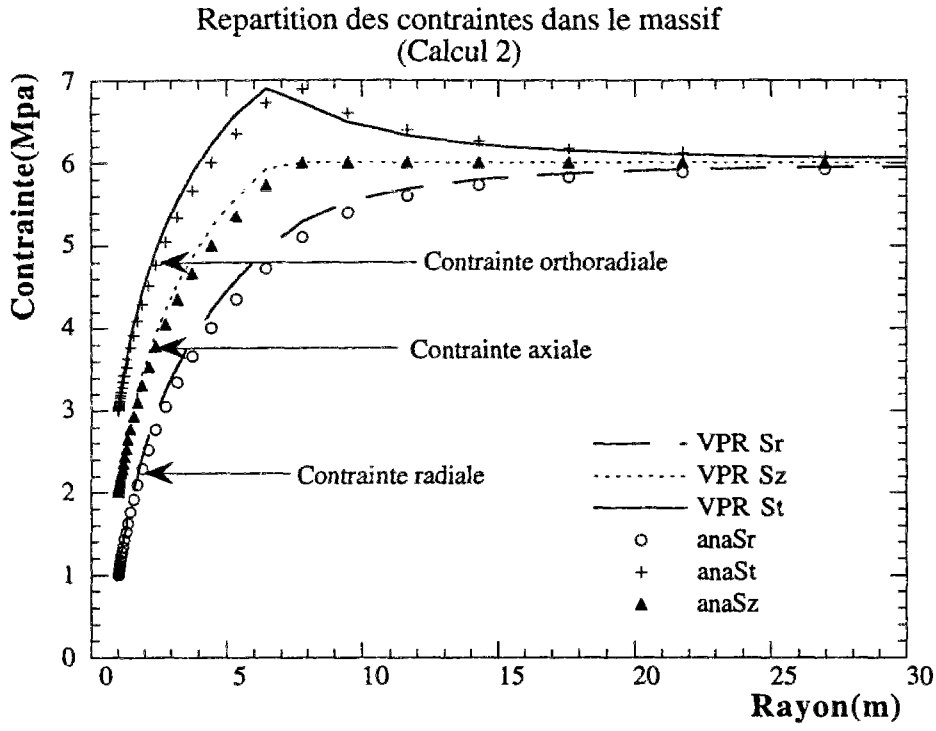

Figure 5.7 : Répartition des contraintes principales

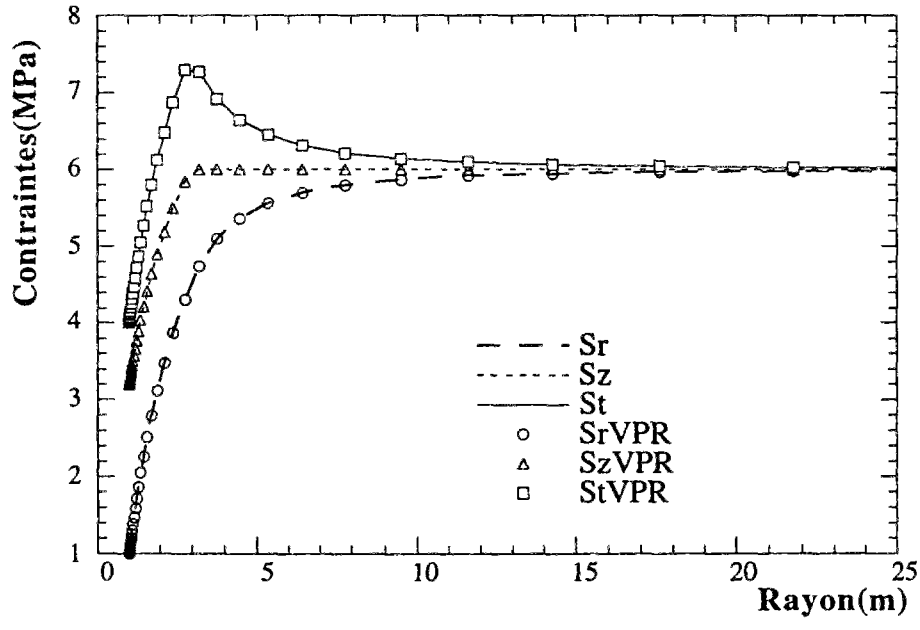

Figure 5.8 : Répartition des contraintes principales (Calcul 1)

