

Dépiégeage plastique et Modèle à deux couches

« *Le chaos n'est pas que le contraire de l'ordre, il en est aussi le ferment.* »

LA RÉVOLUTION PARALLÈLE, Pierre Emmanuel

« *Les lois claires en théorie sont souvent un chaos à l'application.* »

Napoléon Bonaparte

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions par simulations numériques la dynamique et le dépiégeage d'un modèle visco-élastique simple permettant une approche simplifiée de la plasticité dans les systèmes périodiques évoluant sur un potentiel de piégeage désordonné. Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 4 la compréhension des phases élastiques des réseaux de vortex est bien avancée malgré de nombreuses questions qui restent toujours d'actualité. Il n'en est pas de même pour les phases plastiques dont la modélisation est plus délicate à cause de la présence de défauts topologiques. Dans le cas d'un fort désordre ponctuel, les déformations plastiques induisent de nombreuses dislocations. La plasticité se traduit par un dépiégeage filamentaire où des vortex en mouvement coexistent avec des régions piégées [69, 70, 74, 129], la dynamique peut être alors chaotique [126, 127]. Avec l'augmentation de la force extérieure, une phase smectique en mouvement s'établit caractérisée par des canaux d'écoulement alignés avec la force, bien que de grandes excursions transverses restent possibles. Les déformations à l'intérieur des canaux sont élastiques mais les déplacements entre les canaux peuvent être arbitrairement grands (canaux découplés).

La compréhension théorique du dépiégeage et des phases plastiques demeure un problème ouvert. Différents modèles ont été développés pour décrire ces déformations plastiques où les degrés de liberté sont les domaines de *Larkin* [85, 88, 91, 92, 130, 131, 132, 133, 134]. Une approche simplifiée de la plasticité, motivée par l'observation des phases smectiques en mouvement, consiste à considérer un modèle de canaux élastiques couplés visqueusement entre eux [90, 135]. Il s'agit d'un modèle générique représentatif d'une classe

de systèmes dissipatifs mis en mouvement dans un désordre fort. Un modèle à deux canaux unidimensionnels présentant un degré de liberté par canal a été proposé dans [90] permettant une approche par le groupe de renormalisation fonctionnelle. C'est dans ce cadre que nous étudions dans ce chapitre un modèle à deux canaux et quatre particules avec un couplage élastique entre les deux particules de chaque canal. L'objectif est de caractériser la dynamique en fonction de divers paramètres (interactions, viscosité, désordre, ...) et de tenter de faire un lien avec les simulations à grandes échelles des réseaux de vortex.

Dans un premier temps nous rappellerons brièvement le modèle à deux canaux et deux particules, et son extension à 4 particules, puis nous terminerons par une présentation des résultats obtenus par simulations numériques.

5.2 Modèle visco-élastique multi-couches

5.2.1 Système et dynamique

Considérons le modèle multi-canaux unidimensionnels élastiques couplés entre eux par des interactions visqueuses dans la direction orthogonale au mouvement des particules (par la suite nous parlerons indifféremment de degré de liberté ou de particule). Les particules sont entraînées par une force extérieure f dans la direction des canaux. En discrétisant l'espace dans les directions longitudinale et transverse au mouvement, le déplacement local au temps t de la l -ième particule dans le i -ème canal est noté $u_l^i(t)$. En considérant la dynamique sur-amortie, l'équation de la dynamique s'écrit :

$$\gamma \dot{u}_l^i(t) = \sum_j \eta (\dot{u}_l^j(t) - \dot{u}_l^i(t)) + \sum_m K [u_m^i(t) - u_l^i(t)] + h_l^i Y(u_l^i(t) - \beta_l^i) + f \quad (5.1)$$

où γ , η et K sont des coefficients constants, et les sommes se font entre voisins les plus proches. Les deux premiers termes du membre de droite décrivent l'interaction visqueuse entre les couches et les interactions élastiques entre les particules de chaque couche, tandis que le troisième terme représente le piégeage où $Y(u)$ est une fonction périodique avec h_l^i et β_l^i des variables aléatoires. Enfin, f est une force d'entraînement appliquée aux particules. Ce modèle visco-élastique résolu en champ moyen prédit un changement qualitatif d'un dépiégeage continu à un dépiégeage discontinu avec hystérésis en augmentant le désordre ou le couplage visqueux.

5.2.2 Modèle à 2 particules

Un aperçu général de la dynamique de canaux élastiques couplés visqueusement entre eux peut être obtenu au travers d'un modèle simple considérant seulement deux canaux $1D$ contenant chacun une particule et couplés entre eux par une interaction visqueuse. La situation consiste en deux particules entraînées par une force extérieure dans un potentiel $1D$, ce qui correspond au cas $K = 0$ de l'équation (5.1) avec une force de piégeage $h^i Y(u^i -$

β^i). Le plus simple est de choisir $h^1 = h^2$ et $\beta^i = 0$. Les équations régissant la dynamique d'un tel système se réduisent alors à :

$$\gamma \dot{u}_1 = \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \Phi(u_1) + f \quad (5.2a)$$

$$\gamma \dot{u}_2 = \eta(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + \Phi(u_2) + f \quad (5.2b)$$

En effectuant un changement de coordonnées avec $x = u_1 - u_2$ représentant la distance relative et $y = \frac{u_1 + u_2}{2}$ la coordonnée du centre de masse, les équations du mouvement deviennent,

$$\dot{y} = F - \frac{1}{2} \left(\phi\left(y + \frac{x}{2}\right) + \phi\left(y - \frac{x}{2}\right) \right) \quad (5.3a)$$

$$\dot{x} = a \left(\phi\left(y - \frac{x}{2}\right) - \phi\left(y + \frac{x}{2}\right) \right) \quad (5.3b)$$

avec $a = \frac{\gamma}{\gamma+2\eta}$, $\phi = -\frac{\Phi}{\gamma}$ et $F = \frac{f}{\gamma}$. La fonction de piégeage périodique est prise telle que $\phi(u) = C [p_1 \sin(2\pi u) + p_2 \sin(4\pi u)]$ où C est choisie pour que la force critique de dépiégeage d'une particule soit $F_c^1 = \pm 1$ avec $p_1 = 1$. Le cas d'une harmonique unique étant non générique, on inclut au moins une autre harmonique ($p_2 \neq 0$).

Effectuons un brève description des résultats obtenus pour un tel système dynamique [90]. Lorsque $a = 1$ et que $\phi(u)$ est purement sinusoïdal, le système possède une bifurcation noeud-col à $F = F_c^1$. Ainsi pour $F < F_c^1$ il existe deux points fixes dont l'un est stable et l'autre instable, qui se situent le long des axes $x = 0$ et $x = 1$, et qui vont entrer en collision pour $F = F_c^1$ et se transformer en un point fixe mi-stable. Quand $F > F_c^1$ le point fixe mi-stable disparaît et le flot est périodique dans l'espace des phases.

Lorsque $a < 1$, ce qui correspond à la situation où les 2 particules sont couplées via l'interaction visqueuse, les équations du mouvement restent inchangées le long des axes $x = 0$ et $x = 1$ et les mêmes points fixes sont présents quand $F < F_c^1$. Cependant pour $F_c < F < F_c^1$ (où F_c correspond à la force critique du système couplé) un mouvement non borné est possible hors de ces axes. L'espace des phases se sépare en une région piégée et une autre où le flot est périodique. Dans le cas où $p_2 = 0$ ce flot est constitué d'une infinité de trajectoires neutres périodiques, alors que pour le cas plus générique $p_2 \neq 0$ la région contient une seule trajectoire périodique qui est soit attractive quand $p_2 > 0$, soit répulsive quand $p_2 < 0$. Notons que dans le cas où la trajectoire périodique est attractive ($p_2 > 0$), la phase en mouvement disparaît pour laisser une phase piégée quand $F < F_c$.

