

Chapitre 5

Application de la commande prédictive

La démocratisation de l'utilisation de la commande prédictive par les professionnels du bâtiment est envisageable dans un futur proche grâce au développement des technologies nécessaires à son implémentation. Les systèmes de contrôle-commande basés sur la commande prédictive ont en effet l'avantage d'être plus précis et plus robustes dans leur gestion des aléas. Cependant, ils nécessitent l'utilisation d'algorithmes d'automatique performants devant faire face à de nombreuses difficultés théoriques (initialisation de l'algorithme, respect des contraintes, convergence en un temps limité, gestion des aléas, etc.). Ce chapitre a pour objectif le développement d'un tel algorithme. Dans un premier temps, la taille du modèle de bâtiment sera réduite à l'aide d'une méthode de réduction. Par la suite, l'algorithme d'optimisation permettant de résoudre le problème de commande optimale sous contraintes d'état et de commande sera présenté. Dans l'objectif de réduire ses temps de calcul, une analyse de sensibilité sera menée. L'utilisation de l'algorithme nécessitant de connaître l'état du bâtiment, un observateur asymptotique sera également développé. Enfin, la gestion des aléas lors de l'application de la commande prédictive sera réalisée par le développement d'un régulateur permettant d'assurer le suivi de trajectoire.

PLAN DU CHAPITRE 5

1.	<u>INTRODUCTION.....</u>	181
2.	<u>RÉDUCTION DU MODÈLE THERMIQUE.....</u>	182
2.1	PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES D'ÉTAT	182
2.1.1	COMMANDABILITÉ	182
2.1.2	OBSERVABILITÉ	183
2.2	LA RÉALISATION ÉQUILBRÉE	183
2.3	LA RÉDUCTION ÉQUILBRÉE	184
2.4	APPLICATION AU CAS D'ÉTUDE	184
3.	<u>COMMANDE OPTIMALE</u>	189
3.1	PRINCIPE DES MÉTHODES DE PÉNALISATION.....	189
3.2	ALGORITHME D'OPTIMISATION.....	191
3.3	APPLICATION AU CAS D'ÉTUDE	192
3.3.1	PARAMÈTRES DE L'OPTIMISATION	192
3.3.2	RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE COMMANDE OPTIMALE	193
3.3.3	RÉSULTATS.....	195
3.4	ANALYSE DE SENSIBILITÉ	196
3.4.1	HORIZON D'OPTIMISATION	196
3.4.2	ÉCHANTILLONNAGE DES SOLlicitATIONS	198
4.	<u>OBSERVATEUR ASYMPTOTIQUE.....</u>	201
4.1	STRUCTURE DE L'OBSERVATEUR.....	202
4.2	APPLICATION.....	203
5.	<u>COMMANDE PRÉDICTIVE</u>	205
5.1	COMMANDE PRÉDICTIVE SANS CONTRÔLEUR	205
5.1.1	FONCTIONNEMENT DE LA COMMANDE PRÉDICTIVE	205
5.1.2	RÉSULTATS.....	208

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

5.2	COMMANDE PRÉDICTIONNELLE AVEC RÉGULATEUR.....	211
5.2.1	DÉFINITION DU RÉGULATEUR.....	212
5.2.2	RÉSULTATS.....	213
6.	<u>CONCLUSION DU CHAPITRE</u>	<u>216</u>

1. INTRODUCTION

L'utilisation de la commande prédictive par les professionnels du bâtiment reste à ce jour encore limitée dans la pratique. Néanmoins, la disponibilité de moyens de calculs toujours plus importants, la présence de capteurs fiables et à bas coût ainsi que le développement des moyens de télécommunication laissent envisager une démocratisation des systèmes de contrôle-commande à court terme. La mise en place de tels systèmes nécessite le développement d'algorithmes d'automatique performants permettant l'exploitation en temps réel des bâtiments. Cependant, ces derniers doivent faire face à de nombreuses difficultés théoriques telles que le respect des contraintes (par exemple contraintes sur le confort ou la puissance de chauffage), l'initialisation ou encore la convergence de l'algorithme d'optimisation en un temps limité. Le développement d'un tel algorithme est l'objet de ce chapitre.

