

Chapitre 5

Cas particulier d'un fluide à seuil

Sommaire

5.1	Croissance d'une bulle isolée dans un fluide à seuil	132
5.1.1	Croissance hydrodynamique	133
5.1.2	Problème adimensionné	142
5.1.3	Croissance réelle d'une bulle dans un fluide à seuil	142
5.2	Évolution d'une population sans migration	144
5.2.1	Effet qualitatif du seuil sur une population	144
5.2.2	Quantification de l'impact du seuil sur une population	146
5.3	Évolution avec migration sans germination	149
5.3.1	Condition de migration	149
5.3.2	Comportement d'une population	151
5.3.3	Suivi du débit de gaz sortant et du gonflement	155
5.4	Conclusion du chapitre	157

Nous allons présenter ici l'évolution d'une population de bulles dans le cas d'un fluide présentant un seuil d'écoulement. Dans un premier temps, nous exposerons le modèle de fluide à seuil choisi ainsi que les hypothèses nécessaires pour la résolution de la croissance d'une bulle isolée. L'influence d'un seuil d'écoulement sur l'évolution d'une population de bulles sans germination sera ensuite étudiée, d'abord dans le cas d'une population immobile (pas de migration prise en compte), puis en intégrant la migration par poussée d'Archimède.

5.1 Croissance d'une bulle isolée dans un fluide à seuil

Les travaux de Mouazen [5] ont montré l'existence d'un seuil d'écoulement pour le bitume, ce qui justifie que son impact sur le comportement d'une population de bulles ait été étudié. Dans un premier temps, nous avons assimilé le bitume à un fluide à seuil décrit par une loi de Bingham [58]. Lorsque l'on applique à un fluide de Bingham une contrainte inférieure à la contrainte seuil, le matériau se comporte comme un solide indéformable, tandis qu'au-delà de cette contrainte, il s'écoule avec une viscosité indépendante du taux de cisaillement. Nous verrons par la suite qu'une modification de ce modèle est nécessaire pour décrire la croissance d'une bulle.

Nous avons établi au chapitre 2¹ qu'une bulle sous pression engendre un champ de contraintes dans le fluide autour d'elle. La valeur de ces contraintes décroît lorsque l'on s'éloigne de la bulle ($\sigma_{rr} \propto \frac{1}{r^3}$). Le modèle de Bingham strict prévoit qu'aucune déformation n'est possible si la contrainte seuil n'est pas dépassée. En coordonnées sphériques et avec une hypothèse d'incompressibilité, pour qu'une bulle puisse croître, il faudrait vaincre le seuil à une distance infinie de la bulle. Or, ce n'est pas ce qui se passe dans la réalité, car, comme nous l'avons constaté au chapitre 1 à l'aide des images obtenues par microtomographie aux rayons X, les bulles dans le bitume croissent bel et bien. Nous sommes donc amenés à considérer un modèle de Bingham modifié pour décrire la croissance des bulles dans un fluide à seuil (figure 5.1).

Nous considérerons dans ce travail un fluide à seuil admettant une certaine élasticité. Nous avons fait le choix de ne pas considérer de compressibilité, mais d'admettre une élasticité incompressible. Le fluide sera visqueux et de viscosité constante au-delà du seuil, tandis qu'il pourra admettre une déformation élastique en deçà. Cette hypothèse va nous mener à considérer deux zones pour le fluide autour d'une bulle en croissance. De la surface de la bulle ($r = R$) jusqu'à une distance critique $r = r_l$, le fluide pourra s'écouler ; au-delà de r_l , le fluide se comportera comme un solide élastique caractérisé par un module d'Young E et un coefficient de Poisson de 0,5.

1. en utilisant l'expression de la vitesse de déformation en fonction de r donnée par l'équation (2.4) et la loi de comportement d'un fluide newtonien $\tau_{rr} = 2\eta\dot{\epsilon}_{rr}$

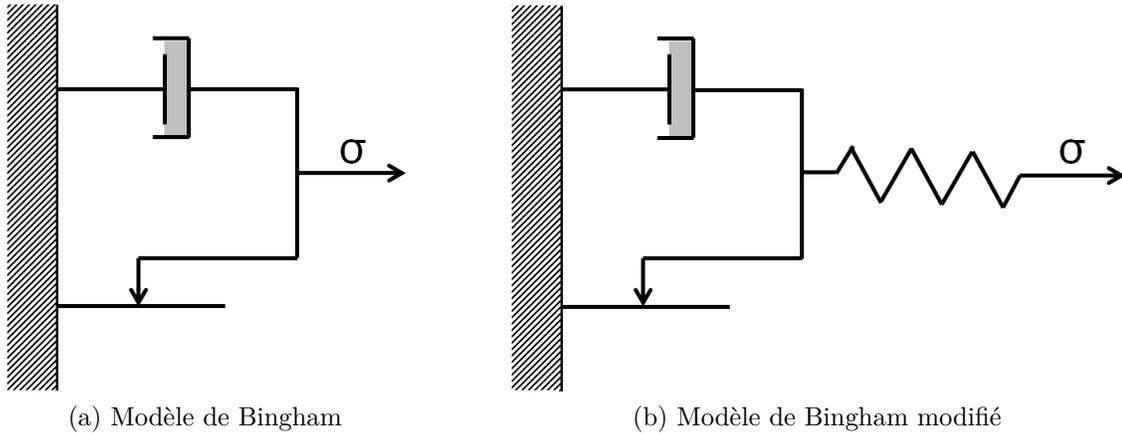


FIGURE 5.1 – Schémas de modèles de fluide à seuil

5.1.1 Croissance hydrodynamique

Pour décrire le comportement d'un tel fluide, nous allons avoir besoin de connaître la déformation dans le fluide engendrée par la croissance d'une bulle. Pour cela, calculons d'abord le gradient de la transformation qui, au point matériel initialement à r_0 , associe le point situé à r lorsque la bulle fait un rayon R (figure 5.2).

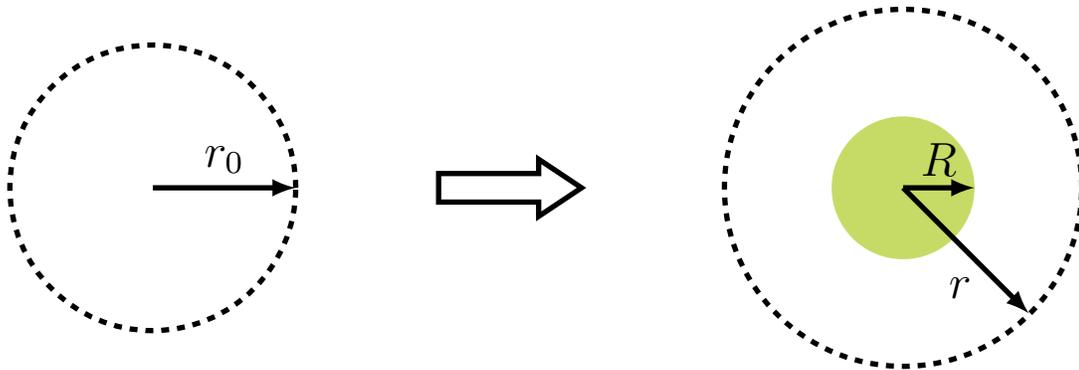


FIGURE 5.2 – Schéma illustrant la transformation associée à la croissance d'une bulle

Dans l'hypothèse d'un fluide incompressible, cette transformation peut être décrite par :

$$r^3 = r_0^3 + R^3 \Rightarrow r = (r_0^3 + R^3)^{1/3} \quad (5.1)$$

Le gradient de cette transformation s'écrit :

$$\frac{dr}{dr_0} = \frac{r_0^2}{(r_0^3 + R^3)^{2/3}} \quad (5.2)$$

$$= \left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right)^{2/3} \quad (5.3)$$

Lorsque l'on est assez loin de la bulle dans le fluide ($r \gg R$), on fait l'hypothèse de travailler en petites déformations et on peut linéariser l'expression (5.3) :

$$\frac{dr}{dr_0} = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \quad (5.4)$$

La déformation associée dans la direction r est ensuite déterminée :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dr}{dr_0} - 1 = -\frac{2}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \quad (5.5)$$

L'hypothèse d'incompressibilité nous indique que $tr(\varepsilon) = 0$ et, par invariance, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi}$, d'où :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \quad (5.6)$$

Écrivons maintenant l'équilibre mécanique dans le fluide :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \right) - \mathbf{f}_e \quad (5.7)$$

\mathbf{v} étant le champ de vitesse, ρ la masse volumique du fluide, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur de contraintes et \mathbf{f}_e les efforts extérieurs s'appliquant sur le fluide. Dans notre cas, les efforts extérieurs se compensent et s'annulent et l'on néglige le terme d'inertie, ce qui revient à :

$$-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{2\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi}}{r} \right) = 0 \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{3\tau_{rr}}{r} \right) = 0 \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{rr}) = 0 \quad (5.11)$$

Comme montré dans la section 2.2.1 du chapitre 2, l'hypothèse d'incompressibilité se traduit par $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, ce qui implique :

$$\dot{\epsilon}_{rr} = -2 \frac{R^2}{r^3} \dot{R} \quad (5.12)$$

Notons que dans le cas d'un fluide newtonien ($\tau_{rr} = -4\eta R^2 \dot{R}/r^3$), on a bien $\partial p/\partial r = 0$, d'où une pression constante dans le fluide (en rappelant que l'on a négligé le terme d'inertie) :

$$p(r) = p_\infty \quad (5.13)$$

Nous allons maintenant voir que, dans le cas d'un fluide à seuil, la loi de comportement du fluide ne conduit plus à cette conclusion. La croissance d'une bulle correspond à de la compression pour le fluide et nous allons donc commencer par définir son comportement en compression. Par définition, lorsque l'on comprime un objet dans la direction r , on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{Id} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\tau_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\tau_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{rr} \end{bmatrix} \Rightarrow p = -\frac{1}{2}\tau_{rr} \quad \text{et} \quad \sigma_{rr} = \frac{3}{2}\tau_{rr} \quad (5.14)$$

Pour la modélisation du fluide à seuil présentée dans ce travail (fluide newtonien au-delà de la contrainte seuil et solide élastique en deçà), nous allons avoir besoin de définir une viscosité en compression η_c et un module élastique en compression E_c .

