

# Chapitre 2

## Méthodes de simulation et modélisation des systèmes de puissance

Ce chapitre présente les bases de la simulation numérique en commençant par la formulation des systèmes d'équations représentant le réseau électrique. Par la suite il sera question de la modélisation des éléments de base ainsi que de la modélisation des interrupteurs de puissance pour finalement discuter de la simulation numérique des systèmes de puissance et de certaines considérations pour l'implémentation en temps réel de la méthode nodale.

### 2.1 Formulation des équations du réseau

Plusieurs méthodes ont été développées pour analyser les systèmes de puissance. La méthode nodale et la méthode des variables d'état, ainsi que tous leurs dérivés, sont les plus utilisées [1-5, 19, 29-30] puisqu'elles présentent une précision acceptable tout en étant peu complexe à implémenter et rapide à exécuter. Les deux méthodes seront présentées ici. Une attention plus particulière sera portée à la méthode nodale puisqu'elle est utilisée dans le cadre de ce projet.

### 2.1.1 Méthode des variables d'état

Le principal avantage de cette méthode est la possibilité de modéliser et de simuler simultanément tous les éléments d'un système de puissance (éléments linéaires, éléments non-linéaires, systèmes de commande et l'électronique de puissance) de façon unifiée. Selon cette méthode, un système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2-1)$$

où  $x$  est le vecteur de variables d'état,  $u$  le vecteur d'entrées,  $y$  le vecteur de sorties et  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont les matrices d'états. Dans un réseau électrique, les variables d'état représentent les courants circulant dans les inductances et les tensions aux bornes des condensateurs. À l'instar de la méthode nodale, les lois de Kirchoff sont utilisées pour construire les matrices d'état. L'analyse du circuit de la figure 2.1 est faite afin de présenter la méthode.

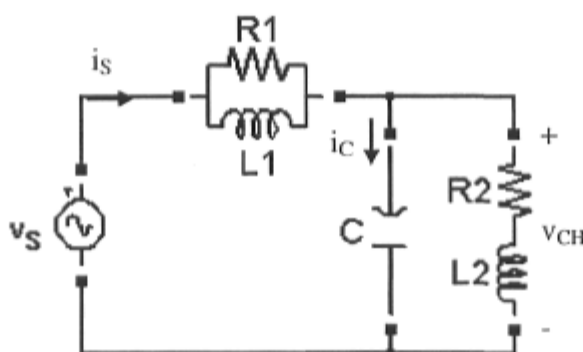


Figure 2.1 Circuit à trois états pour illustrer la méthode des variables d'état.

Ce circuit comprend trois états,  $i_{L1}$ ,  $i_{L2}$  et  $v_C$ , puisqu'il contient trois éléments réactifs indépendants. Le courant de source, la tension aux bornes de la charge composée de  $R_2$  et  $L_2$  ainsi que le courant circulant dans le condensateur sont les sorties du système,  $y$ . L'entrée du système consiste de la valeur de la source de tension. Maintenant que les variables d'état, les entrées et les sorties sont définies, il faut établir les matrices d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Afin de déterminer ces matrices, il faut débiter par les relations tension-courant des éléments réactifs.

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{di_L}{dt} \\ i_C &= C \frac{dv_C}{dt} \end{aligned} \quad (2-2)$$

Puis, en utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds, on trouve les équations du système. En mettant en évidence les états de ce circuit on trouve les équations suivantes :

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{(v_s - v_C)}{L_1} \quad (2-3)$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{(v_C - R_2 i_{L2})}{L_2} \quad (2-4)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{(i_{L1} - i_{L2})}{C} + \frac{(v_s - v_C)}{R_1 C}. \quad (2-5)$$

En remaniant légèrement les équations précédentes afin d'obtenir un système d'équation de la forme

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R_2/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & -1/R_1 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 1/R_1 C \end{bmatrix} [v_s]. \quad (2-6)$$

On exprime le courant de la source, le courant du condensateur et la tension de la charge en fonction des variables d'état et de l'entrée :

$$i_s = i_{L1} + (v_s - v_C)/R_1 \quad (2-7)$$

$$i_C = i_{L1} - i_{L2} + (v_s - v_C)/R_1 \quad (2-8)$$

$$v_{CH} = v_C. \quad (2-9)$$

Pour compléter le jeu d'équations modélisant le circuit de la figure 2.1, il faut ramener les équations sous la forme

$$y = Cx + Du.$$

On obtient alors le système d'équations décrivant les sorties du système :

$$\begin{bmatrix} i_S \\ i_C \\ v_{CH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/R_1 \\ 1 & -1 & 1/R_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/R_1 \\ 1/R_1 \\ 0 \end{bmatrix} [v_S]. \quad (2-10)$$

La construction des matrices d'état n'est pas triviale et ne peut se faire aisément par inspection contrairement à la construction de la matrice d'admittance de la méthode nodale.

### 2.1.2 Méthode nodale

La méthode nodale est basée sur l'application de la loi des nœuds et de la loi des mailles de Kirchoff. Ses avantages résident dans le fait que le système d'équations relatif à une certaine topologie peut être établi rapidement par inspection et que le système étudié peut être segmenté en plusieurs sous-systèmes plus simples à résoudre. La majorité des simulateurs temps réel sont basés sur la méthode nodale [1, 2, 4, 13]. L'implantation logicielle est généralement similaire.

#### Principe de base

La méthode de résolution nodale consiste des étapes suivantes [46 et 55] :

1. Définir les tensions nodales ainsi que le nœud de référence.
2. Exprimer les tensions de branches en fonction des tensions nodales.
3. Écrire les équations de courant pour tous les nœuds à l'exception du nœud de référence.

4. Insérer les relations  $v$ - $i$  des éléments et les équations de l'étape 2 dans les équations de l'étape 3 pour obtenir le système d'équation représentant le système étudié.
5. Manipuler les équations afin d'obtenir un système de la forme  $Yv = i$  où  $Y$  est la matrice d'admittance,  $v$  le vecteur de tension nodale et  $i$  le vecteur d'injection de courant.
6. Inverser la matrice  $Y$ .
7. Résoudre le système  $v = Y^{-1}i$ .