Les tests en plasticité ont été effectuées principalement sur l'évolution de la convergence en paroi du tunnel pour différents paramètres de chargement ou de

comportement mécanique du matériau. Les résultats présentés sont très satisfaisants, que ce soient les comparaisons avec les solutions explicites existantes ou avec l'algorithme de plasticité de GEOMEC91. Notons par ailleurs que la comparaison pour les autres critères a également été effectuée et les résultats ont également été très satisfaisants.

Test en viscoplasticité

Le principe de ce test est similaire à celui du test en plasticité dans le sens ou, cette fois on prend le seuil de plasticité très grand ($C=\infty$) dans l'algorithme VPR pour simuler la viscoplasticité. C'est dans le même esprit que nous allons analyser cette validation, dans lequel le chargement est toujours instantané.

Caractéristiques et paramètres de calcul

Le tableau 5.3 ci-dessus nous présente les paramètres de calcul pour cette validation.

Calcul N°	E (MPa)	ν	C (MPa)	C_1 (MPa)	η MPa.j	P_∞ MPa	P_i MPa
1	1500	0,498	∞	1,5	5000	6	1
2	1500	0,498	∞	0,8	5000	6	3
3	1500	0,498	∞	0,8	5000	6	2
4	1500	0,498	∞	1	5000	6	2

Tableau 5.3. Paramètres de calcul en viscoplasticité.

Analyse et comparaison des résultats du calcul

Pour ces quatre calculs nous constatons que l'écart relatif entre la solution analytique et le résultat numérique est inférieur à 1%. Ceci constitue encore un résultat très satisfaisant pour cette validation. La Figure 5.9 ci-dessous montre par exemple le résultat du calcul 3 obtenu avec l'algorithme VPR comparé avec celui obtenu avec une méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre deux implantée dans GEOMEC91. En effet la méthode explicite de Runge-Kutta implantée dans GEOMEC91 [Bernaud, 1991] coïncide exactement avec la solution analytique dans le cas incompressible. La convergence en paroi est définie par l'équation différentielle de la page 73 (3.38a).

Une fois de plus notons l'excellente concordance entre les résultats de l'algorithme VPR et des résultats analytiques.