En supposant un fluide newtonien, nous avons :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

ce qui nous permet de définir la viscosité en compression η_c :

$$\eta_c = \frac{\sigma_{rr}}{\dot{\alpha}} = \frac{3\tau_{rr}}{2\dot{\alpha}} \quad (5.16)$$

Le tenseur des contraintes pour un fluide newtonien incompressible en compression peut alors être exprimé par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{Id} + \frac{2}{3}\eta_c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.17)$$

De manière similaire, en supposant un solide élastique, nous introduisons le module élastique en compression E_c et le tenseur des contraintes pour un solide élastique en compression s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{Id} + \frac{2}{3}E_c\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.18)$$

Lorsque l'on charge le fluide, il commence de s'écouler pour $\|\boldsymbol{\sigma}\| \geq \sigma_y$, σ_y désignant la contrainte seuil. Or, la définition de la norme matricielle nous donne :

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{\Sigma\sigma_{ij}^2} = \sqrt{\sigma_{rr}^2} = \frac{3}{2}|\tau_{rr}| \quad (5.19)$$

et

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\Sigma\tau_{ij}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\tau_{rr}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}|\tau_{rr}| \quad (5.20)$$

Pour reprendre le formalisme de Bingham, où la condition de croissance repose sur la norme de la partie déviatorique des contraintes $\|\boldsymbol{\tau}\|$, nous redéfinissons la norme comme

suit :

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\frac{3}{2}\Sigma\tau_{ij}^2} \quad (5.21)$$

Nous pouvons ainsi écrire l'équation de Bingham :

$$\max\left(0, \frac{\|\boldsymbol{\tau}\| - \sigma_y}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\right) \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{3}\eta_c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.22)$$

Bulle en croissance

Au-dessus du seuil (pour $r < r_l$) et pour une bulle qui croît ($\dot{R} > 0$), dans la direction r en coordonnées sphériques, l'équation de Bingham devient :

$$\tau_{rr} - \tau_{rr} \frac{\sigma_y}{\|\boldsymbol{\tau}\|} = \frac{2}{3}\eta_c \dot{\varepsilon}_{rr} \quad (5.23)$$

$$\Rightarrow \tau_{rr} = \frac{2}{3}\eta_c \dot{\varepsilon}_{rr} + \sigma_y \frac{\tau_{rr}}{\sqrt{\frac{3}{2}\Sigma\tau_{ij}^2}} \quad (5.24)$$

$$\Rightarrow \tau_{rr} = \frac{2}{3}\eta_c \dot{\varepsilon}_{rr} + \sigma_y \frac{2\tau_{rr}}{3|\tau_{rr}|} \quad (5.25)$$

$$\Rightarrow \tau_{rr} = \frac{2}{3}\eta_c \dot{\varepsilon}_{rr} - \frac{2}{3}\sigma_y \text{ car } \tau_{rr} < 0 \quad (5.26)$$

$$\Rightarrow \tau_{rr} = -\frac{4}{3}\eta_c \frac{R^2}{r^3} \dot{R} - \frac{2}{3}\sigma_y \quad (5.27)$$

En deçà du seuil (pour $r > r_l$), le fluide subit une déformation élastique. En utilisant l'équation (5.18), on obtient :

$$\tau_{rr} = \frac{2}{3}E_c \varepsilon_{rr} \quad (5.28)$$

La limite élastique est atteinte pour $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sigma_y$. Or, $\|\boldsymbol{\sigma}\| = 3|\tau_{rr}|/2$. La déformation élastique maximale ε_l est donc définie par :

$$\sigma_y = E_c \varepsilon_l \quad (5.29)$$

en admettant un module d'Young en compression E_c très grand et une déformation élastique maximale ε_l très petite pour avoir un comportement proche d'un fluide de Bingham strict.

En utilisant l'équation (5.5), le rayon r_l pour lequel la limite d'élasticité est atteinte est donné par :

$$\varepsilon_l = \frac{2}{3} \left(\frac{R}{r_l} \right)^3 \implies r_l = R \left(\frac{3}{2} \varepsilon_l \right)^{-1/3} \quad (5.30)$$

Ce modèle a l'inconvénient de présenter une discontinuité de contrainte à la limite élastique² (saut égal à $-(4\eta_c \dot{R} R^2)/3r_l^3$). Cette discontinuité est très faible si l'on suppose r_l assez grand, donc si l'on suppose ε_l petit avec E_c grand. Elle est représentée sur la figure 5.3 pour un fluide présentant un module d'élasticité en compression $E_c = 400$ Pa dans son domaine élastique. Nous avons pris cette valeur de module pour pouvoir représenter un majorant de la discontinuité. Dans la suite de ce travail, nous considérerons un module élastique $E_c = 10^9$ Pa, ce qui implique une discontinuité beaucoup plus faible.

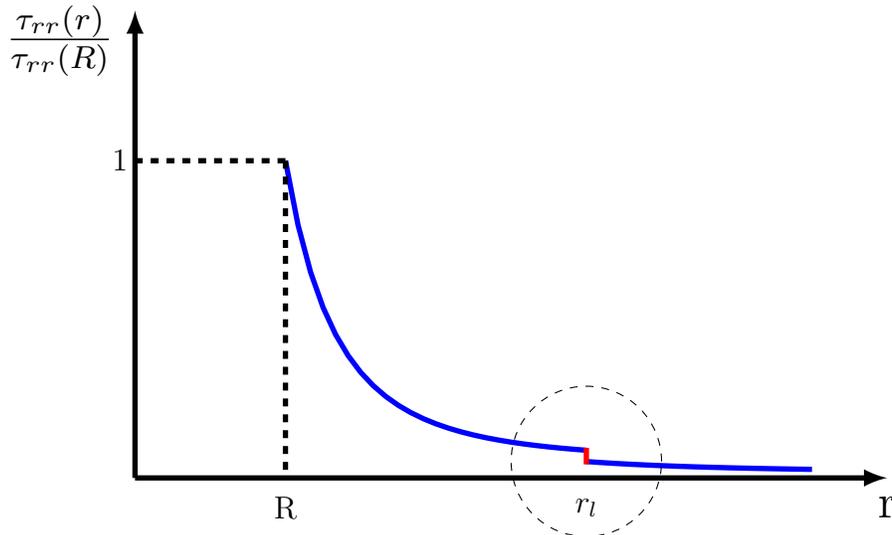


FIGURE 5.3 – Représentation de la discontinuité de contrainte pour un fluide hypothétique dont le module élastique en compression E_c vaudrait 400 Pa

2. car aucune viscosité n'est associée à la déformation élastique au-delà de r_l , elle n'engendre donc pas de contrainte visqueuse.

Saramito [59] a néanmoins corrigé ce problème en introduisant une viscosité associée à la vitesse de déformation dans le domaine élastique, l'objectivité étant ainsi respectée. Le fluide n'est alors plus vu comme un solide élastique en-deçà du seuil, mais comme un solide viscoélastique selon un modèle de Kelvin-Voigt. Et, au-delà du seuil, le fluide est considéré comme un fluide viscoélastique selon un modèle de Oldroyd [60]. La démonstration et l'application de ce modèle en coordonnées sphériques sortent des objectifs de ce travail.

Pour $r > r_l$, lorsque le fluide est dans le domaine élastique, nous avons :

$$\tau_{rr} = \frac{2}{3}E_c\varepsilon_{rr} = -\frac{4}{9}E_c\left(\frac{R}{r}\right)^3 \quad (5.31)$$

Pour $r \leq r_l$, lorsque le fluide est dans le domaine visqueux, nous avons l'équation (5.27).

Nous allons maintenant nous intéresser au champ de pression dans le fluide autour de la bulle en croissance. Considérons d'abord la zone où le fluide est considéré comme un solide élastique ($r > r_l$) et intégrons l'équation (5.11) de r_l à r_∞ , en notant que $r^3\tau_{rr} = -(4/9)E_cR^3$:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(-(4/9)E_cR^3 \right) \quad (5.32)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (5.33)$$

$$\Rightarrow p(r \geq r_l) = p_\infty \quad (5.34)$$

La pression est donc constante dans le fluide au-delà du rayon limite r_l .