Nous présentons à titre d'exemple sur la figure 5.1 plusieurs trajectoires dans l'espace des phases (x, y) pour les valeurs des paramètres $p_1 = 1$, $a = 0.2$ et $p_2 = 0.5$. Les points fixes sur les axes $x = 0$ et $x = 1$ sont les points vers lesquels convergent les différentes trajectoires issues de leur bassin d'attraction, et nous observons la solution périodique stable au centre de l'espace des phases.

Nous traçons schématiquement la courbe vitesse-force $v(F)$ qui résulte d'un tel système

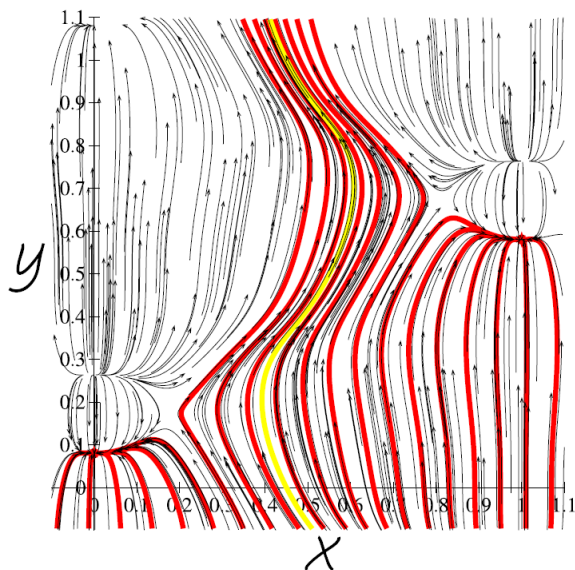


FIGURE 5.1 – Représentation de plusieurs trajectoires, issues de différentes conditions initiales, dans l’espace des phases (x, y) . Les valeurs de paramètres utilisés sont $p_1 = 1$, $a = 0.2$ et $p_2 = 0.5$, et la force appliquée correspond à $F_c < F < F_c^1$. La solution stable unique est représentée en jaune. Cette figure est issue de l’article [90].

pour le cas du piégeage purement sinusoïdal, et le cas avec une harmonique. Les courbes types représentées sur les figures 5.2 correspondent à un dépiégeage élastique.

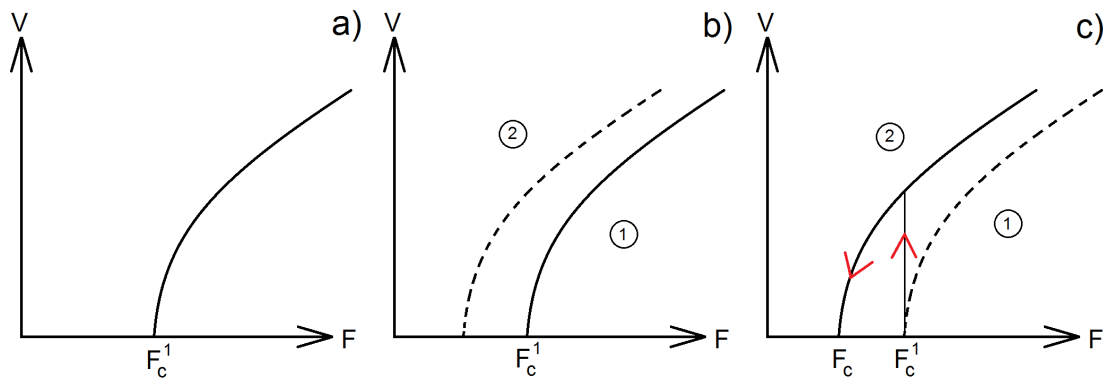


FIGURE 5.2 – Courbe $v(F)$ schématique obtenue lorsque : a) $p_2 = 0$ (sinus pur), b) $p_2 < 0$ et c) $p_2 > 0$. Voir le texte qui est relié à cette figure pour plus d’explications.

Quand $p_2 \neq 0$, il existe alors deux branches dans la courbe $v(F)$ correspondant aux deux situations possibles. L’une correspond aux trajectoires le long des axes $x = 0$ et $x = 1$, c’est-à-dire le cas de la particule seule (branche numérotée 1), et l’autre correspond à l’orbite périodique (branche numérotée 2) comme nous pouvons le voir respectivement sur les figures 5.2b) et 5.2c). Lorsque $p_2 < 0$, l’orbite périodique est répulsive et la trajectoire le long des axes $x = 0$ et $x = 1$ est attractive, la courbe coïncide donc avec celle obtenue

pour le dépiégeage d'une seule particule et aucune hystérésis n'est observée. Cependant lorsque $p_2 > 0$, l'orbite périodique devient attractive et de l'hystérésis apparaît. En effet, en partant de valeurs élevées de force et en diminuant cette dernière, le système suit la trajectoire périodique et se piège au niveau de F_c . Lorsque l'on augmente la force à partir d'une valeur plus petite que F_c , le système se piège d'abord sur les points fixes le long des axes $x = 0$ et $x = 1$ et ce jusqu'à F_c^1 , à partir de laquelle les points fixes disparaissent et le système "saute" alors dans l'état en mouvement donné par l'orbite périodique attractive.

On constate que ce modèle très simplifié à deux degrés de liberté permet de retrouver des comportements caractéristiques des systèmes périodiques à plus grande échelle, comme par exemple le dépiégeage élastique ou encore l'hystérésis. Cependant, l'identification des trajectoires périodiques et des attracteurs dans l'espace des phases nécessite une étude systématique minutieuse. En particulier l'existence d'attracteurs chaotiques est une question ouverte.

5.3 Extension du modèle

5.3.1 Description du modèle

Reconsidérons à présent le modèle simplifié présenté ci-dessus en y ajoutant un degré de liberté supplémentaire au sein de chaque canal, afin d'introduire un couplage élastique possible au sein des canaux. Cela correspond au cas de l'équation (5.1) avec le coefficient $K \neq 0$. Nous représentons sur la figure 5.3 le schéma de ce modèle à 4 particules, qui permet de décrire des situations comme les phases smectiques obtenues dans la cadre des réseaux de vortex.

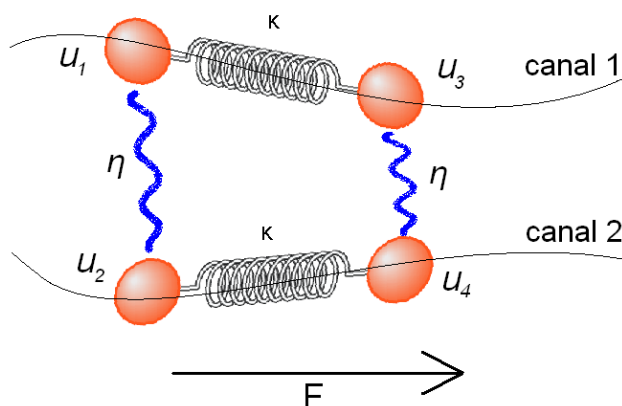


FIGURE 5.3 – Représentation schématique du modèle simplifié à 4 particules : les canaux sont les lignes courbes noires, les particules sont modélisées par des sphères oranges, l'interaction élastique est représentée via un ressort alors que celle visqueuse est schématisée suivant une ligne sinusoïdale bleue. La force d'entraînement F est appliquée de gauche à droite.