L'obtention des matrices et vecteurs décrivant le système est beaucoup plus aisée que dans le cas de la méthode des variables d'état. Afin d'illustrer la méthode nodale, l'analyse du réseau présenté à la figure 2.2 sera effectuée. Les tensions nodales  $y$  sont déjà spécifiées ainsi que le nœud de référence.

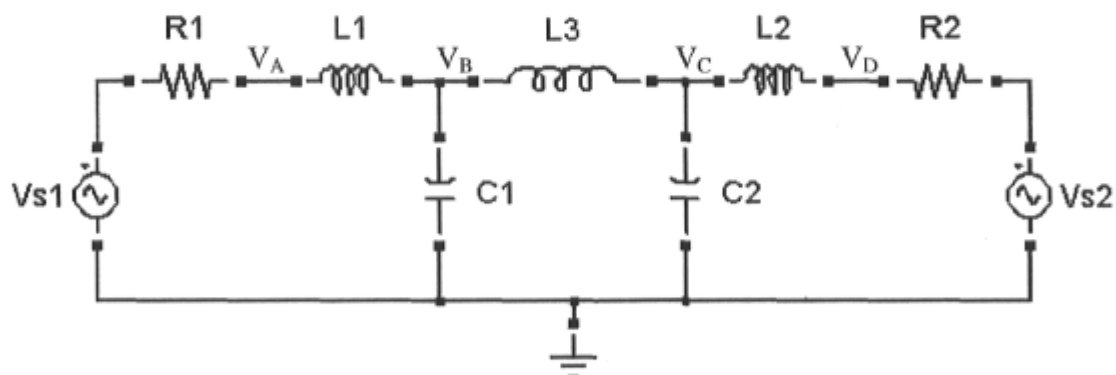


Figure 2.2 Réseau analysé pour présenter la méthode nodale.

Suite à l'exécution des étapes 2 à 4, on obtient le système d'équations suivant :

$$\frac{V_{s1} - V_A}{R_1} = \frac{V_A - V_B}{L_1 s} \quad (2-11)$$

$$\frac{V_A - V_B}{L_1 s} = \frac{V_B - V_C}{L_3 s} + V_B C_1 s \quad (2-12)$$

$$\frac{V_B - V_C}{L_3 s} = \frac{V_C - V_D}{L_2 s} + V_C C_2 s \quad (2-13)$$

$$\frac{V_C - V_D}{L_2 s} = \frac{V_D - V_{S2}}{R_2}. \quad (2-14)$$

On regroupe les termes relatifs aux tensions nodales d'un côté de l'égalité et de l'autre les termes relatifs aux sources. On obtient ainsi un système de la forme  $Yv = i$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_1 s} & -\frac{1}{L_1 s} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1 s} & \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_3 s} + C_1 s & -\frac{1}{L_3 s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_3 s} & \frac{1}{L_2 s} + \frac{1}{L_3 s} + C_2 s & -\frac{1}{L_2 s} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2 s} & \frac{1}{L_2 s} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{S1}}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{V_{S2}}{R_2} \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

On remarque que la matrice d'admittance peut être obtenue par inspection et que si le système possède plusieurs nœuds qui ne sont pas reliés, la matrice d'admittance sera creuse. Cette caractéristique facilite la segmentation du réseau analysé en plusieurs sous-réseaux de plus petite taille, ce qui scinde la tâche de calcul en plusieurs parties qui peuvent être effectuées sur différents processeurs. Ainsi, la méthode nodale se prête bien à une implémentation multiprocesseur.

Finalement, il ne reste qu'à inverser la matrice d'admittance et à la multiplier avec le vecteur d'injection de courant pour obtenir les tensions nodales.

### Traitement des non-linéarités

Dans la méthode nodale, les non-linéarités sont traitées comme une modification de la matrice d'admittance ou du vecteur d'injection de courant. Les trois cas suivants illustrent bien l'idée.

Premièrement, pour le cas des éléments saturables, telle l'inductance de magnétisation d'un transformateur par exemple, ils peuvent être modélisés par une admittance variable. Selon les conditions d'opération, le simulateur détermine la région de fonctionnement de l'élément saturable et modifie son admittance s'il y a un changement de zone d'opération.

L'admittance non-linéaire de l'élément saturable est donc approximée par plusieurs régions linéaires. Dans ce cas, les dimensions de la matrice d'admittance ne varient pas, mais son contenu est modifié et son inverse doit être recalculé.

Deuxièmement, il est aussi possible de modéliser certains éléments non-linéaires par une impédance constante en parallèle avec une source de courant commandée par les conditions d'opération de l'élément. Dans ce cas, la matrice d'admittance est constante tout au long de la simulation et c'est uniquement au niveau de l'injection de courant que les non-linéarités se manifestent. Ce genre de traitement est très intéressant pour les applications temps réel puisqu'une modification au vecteur d'injection de courant est beaucoup moins coûteuse qu'une modification au niveau de la matrice d'admittance qui implique une nouvelle inversion de matrice pour pouvoir poursuivre la simulation.

Troisièmement, les interrupteurs de puissance peuvent être traités comme des interrupteurs idéaux, c'est-à-dire impédance nulle lorsqu'ils conduisent et infinie lorsqu'ils sont ouverts. Le réseau se trouve donc réduit d'un nœud lorsqu'un interrupteur conduit, ce qui a comme effet de réduire la taille du système d'équations modélisant le réseau d'une équation. Une nouvelle matrice d'admittance doit être calculée par la suite. Lorsque cet interrupteur s'ouvre, le système d'équation revient à sa taille originale. Il s'agit alors d'un traitement avec topologie variable. Cette approche est beaucoup moins intéressante pour une implémentation en temps réel parce qu'il faut reformuler le système d'équation puis inverser la nouvelle matrice d'admittance.