Considérons désormais la zone où le fluide est soumis à une contrainte supérieure à son seuil d'écoulement et où il peut s'écouler avec une viscosité constante. Nous intégrons l'équation (5.11) de R à r_l en substituant τ_{rr} à partir de l'équation (5.27) :

$$\int_R^{r_l} \frac{\partial p}{\partial r} dr = \int_R^{r_l} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3\tau_{rr} \right) dr \quad (5.35)$$

$$= - \int_R^{r_l} \frac{2\sigma_y}{r} dr \quad (5.36)$$

$$\Rightarrow [p]_R^{r_l} = - [2\sigma_y \text{Ln}(r)]_R^{r_l} \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow p(r_l) - p(R) = -2\sigma_y \text{Ln} \left(\frac{r_l}{R} \right) \quad (5.38)$$

Ensuite, l'équation (5.30) nous donne :

$$\frac{r_l}{R} = \left(\frac{3}{2}\varepsilon_l\right)^{-1/3} \quad (5.39)$$

et, en la combinant avec l'équation (5.38), la pression à la surface de la bulle peut s'écrire :

$$p(R) = p_\infty + 2\sigma_y \text{Ln} \left(\frac{3}{2}\varepsilon_l\right)^{-1/3} \quad (5.40)$$

$$= p_\infty - \frac{2}{3}\sigma_y \text{Ln} \left(\frac{3}{2}\varepsilon_l\right) \quad (5.41)$$

Écrivons maintenant le bilan des contraintes normales à l'interface de la bulle, qui va nous conduire à l'équation de croissance d'une bulle :

$$\sigma_{rr}(R_-) - \sigma_{rr}(R_+) + \frac{2\gamma}{R} = 0 \quad (5.42)$$

$$\Rightarrow -p_i - (-p(R) + \tau_{rr}(R)) = -\frac{2\gamma}{R} \quad (5.43)$$

$$\Rightarrow p_i - p_\infty = -\frac{2}{3}\sigma_y \text{Ln} \left(\frac{3}{2}\varepsilon_l\right) + \frac{4}{3}\eta_c \frac{R^2}{R^3} \dot{R} + \frac{2}{3}\sigma_y + \frac{2\gamma}{R} \quad (5.44)$$

$$\Rightarrow 4\eta \frac{\dot{R}}{R} = (p_i - p_\infty) - \frac{2\gamma}{R} + \frac{2}{3}\sigma_y \left(\text{Ln} \left(\frac{3}{2}\varepsilon_l\right) - 1\right) \quad (5.45)$$

p_i étant la pression à l'intérieur de la bulle, $p(R)$ la pression dans le fluide à la surface de la bulle, γ la tension de surface gaz/fluide et η_c la viscosité en compression et η la viscosité en cisaillement. Notons que, pour une contrainte seuil nulle ($\sigma_y = 0$), on retrouve bien l'équation de croissance d'une bulle dans un fluide newtonien (2.14) établie au chapitre 2.

Bulle en décroissance

Nous avons vu que la présence d'un seuil d'écoulement modifiait les équations de croissance d'une bulle, mais nous n'avons jusqu'à présent parlé que du cas de la croissance ($\|\boldsymbol{\sigma}\| > \sigma_y$ et $\dot{R} > 0$). Étudions maintenant le cas de la décroissance ($\|\boldsymbol{\sigma}\| > \sigma_y$ et $\dot{R} < 0$).

La différence majeure est que, dans ce cas, le fluide ne subit pas de la compression mais de la traction et $\dot{R} < 0$, ce qui implique $\tau_{rr} > 0$, d'où :

$$\tau_{rr} = -\frac{4}{3}\eta_c \frac{R^2}{r^3} \dot{R} + \frac{2}{3}\sigma_y \quad (5.46)$$

$$\Rightarrow p(R) = p_\infty + \frac{2}{3}\sigma_y \text{Ln} \left(\frac{3}{2}\varepsilon_l \right) \quad (5.47)$$

L'équation de décroissance de la bulle est alors donnée par :

$$4\eta \frac{\dot{R}}{R} = (p_i - p_\infty) - \frac{2\gamma}{R} - \frac{2}{3}\sigma_y \left(\text{Ln} \left(\frac{3}{2}\varepsilon_l \right) - 1 \right) \quad (5.48)$$

Bulle figée

La particularité du fluide à seuil réside dans la possibilité pour une bulle d'être figée. En effet, lorsque $\|\boldsymbol{\sigma}\| < \sigma_y$ à la surface de la bulle (et *a fortiori* pour tout r , vu que la contrainte dans le fluide décroît lorsque l'on s'éloigne de la bulle), celle-ci ne peut ni croître, ni décroître, on a $\dot{R} = 0$. Pour simplifier l'écriture, nous introduisons le nombre sans dimension $K_y(\varepsilon_l)$:

$$K_y(\varepsilon_l) = -\frac{2}{3} \left(\text{Ln} \left(\frac{3}{2}\varepsilon_l \right) - 1 \right) \quad (5.49)$$

Le comportement d'une bulle en régime hydrodynamique dans un fluide à seuil est ainsi régi par un système de 3 équations :

$$4\eta \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = p_i(t) - p_\infty - \frac{2\gamma}{R(t)} - K_y(\varepsilon_l)\sigma_y \quad \text{si} \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| > \sigma_y \quad \text{et} \quad \dot{R} > 0 \quad (5.45)$$

$$4\eta \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = p_i(t) - p_\infty - \frac{2\gamma}{R(t)} + K_y(\varepsilon_l)\sigma_y \quad \text{si} \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| > \sigma_y \quad \text{et} \quad \dot{R} < 0 \quad (5.48)$$

$$\dot{R}(t) = 0 \quad \text{si} \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| < \sigma_y \quad (5.50)$$

5.1.2 Problème adimensionné

En reprenant le formalisme du chapitre 2 pour l'adimensionnement des équations et en introduisant le nombre adimensionnel $\beta = \sigma_y K_y(\varepsilon_l)/p_\infty$, le système d'équations adimensionnées régissant la croissance hydrodynamique d'une bulle dans un fluide à seuil s'écrit :

$$\theta_h \dot{\tilde{R}} = \tilde{R}(s_R - 1) - 1 - \tilde{R}\beta \quad \text{si} \quad s_R > \frac{1}{\tilde{R}} + \beta + 1 \quad (5.51)$$

$$\theta_h \dot{\tilde{R}} = \tilde{R}(s_R - 1) - 1 - \tilde{R}\beta \quad \text{si} \quad s_R < \frac{1}{\tilde{R}} - \beta + 1 \quad (5.52)$$

$$\dot{\tilde{R}} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{\tilde{R}} - \beta + 1 < s_R < \frac{1}{\tilde{R}} + \beta + 1 \quad (5.53)$$

5.1.3 Croissance réelle d'une bulle dans un fluide à seuil

La croissance réelle d'une bulle repose sur la combinaison des croissances hydrodynamique et diffusive. Cette dernière demeure inchangée entre le cas d'un fluide à seuil et d'un fluide newtonien. Les équations qui la régissent ont été présentées dans la section 2.2.2 du chapitre 2 et nous ne les redétaillerons pas ici. Rappelons simplement que les caractéristiques du bitume nous ont menés à considérer la croissance des bulles comme étant purement diffusive. L'équation adimensionnée de croissance d'une bulle en régime diffusif établie au chapitre 2 est :

$$\dot{\tilde{R}} = \frac{S_o}{\tilde{R}\theta_d} \left(\frac{1 + \varepsilon}{s_R} - 1 \right) \quad (5.54)$$

Dans le cas d'un fluide newtonien et sous l'hypothèse d'une croissance très lente, nous avons $s_R = 1 + 1/\tilde{R}$, ce qui n'est plus le cas pour un fluide à seuil. En effet, pour ce dernier, l'équation de croissance hydrodynamique (5.52) quasi-statique ($\dot{\tilde{R}} \simeq 0$ avec $\tilde{R} > 0$) nous donne :

$$\theta_h \dot{\tilde{R}} \simeq 0 \quad (5.55)$$

$$\Rightarrow \tilde{R}(s_R - 1) - 1 - \tilde{R}\beta \simeq 0 \quad (5.56)$$

$$\Rightarrow \tilde{R}(s_R - 1) - \tilde{R}\beta \simeq 1 \quad (5.57)$$

$$\Rightarrow s_R \simeq 1 + \beta + \frac{1}{\tilde{R}} \quad (5.58)$$

En substituant s_R dans l'équation (5.54), nous obtenons :

$$\dot{\tilde{R}} = \frac{S_o}{\tilde{R}\theta_d} \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 + 1/\tilde{R} + \beta} - 1 \right) \quad (5.59)$$

La condition de croissance d'une bulle ($\dot{\tilde{R}} > 0$) s'exprime alors ainsi :

$$\frac{1 + \varepsilon}{1 + 1/\tilde{R} + \beta} - 1 > 0 \quad (5.60)$$

$$\Rightarrow 1 + \varepsilon > 1 + \frac{1}{\tilde{R}} + \beta \quad (5.61)$$

$$\Rightarrow \tilde{R} > \frac{1}{\sup(0, \varepsilon - \beta)} \quad (5.62)$$

En menant un raisonnement analogue pour la décroissance d'une bulle, on arrive à ce système pour la vitesse de croissance réelle des bulles dans un fluide à seuil :

$$\dot{\tilde{R}} = \frac{S_o}{\tilde{R}\theta_d} \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 + 1/\tilde{R} + \beta} - 1 \right) \quad \text{si} \quad \tilde{R} > \frac{1}{\sup(0, \varepsilon - \beta)} \quad (5.63)$$

$$\dot{\tilde{R}} = \frac{S_o}{\tilde{R}\theta_d} \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 + 1/\tilde{R} - \beta} - 1 \right) \quad \text{si} \quad \tilde{R} < \frac{1}{\varepsilon + \beta} \quad (5.64)$$

$$\dot{\tilde{R}} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{\varepsilon + \beta} \leq \tilde{R} \leq \frac{1}{\sup(0, \varepsilon - \beta)} \quad (5.65)$$