5.3.2 Système dynamique

La force de piégeage est choisie telle que $Y(u) = p_1 \sin(2\pi u) + p_2 \sin(4\pi u)$, et le coefficient de frottement γ est pris égal à l'unité. A partir de l'équation (5.1), nous obtenons alors le système d'équations du mouvement suivant,

$$\begin{cases} \gamma \dot{u}_1 = \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + K \cdot (u_3 - u_1 - 1) + Y(u_1) + F \\ \gamma \dot{u}_2 = \eta(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + K \cdot (u_4 - u_2 - 1) + A \cdot Y(u_2) + F \\ \gamma \dot{u}_3 = \eta(\dot{u}_4 - \dot{u}_3) + K \cdot (u_1 - u_3 + 1) + Y(u_3 + \phi_3) + F \\ \gamma \dot{u}_4 = \eta(\dot{u}_3 - \dot{u}_4) + K \cdot (u_2 - u_4 + 1) + A \cdot Y(u_4 + \phi_4) + F \end{cases} \quad (5.4)$$

avec $A = \text{cste}$ le rapport d'intensité de piégeage du canal 2 par rapport au canal 1, $\phi_{3,4}$ sont des déphasages pour les degrés de libertés ajoutés. La signification physique est que les deux canaux n'ont pas la même intensité de piégeage, et les particules ne sont pas en phase dans les potentiels de piégeage. Les termes d'interactions élastiques sont tels que les deux particules d'un même canal ne peuvent pas se trouver simultanément dans un même puits. Ceci interdit aux particules de se croiser au cours de leur mouvement dans le canal (la périodicité spatiale du potentiel étant de $u = 1$).

Le changement de variables

$$\begin{cases} S = u_1 + u_2 \\ D = u_1 - u_2 \\ S' = u_3 + u_4 \\ D' = u_3 - u_4 \end{cases} \quad (5.5)$$

permet de réécrire le système d'équations (5.4) :

$$\begin{cases} \dot{S} = K \cdot (S' - S - 2) + Y\left(\frac{S+D}{2}\right) + A \cdot Y\left(\frac{S-D}{2}\right) + 2F \\ \dot{D} = a \left[K \cdot (D' - D) + Y\left(\frac{S+D}{2}\right) - A \cdot Y\left(\frac{S-D}{2}\right) \right] \\ \dot{S}' = K \cdot (S - S' + 2) + Y\left(\frac{S'+D'}{2} + \phi_3\right) + A \cdot Y\left(\frac{S'-D'}{2} + \phi_4\right) + 2F \\ \dot{D}' = a \left[K \cdot (D - D') + Y\left(\frac{S'+D'}{2} + \phi_3\right) - A \cdot Y\left(\frac{S'-D'}{2} + \phi_4\right) \right] \end{cases} \quad (5.6)$$

où le paramètre a est défini par $a = \frac{1}{\gamma+2\eta}$.

5.3.3 Modèle numérique - paramètres

Nous avons choisi de résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (5.6) par un algorithme de *Runge-Kutta* d'ordre 4 (RK4). Ce choix permet d'obtenir une bonne précision (l'erreur totale est d'ordre $\mathcal{O}((dt)^5)$, avec dt le pas de l'itération de l'algorithme)

5.4. RÉSULTATS OBTENUS

sans pour autant occuper ou surcharger le temps processeur. Le choix du pas d'intégration est essentiel puisque la précision de la solution numérique dépend de cette quantité, tout comme le temps de calcul. Plus le pas est grand, plus le calcul est rapide mais moins il est précis, et inversement. Par la suite nous fixons $dt = 10^{-2}$ qui est un bon choix "précision/temps" de calcul.

Certains paramètres au cours des simulations sont fixés définitivement : $p_1 = 1$, $\phi_3 = 0.11$ et $\phi_4 = 0.42$ (ces 2 valeurs étant choisies d'une manière aléatoire). Les positions initiales des particules sont $u_1 = 0.5$, $u_2 = 0$ et $u_{i+2} = u_i + 1$ avec $i = \{1, 2\}$ (c'est-à-dire que les particules ajoutées 3 et 4 au sein de chaque canal, sont éloignées d'un puits d'écart par rapport aux particules initiales 1 et 2).

Les valeurs des paramètres K , A et a restent libres pour explorer les différents régimes dynamiques. Les gammes de variations de ces paramètres sont les suivantes : $10^{-1} \leq A \leq 10$, $10^{-2} \leq K \leq 10$ et $5 \times 10^{-3} \leq a \leq 8 \times 10^{-1}$. L'évolution de ces trois paramètres est étudiée pour différentes harmoniques de la force de piégeage $Y(u) : p_2 = \{-0.5; 0; 0.5\}$ afin d'analyser l'influence de l'harmonique par rapport au cas du piégeage dans un potentiel purement sinusoïdal.

5.4 Résultats obtenus

Cette section aborde les différents régimes dynamiques observés. Une attention particulière est portée sur les paramètres qui conduisent à ces régimes. Nous présentons dans un premier temps les deux types de dépiégeage obtenus, nous étudions la dynamique de ces régimes, puis nous abordons l'aspect hystérétique et nous finissons par la dynamique chaotique.

5.4.1 Types de dépiégeage : élastique ou plastique

Notons que nos simulations se déroulent toujours de la même manière : nous laissons relaxer les particules à hautes vitesses avant de commencer à réaliser une descente en force jusqu'à une valeur de $F = 0$, suite à quoi nous effectuons plusieurs remontées et descentes en faisant varier la force autour du dépiégeage (au total nous réalisons 4 cycles de descentes/montées) afin de tester l'existence possible d'hystérésis et d'éviter de rester dans un état métastable.

Pour caractériser les différents régimes nous calculons la vitesse moyenne v des particules, définie par :

$$v = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \dot{u}_i \quad (5.7)$$

et nous pouvons ainsi mesurer la réponse vitesse-force du système. En fonction des jeux de paramètres utilisés (A , K et a) nous observons deux grands types de dépiégeage : un

dépiégeage élastique et un dépiégeage plastique (voir respectivement les figures 5.4a et b).

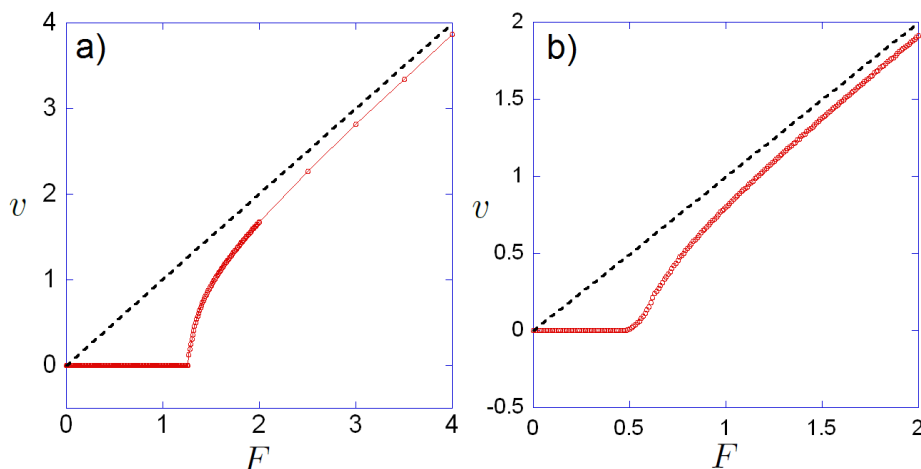


FIGURE 5.4 – Courbes de réponse vitesse-force $v(F)$ représentative des différents dépiégeages obtenus dans le cadre du *Toy Model* à 4 particules : a) un dépiégeage élastique, b) et un dépiégeage plastique. En trait noir pointillé est représenté le cas obtenu sans piégeage que la vitesse atteint asymptotiquement lorsque F l'emporte sur les autres forces en présence, impliquant de ce fait $\dot{u}_i \approx F$ au niveau de l'équation (5.4).