La commande prédictive consiste en une résolution répétée à chaque période d'échantillonnage d'un problème de commande optimale. Cette technique repose sur l'utilisation d'un modèle dynamique du système à réguler (ici le bâtiment) permettant d'anticiper son comportement futur. La mise en place d'une telle méthode soulève plusieurs difficultés.

La première difficulté consiste à réduire la taille du modèle de bâtiment. En effet, la dimension de ce dernier est souvent trop élevée pour permettre une convergence rapide de l'algorithme d'optimisation. La mise en œuvre de méthodes de réduction de modèle est alors indispensable (§2). La deuxième difficulté concerne la résolution d'un problème de commande optimale visant à déterminer la commande d'un système (chauffage, ventilation, etc.) qui minimise (ou maximise) un critère de performance donné (par exemple la consommation énergétique) tout en respectant des contraintes fixées. On parle alors de planification de trajectoire. La résolution d'un tel problème requiert l'emploi d'un algorithme rapide et robuste (§3). Dans l'objectif de l'utilisation de cet algorithme à chaque période d'échantillonnage, la connaissance de l'état du bâtiment (correspondant aux conditions initiales de l'algorithme) est indispensable. Cependant, l'état du bâtiment n'est pas directement mesurable et la simple mesure de la température intérieure du bâtiment n'est pas suffisante pour le caractériser. En effet, pour une même température intérieure, un bâtiment peut être dans des états thermiques différents. Il est alors nécessaire d'estimer l'état du bâtiment par l'intermédiaire d'un observateur (§4). Enfin, la dernière difficulté réside dans la gestion des perturbations par un régulateur en temps réel. En effet, la résolution du problème de commande optimale permet de calculer une commande en boucle ouverte et de donner une trajectoire de référence à suivre. Cependant, lors de l'application de cette commande au système réel, des écarts peuvent être constatés entre la trajectoire de référence et la trajectoire réelle (causés par des perturbations ou des erreurs de modélisation du bâtiment). Il convient alors de corriger la commande dans l'optique de faire converger cet écart vers zéro, c'est-à-dire d'assurer le suivi de trajectoire (§5).

2. RÉDUCTION DU MODÈLE THERMIQUE

La modélisation thermique dynamique du bâtiment amène au développement d'un système de grande dimension. Cependant, résoudre un problème de commande optimale avec le système complet n'est pas envisageable car sa dimension est trop grande et peut induire des problèmes de convergence des algorithmes d'optimisation. Il est alors préférable de réduire l'ordre du modèle tout en conservant au maximum son comportement original. Différentes méthodes de réduction peuvent être utilisées pour réduire les modèles thermiques, telles que la réduction modale (Lefebvre 2007), la décomposition orthogonale aux valeurs propres (Sempey et al. 2009) ou encore les techniques basées sur la décomposition en valeurs singulières (Yahia et Palomo Del Barrio 1999). La réalisation équilibrée (Moore 1981) est une méthode efficace et couramment utilisée pour la réduction de modèle dans le cadre du contrôle-commande. Elle permet d'obtenir un modèle réduit adapté au contrôle et présentant une bonne précision (Palomo Del Barrio et al. 2000). Elle sera donc utilisée dans la suite du chapitre. Cette méthode repose sur les propriétés de commandabilité et d'observabilité des systèmes d'état définies ci-dessous.

2.1 Propriétés des systèmes d'état

Soit le système linéaire continu et invariant d'ordre n suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est la commande, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie, A est une matrice $n \times n$, B une matrice $n \times m$ et C une matrice $p \times n$.