Pour connaître l'évolution d'une population de bulles, il faut alors résoudre le problème composé de l'équation de continuité (5.66), des équations de croissance des bulles (5.63) à (5.65), de l'équation d'évolution de la concentration en gaz dans la matrice (5.67), correspondant à un bilan de masse, et des équations (5.68) à (5.70) donnant la pression dans la bulle en fonction de sa taille :

$$\frac{\partial f(\tilde{R}, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_z f(\tilde{R}, z, t)) + \frac{\partial}{\partial \tilde{R}} (\dot{\tilde{R}}(t) f(\tilde{R}, z, t)) = \psi_s, \quad (5.66)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{S} - \frac{4\pi}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^\infty \tilde{R}^3 f(\tilde{R}) s_i(\tilde{R}) d\tilde{R} \right) \Big|_{\text{restreint à la croissance}} + g_d \quad (5.67)$$

où ψ_s désigne le terme de germination, \dot{S} désigne le terme source et g_d correspond à la variation de concentration de gaz due à la diffusion.

$$s_i = \frac{1 + \frac{1}{\tilde{R}} + \beta}{S_o} \quad \text{si} \quad \tilde{R} > \frac{1}{\sup(0, \varepsilon - \beta)} \quad (5.68)$$

$$s_i = \frac{1 + \frac{1}{\tilde{R}} - \beta}{S_o} \quad \text{si} \quad \tilde{R} < \frac{1}{\varepsilon + \beta} \quad (5.69)$$

$$s_i = \frac{1 + \varepsilon}{S_o} \quad \text{si} \quad \frac{1}{\varepsilon + \beta} \leq \tilde{R} \leq \frac{1}{\sup(0, \varepsilon - \beta)} \quad (5.70)$$

5.2 Évolution d'une population de bulles sans migration

Dans l'ensemble de cette section, nous étudierons le cas de l'évolution d'une population de bulles initialement présente dans le pot (aucune germination ne sera considérée). Les simulations présentées dans cette section ont été réalisées pour une population initiale en forme de gaussienne, avec un rayon moyen de 60 μm , avec les paramètres suivants : fraction volumique initiale égale à 0,01, débit de dose de 10 Gy h^{-1} , $\varepsilon_0 = 0,01$, $D = 5 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-1}$, $\gamma = 0,03 \text{ N m}^{-1}$, $p_\infty = 10^5 \text{ Pa}$.

5.2.1 Effet qualitatif du seuil sur une population

L'évolution d'une population de bulles dans un fluide newtonien a été étudiée dans le chapitre 4. Nous avons vu que, dans le cas où nous ne prenons pas la migration en compte et quels que soient les paramètres du fluide, la distribution de bulles converge vers une forme asymptotique sous l'influence du mûrissement d'Ostwald. Il n'en est pas de même lorsque la population évolue dans un fluide présentant un seuil d'écoulement.

Il a été montré dans les sections précédentes qu'une bulle dans un fluide à seuil peut être soit en croissance, soit en décroissance, soit être figée. Cela va avoir un impact sur l'évolution d'une population en piégeant certaines bulles, comme nous pouvons le constater sur les figures 5.4 et 5.5.

La figure 5.4 présente l'évolution d'une population de bulles au cours du temps dans un fluide newtonien (les barres verticales montrent le rayon limite de croissance/décroissance des bulles de la population pour chaque instant). Nous observons une convergence de la distribution vers un régime de LSW, conformément à ce qui a été montré au chapitre 4. La figure 5.5 présente quant à elle l'évolution de la même population initiale dans un fluide avec un seuil d'écoulement de 4 Pa (les barres verticales montrent le rayon minimum de

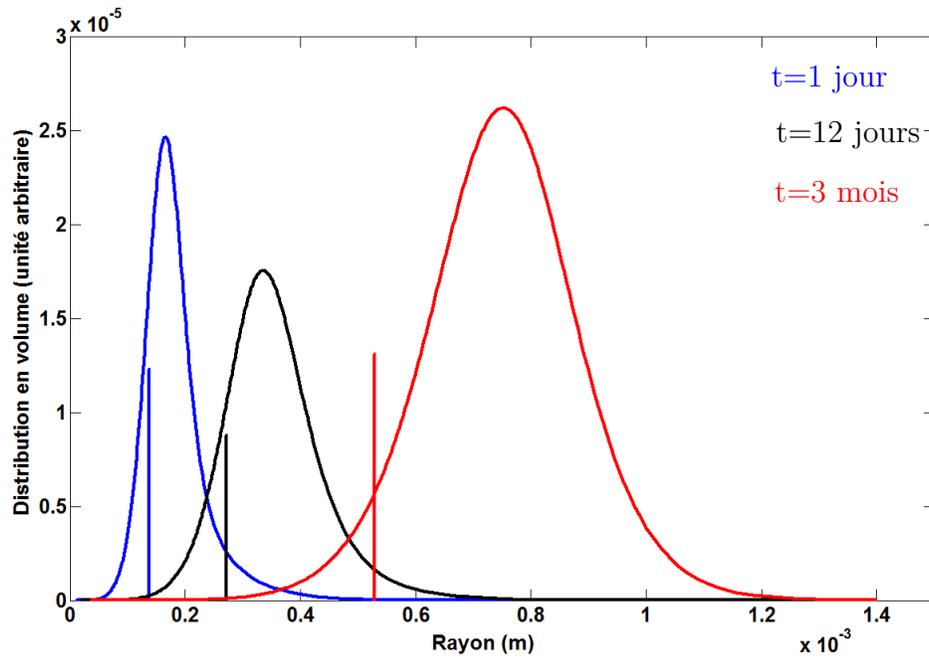


FIGURE 5.4 – Évolution de la distribution en volume d’une population de bulles en fonction du temps dans un fluide newtonien

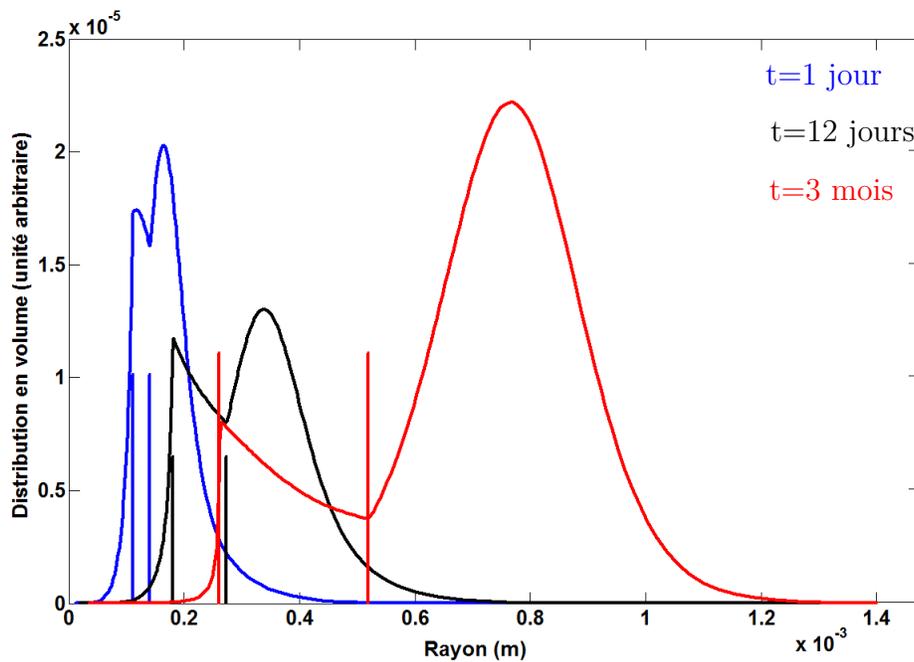


FIGURE 5.5 – Évolution de la distribution en volume d’une population de bulles en fonction du temps dans un fluide à seuil, $\sigma_y=4$ Pa

croissance et le rayon maximum de décroissance). On remarque alors qu'une partie de la population (correspondant aux plus grosses bulles) va croître de manière analogue au cas du fluide newtonien, tandis qu'une autre partie (correspondant à des rayons plus faibles) va être piégée.

Les bulles dont le rayon adimensionné \tilde{R} est compris entre $1/(\varepsilon + \beta)$ et $1/(\sup(0, \varepsilon - \beta))$ ont une vitesse de croissance nulle. On remarque que cette gamme de bulles piégées s'élargit au cours du temps et se décale vers les grands rayons. Ceci est la conséquence de l'appauvrissement de la matrice en gaz saturé. En effet, pour $\varepsilon > \beta$, lorsque la sursaturation ε diminue, la valeur des rayons critiques de croissance et de décroissance augmente, ainsi que la largeur de piégeage L_p :

$$L_p = \frac{1}{\varepsilon - \beta} - \frac{1}{\varepsilon + \beta} = \frac{2\beta}{\varepsilon^2 - \beta^2} \quad (5.71)$$

Au cours de son évolution, une population de bulles dans un fluide à seuil va être scindée en deux. L'effet du seuil va donc à l'encontre du mûrissement, qui a tendance à faire converger la distribution vers une distribution en un seul pic.