La figure 5.4a) est un exemple représentatif du dépiégeage élastique obtenu dans nos simulations où la courbe $v(F)$ présente une concavité tournée vers le bas. La figure 5.4b) présente la courbe type $v(F)$ du dépiégeage plastique que nous obtenons et qui présente une forme en S et avec un point d'inflexion.

Le dépiégeage élastique est obtenu exclusivement pour $A = 1$, *i.e.* lorsque l'intensité de piégeage est identique dans les deux canaux, alors que le dépiégeage plastique est obtenu lorsque $A \neq 1$.

5.4.2 Dynamique

Nous décrivons dans cette partie la dynamique des particules pour chacun des deux types de dépiégeage.

Dépiégeage Élastique : dépiégeage simultané

Les positions $u_i(t)$ des particules représentées sur la figure 5.5 correspondent au cas particulier, mais représentatif, où $A = 1$, $p_2 = 0$, $K = 0.4$ et $a = 0.33$. Lorsque $F \leq F_c$, toutes les particules finissent par se piéger, donnant ainsi $v = 0$ (figure 5.5a). Lorsque $F > F_c$, les particules se mettent en mouvement dans leur canal, et les paires de particules 1-2 et 3-4 présentent les mêmes équations horaires $u_i(t)$ (au déphasage induit près), cf figure 5.5b). Les vitesses moyennes des 4 particules, issues d'une régression linéaire du type $u_i(t) \sim v_i t$, sont identiques et toutes les particules se sont dépiégées simultanément. Cela caractérise le dépiégeage élastique.

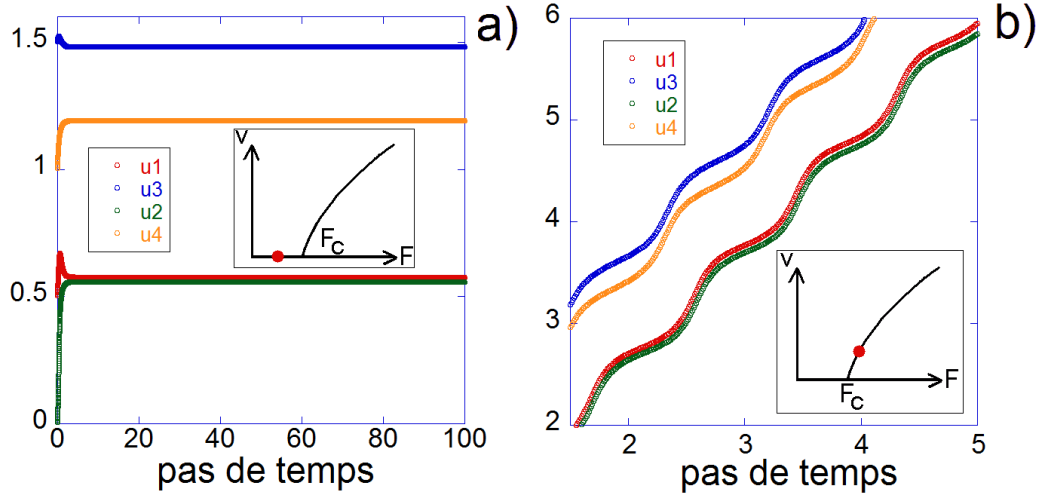


FIGURE 5.5 – Dynamique des particules $u_i(t)$ avec $i = 1, 2, 3, 4$: a) pour $F < F_c$ les particules restent piégées, b) les 4 particules sont toutes dépiégées et possèdent une vitesse moyenne identique si l'on effectue une régression linéaire des courbes $u_i(t)$. L'insert montre la courbe vitesse-force du dépiégeage élastique avec le point indiquant la force d'entraînement appliquée aux particules.

Dépiégeage Plastique : dépiégeage séquentiel

Les positions $u_i(t)$ des particules sur la figure 5.6 correspondent au cas où $A = 4$, $p_2 = 0$, $K = 1$ et $a = 0.05$. Lorsque $F \leq F_c$, de façon similaire au dépiégeage élastique, les particules demeurent immobiles. Lorsque $F \gtrsim F_c$, les particules du canal le plus piégeant oscillent en restant piégées dans un puits, pendant que les deux autres particules sont en mouvement le long de leur canal (cf figure 5.6a). Ceci se traduit sur la courbe $v(F)$ par un "décrochage" de la vitesse correspondant au dépiégeage du premier canal. Quand F augmente, le deuxième canal se dépiege, provoquant un nouveau décrochage sur la courbe $v(F)$. Toutes les particules ont un mouvement saccadé (cf figure 5.6b). La vitesse moyenne des canaux est différente et les 2 paires de particules, 1-3 et 2-4, se déplacent à des vitesses différentes : les canaux sont ainsi découplés. Lorsque la force appliquée augmente, l'écart relatif entre les vitesses moyennes des différents canaux diminue pour tendre vers un couplage des 2 canaux (cf figure 5.6c-d).

Le "décrochage" de la vitesse dans la courbe vitesse-force est plus ou moins marqué suivant la valeur du rapport d'intensité de piégeage A . En effet quand $A \gg 1$, la force nécessaire à appliquer pour que la vitesse moyenne des canaux soit similaire est plus faible que dans le cas où $A \approx 1$ (comme dans l'exemple présenté ci-dessus). Cela signifie qu'une fois le deuxième canal dépiégé, sa vitesse moyenne se rapproche très rapidement de celle du canal qui s'est dépiégé en premier.

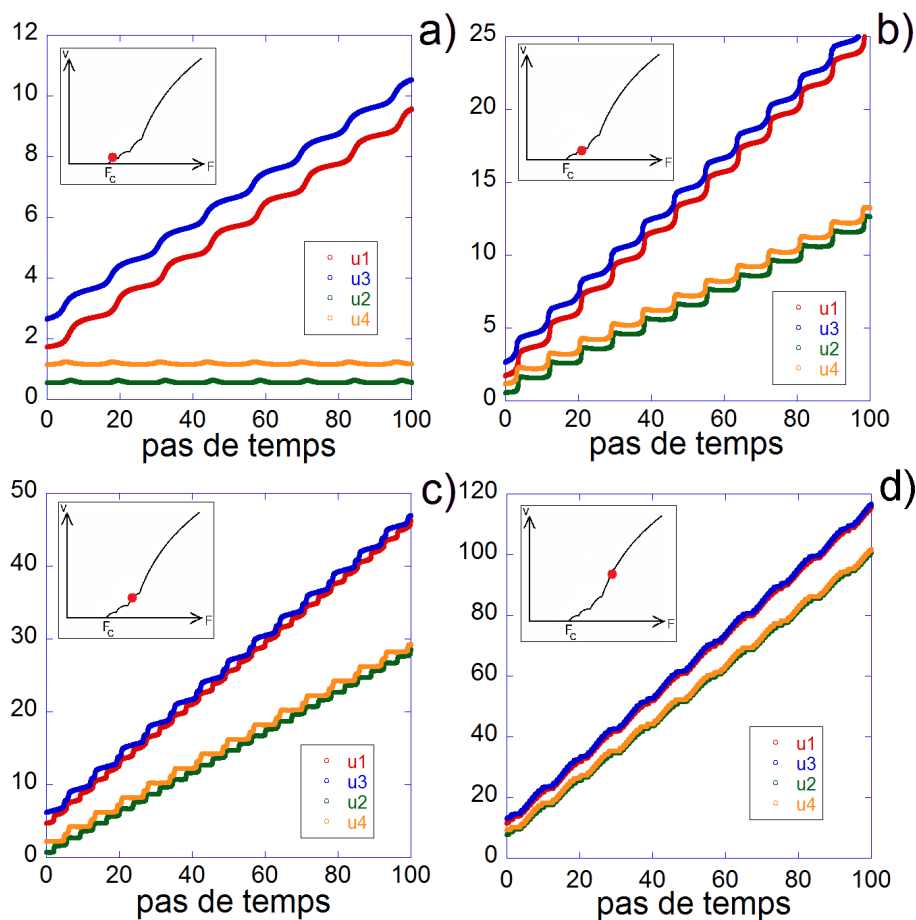


FIGURE 5.6 – Dynamique des particules $u_i(t)$ avec $i = 1, 2, 3, 4$. a) Lorsque $F \gtrsim F_c$, la paire de particules dans le canal le plus piégeant (ici 2-4) reste piégée mais oscille, alors que l'autre paire (1-3) avance dans son canal. b) Quand la force augmente, toutes les particules sont dépiégées avec un mouvement saccadé, et les vitesses moyennes des canaux sont différentes. c-d) Lorsque F augmente, la différence de vitesse entre les 2 canaux tend à diminuer. L'insert montre la courbe vitesse-force du dépiégeage plastique, avec le point rouge indiquant la force d'entraînement appliquée aux particules.