2.1.1 Commandabilité

Le système décrit par (5.1) est dit commandable s'il existe une commande permettant de le faire passer en un temps fini d'un état initial donné à un état final donné. Plus généralement, un système est dit entièrement commandable si par action sur la commande, il est possible d'atteindre en un temps fini n'importe quel point de l'espace d'état. Pour déterminer la commandabilité d'un système, on définit la matrice de commandabilité C_o :

$$C_o = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \quad (5.2)$$

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

Le système est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité C_o est de rang $n = \dim(x)$ (critère de commandabilité de Kalman). On dira alors que (A, B) est commandable. La commandabilité peut être calculée de manière équivalente en calculant le grammien de commandabilité défini par (on suppose que les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative) :

$$W_C = \int_0^{\infty} e^{tA} B B^T e^{tA^T} dt \quad (5.3)$$

Le système est alors contrôlable si et seulement si le grammien de commandabilité est défini positif.

2.1.2 Observabilité

Le système (5.1) est dit observable (ou (A, C) est observable), si pour tout instant t_1 , l'état initial $x(0) = x_0$ peut être déterminé à partir de la commande u et de la sortie y (observation) dans l'intervalle $[0, t_1]$. Pour déterminer l'observabilité d'un système on définit la matrice d'observabilité O_b :

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Le système est alors observable si et seulement si la matrice d'observabilité O_b est de rang $n = \dim(x)$ (critère d'observabilité de Kalman). L'observabilité peut être également calculée par le grammien d'observabilité défini par :

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt \quad (5.5)$$

Le système est alors observable si et seulement si le grammien d'observabilité est défini positif.

2.2 La réalisation équilibrée

La réalisation équilibrée est un compromis optimal du point de vue de la commandabilité et de l'observabilité des variables d'état (Moore 1981). En effet, dans l'objectif de réduire l'ordre d'un modèle, une solution possible est l'élimination des états présentant un faible degré de commandabilité ou un faible degré d'observabilité. Cependant, des conflits peuvent exister pour des variables d'état avec un faible degré d'observabilité et fort degré de commandabilité (et inversement). Pour éviter cette difficulté, l'objectif de la réalisation équilibrée est alors de réaliser une transformation du système (5.1) dans le but d'équilibrer les degrés d'observabilité et de commandabilité. Plus précisément, l'objectif est de trouver une transformation d'état P :

$$x(t) = P \tilde{x}(t) \quad (5.6)$$

telle que les grammiens de commandabilité et d'observabilité de $\tilde{x}(t)$ vérifient :

$$\tilde{W}_C = \tilde{W}_O = \Sigma \quad (5.7)$$

où Σ est une matrice diagonale incluant les valeurs singulières de Hankel du système :

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n); \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (5.8)$$

On obtient alors la représentation d'état équilibrée suivante :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP, \quad \tilde{B} = P^{-1}B, \quad \tilde{C} = CP \quad (5.9)$$

La matrice P peut être calculée par (Laub et al. 1987) : $P = R^{-1}U\Sigma^{1/2}$ où R est une matrice triangulaire provenant de la factorisation de Cholesky du grammien d'observabilité $W_o = R^tR$, et où U et Σ sont définis par $RW_cR^t = U\Sigma^2U^t$.

2.3 La réduction équilibrée

Dès que le système (5.1) est mis dans sa forme équilibrée, on peut alors réduire facilement l'ordre du modèle en éliminant les états associés aux petites valeurs singulières de Hankel σ_i (représentant des faibles degrés d'observabilité et de commandabilité). On décompose ainsi la matrice Σ obtenue :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 \ll \Sigma_1 \quad (5.10)$$

avec $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$ et $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, k étant l'ordre souhaité pour le modèle réduit. La matrice Σ_2 contient ainsi les plus petites valeurs singulières de Hankel du système.