## **2.2 Méthodes d'intégration numérique**

Plusieurs techniques d'intégration numérique peuvent être utilisées pour la simulation numérique des systèmes de puissance. Cependant, elles ne peuvent pas toutes s'appliquer en temps réel de par leur nature itérative ou leur complexité qui les rendent trop coûteuses en temps de calcul. Les plus communément utilisées pour les simulateurs temps réel sont la méthode trapézoïdale et la méthode d'Euler arrière.

Ces deux méthodes proviennent de la série de Taylor tronquée au deuxième terme. La méthode Euler arrière évalue le point futur d'une fonction en utilisant la dérivée de la fonction au point futur contrairement à la méthode Euler avant qui utilise la dérivée au point présent pour effectuer l'estimation du point futur.

$$y(n+1) = y(n) + T \cdot y'(n+1) \quad (2-16)$$

où  $T$  est la longueur du pas de calcul employé et  $n$  l'indice de temps. On trouve de cette dernière équation un équivalent pour l'opérateur  $s$  :

$$s \equiv \frac{(z-1)}{T \cdot z} \quad (2-17)$$

La méthode Euler arrière entraîne une erreur d'estimation proportionnelle à  $T^2$  [49]. Cela implique que si le pas de calcul est réduit de moitié, l'erreur sera divisée par quatre.

La méthode trapézoïdale, qui est un cas particulier de la méthode Runge-Kutta d'ordre deux, utilise plutôt la moyenne de la dérivé au point présent et au point futur, ce qui implique une erreur d'estimation proportionnelle à  $T^3$  [49].

$$y(n+1) = y(n) + T \cdot \frac{[y'(n) + y'(n+1)]}{2} \quad (2-18)$$

On peut donc en déduire une autre approximation de l'opérateur de dérivation.

$$s \equiv \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (2-19)$$

Ces deux méthodes sont dites implicites puisqu'elles nécessitent la connaissance d'informations relatives au point recherché tandis qu'une méthode explicite, la méthode Euler avant par exemple, ne nécessite que les données disponibles provenant des pas de calcul précédents. Cette distinction est importante parce que les méthodes implicites sont plus précises que les méthodes explicites mais leur résolution est un peu plus complexe.

De plus, la méthode Euler arrière est de premier ordre tandis que la méthode trapézoïdale est de deuxième ordre. Plus l'ordre d'une méthode d'intégration numérique est élevé,



plus la précision est élevée. Évidemment, la complexité des algorithmes augmente aussi avec l'ordre. Cependant il est important de noter qu'une méthode d'ordre supérieur impose plus de restriction sur les conditions d'utilisation afin d'assurer la stabilité de l'algorithme, notamment la valeur du pas de calcul [14].

Les figures suivantes illustrent l'intégration d'une onde sinusoïdale avec les méthodes Euler avant, Euler arrière et trapézoïdale. En observant la figure 2.3, on note que l'aire sous la courbe considérée pour la méthode Euler avant est en retard sur la forme d'onde intégrée contrairement à celle employée pour la méthode arrière qui est en avance. L'aire considérée pour la méthode trapézoïdale est la moyenne de celles utilisées pour les deux méthodes Euler comme on peut le voir à la figure 2.3.

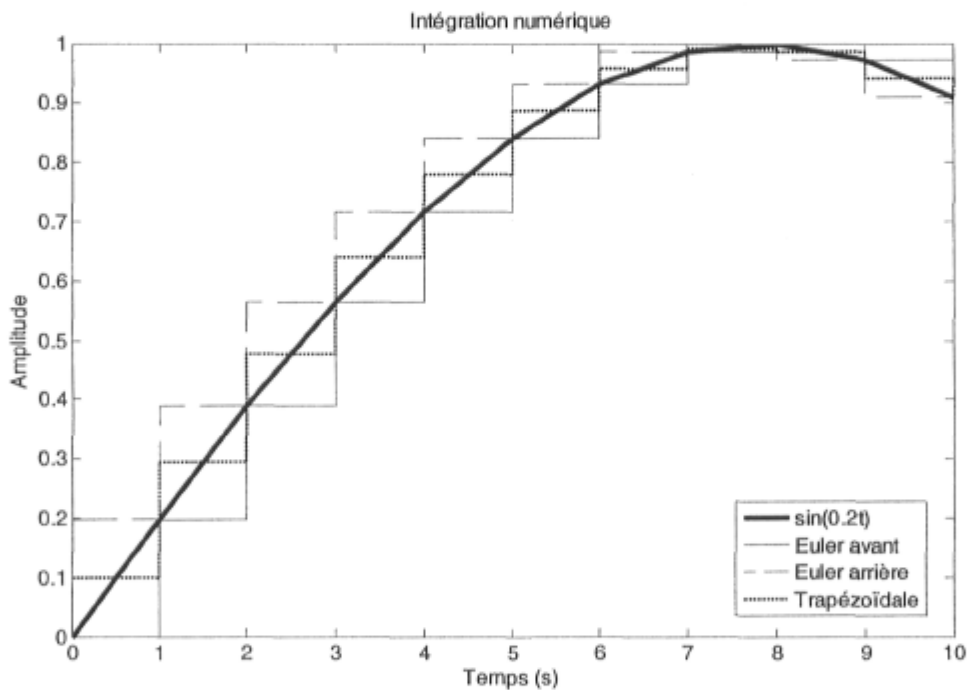


Figure 2.3 Sinusoïde et les aires considérées pour l'intégration numérique.