5.4.3 Hystérésis

Les résultats exposés jusqu'à présent représentaient des situations non hystérétiques. Cependant nous avons observé de l'hystérésis pour certains jeux de paramètres.

La présence d'hystérésis se traduit par l'existence de deux forces critiques F_c^{up} et F_c^{down} suivant que nous augmentons ou diminuons la force. La figure 5.7 présente un exemple montrant une hystérésis pour un dépiégeage élastique, avec $A = 1$, $p_2 = -0.5$, $K = 0.1$ et $a = 0.14$.

L'hystérésis est observée quelque soit l'harmonique de la force de piégeage p_2 (que cette dernière soit positive, négative ou bien nulle). Dans le cas du dépiégeage plastique $A \neq 1$,

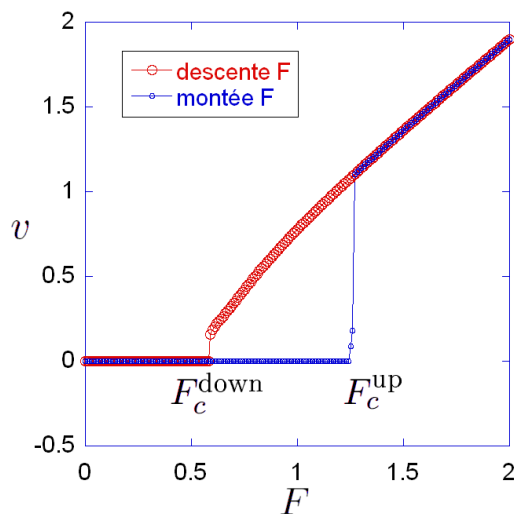


FIGURE 5.7 – Courbe $v(F)$ dans le cas d'un dépiégeage élastique (avec $A = 1$, $p_2 = -0.5$, $K = 0.1$ et $a = 0.14$) et montrant un phénomène d'hystérésis marqué. En fonction de l'histoire, nous identifions deux forces critiques F_c^{up} et F_c^{down} (respectivement lors de la montée et de la descente de la force).

nous pouvons observer de l'hystérésis très faible, c'est à dire $L_{\text{hyst}} = \frac{F_c^{\text{up}} - F_c^{\text{down}}}{F_c^{\text{up}}} \leq 10\%$, et très peu marquée sur la courbe vitesse-force $v(F)$.

Cependant pour $A = 1$, *i.e.* lors du dépiégeage élastique, le phénomène d'hystérésis peut être très marqué. Nous représentons en échelle logarithmique sur la figure 5.8, la frontière de séparation entre les états avec et sans hystérésis dans le diagramme de phase (a, K) , pour $A = 1$ et différentes harmoniques de piégeage p_2 . La zone blanche correspond à un dépiégeage sans hystérésis, alors que la zone colorée correspond à un dépiégeage avec hystérésis. Différentes courbes de contour de la largeur relative de l'hystérésis L_{hyst} sont représentées. Quand la valeur de p_2 augmente (en passant d'une valeur négative jusqu'à une valeur positive) et pour la gamme de paramètres explorée, le comportement de la frontière (a_c, K_c) pour des valeurs élevées de K évolue peu. Néanmoins pour de faibles valeurs de K , l'hystérésis augmente lorsque le paramètre a diminue. On remarque également que L_{hyst} est plus important pour $p_2 < 0$ par rapport au cas $p_2 \geq 0$.

Ainsi, l'hystérésis est principalement observée lors du dépiégeage élastique. De plus, elle est fortement présente dans le diagramme de phase (a, K) lorsque a diminue à K fixée pour $p_2 < 0$, et moins pour $p_2 \geq 0$.

5.4.4 Chaos

Les équations qui régissent la dynamique du modèle sont fortement non-linéaires avec un nombre de degrés de liberté supérieur à trois. Il est alors légitime de s'interroger sur l'existence d'une possible dynamique chaotique. Les outils pour mettre en évidence le chaos sont la détermination du plus grand exposant de *Lyapunov* λ et des spectres de puissance