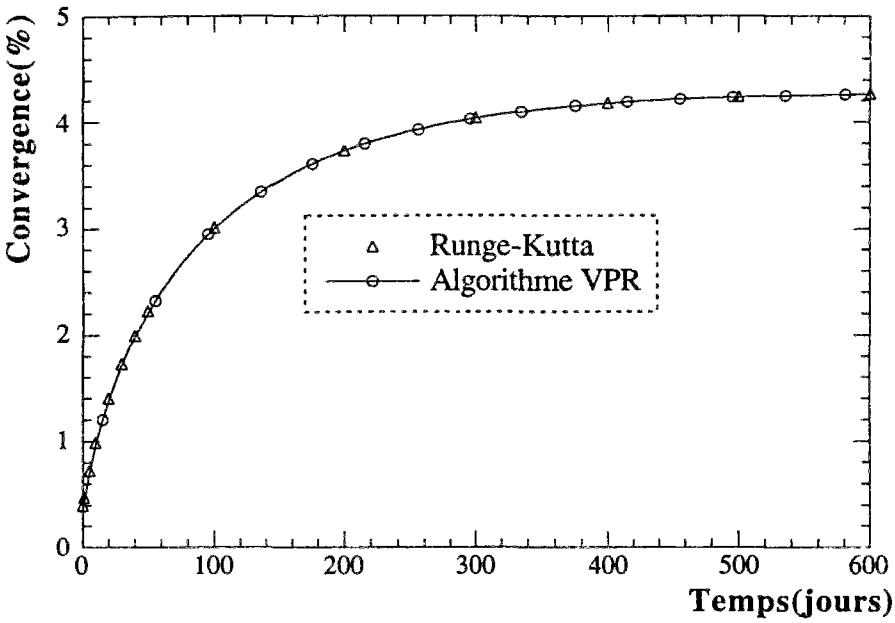

Figure 5.9 : Runge-Kutta et algorithme VPR

Test en viscoplasticité avec plasticité instantanée

Ce paragraphe met en évidence l'une des originalités de l'algorithme viscoplastique avec rupture (VPR). En effet, pour le chargement instantané (T_p=0) défini précédemment, l'algorithme nous donne la solution plastique instantanée (instant 0^+) qui précède la solution viscoplastique à long terme.

En considérant par exemple les caractéristiques suivantes:

E=1500 MPa, ν=0,498, C=1 MPa, C_1=0,8 MPa η=5000 MPa.jours

P_∞=6 MPa, P_0=2,5 MPa

La Figure 5.10 nous montre l'évolution de la convergence en paroi du tunnel pour ces valeurs.

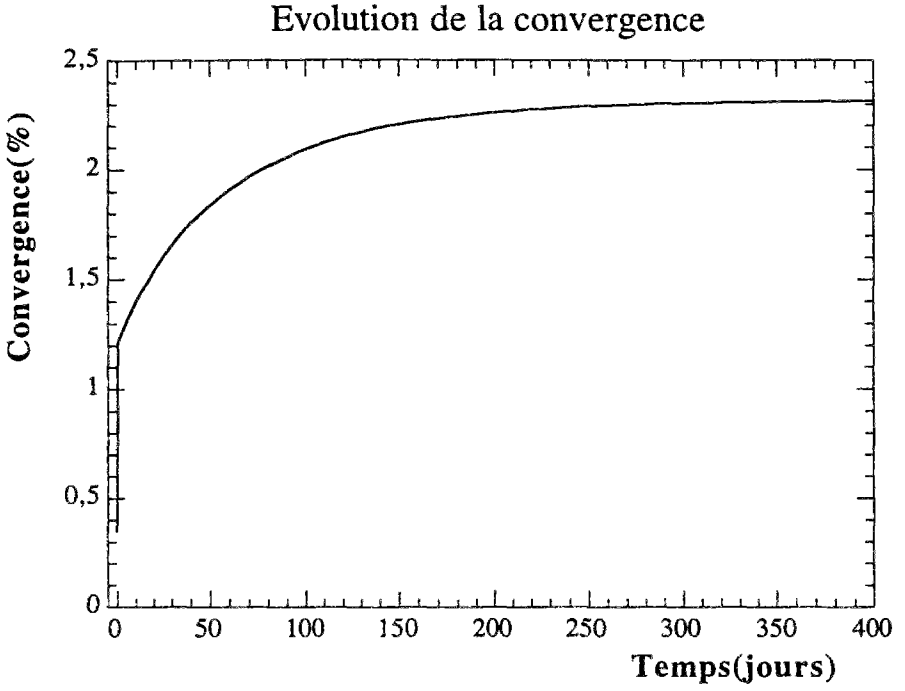

Figure 5.10 : Viscoplasticité avec plasticité instantanée

Instantanément, la solution plastique analytique(Tresca de seuil C) coïncide avec celle obtenue par l'algorithme VPR, avec un écart inférieur à 1%. Il en est de même pour la solution à l'infini.

5.3 EXPLOITATION DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Les paragraphes précédents ont été exclusivement consacrés à la validation de l'algorithme de résolution VPR. Dans ce paragraphe, nous allons analyser les premiers résultats numériques obtenus avec l'algorithme VPR dans le cas du modèle unidimensionnel du tunnel profond.