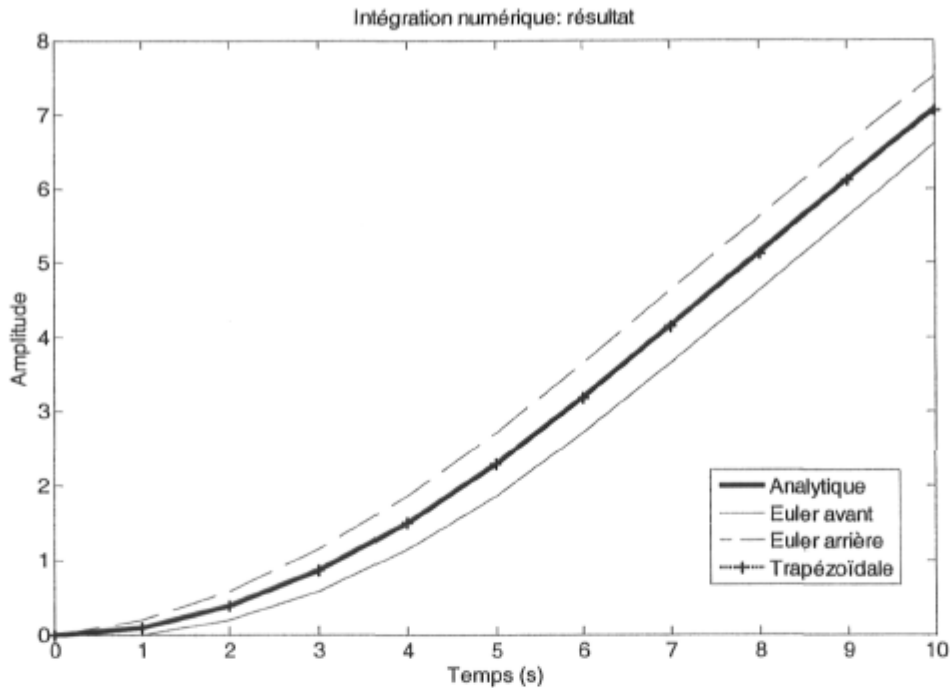


Figure 2.4 Résultat de l'intégration numérique.

La figure 2.4 compare le résultat de l'intégration numérique avec ces trois méthodes à la solution analytique. On constate que la méthode trapézoïdale donne de très bons résultats dans ce cas-ci tandis que les deux autres méthodes présentent des résultats erronés. Cet exemple illustre bien la différence de précision des trois méthodes lorsqu'elles sont utilisées avec un même pas de calcul. En diminuant le pas de calcul, la précision des méthodes Euler arrière et avant augmenterait. Ainsi, en diminuant la valeur du pas de calcul, il serait possible d'obtenir la même précision qu'avec la méthode trapézoïdale telle qu'illustrée. De plus, on constate encore une fois que les résultats obtenus avec la méthode Euler avant sont en retard et que ceux obtenus avec la méthode Euler arrière sont en avance. On constate donc que dans cet exemple, la méthode Euler avant sous-estime l'air sous la courbe tandis que la méthode arrière la surestime, ce qui entraîne dans les deux cas une erreur d'approximation.

### 2.3 Modélisation des éléments de base

En 1969 H. W. Dommel posa les bases du *ElectroMagnetic Transient Program* (EMTP) [27]. Cet algorithme qui implante la méthode nodale de résolution fut premièrement utilisé pour la simulation numérique des systèmes de puissance en temps différé puis, lorsque la puissance des engins de calcul fut suffisante, cet algorithme fut utilisé pour réaliser les premiers simulateurs numériques en temps réel.

#### Résistance

La modélisation de résistances linéaires est simple. Leur valeur d'admittance est directement utilisée dans la matrice d'admittance et elles ne participent pas à l'injection de courant.

Il est possible de modéliser une résistance non-linéaire en mémorisant la tension à ses bornes et en ajustant la valeur de résistance utilisée dans la matrice d'admittance en fonction des conditions d'opération. À chaque changement d'admittance, une nouvelle matrice doit être calculée. Plusieurs éléments non-linéaires sont modélisés de façon similaire.

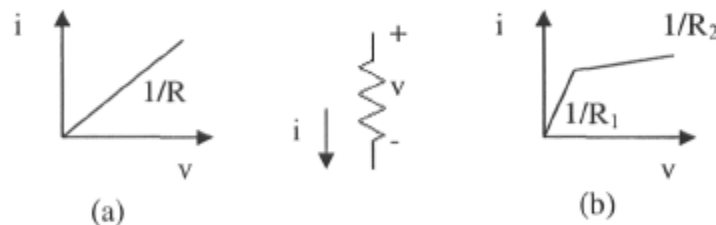


Figure 2.5 (a) Résistance linéaire et (b) non-linéaire.

#### Inductance

Les inductances sont modélisées par une résistance en parallèle avec une source de courant dont la valeur dépend des conditions précédentes aux bornes de l'élément.

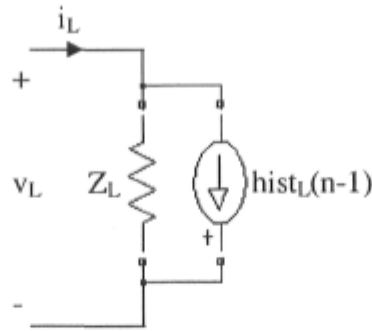


Figure 2.6 Modèle discret de l'inductance.

La modélisation EMTP utilise la relation  $v$ - $i$  de l'inductance, suite à une transformation de Laplace, comme point de départ et y applique l'intégration numérique trapézoïdale (2-19) :

$$I_L = \frac{V_L}{Ls} \quad (2-20)$$

$$I_L = \frac{V_L}{L \left( \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] \right)} \quad (2-21)$$

$$I_L(z-1) = \frac{V_L(z+1)}{2L/T} \quad (2-22)$$

En ramenant (2-22) dans le domaine du temps et en décalant cette équation d'un pas de calcul on obtient

$$i_L(n) = \frac{v_L(n) + v_L(n-1)}{2L/T} + i_L(n-1) \quad (2-23)$$

$$i_L(n) = \frac{v_L(n)}{2L/T} + hist_L(n-1) \quad (2-24)$$

où

$$hist_L(n-1) = \frac{v_L(n-1)}{2L/T} + i_L(n-1). \quad (2-25)$$

La résistance équivalente d'une inductance avec l'intégration trapézoïdale est de  $2L/T$  et à l'instant  $n$  la source de courant en parallèle avec la résistance a une valeur de  $hist_L(n-1)$ .