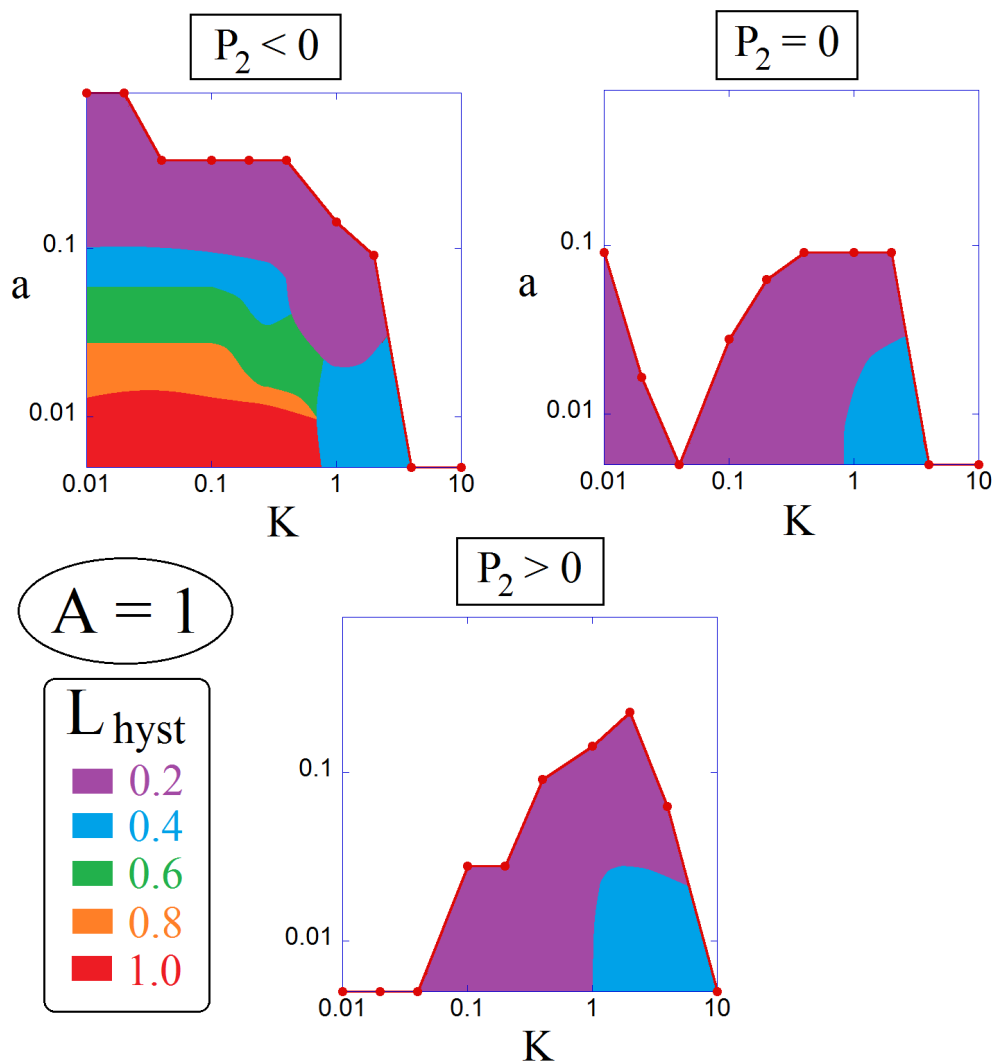


FIGURE 5.8 – Diagramme de phase (a, K) pour le dépiégeage élastique $A = 1$ et différentes harmoniques p_2 : a) $p_2 < 0$, b) $p_2 = 0$, c) $p_2 > 0$. La frontière de séparation entre un dépiégeage sans hystérésis (zone blanche) et un dépiégeage avec hystérésis (zone colorée) est représentée. Chaque point de la courbe est identifiable à une valeur (a_c, K_c) de la frontière. Différentes courbes de contour de la largeur relative de l'hystérésis L_{hyst} sont représentées.

$S(f)$.

5.4.4.1 Exposant de Lyapunov λ et spectre de puissance $S(f)$

Rappelons brièvement qu'un système dynamique est chaotique s'il présente la propriété de sensibilité aux conditions initiales (SCI). Cela signifie que la distance dans l'espace des phases entre deux conditions initiales arbitrairement proches diverge exponentiellement

5.4. RÉSULTATS OBTENUS

dans le temps, jusqu'à atteindre une distance limite qui est de l'ordre de la taille de l'attracteur chaotique. La mesure de la "vitesse" de la divergence de ces trajectoires dans chaque direction i de l'espace des phases se fait par un exposant λ_i , dit de *Lyapunov*, et défini par $d_i(t) \sim e^{\lambda_i t}$. Si la dynamique possède au moins un exposant positif, alors il existe au moins une direction pour laquelle la propriété de SCI se manifeste.

Un exposant $\lambda > 0$ est donc une signature non ambiguë du chaos. Notons qu'un point fixe ne possède que des exposants de *Lyapunov* négatifs, les cycles limites présentent un exposant nul, les autres étant négatifs.

Pour chacun des jeux de paramètres utilisés précédemment, nous définissons deux conditions initiales infiniment proches séparées par une distance d_0 dans l'espace des phases. En utilisant l'algorithme de *Runge-Kutta* d'ordre 4 nous avons obtenu les trajectoires dans l'espace des phases. Plusieurs valeurs de la distance initiale d_0 ont été choisies (de 10^{-6} à 10^{-12}), ainsi que différentes directions S , D , S' ou D' . Au cours de chaque itération temporelle, la distance euclidienne séparant les deux trajectoires \vec{X}_1 et \vec{X}_2 est calculée en fonction du temps : $d(t) = \sqrt{|\vec{X}_2 - \vec{X}_1|^2}$. La figure 5.9 montre un exemple typique de régime chaotique obtenu pour le dépiégeage plastique présenté dans la section 5.4.2 avec $A = 4$, $p_2 = 0$, $K = 1$ et $a = 0.05$. Le comportement $d(t) \sim e^{\lambda t}$ avec $\lambda > 0$ montre le caractère chaotique de la dynamique. Ce comportement est bloqué par un effet de saturation lorsque $d(t)$ devient de la taille de l'attracteur chaotique.

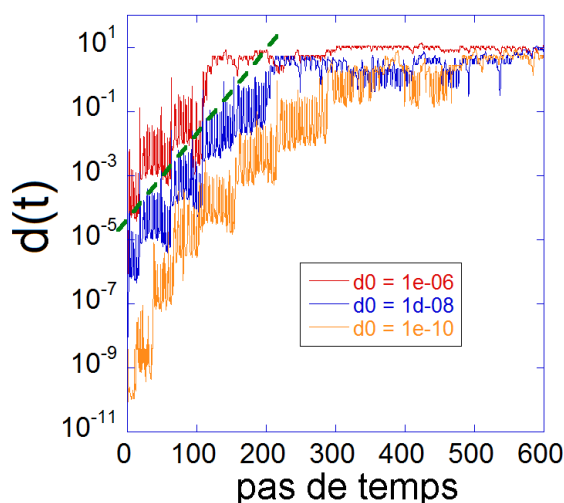


FIGURE 5.9 – Évolution de $d(t)$ en fonction du temps en échelle semi-logarithmique. Un exposant de *Lyapunov* positif peut être déterminé aux temps courts (avant la saturation due à la taille caractéristique de l'attracteur). Trois distances initiales d_0 entre les trajectoires voisines sont affichées, montrant le même exposant de *Lyapunov*. La ligne pointillée verte sert de guide pour visualiser la pente λ .

La valeur de λ ne varie pas avec l'écart initial d_0 entre les deux conditions initiales, et avec la direction suivant laquelle cet écart est effectué. Ces résultats indiquent que λ est une quantité intrinsèque caractéristique de la dynamique chaotique à une force donnée.

On considère le spectre de puissance $S(f)$ de la vitesse moyenne, défini par :

$$S(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N v_k e^{-2i\pi f \frac{k}{N}} \right|^2 \quad (5.8)$$

où la vitesse a été discrétisée avec un intervalle entre deux valeurs successives pris comme unité de temps. Un algorithme de transformée de fourier rapide (FFT : Fast Fourier Transform en anglais) a été utilisé pour calculer $S(f)$.

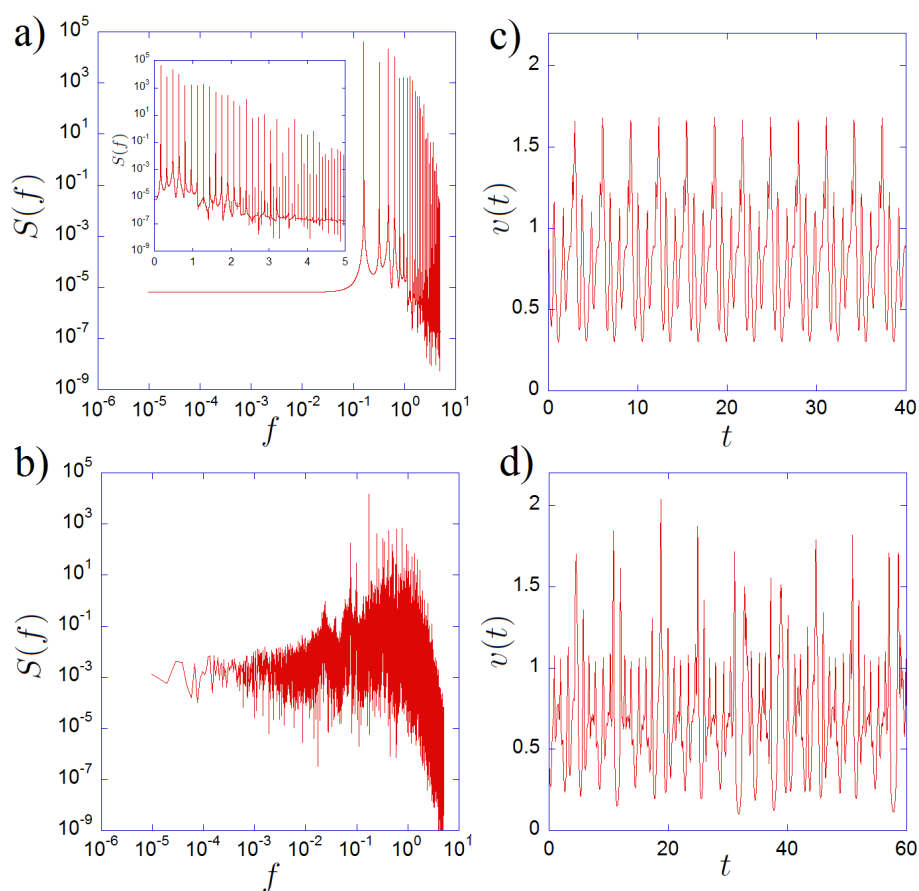


FIGURE 5.10 – Spectre de puissance $S(f)$ en échelle logarithmique, obtenu lors d'un dépiégeage plastique, pour une force situant le système dans un régime : a) périodique, b) chaotique. En insert de la figure a) est représenté le spectre en échelle semi-logarithmique, afin de mieux visualiser les raies discrètes. Les figures c) et d) représentent le signal de la vitesse $v(t)$ utilisé pour déterminer le spectre, correspondant respectivement au cas des figures a) et b). Pour plus d'informations, voir le texte associé.