5.3.1 Influence de la viscosité du matériau

Considérons par exemple l'expression exacte du multiplicateur plastique obtenu dans le cas du critère de Von-Mises :

$$\delta\lambda = \frac{\langle F^p(\underline{\underline{\sigma}}^*) - \frac{2\mu b^2}{\eta}\langle F^{vp}\rangle\rangle}{2\mu b^2} \qquad (5.9)$$

On remarque d'après cette expression que la viscosité est un paramètre important. En effet, la valeur maximale de cette expression est obtenue en faisant tendre la viscosité vers l'infini, alors que le minimum est obtenu pour une viscosité nulle. La viscosité du matériau sera le paramètre qui permettra de différencier de façon significative l'évolution des grandeurs mécaniques d'un modèle viscoplastique de Bingham d'un modèle viscoplastique avec rupture.

Dans le cas du critère de Tresca, il n'y a pas d'expression exacte du multiplicateur plastique et seule une étude numérique nous permet de quantifier l'influence de ce paramètre sur l'évolution des grandeurs mécaniques.

Pour cela, nous utilisons les paramètres de calcul suivants :

E=1500 MPa, C=1,5 MPa , C1=1,05 MPa, Po=0,5 MPa, Tp=10

Ces paramètres correspondent bien à un cas de chargement ou il y a apparition de la rupture et de la viscoplasticité pendant la phase transitoire.

Les quatre figures (5.11 à 5.14) ci-dessous nous montrent par exemple la différence entre un modèle de Bingham (VP) et un modèle viscoplastique avec rupture (VPR) sur l'évolution de la convergence en paroi pour plusieurs valeurs de la viscosité.