Si on utilise la méthode Euler arrière en substituant (2-17) dans (2-20) et en effectuant les mêmes manipulations que précédemment, l'inductance sera représentée par

$$i_L(n) = \frac{v_L(n)}{L/T} + hist_L(n-1) \quad (2-26)$$

$$hist_L(n-1) = i_L(n-1). \quad (2-27)$$

Avec cette méthode, on constate que la valeur de l'impédance équivalente est de  $L/T$  et que la source de courant est directement égale au courant qui circulait dans l'inductance au pas précédent.

### Condensateur

La modélisation des condensateurs est similaire à celle des inductances. Ainsi un condensateur est représenté par les équations suivantes lorsque la méthode trapézoïdale est utilisée :

$$i_C(n) = \frac{v_C(n)}{T/2C} + hist_C(n-1) \quad (2-28)$$

$$hist_C(n-1) = -\frac{v_C(n-1)}{T/2C} - i_C(n-1). \quad (2-29)$$

L'impédance équivalente a donc une valeur de  $T/2C$  et la source de courant a une forme similaire à celle de la représentation de l'inductance.

En utilisant la méthode Euler arrière, on obtient

$$i_C(n) = \frac{v_C(n)}{T/C} + hist_C(n-1) \quad (2-30)$$

$$hist_c(n-1) = -\frac{v_c(n-1)}{T/C}. \quad (2-31)$$

où le terme  $T/C$  est la valeur de l'impédance équivalente.

## 2.4 Modélisation des interrupteurs de puissance

Les interrupteurs de puissance peuvent être représentés de plusieurs manières qui varient au niveau de la précision de la représentation du comportement physique ainsi qu'au niveau de la complexité du traitement. Les trois modèles présentés ici, soit le modèle idéal, le modèle à deux impédances et le modèle L/RC, sont fréquemment utilisés pour la simulation temps réel.

### Modèle idéal

Ce modèle consiste à représenter un interrupteur en conduction par un court-circuit ( $R_{on} = 0$ ) et un interrupteur bloqué par un circuit ouvert ( $R_{off} = \text{infini}$ ). Malgré la simplicité de ce modèle, son implémentation n'est pas triviale puisqu'à chaque fois qu'un interrupteur change d'état le système est modifié, une nouvelle matrice d'admittance doit être calculée. On parle alors d'une modélisation à topologie variable. De plus, ce modèle d'interrupteur néglige totalement le comportement physique des interrupteurs de puissance puisqu'il ne tient pas compte de la chute de tension aux bornes de l'interrupteur, de l'impédance, du temps de réaction ainsi que du comportement non-linéaire des interrupteurs de puissance.

### Modèle $R_{on}/R_{off}$

En utilisant le modèle idéal et en utilisant une résistance en conduction non nulle et une résistance de blocage extrêmement importante mais finie, cela permet de conserver la topologie du système. Un changement d'état d'interrupteur entraîne un changement du

contenu de la matrice d'admittance, ce qui peut être problématique lorsque la simulation est effectuée en temps réel puisqu'il est alors nécessaire de recalculer  $Y^j$ . Ce modèle est intéressant pour les systèmes qui ne contiennent pas beaucoup d'interrupteurs. Une valeur non nulle et finie pour l'impédance de l'interrupteur permet de modéliser la chute de tension aux bornes de l'interrupteur ainsi que les courants de fuite lorsque ce dernier est bloqué.

### Modèle L/RC

Initialement présenté dans [45], ce modèle a été récemment modifié en [29]. Un interrupteur en conduction est représenté par une inductance et un interrupteur bloqué est représenté par un circuit RC. Les valeurs des composantes de ce modèle sont choisies de telle manière que l'admittance équivalente de l'inductance, selon la modélisation EMTP, soit égale à l'admittance équivalente de la branche RC, toujours selon la modélisation EMTP (voir (2-32)). Ainsi, la matrice d'admittance demeure inchangée lors des commutations. On tient compte de l'état des interrupteurs seulement lors du calcul du vecteur d'injection de courant.

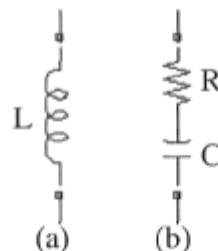


Figure 2.7 Interrupteur L/RC (a) en conduction et (b) bloqué.

$$\frac{2L}{T} = R + \frac{T}{2C} \quad (2-32)$$

Ce modèle est intéressant au point de vue algorithme parce qu'une seule inversion est requise pour effectuer toute la simulation mais il introduit un comportement de 2<sup>e</sup> ordre lors des commutations lorsqu'il est utilisé pour modéliser le bras d'un pont. En tout temps chaque bras du pont contient un interrupteur ouvert et un fermé. On se retrouve avec un

circuit RLC par bras du pont. Si les valeurs ne sont pas bien choisies, il est possible d'observer un sur-amortissement ou même un manque d'amortissement, ce qui entraîne une erreur de représentation du comportement physique de l'interrupteur. De plus, selon la méthode d'intégration numérique, il est possible que les commutations introduisent des oscillations numériques qui proviennent de la représentation des interrupteurs mais aussi de la précision de la représentation utilisée.