Le système équilibré avant troncature :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2]x(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

conduit alors au modèle réduit après troncature :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \tilde{A}_{11}x_1(t) + \tilde{B}_1u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}_1x_1(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{k \times m}$ et $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{p \times k}$.

Le choix de l'ordre k peut être fait a priori ou par exemple par le choix d'une borne supérieure pour la différence entre deux valeurs singulières de Hankel successives.

2.4 Application au cas d'étude

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la maison I-BB (Béton banché) de la plateforme « INCAS » (présentée dans le §4.1.1 du chapitre 3). Cette dernière a été modélisée à l'aide du logiciel de simulation thermique dynamique Pléiades+COMFIE en considérant une seule zone thermique. Le modèle non réduit obtenu est un système d'état d'ordre 28. Ce dernier a été transformé sous sa forme équilibrée et les valeurs singulières de Hankel du système sont présentées dans la Figure 61. On peut remarquer que l'état n°1 se détache des autres modes avec une valeur singulière significativement plus élevée que les autres. Dans une moindre mesure, les états numérotés de 2 à 4 se détachent également des autres

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

états. Pour déterminer l'ordre de réduction du modèle, il est tout d'abord nécessaire de déterminer les modèles réduits entièrement commandables et observables. Pour cela, le rang des matrices de commandabilité et d'observabilité a été calculé pour les différents modèles réduits. Seuls les modèles réduits à un ordre inférieur ou égal à quatre respectent les critères de commandabilité et d'observabilité de Kalman (ces modèles réduits sont donc entièrement commandables et observables). Les constantes de temps des quatre modèles sont reportées dans le Tableau 24. On peut noter que les modèles réduits à l'ordre 2, 3 et 4 ont des constantes de temps bien séparées.

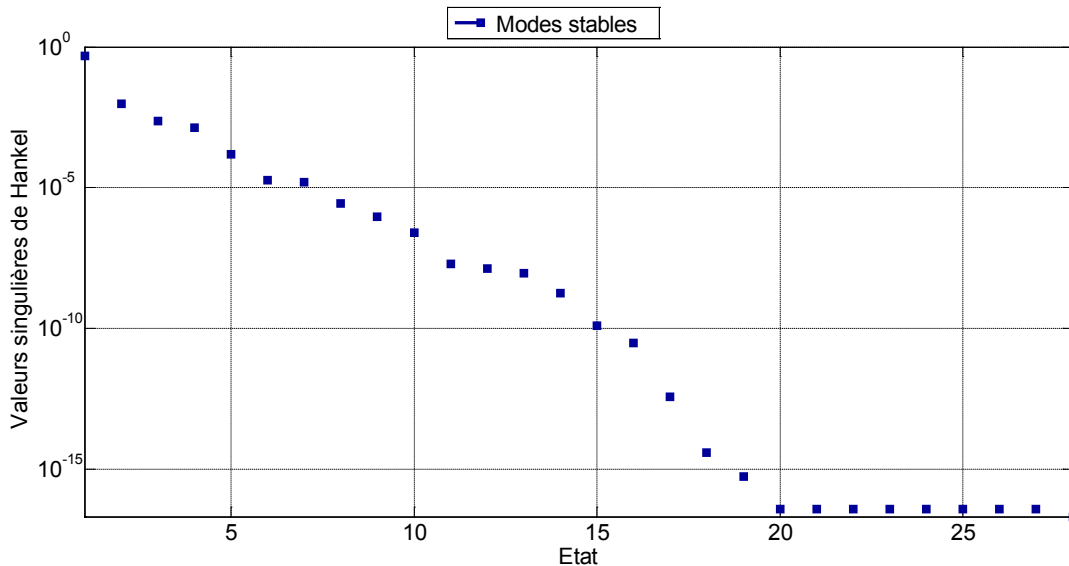


Figure 61 : Valeurs singulières de Hankel du système considéré

Tableau 24 : Constantes de temps des quatre modèles réduits

Ordre de réduction	1	2	3	4
Constantes de temps	16 jours	17 jours 13 minutes	17 jours 1 heure 8 minutes	17 jours 20 heures 44 minutes 6 minutes