Les figures 5.10a) et b) représentent le spectre de puissance $S(f)$ typique, pour un dépiégeage plastique (avec $A = 2$, $p_2 = 0$, $K = 0.1$ et $a = 0.33$). La figure 5.10a) correspond à une force pour laquelle aucun exposant de *Lyapunov* positif n'a été mesuré, alors que la

figure 5.10b) correspond à une force où un exposant $\lambda > 0$ est observé. Nous représentons également sur les figures 5.10c) et d) le signal de la vitesse moyenne $v(t)$ relatif respectivement aux figures a) et b).

La vitesse obtenue dans le cas non chaotique présente un comportement périodique, et son spectre de puissance présente des raies à la fréquence fondamentale ainsi qu'à celles des harmoniques (cf l'insert de la figure 5.10a). Pour le cas chaotique, le signal de la vitesse ne présente pas un comportement régulier et le spectre de puissance ne contient pas de raies discrètes, mais un continuum de fréquences. Ce résultat est signe d'une grande richesse dans la dynamique. De plus, un large bruit à basses fréquences est mesuré (d'environ deux ordres de grandeur plus important que dans le régime périodique). Ce bruit, qui indique la perte de cohérence sur de longues périodes de temps, est caractéristique d'un régime chaotique.

5.4.4.2 Régimes chaotiques

Pour les jeux de paramètres testés, aucun régime chaotique n'a été détecté pour $A = 1$ correspondant au dépiégeage élastique. De plus, lorsque le piégeage d'un canal par rapport à l'autre est trop important (par exemple $A = 0.1$ ou $A = 10$), nous ne mesurons pas d'exposant $\lambda > 0$, ce qui signifie qu'aucun régime chaotique n'est détecté. Tout se passe comme si les canaux se découplent et que seuls deux degrés de liberté au lieu de quatre sont actifs, de sorte qu'aucun chaos n'est alors possible. En revanche, lorsque les rapports des intensités de piégeage des canaux sont du même ordre de grandeur (par exemple $A = 0.3$ ou encore $A = 2$), des régimes chaotiques sont observés. Le couplage des canaux permet ainsi à la dynamique d'exhiber du chaos. Nous affichons sur la figure 5.11a) l'évolution type de λ avec la force appliquée. Nous représentons également sur le même graphique la résistance différentielle $R_d = dv/dF$ associée (le pic au niveau de R_d correspond au point d'inflexion situé sur la courbe $v(F)$). On remarque que λ diminue avec la force au delà du pic de R_d . Pour les jeux de paramètres testés, nous n'avons pas mesuré de chaos en dessous du pic de R_d .

Ces résultats sont compatibles avec ceux obtenus dans le cadre du réseau de vortex $2D$ à $T = 0$ [127]. Un dépiégeage plastique, caractérisé au niveau de la courbe vitesse-force par un point d'inflexion a été observé, et aucune hystérésis n'y a été mesurée. Des régimes chaotiques y ont été mesurés autour du point d'inflexion de $v(F)$, avec une valeur d'exposant λ qui est maximale au point d'inflexion.

Cependant dans le modèle simplifié, et pour les jeux de conditions initiales testés, les valeurs de force pour lesquelles du chaos apparaît ne forment pas un intervalle de force continu, mais au contraire sont réparties de manière discrète. Entre deux valeurs de force présentant du chaos, des régimes périodiques ont été observés. Il est possible qu'avec d'autres jeux de conditions initiales, des régimes chaotiques puissent être observés pour les forces présentant des régimes périodiques. Une analyse détaillée de l'espace des phases serait nécessaire pour étudier la coexistence possible ou non d'attracteurs chaotiques avec des attracteurs périodiques.

Nous affichons sur la figure 5.11b) les valeurs de paramètres dans le diagramme de phase (a, K) pour lesquelles des régimes chaotiques ont été détectés, lorsque $A = 2$ et pour différentes harmoniques p_2 . On remarque que les valeurs des exposants de *Lyapu-*

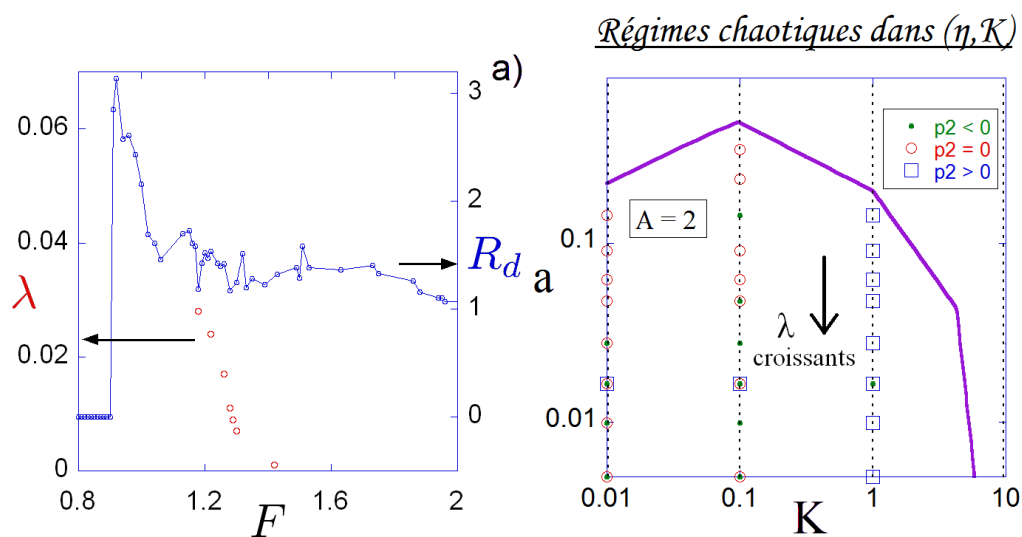


FIGURE 5.11 – a) Évolution de l'exposant de *Lyapunov* λ et de la résistance différentielle R_d avec la force. Voir le texte associé pour plus d'informations. b) Diagramme de phase (a, K) pour $A = 2$ et différentes harmoniques p_2 . Les différentes marques (cercles, disques ou carrés) correspondent aux valeurs de paramètres pour lesquelles des régimes chaotiques sont observés. La frontière de séparation entre les régimes chaotiques et non chaotiques est également représentée. La flèche indique le sens d'évolution des exposants de *Lyapunov* λ pour une force proche du point d'inflexion. Remarque : les valeurs de constante d'élasticité utilisées sont $K = \{0.01; 0.1; 1; 10\}$, alors que les valeurs du paramètre a varient de 5×10^{-3} à 8×10^{-1} .

nov λ , pour une force proche du point d'inflexion de $v(F)$, augmentent lorsque a diminue à K fixée. Les exposants λ mesurés à a fixée sont semblables quelque soit les harmoniques p_2 .