5.2.2 Quantification de l'impact du seuil sur une population

Dans cette section, nous allons étudier l'influence d'un seuil d'écoulement sur l'évolution d'une population pour plusieurs valeurs du seuil. Comme précédemment, les barres verticales correspondent aux rayons limites de croissance et de décroissance des bulles pour chaque population. Les distributions sont ici représentées en volume pour mieux appréhender l'effet du seuil, notamment lorsque sa valeur est élevée. En effet, la représentation de la distribution de bulles en nombre dans le cas du seuil valant 40 Pa montrerait un grand nombre de bulles dans la zone où la croissance est nulle et très peu de bulles pouvant croître, alors que ces dernières représentent en réalité la majeure partie du volume total.

Les figures 5.6 à 5.9 montrent que l'augmentation du seuil entraîne l'élargissement de la gamme de rayons pour lesquels les bulles sont figées. Ce résultat est expliqué par l'équation (5.71) exprimant la largeur de la gamme de piégeage en fonction du seuil β et de la sursaturation ε . Ces observations nous permettent de conclure qu'en dessous d'une certaine valeur (environ 1 Pa), le seuil d'écoulement n'a pas d'effet significatif sur l'évolution d'une population. En effet, nous constatons sur la figure 5.7 que, malgré un certain nombre de bulles piégées, la forme globale de la distribution reste très proche du cas du fluide newtonien (figure 5.6).

Le seuil d'écoulement d'un enrobé bitumineux déterminé par Mouazen [5] à 70 °C est de l'ordre de 0,5 Pa pour des paramètres d'extrusion d'enrobé proches du cas industriel. De plus, il a étudié la dépendance en température du seuil sur un bitume pur (la matrice de l'enrobé). Il a constaté qu'au-delà de 50 °C la valeur du seuil est indépendante de la

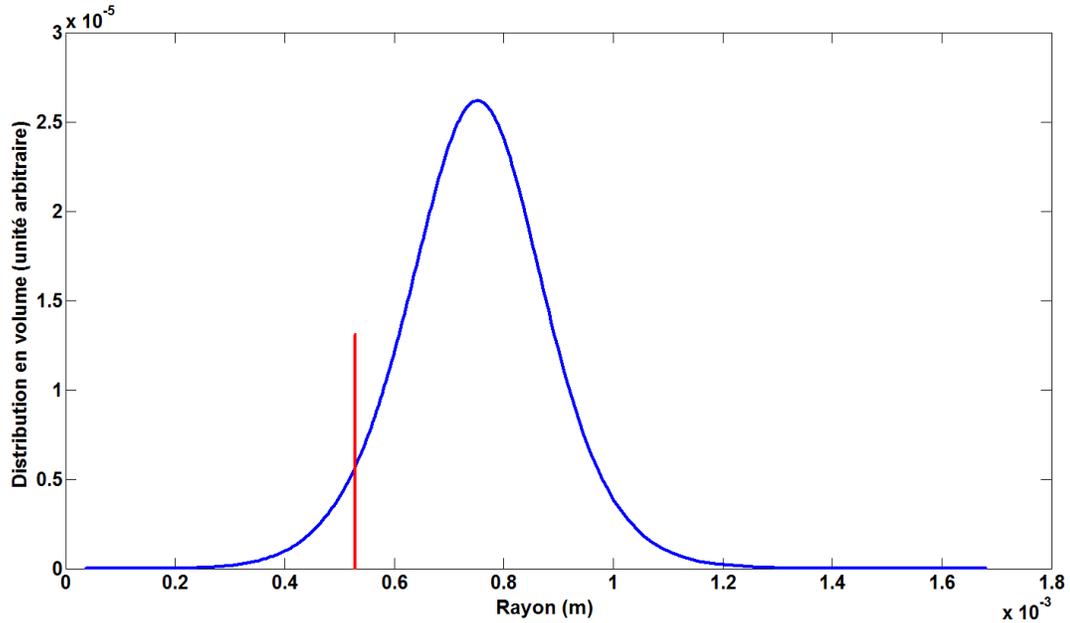


FIGURE 5.6 – Distribution en volume d’une population dans un fluide newtonien au bout de 3 mois

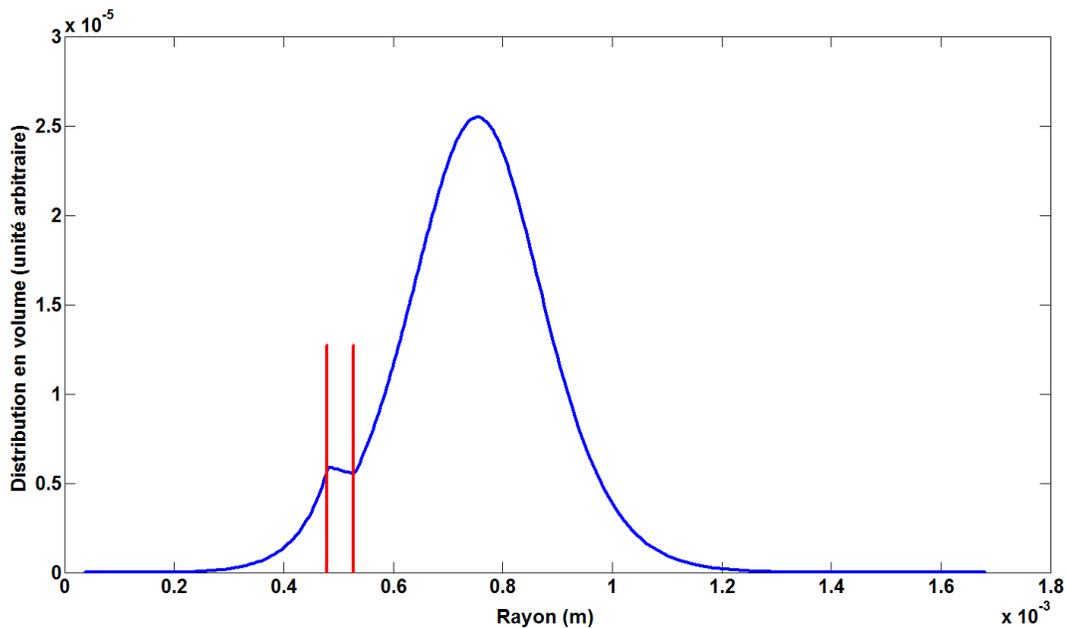


FIGURE 5.7 – Distribution en volume d’une population dans un fluide à seuil au bout de 3 mois, $\sigma_y=0,4$ Pa

température. En revanche, en-deçà de 50°C , le seuil augmente fortement lorsque la température diminue ($\sigma_y = 5$ mPa à 50°C et 70°C et $\sigma_y = 0,3$ Pa à 22°C). L’influence de la température sur le seuil d’écoulement d’enrobés bitumineux n’a pas été étudiée mais une extrapolation peut nous permettre d’estimer l’ordre de grandeur du seuil dans un enrobé. Ainsi, si un facteur 60 est appliqué au seuil lorsque la température passe de 70°C à 22°C ,

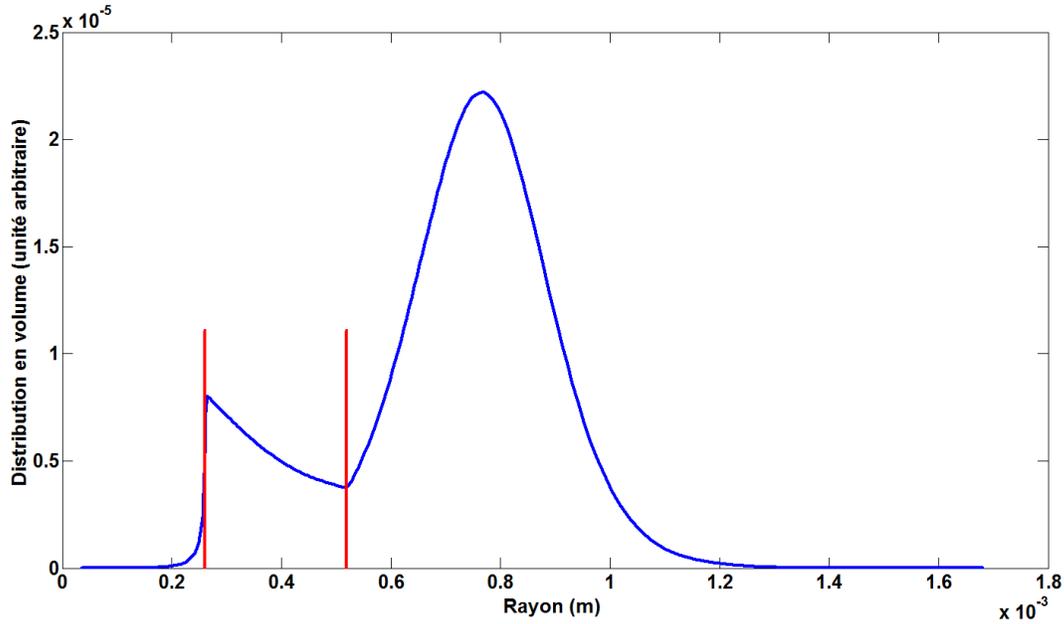


FIGURE 5.8 – Distribution en volume d’une population dans un fluide à seuil au bout de 3 mois, $\sigma_y=4$ Pa

une valeur du seuil de l’enrobé de 0,5 Pa à 70 °C conduirait à un seuil de 30 Pa à température ambiante. L’enrobé bitumineux ne pourrait alors plus être considéré newtonien au regard des résultats obtenus précédemment.