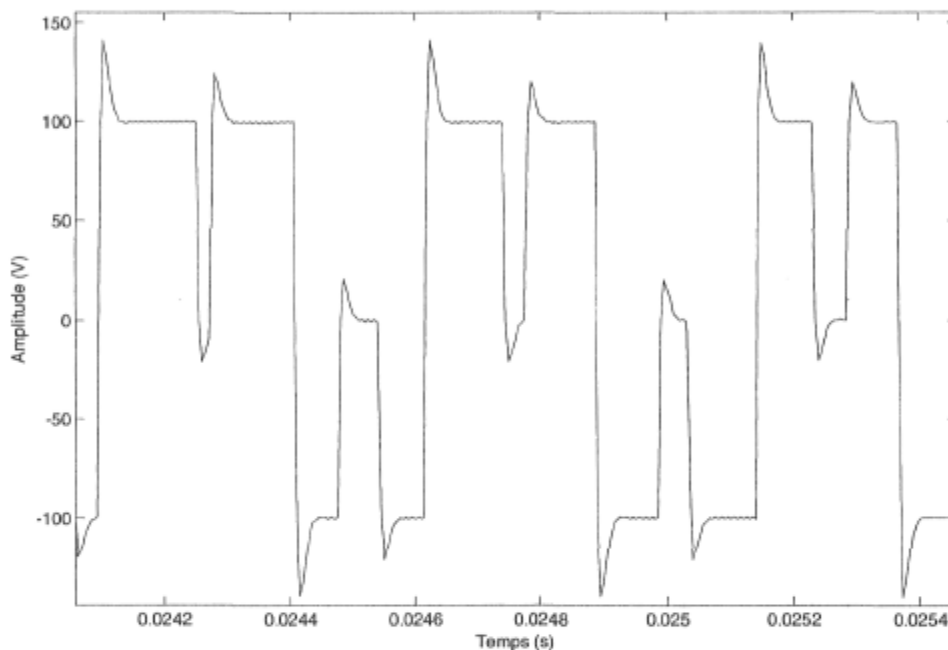


Figure 2.8 Comportement de 2<sup>e</sup> ordre lors des commutations avec le modèle L/RC.

## 2.5 Simulation numérique des systèmes de puissance

Pour qu'une méthode de simulation numérique soit appropriée pour la simulation de systèmes de puissance en temps réel, elle doit être rapide à exécuter et/ou être exécutable en parallèle. Plusieurs méthodes numériques offrent une grande précision mais souvent ces méthodes sont itératives ou très complexes. Dans le cadre d'une application temps réel, les méthodes itératives sont inacceptables puisqu'il est impossible de prévoir de façon déterministe le temps d'exécution d'une telle méthode. En ce qui concerne les méthodes très complexes, il est habituellement impossible de les exécuter assez



rapidement pour maintenir le fonctionnement temps réel ou de les scinder efficacement pour diviser le fardeau de calcul sur plusieurs processeurs. C'est pourquoi les méthodes de simulations utilisées sont relativement simples. La discrétisation de la méthode des variables d'état sera présenté ainsi que la discrétisation de la méthode nodale puis il sera question de l'implémentation en temps réel de la méthode nodale.

### 2.5.1 Méthode des variables d'état numérique

Pour discrétiser le système d'équations d'état, il faut premièrement choisir une méthode d'intégration numérique. La méthode trapézoïdale est généralement utilisée et elle sera utilisée pour le développement suivant. En appliquant la transformation de Laplace sur la première équation de (2-1), on obtient

$$s\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2-33)$$

En utilisant l'approximation suivante, qui correspond à la méthode trapézoïdale,

$$s \cong \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (2-34)$$

on obtient le système d'équations suivant

$$(z-1)\mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}T}{2}(z+1) \cdot \mathbf{x} + \frac{\mathbf{B}T}{2}(z+1) \cdot \mathbf{u} \quad (2-35)$$

qui peut aussi être exprimé dans le domaine temporel comme

$$\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n) = \frac{\mathbf{A}T}{2} [\mathbf{x}(n+1) + \mathbf{x}(n)] + \frac{\mathbf{B}T}{2} [\mathbf{u}(n+1) + \mathbf{u}(n)]. \quad (2-36)$$

Un nouveau vecteur d'état est défini<sup>2</sup> en groupant tous les termes de l'instant  $n+1$  :

---

<sup>2</sup> Ce changement de variable permet un développement plus élégant puisque le résultat final en (2-41) ne contient que des termes en  $n$  pour déterminer le résultat en  $n+1$ . Cependant cette méthode introduit un délai d'un demi pas de calcul dans l'intégration numérique, ce qui n'est pas le cas si on conserve une forme ayant une dépendance aux termes précédents  $n$ .

$$\mathbf{x}(n+1) - \frac{AT}{2} \mathbf{x}(n+1) - \frac{BT}{2} \mathbf{u}(n+1) = \mathbf{x}(n) + \frac{AT}{2} \mathbf{x}(n) + \frac{BT}{2} \mathbf{u}(n) \quad (2-37)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{x}(n+1) - \frac{AT}{2} \mathbf{x}(n+1) - \frac{BT}{2} \mathbf{u}(n+1) \quad (2-38)$$

En isolant  $\mathbf{x}$  de (2-38) à l'instant  $n$  au lieu de  $n+1$  on obtient :

$$\mathbf{x}(n) = \left( \mathbf{I} - \frac{AT}{2} \right)^{-1} \mathbf{w}(n) + \left( \mathbf{I} - \frac{AT}{2} \right)^{-1} \frac{AT}{2} \mathbf{u}(n). \quad (2-39)$$

Puis en substituant ce résultat dans la partie droite de (2-37) et après quelques manipulations on trouve

$$\mathbf{w}(n+1) = \left( \mathbf{I} + \frac{AT}{2} \right) \left( \mathbf{I} - \frac{AT}{2} \right)^{-1} \mathbf{w}(n) + \left( \mathbf{I} - \frac{AT}{2} \right)^{-1} BT \mathbf{u}(n) \quad (2-40)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \Phi \cdot \mathbf{w}(n) + \Gamma \cdot \mathbf{u}(n). \quad (2-41)$$

Pour obtenir les équations pour les sorties du système, on substitue (2-39) dans la deuxième équation de (2-1) :

$$\mathbf{y}(n) = C \left( \mathbf{I} - \frac{AT}{2} \right)^{-1} \mathbf{w}(n) + \left[ D + C \left( \mathbf{I} - \frac{AT}{2} \right)^{-1} \frac{BT}{2} \right] \mathbf{u}(n). \quad (2-42)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}(n) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}(n). \quad (2-43)$$

[17] discute du *Power System Blockset*, l'ancêtre de *SimPowerSystems*, et explique plusieurs concepts de modélisation pour la méthode des variables d'états numériques. La modélisation et la simulation en temps réel d'un entraînement de machine avec la méthode des variables d'états sont effectuées en [18].