Une analyse de la réponse fréquentielle des modèles réduits (de l'ordre 1 à l'ordre 4) aux différentes sollicitations est indispensable pour déterminer l'ordre de réduction du modèle permettant de faire un compromis entre précision et taille du modèle (qui va impacter les temps de calcul). Les sollicitations considérées dans cette analyse correspondent à la puissance de chauffage (variable de commande), à la température extérieure et au rayonnement solaire traversant les vitres (nommé ci-après flux vitré).

Dans l'objectif de déterminer la commande optimale de la puissance de chauffage, il est indispensable d'utiliser un modèle réduit présentant des performances proches de celles du modèle non réduit par rapport à la puissance de chauffage. La Figure 62 présente les réponses fréquentielles des modèles réduits à l'ordre 1 et 2 par rapport au modèle de référence. On peut constater que le modèle réduit à l'ordre 1 présente un comportement très différent par rapport au modèle non réduit aussi bien

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

en phase qu'en gain. Par exemple, il présente un retard important sur les temps compris entre une minute et plusieurs jours. Le modèle réduit à l'ordre 1 ne disposant que d'une seule constante de temps (qu'on peut faire correspondre d'un point de vue physique à la capacité thermique du bâtiment divisée par son coefficient de pertes), ce dernier est incapable de représenter correctement les variations de la température intérieure sur quelques heures. Le modèle réduit à l'ordre 2 présente quant à lui un retard de phase par rapport au modèle complet pour les temps compris entre une et plusieurs minutes et une avance de phase pour des temps correspondant à plusieurs heures. Ainsi, ce modèle a tendance à sous-estimer la variation de la température intérieure pour des variations de puissance à l'échelle de quelques minutes et à surestimer la variation de la température intérieure sur plusieurs heures. Par conséquent, les modèles réduits à l'ordre 1 et l'ordre 2 ne sont pas retenus dans la suite de l'étude du fait de leur comportements trop disparates par rapport au modèle non réduit.

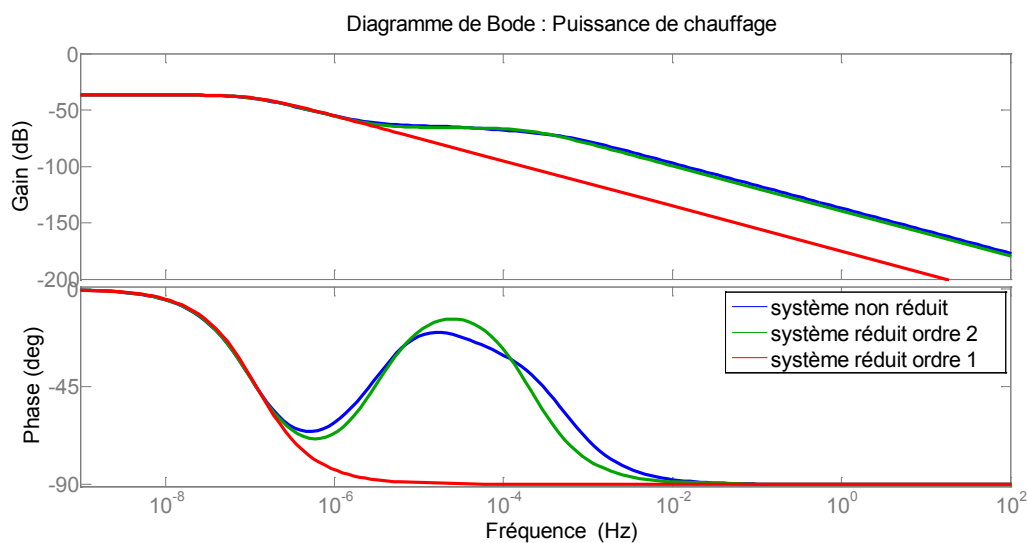


Figure 62 : Réponses fréquentielles des systèmes (non réduit, réduit à l'ordre 1 et réduit à l'ordre 2) à la puissance de chauffage