Néanmoins, des caractérisations rhéologiques supplémentaires sont nécessaires pour valider cette valeur extrapolée du seuil. Pour cela nous ne considérerons plus le cas d’un enrobé bitumineux en particulier dans la suite de ce chapitre, mais le cas de fluides dont le seuil est juste suffisant pour observer des conséquences notoires sur le gonflement (ressauts de gonflement) et le débit de gaz sortant (évacuation du gaz en plusieurs salves).

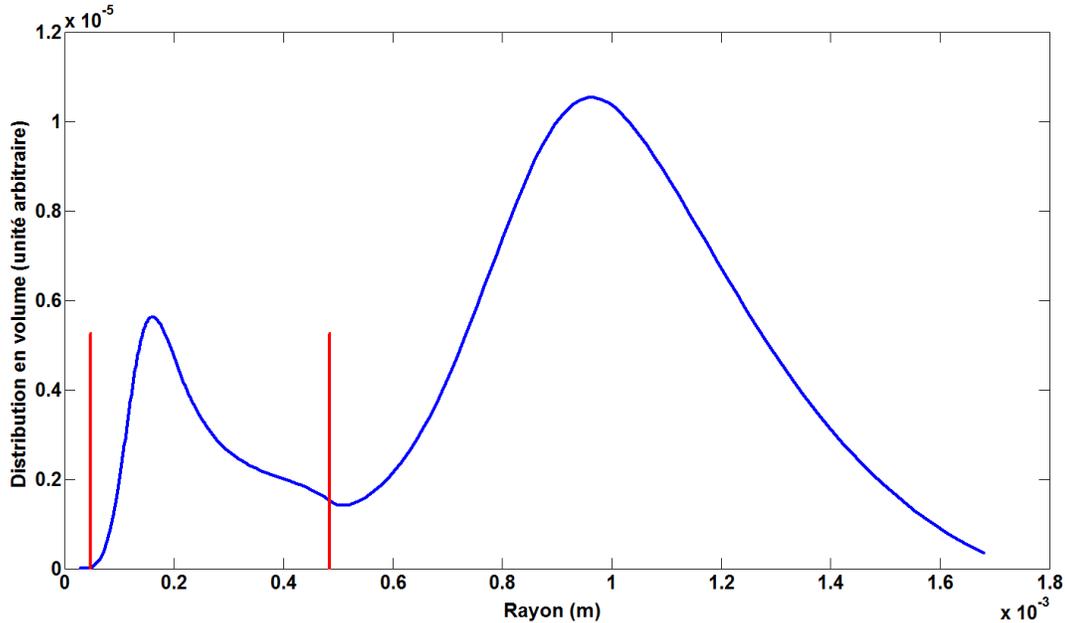


FIGURE 5.9 – Distribution en volume d’une population dans un fluide à seuil au bout de 3 mois, $\sigma_y=40$ Pa

5.3 Évolution d’une population avec migration sans germination

Dans l’ensemble de cette section, nous étudierons, comme dans la section précédente, le cas de l’évolution d’une population de bulles initialement présentes dans le pot. Aucune germination ne sera considérée.

5.3.1 Condition de migration

Après avoir étudié l’effet d’un seuil d’écoulement sur l’évolution d’une population de bulles sans prise en compte de la migration, nous allons nous intéresser à son impact sur la migration des bulles. Nous considérerons dans cette étude que, pour qu’une bulle puisse se mouvoir dans un fluide à seuil, il faut que la contrainte engendrée par la poussée d’Archimède soit supérieure au seuil d’écoulement. La condition de migration d’une bulle dans un fluide à seuil est en réalité plus complexe que cela [61, 62], mais cette approximation est jugée suffisante pour notre étude, qui se veut qualitative, de l’effet du seuil sur une population.

Nous supposerons également que les bulles restent de forme sphérique lorsqu’elles se meuvent, qu’il n’existe pas de chemin privilégié suite au passage d’une bulle et qu’elles atteignent une vitesse terminale quelle que soit leur taille. Ces trois hypothèses ne sont pas vérifiées dans la réalité [63, 64, 65], mais la complexité de la migration d’une bulle dans un fluide à seuil sort des objectifs de ce travail et nécessiterait une étude dédiée. De même, la croissance d’une bulle dans un fluide à seuil lorsqu’elle migre est différente de la croissance d’une bulle immobile. En effet, la zone de fluide autour de la bulle où la

contrainte dépasse la contrainte seuil n'est plus une calotte sphérique [66, 67, 68].

La migration d'une bulle dans un fluide à seuil est donc en réalité beaucoup plus complexe que cela. Néanmoins, cette approximation de la condition de migration, ainsi que de la vitesse, est suffisante pour notre étude, qui se veut qualitative, de l'effet du seuil sur une population.

Écrivons la contrainte σ_a induite par poussée d'Archimède dans le fluide pour une bulle de rayon R :

$$\sigma_a = \frac{\Delta\rho g V}{S} = \frac{\Delta\rho g R}{3} \quad (5.72)$$

où V représente le volume de la bulle, $\Delta\rho$ la différence de masse volumique entre le fluide et le gaz, g l'accélération de pesanteur et S la surface de la bulle.

La condition de migration s'écrit alors :

$$\sigma_a > \sigma_y \implies \frac{\Delta\rho g R}{3} > \sigma_y \implies R > \frac{3\sigma_y}{\Delta\rho g} \quad (5.73)$$

De manière analogue au cas de la croissance décrit par un modèle de Bingham modifié, nous allons pouvoir déterminer la vitesse de remontée d'une bulle en considérant que la contrainte dont elle dispose pour migrer vaut $\sigma_a - \sigma_y$. Pour relier la contrainte engendrée par poussée d'Archimède à la vitesse de migration d'une bulle, nous considérons que le fluide s'écoule avec une viscosité constante au-delà du seuil : $\sigma_a - \sigma_y = \eta \dot{\gamma}_a$. Pour $\sigma_a > \sigma_y$, le taux de cisaillement $\dot{\gamma}_a$ du fluide est défini comme étant le rapport entre la vitesse de la bulle V_z et son rayon R . On peut en déduire la vitesse de migration d'une bulle dans un fluide à seuil :

$$\frac{V_z}{R} = \dot{\gamma}_a \quad (5.74)$$

$$\implies \frac{V_z}{R} = \frac{\sigma_a - \sigma_y}{\eta} \quad (5.75)$$

$$\implies V_z = R \frac{\frac{\Delta\rho g R}{3} - \sigma_y}{\eta} \quad (5.76)$$

$$\implies V_z = \frac{\Delta\rho g R^2 - 3R\sigma_y}{3\eta} \quad (5.77)$$

Notons que, pour un seuil nul ($\sigma_y = 0$), cette expression de la vitesse est bien la même que l'expression de la vitesse de migration d'une bulle dans un fluide newtonien, selon le régime de Hadamard-Rybczynski [51, 6] :

$$V_z = \frac{(\rho_{bitume} - \rho_{gi}) g R^2}{3\eta} \quad (5.78)$$

5.3.2 Comportement d'une population

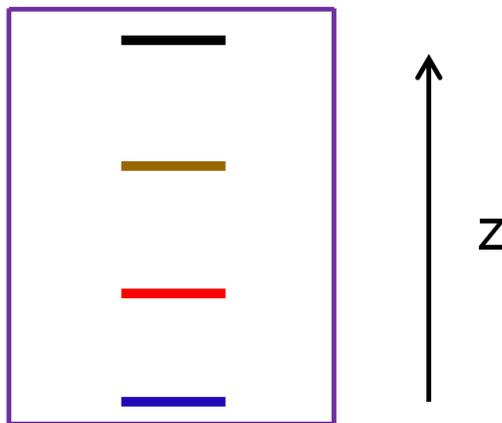


FIGURE 5.10 – Légende des couleurs représentant les populations des différentes hauteurs dans le pot

Nous allons, dans cette partie, présenter qualitativement l'effet d'un seuil sur l'évolution d'une population dans un fluide dont les paramètres permettent d'observer des phénomènes intéressants. Pour cela, nous prenons une valeur du seuil égale à 2 Pa, un module élastique du fluide de 10^9 Pa, une viscosité de 1000 Pa.s, une masse volumique de 1000 kg m^{-3} , l'ensemble des autres paramètres étant identiques aux simulations de la section précédente.

Les figures 5.11 à 5.14 représentent l'évolution au cours du temps d'une population de bulles pour 4 hauteurs différentes dans un pot de 8 cm de hauteur. La figure 5.10 permet de situer la hauteur relative dans le pot des 4 distributions représentées. Les barres verticales rouges représentent les rayons limites de croissance et de décroissance des bulles, tandis que la barre verticale noire représente le rayon minimum pour que les bulles puissent migrer. Il est à noter que, dans un souci de clarté des graphes, nous n'avons représenté les rayons limites de croissance et décroissance que d'une seule des 4 distributions. En réalité, ceux-ci varient légèrement d'une hauteur à une autre dès lors que certaines bulles ont commencé à migrer. Cela est la conséquence du fait que le nombre de bulles va varier en fonction de la hauteur, ainsi que le pompage de gaz et donc la concentration n'aura pas la même évolution dans tout le pot.