### 2.5.2 Méthode nodale numérique

La discrétisation de la méthode nodale est beaucoup plus simple que celle de la méthode des variables d'état. En utilisant les modèles présentés préalablement, le système d'équation a alors la forme

$$v(n) = Y^{-1}(n) \cdot i(n). \quad (2-44)$$

Le vecteur d'injection de courant tient compte des sources de courant représentant l'historique et c'est dans le calcul de ces sources de courant que la méthode d'intégration se manifeste. Pour calculer les tensions nodales à l'instant  $n$ , il suffit de déterminer l'injection de courant, qui dépend des conditions à l'instant  $n-1$  via les sources de courant historique, et la matrice d'admittance inverse pour cet instant et d'effectuer la multiplication.

L'application de cette méthode pour un simulateur numérique est illustrée à la figure 2.9. Lors de l'initialisation de la simulation, le simulateur effectue la segmentation du réseau, la répartition des tâches (si c'est un simulateur multiprocesseur), le calcul des matrices d'admittance et de leur inverse ainsi que toutes autres actions nécessaires à la simulation (initialisation des communications, des coprocesseurs, etc.). Une fois le temps de simulation incrémenté d'un pas, le vecteur d'injection de courant est mis à jour et les systèmes d'équations sont ensuite résolus afin de déterminer les tensions nodales pour cet instant. Par la suite, les sources commandées sont mises à jour en utilisant les conditions présentes et passées. Ensuite, il y a vérification des conditions d'opération présentes afin de déterminer si un changement de topologie est nécessaire. Cette étape vise particulièrement les éléments non-linéaires et les interrupteurs. Si un changement de topologie est nécessaire il y a modification des systèmes d'équations pour en tenir compte. Finalement, l'algorithme boucle sur lui-même jusqu'à ce que la simulation se termine ou, pour certains simulateurs, qu'il y ait une erreur fatale (perte du temps réel, erreur de représentation, problèmes de communication, etc.).

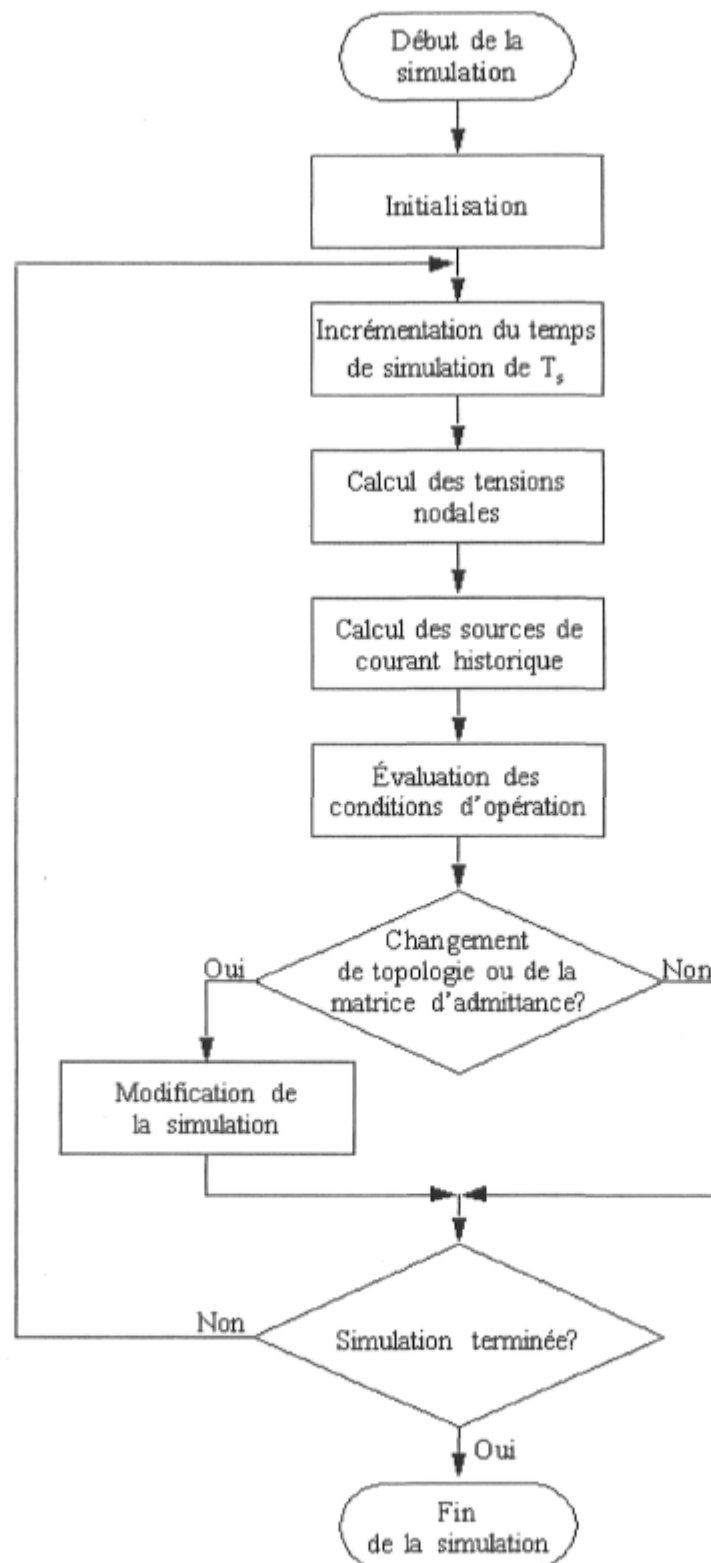


Figure 2.9 Organigramme d'un simulateur de base utilisant l'approche nodale [12].