La Figure 63 présente les réponses fréquentielles des modèles réduits à l'ordre 3 et 4 par rapport au modèle non réduit. On peut constater qu'il n'y a que très peu de différences aussi bien en phase qu'en gain. Seuls de légers retards ou avances de phases peuvent être notés pour les modèles réduits à l'ordre 3 et 4 selon les échelles de temps.

Concernant les réponses fréquentielles à la température extérieure des modèles réduits à l'ordre 3 et 4 (Figure 64), on peut noter également leurs comportements très proches du modèle de référence aussi bien en phase qu'en gain.

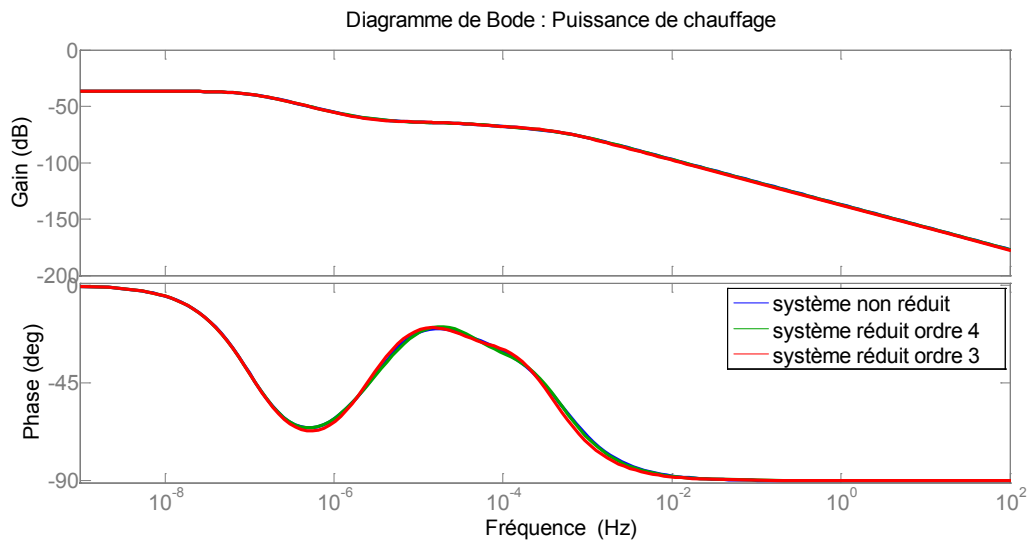


Figure 63 : Réponses fréquentielles des systèmes (non réduit, réduit à l'ordre 3 et réduit à l'ordre 4) à la puissance de chauffage