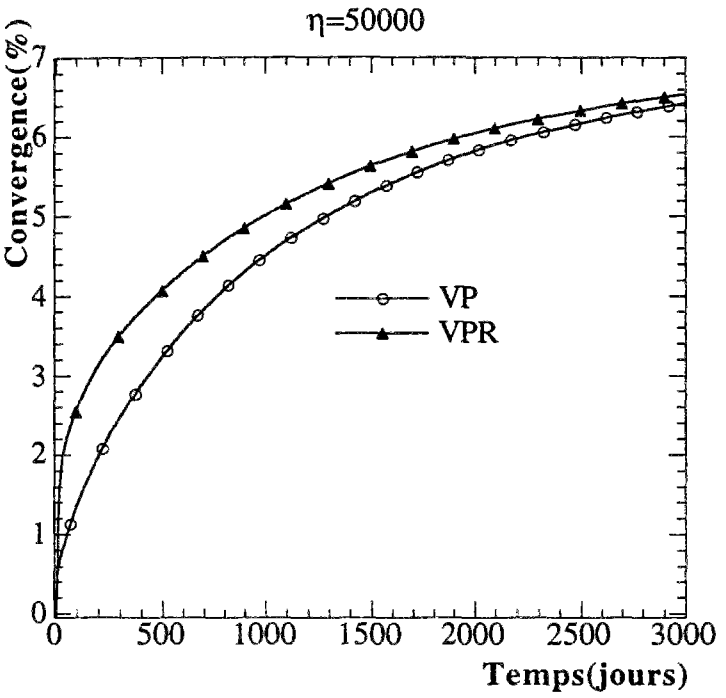

Figure 5.11 : Influence de la viscosité η=50000 MPa.jours

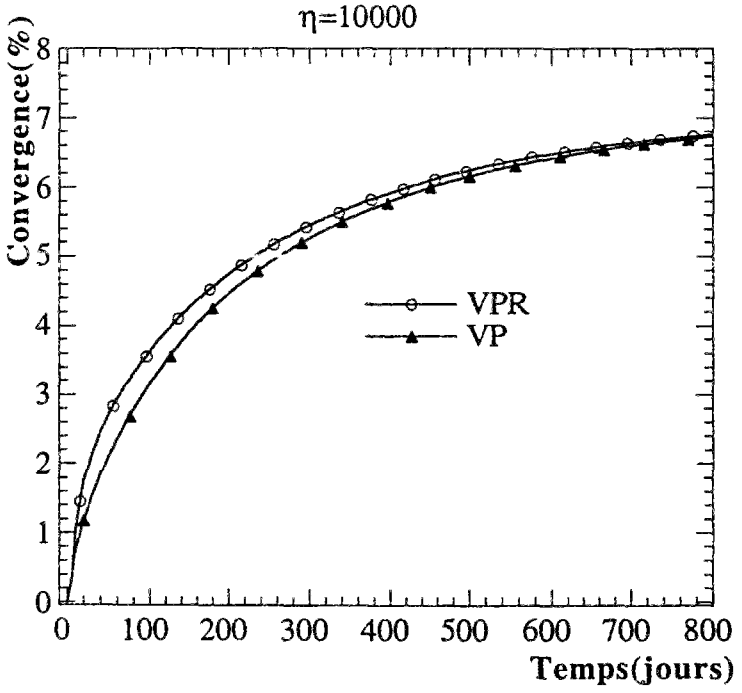

Figure 5.12 : Influence de la viscosité η=10000 MPa.jours

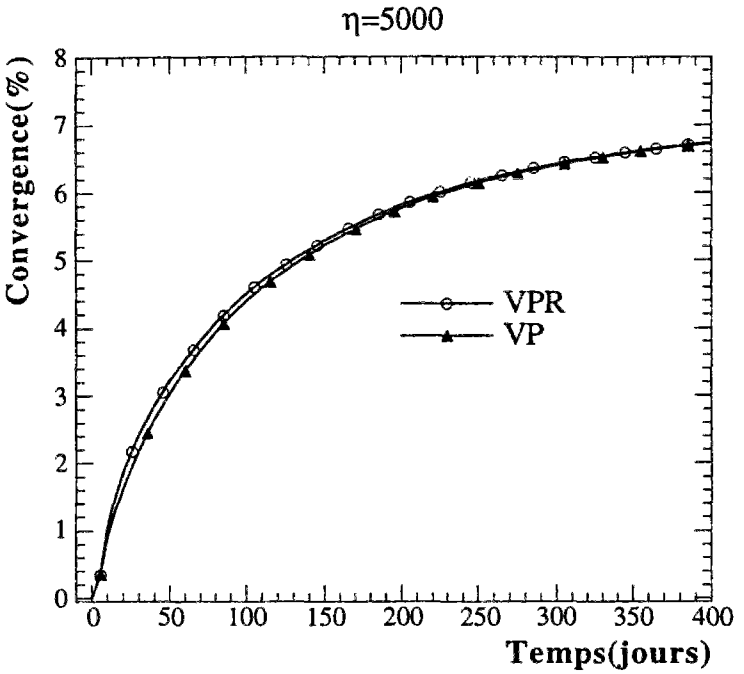

Figure 5.13 : Influence de la viscosité η=5000 MPa.jours

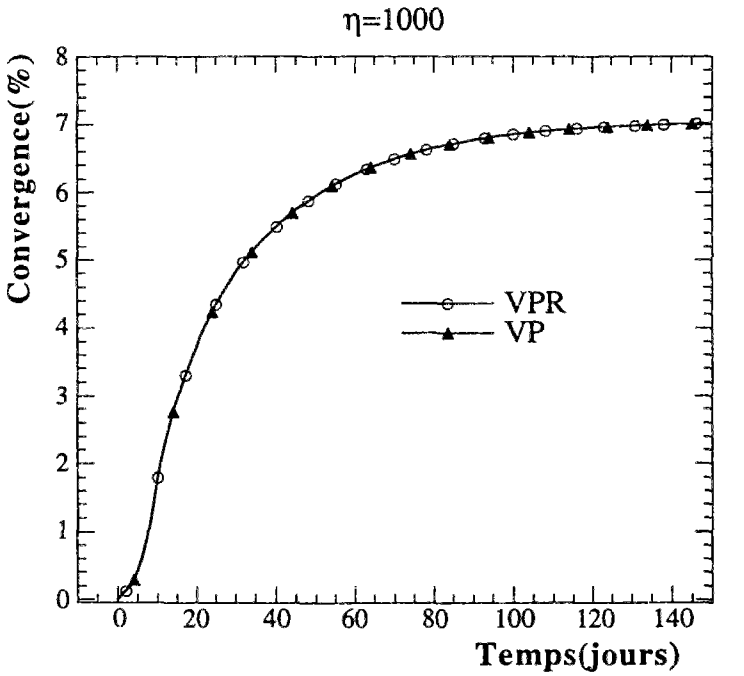

Figure 5.14 : Influence de la viscosité η=1000 MPa.jours

Cette analyse met en évidence une limite d'utilisation du modèle viscoplastique avec rupture suivant une valeur minimale pour la viscosité du matériau. En effet, pour

de faibles valeurs de la viscosité (figure 5.14) l'écart pendant la phase transitoire entre la courbe d'évolution du modèle viscoplastique avec rupture et celle du modèle viscoplastique de type Bingham est très faible (inférieure à 1%). Par contre pour de grande valeur de la viscosité (figure 5.11), l'écart pendant la phase transitoire entre les deux courbes peut atteindre 30%.