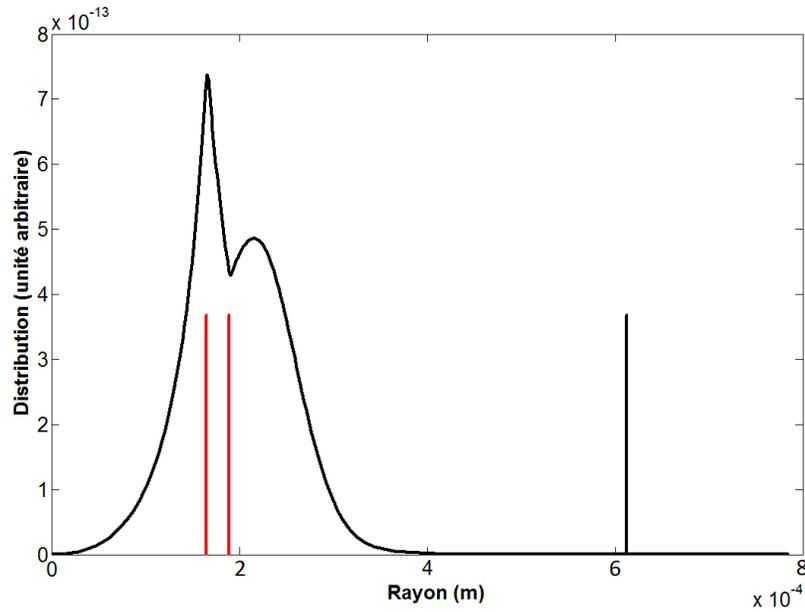


FIGURE 5.11 – Représentation d’une population de bulles pour différentes hauteurs dans le fût au bout de 1 jour

Au début de la simulation (figure 5.11), nous constatons que les bulles sont trop petites pour pouvoir se mouvoir et nous observons l’effet du seuil qui a tendance à scinder la population en deux. Nous constatons également que les distributions des 4 hauteurs sont superposées. Elles subissent la même évolution car, pour l’instant, aucune migration n’est possible. Ensuite, lorsque la partie de la population dont le rayon est suffisant pour croître atteint la taille limite de migration (figure 5.12), on constate des différences entre les distributions des 4 hauteurs. En effet, la migration a pour conséquence de faire diminuer le nombre de bulles en bas du pot et de faire augmenter le nombre de bulles en haut.

Puis, après un certain temps (figure 5.13), la quasi-totalité des bulles a fini par migrer jusqu’en haut du pot et est évacuée. A ce stade, le nombre de bulles présentant un rayon suffisant pour croître devient donc très faible. Le pompage de la matrice par les bulles devient alors inférieur à l’apport par radiolyse, ce qui a pour conséquence de faire remonter le niveau de sursaturation. Or, cette augmentation de la concentration va décaler les rayons limites de croissance et de décroissance des bulles vers des rayons plus petits, ce qui va libérer la partie de la population qui était initialement piégée. Ces bulles vont à leur tour pouvoir croître, atteindre la taille minimale (figure 5.14) pour migrer et ainsi sortir du pot.

Pour les paramètres matériaux choisis lors de cette simulation, l’évacuation de la totalité des bulles est effectuée en deux salves. Néanmoins, la valeur du seuil va pouvoir modifier le nombre de salves d’évacuation, comme nous allons le voir dans la section suivante.

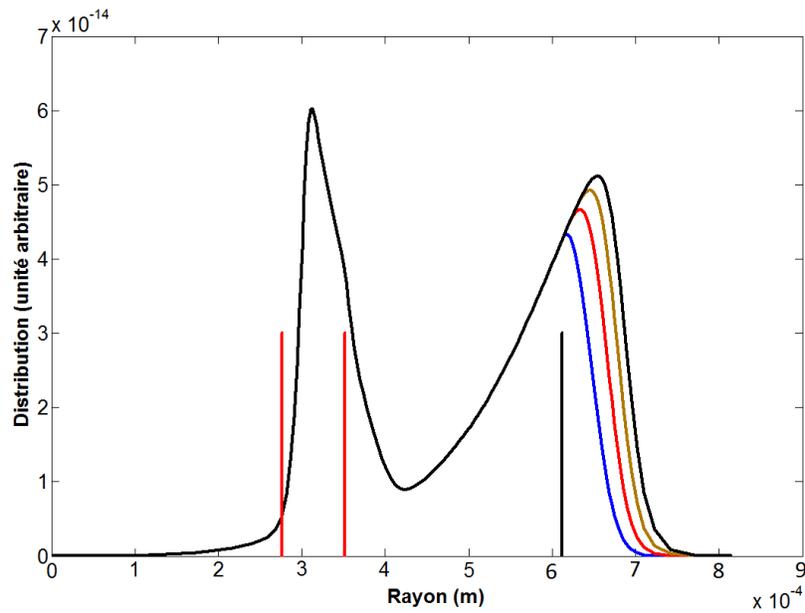


FIGURE 5.12 – Représentation d’une population de bulles pour différentes hauteurs dans le fût au bout de 26 jours

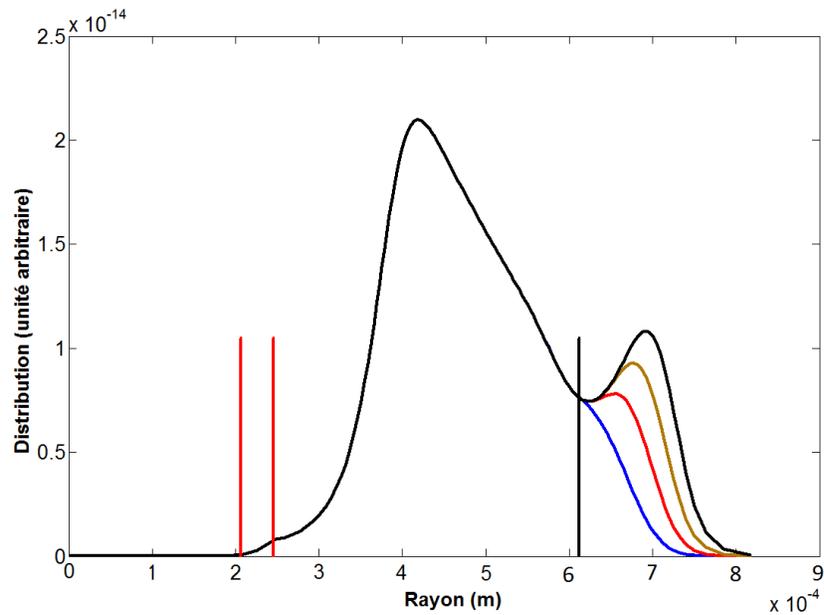


FIGURE 5.13 – Représentation d’une population de bulles pour différentes hauteurs dans le fût au bout de 35 jours

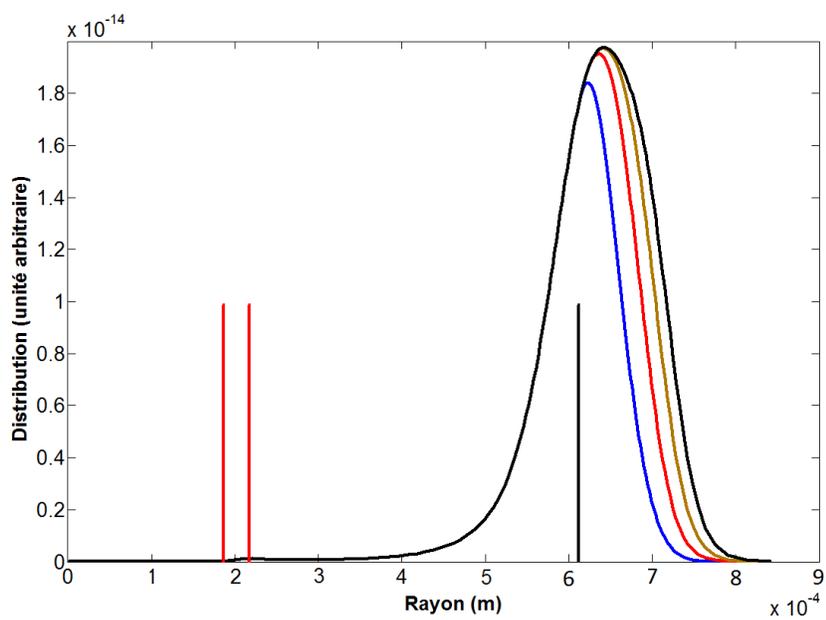


FIGURE 5.14 – Représentation d’une population de bulles pour différentes hauteurs dans le fût au bout de 41 jours

5.3.3 Suivi du débit de gaz sortant et du gonflement

Nous allons, dans cette dernière partie, présenter qualitativement l'effet d'un seuil sur le gonflement ainsi que sur le débit de gaz évacué par migration des bulles. Les paramètres matériaux des cas représentés sur les figures 5.15 à 5.17 sont identiques à ceux de la section précédente, à l'exception du seuil d'écoulement que l'on a fait varier. Ainsi, la figure 5.15 représente l'évolution du gonflement et du débit de gaz sortant du pot pour un fluide newtonien, la figure 5.16 représente un fluide à seuil de valeur 2 Pa et la figure 5.17 un fluide à seuil de valeur 4 Pa.