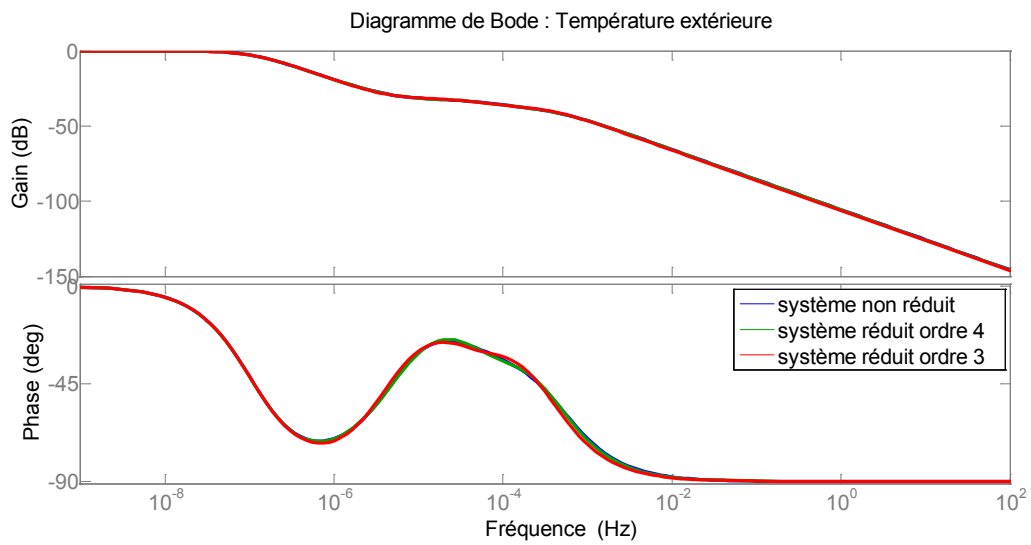


Figure 64 : Réponse fréquentielle des systèmes (non réduit, réduit à l'ordre 3 et réduit à l'ordre 4) à la température extérieure

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

Enfin, des différences sont à noter lorsque l'on considère les réponses fréquentielles des modèles au flux vitré (Figure 65). Ainsi, on peut constater que les modèles réduits à l'ordre 3 et 4 sont en avance de phase par rapport au modèle non réduit pour des temps compris entre 1 seconde et quelques heures. Cette différence peut s'expliquer d'un point de vue physique par l'incapacité des modèles réduits à représenter fidèlement l'impact du rayonnement solaire passant à travers les vitres. En effet, dans le modèle non réduit, le flux vitré est tout d'abord absorbé par les parois internes du bâtiment avant d'être réémis sous forme de rayonnement quelques minutes plus tard. Les modèles réduits à l'ordre 3 et 4 se montrent incapables de reproduire correctement ce comportement.

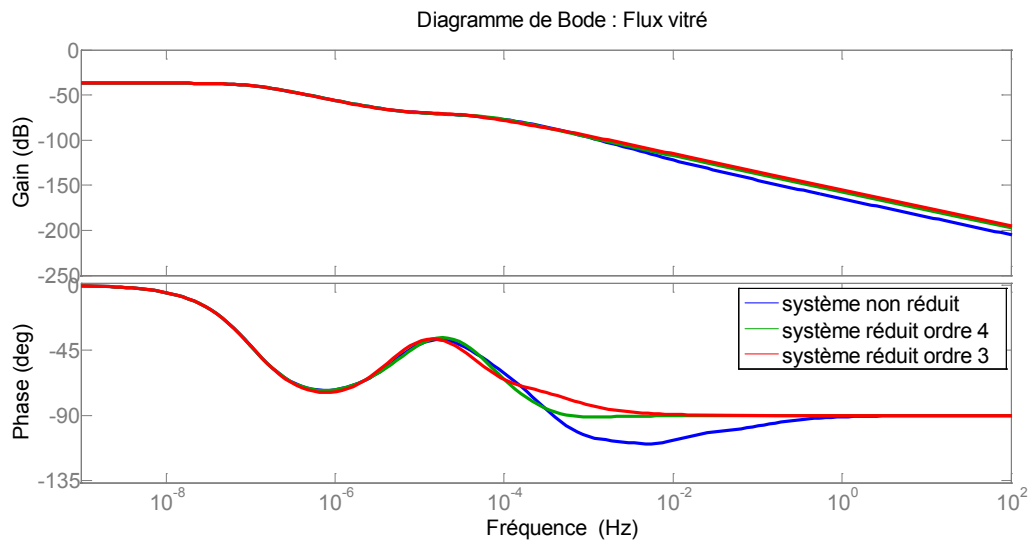


Figure 65 : Réponse fréquentielle des systèmes (non réduit, réduit à l'ordre 3 et réduit à l'ordre 4) au flux vitré