## Oscillations numériques

La modélisation utilisée pour les éléments réactifs peut engendrer des instabilités lorsque la méthode trapézoïdale est employée. En observant l'équation modélisant une inductance

$$v_L(n) = \frac{i_L(n) - i_L(n-1)}{2L/T} - v_L(n-1) \quad (2-45)$$

on constate que si le courant devient nul pour quelques pas de calcul, la tension aux bornes de l'inductance passera d'une valeur positive à une valeur négative dès que le courant à l'instant  $n$  et  $n-1$  seront nuls :

$$v_L(n) = -v_L(n-1)$$

Ainsi, la tension oscillera avec une amplitude correspondant à la valeur précédant l'interruption du courant. Ce phénomène d'oscillation numérique se manifeste aussi au niveau du courant dans les condensateurs.

$$i_C(n) = \frac{v_C(n) - v_C(n-1)}{T/2C} - i_C(n-1) \quad (2-46)$$

Les oscillations numériques résultent souvent de discontinuités dans les signaux. L'utilisation de la méthode d'intégration numérique Euler arrière permet d'éviter le phénomène d'oscillation numérique. Cependant la précision de cette méthode est moindre que celle de la méthode trapézoïdale pour un même pas de calcul. C'est pour cela que plusieurs méthodes ont été explorées pour amortir ou pour supprimer ces oscillations [6]. La méthode la plus simple consiste à modéliser les éléments en parallèle avec une résistance pour ajuster l'amortissement des oscillations. Évidemment, plus l'amortissement est fort, plus le comportement du circuit est modifié de sa réponse physique. Une autre méthode consiste à implanter un changement de technique d'intégration lorsque l'on détecte une situation provoquant des oscillations. Par exemple, lorsqu'une discontinuité est détectée, le simulateur effectue deux pas de calcul de  $T/2$  avec la méthode d'Euler arrière pour tout le réseau simulé. Cela a pour effet de supprimer

les oscillations, mais augmente considérablement le nombre de calcul à effectuer. Cette technique se nomme *Critical Damping Adjustment* (CDA) [15].

### 2.5.3 Implémentation de la méthode nodale en temps réel

La méthode nodale est intéressante pour des simulations en temps réel à cause de sa simplicité et du fait que son traitement peut aisément être parallélisé. On remarque cependant la nécessité d'inverser la matrice  $Y$  afin de résoudre le système d'équations. Pour la simulation d'un réseau à topologie fixe sans élément non-linéaire, cela ne pose aucun problème mais pour une topologie variable ou pour un réseau contenant des éléments non-linéaires, l'inversion de la matrice d'admittance peut causer certains problèmes pour maintenir le temps réel. Si un changement de matrice d'admittance est nécessaire en cours de simulation, il faut calculer son inverse. L'inversion de matrice est une opération relativement complexe et coûteuse qui a une complexité algorithmique de  $O(n^3)$ , où  $n$  est le nombre de nœuds. On comprend donc que calculer l'inverse de la nouvelle matrice d'admittance est une tâche longue et que cela peut entraver le fonctionnement en temps réel du simulateur. En effet, si un changement de topologie est possible lors de la simulation, il faut être en mesure d'effectuer l'inversion de matrice à l'intérieur d'un pas de calcul afin de conserver le fonctionnement en temps réel. Ainsi la longueur du pas de calcul doit tenir compte du temps requis pour l'inversion de matrice, ce qui impose une limite inférieure à la longueur du pas de calcul. Plus le pas de calcul est petit plus la simulation sera précise c'est donc pour cela que plusieurs stratégies sont employées pour palier à ce problème.

Le découplage du réseau, que ce soit en utilisant les lignes de transmission [1-2] ou les éléments réactifs [11], a pour but de scinder le réseau étudié en plusieurs parties afin de réduire le nombre de nœuds traité dans chaque sous-réseau. L'inversion de cette matrice d'admittance réduite est donc plus rapide. De plus, si l'engin de calcul utilisé est multiprocesseur, les tâches de simulation peuvent être réparties sur plusieurs processeurs afin de réduire le temps de calcul. Une méthode de partitionnement est présentée en [2].

Afin de réduire le temps de calcul, l'utilisation de modélisations particulières [7, 29, 45] permet de traiter certains éléments non-linéaires sans qu'ils ne causent de changement de topologie ou de changement dans la matrice d'admittance, ainsi il n'est pas nécessaire de calculer son inverse en cours de simulation. De plus, les propriétés des matrices creuses et/ou diagonales [8] ainsi que des techniques d'inversion de matrice telles la factorisation de Cholesky [10] et la technique Sherman-Morrison-Woodbury [9, 16] peuvent être employées pour accélérer l'inversion de matrice. La technique Sherman-Morrison-Woodbury s'écrit

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I_m + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (2-47)$$

où  $A$  est la matrice d'admittance et  $BC$  représente le changement de la matrice d'admittance. Cette dernière méthode, aussi connue comme le lemme d'inversion de matrice, est intéressante puisqu'elle permet de calculer l'inverse d'une matrice  $(A + BC)$  à partir de  $A^{-1}$  et ce calcul a une complexité algorithmique de  $O(n^2)$  comparativement à  $O(n^3)$  pour l'inversion ordinaire. Cependant en [16] on note certains désavantages liés à cette technique : 1) les manipulations successives de la matrice d'admittance causent une accumulation de l'erreur due à la précision limitée du processeur et 2) le gain, en terme de temps de calcul, diminue rapidement en fonction du nombre de changements simultanés à effectuer. Pour limiter l'accumulation de l'erreur, les auteurs proposent de sauvegarder la matrice  $A$  pour quelques topologies. Lorsque le réseau revient à une de ces topologies, la version sauvegardée est utilisée. En ce qui concerne le deuxième point, ils suggèrent de limiter à un changement par pas de calcul. Toutefois il n'est pas toujours possible de limiter le nombre de changements.

Une dernière solution au problème de l'inversion de matrice consiste à calculer et à placer en mémoire les matrices inverses correspondant à toutes les topologies possibles du réseau à simuler. Lors d'un changement, il suffit de charger la matrice qui correspond à la configuration présente du réseau. Cette méthode est efficace en terme de temps de calcul lors de la simulation mais la quantité de mémoire requise augmente rapidement en fonction du nombre de topologies possibles. Si le réseau à simuler compte  $k$  interrupteurs,

le nombre de topologies différentes est de  $2^k$ , et ce sans compter les autres éléments non-linéaires. Il faut cependant noter que ces  $2^k$  topologies ne sont pas nécessairement toutes utilisées lors du fonctionnement normal de ce réseau.