Étant donné qu'aucune germination n'est prise en compte, les cas présentés ici correspondant à la réponse impulsionnelle du modèle de gonflement pour un fluide à seuil. La figure 5.15 nous montre que, dans le cas d'un fluide newtonien, le gonflement augmente jusqu'à une valeur maximale et diminue jusqu'à 0. L'évacuation du gaz est effectuée en une seule fois. La figure 5.16 nous montre que l'évacuation de gaz dans le cas d'un fluide à seuil de valeur 2 Pa est conforme à l'évolution de la population observée dans la section précédente, c'est-à-dire en deux salves.

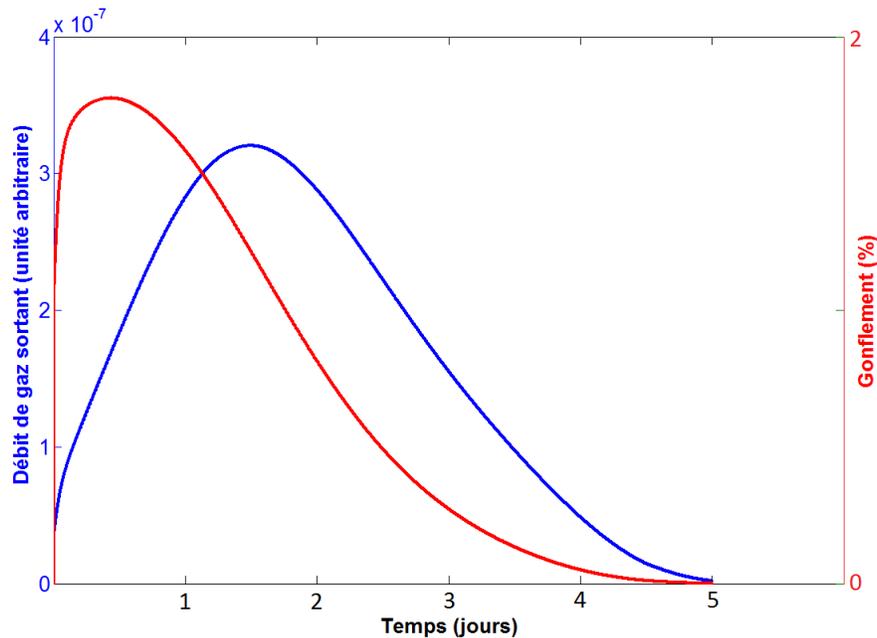


FIGURE 5.15 – Évolution du débit de gaz sortant et du gonflement en fonction du temps pour un seuil nul

Pour des valeurs plus élevées du seuil d'écoulement (un cas de fluide à seuil de valeur 4 Pa est représenté sur la figure 5.17), l'évacuation de la totalité des bulles peut s'effectuer en plus de deux salves. L'évolution du gonflement global du pot s'éloigne alors du cas du fluide newtonien.

On constate aussi, et surtout, que la valeur maximale du gonflement est fortement impactée par la présence d'un seuil d'écoulement. Cela est principalement dû au fait que les bulles

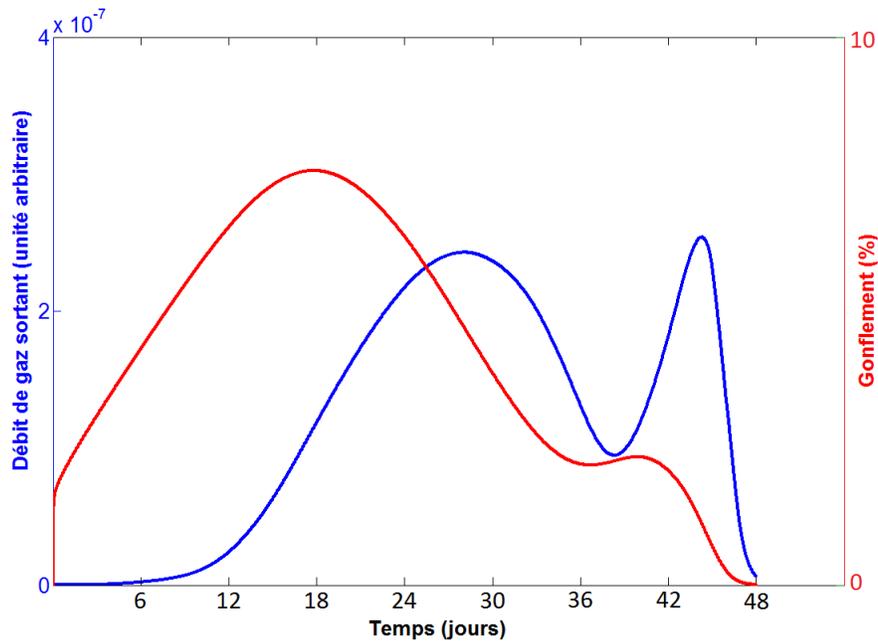


FIGURE 5.16 – Évolution du débit de gaz sortant et du gonflement en fonction du temps pour un seuil $\sigma_y=2$ Pa

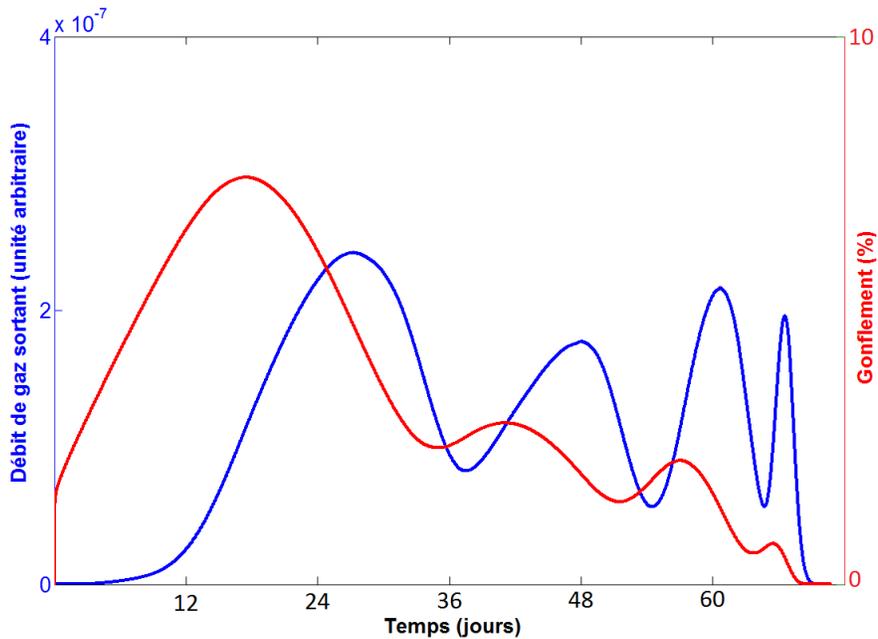


FIGURE 5.17 – Évolution du débit de gaz sortant et du gonflement en fonction du temps pour un seuil $\sigma_y=4$ Pa

doivent atteindre une taille minimale avant de migrer. Elles restent ainsi plus longtemps dans le pot à croître, ce qui se manifeste par un gonflement accru. Dans le cas d'un fluide newtonien, les bulles peuvent se mouvoir quelle que soit leur taille, ainsi leur évacuation est beaucoup plus rapide (notons la différence d'échelle de temps entre la figure 5.15 et les

figures 5.16 et 5.17) et le gonflement moindre.

5.4 Conclusion du chapitre

La croissance d'une bulle dans un fluide à seuil décrit par un modèle de Bingham modifié a été traitée dans ce chapitre. Il a ainsi été admis que le fluide pouvait s'écouler avec une viscosité constante au-delà d'une certaine contrainte (région proche de la bulle en croissance) et qu'il subissait une déformation élastique en-deçà du seuil (région loin de la bulle). A la différence du cas d'un fluide newtonien incompressible, la pression dans le fluide autour de la bulle n'est pas constante. De plus, selon sa taille et la valeur du seuil, une bulle peut soit croître, soit décroître, soit être figée.

L'étude de l'évolution d'une population de bulle sans prise en compte de la migration a mis en évidence le fait que le seuil puisse scinder la population en deux parties. Les bulles dont la taille est supérieure à une taille critique croissent tandis que les bulles plus petites sont figées. Ce clivage est d'autant plus important que la valeur du seuil est élevé. De plus, lorsque la migration des bulles dans un fluide à seuil est prise en compte, l'évacuation du gaz par se fait par à-coups.

En dessous d'une certaine valeur (environ 1 Pa), l'impact du seuil est négligeable et la forme globale de la population reste proche du cas d'un fluide newtonien. Les enrobés bitumineux pouvant présenter des seuils de l'ordre de 30 Pa (estimation à partir d'extrapolations), ils ne peuvent donc pas être considérés newtoniens. Une estimation pertinente du gonflement nécessiterait ainsi une étude expérimentale approfondie du seuil d'écoulement d'enrobés bitumineux.