Ainsi, des régimes chaotiques sont observés dans le cas du dépiégeage plastique (*i.e.* $A \neq 1$), cependant la coexistence de régimes chaotiques et périodiques reste une question ouverte.

5.5 Conclusion

A partir d'un modèle visco-élastique simple avec un faible nombre de degrés de libertés (ici 4 particules), nous obtenons une grande variété de comportements dynamiques. Deux grands types de dépiégeage sont observés, similairement à ce que l'on mesure dans des systèmes périodiques variés comme les colloïdes, les cristaux de *Wigner*, les ondes de densité de charge, les réseaux de vortex, etc ... L'intensité de piégeage relative A d'un canal par rapport à un autre joue un rôle important sur le type de dépiégeage, et sur les différents régimes dynamiques obtenus. Un dépiégeage élastique des particules est observé pour des valeurs de $A = 1$ alors qu'un dépiégeage plastique est réalisé pour des valeurs de $A \neq 1$ avec une dynamique riche. En effet, des particules piégées peuvent coexister avec d'autres en

mouvement, ou bien les particules peuvent être toutes dépiégées avec des vitesses moyennes différentes (situations similaires à des phases smectiques). La richesse qu'offre un tel modèle visco-élastique ne s'arrête pas là puisque de l'hystérésis est mesurable, quelque soit l'harmonique dans le paysage de piégeage. Seule dans le cas du dépiégeage élastique de l'hystérésis marquée est observable. Lors du dépiégeage élastique, et pour les valeurs de paramètres utilisés, aucun régime chaotique n'a pu être détecté. Des régimes chaotiques ont pu être observés dans le cas du dépiégeage plastique : des exposants de *Lyapunov* positifs ont été mesurés. Ces derniers sont une signature non ambiguë de l'existence de chaos au sein du système. L'étude du spectre de puissance $S(f)$ a mis en avant l'existence d'un large bruit à basses fréquences dans les régimes chaotiques.

Les résultats obtenus sur ce modèle simplifié indiquent que la dynamique plastique de systèmes périodiques entraînés sur un milieu désordonné peut être approchée par un modèle avec un très faible nombre de degrés de libertés. Une étude détaillée semble nécessaire quant à la caractérisation du chaos dans un tel modèle. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus pour des systèmes plus compliqués comme les réseaux de vortex $2D$ à $T = 0$ [127]. En effet, un dépiégeage plastique caractérisé au niveau de la courbe vitesse-force par un point d'inflexion, l'absence d'hystérésis pour le cas plastique, ou encore l'existence de chaos avec un exposant de *Lyapunov* λ maximal au niveau du point d'inflexion, et diminuant avec la force, sont des éléments communs à ces différents systèmes.

Notons que ces résultats sont également à comparer avec ceux obtenus pour des simulations numériques dans un modèle simple de dépiégeage : $N \geq 2$ canaux $1D$ de particules se repoussent et sont sujet à une force d'entraînement dans un milieu désordonné [136]. Des comportements dynamiques similaires sont observés, citons par exemple une transition entre un dépiégeage élastique et plastique, la coexistence de particules piégées et en mouvement, des canaux découplés avec des vitesses moyennes différentes, ou encore la possibilité d'hystérésis. Dans ce modèle, il n'existe cependant aucun couplage visqueux entre les canaux.

Une modification possible du modèle serait maintenant de fixer non plus la force d'entraînement F uniforme, mais la vitesse des canaux à travers une force extérieure du type $F(t) \sim vt - u(t)$. Cela permettrait ainsi de modéliser le fait que les particules soient "tirées" par un ressort à vitesse constante. Ce modèle a pu être étudié analytiquement, il a été utile pour déterminer les forces critiques et la fonction calculée dans la théorie du groupe de renormalisation fonctionnel [137, 138].

5.5. CONCLUSION

Conclusion

« Une conclusion, c'est quand vous en avez assez de penser. »

Herbert Albert Fisher

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la dynamique et au dépiégeage des systèmes élastiques désordonnés. Cette thématique regroupe une grande variété de systèmes dans des sujets aussi divers que la physique des solides avec les ondes de densité de charge, les cristaux de *Wigner*, les parois de domaines magnétiques ou les réseaux de vortex dans la supraconducteurs de type II, et la mécanique des matériaux ou des fluides avec la propagation de fronts de fracture et le mouillage de surface rugueuse avec un liquide. Nous avons principalement étudié le dépiégeage de réseaux de vortex soumis à une force d'entraînement et plongés dans un milieu où le désordre est faible.

Cette étude est menée à l'aide de simulations numériques à grande échelle. En variant l'intensité du piégeage un changement de régime a été trouvé entre une dynamique élastique et une dynamique plastique montrant le passage d'un régime dominé par le désordre à un régime dominé par l'élasticité. L'objectif de notre étude a été de caractériser la nature de la transition de dépiégeage des vortex dans le régime élastique obtenu en désordre faible.

La dynamique des vortex a été explorée au dessus du seuil de dépiégeage et l'on observe que tous les vortex se dépiègent simultanément et s'écoulent dans des canaux statiques rugueux couplés élastiquement. Une analogie avec les transitions de phase à l'équilibre du second ordre a été mise en évidence avec la vitesse moyenne des vortex v comme paramètre d'ordre et la force d'entraînement f comme paramètre de contrôle. Nous avons mis en évidence le caractère continu de la transition et nous avons évalué divers exposants critiques qui la caractérise. Pour cela une analyse en terme de loi d'échelle a été employée à température nulle et à température finie permettant d'extraire les exposants β et δ caractérisant la réponse de la vitesse en fonction de la force et de la température (exposants issus respectivement des lois de puissance $v_{T=0} \sim f^\beta$ et $v_{f=0} \sim T^{1/\delta}$), mais également l'exposant ν caractérisant la divergence au dessus du dépiégeage de la longueur de corrélation du système ($\xi \sim f^{-\nu}$ à $T = 0$). Nous avons établi l'existence d'une loi d'échelle reliant la vitesse v avec la force f et la température T en accord avec la théorie des transitions de phase continues. Les exposants critiques β , δ et la fonction d'échelle sont indépendants du désordre (son intensité et sa répartition spatiale) dans la gamme des paramètres utilisés indiquant ainsi l'existence d'un certain degré d'universalité. Cependant la comparaison avec d'autres systèmes périodiques similaires suggère qu'une vaste classe d'universalité n'existe pas pour la transition de dépiégeage élastique à $2D$.

L'étude d'un modèle simple visco-élastique avec un faible nombre de degrés de libertés permet de décrire les situations où le désordre est fort. Une grande variété de comportements dynamiques sont observés en fonction de plusieurs paramètres qui jouent un rôle important dans la détermination de ces régimes dynamiques : l'intensité de piégeage, les interactions élastiques et visqueuses. Deux grands types de dépiégeage élastique et plastique sont observés, et sont similaires à ce que l'on mesure dans les systèmes périodiques désordonnés. Outre la richesse dynamique que l'on peut tirer d'un tel modèle, d'autres caractéristiques sont observées, comme par exemple de l'hystérésis dans le cas du dépiégeage élastique. Du chaos a été détecté dans le cas du dépiégeage plastique, avec des exposants de *Lyapunov* positifs et un large bruit à basses fréquences. En revanche dans le cas du dépiégeage élastique, aucun régime chaotique n'a été mesuré. Ces résultats indiquent que la dynamique plastique de systèmes périodiques entraînés sur un milieu désordonné peut être approchée par un modèle avec un très faible nombre de degrés de libertés.