Le modèle viscoplastique avec rupture a toute sa pertinence dans le cas des matériaux ayant une viscosité très grande. C'est le cas des argiles de l'Aisne comme nous l'avons montré dans la première partie, et donc la viscosité est égale à 40000 MPa.jours.

Pour les paramètres de comportement utilisés dans nos calculs, pour des valeurs de la viscosité inférieures à 1000 MPa.jours, il n'existe pas de différence significative entre le modèle de Bingham et le modèle viscoplastique avec rupture (la plasticité n'a pas une influence significative).

5.3.2 Influence du seuil à court terme

En considérant toujours l'expression du multiplicateur plastique (critère de Von-Mises), on note également qu'elle dépend de la valeur du critère de plasticité, et donc du seuil à court terme.

La Figure 5.15 ci-dessous nous montre l'évolution de la convergence pour trois valeurs du seuil à court terme.

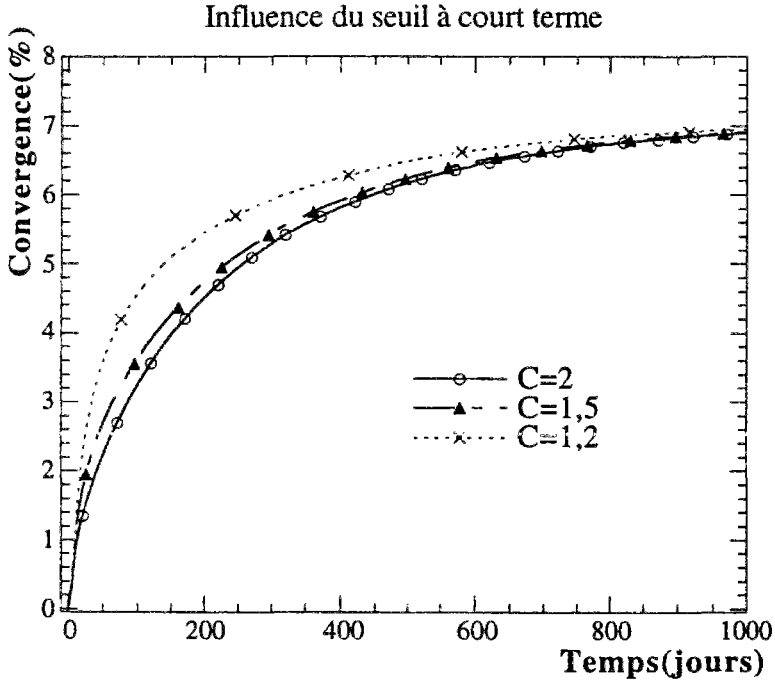

Figure 5.15 : Influence du seuil à court terme

Plus le seuil à court terme est faible, plus la rupture est grande pendant la phase transitoire et donc la convergence est élevée. Cependant il n'affecte pas la valeur de la convergence finale comme on l'a déjà noté.