L'étude des réponses fréquentielles des modèles réduits aux différentes sollicitations a permis d'éliminer les modèles réduits à l'ordre 1 et 2 des modèles à utiliser pour le calcul de la commande optimale. En effet, le comportement de ces modèles, trop éloigné du modèle de référence, ne permet pas de s'assurer de la fiabilité de la commande optimale calculée. Les modèles réduits à l'ordre 3 et 4 présentent quant à eux un comportement satisfaisant. Cependant, l'étude des réponses fréquentielles ne permet pas de choisir entre la réduction à l'ordre 3 et la réduction à l'ordre 4. En effet, les réponses fréquentielles des deux modèles réduits sont très proches, même en ce qui concerne le flux vitré où ils sont incapables de représenter fidèlement le comportement du modèle complet. Le choix de l'ordre de réduction se fera alors en comparant le temps de calculs et la commande optimale calculée en considérant un modèle réduit à l'ordre 3 ou à l'ordre 4 (§ 3.3.3).

On s'intéresse dans la suite à la présentation de l'algorithme d'optimisation permettant de résoudre le problème de commande optimale.

3. COMMANDE OPTIMALE

On s'intéresse au problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u \in U} \left[J(u) = \int_0^{t_f} L(x^u(t), u(t)) dt \right] \quad (5.13)$$

sous la contrainte de dynamique suivante :

$$\dot{x}^u(t) = f(x^u(t), u(t)) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (5.14)$$

où x^u représente la trajectoire engendrée par la commande u et où l'on considère des contraintes portant sur l'état et la commande.

Dans le but de déterminer la loi de commande de chauffage qui minimise le coût de la consommation de chauffage, le problème de commande optimale (5.13)-(5.14) doit être soumis à différentes contraintes portant sur la température (contraintes d'état) et la puissance de chauffage (contraintes de commande). Cependant, le principe du minimum de Pontryagin (présenté dans le §3.1.1 du chapitre 1) prend en compte des contraintes sur le contrôle mais ne prend pas en compte d'éventuelles contraintes sur l'état. Une alternative consiste à utiliser des méthodes de pénalisation.

3.1 Principe des méthodes de pénalisation

Le principe des méthodes de pénalisation est de résoudre un problème de commande optimale modifié où l'on pondère la contrainte sur l'état de manière à forcer la solution à la respecter. On suppose par exemple que l'on souhaite imposer à l'état d'appartenir à un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. L'objectif des méthodes de pénalisation est de définir une fonction de pénalisation γ de telle sorte que le problème de commande optimal sous contraintes et le problème de commande optimale modifié soient équivalents, c'est-à-dire qu'ils aient les mêmes solutions. On parle alors de pénalisation exacte. On peut par exemple choisir :

$$\gamma(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{si } s \notin \mathcal{C} \end{cases} \quad (5.15)$$

Cependant cette fonction sommaire ne présente pas de bonnes propriétés mathématiques. On a alors généralement recours à des méthodes de pénalisation inexacte, c'est-à-dire telles que l'ensemble des solutions du problème de commande optimale modifié ne couvre pas totalement l'ensemble des solutions du problème de commande optimale sous contraintes. Le principe général de ces méthodes est le suivant (Trélat 2005). On définit une fonction γ sur \mathbb{R}^n de sorte qu'elle soit nulle sur \mathcal{C} et strictement positive ailleurs. On ajoute ensuite au coût $J(u)$ le scalaire $\varepsilon \int_0^{t_f} \gamma(x(t)) dt$ où $\varepsilon > 0$ est un poids pouvant être choisi assez grand. On peut alors espérer que la résolution du problème de commande optimale modifié force la trajectoire à rester dans l'ensemble \mathcal{C} . En effet, si $x(t)$ n'est pas dans l'ensemble \mathcal{C} , et si ε est grand, le coût correspondant sera alors grand et donc la trajectoire ne sera probablement pas optimale. Il s'agit du principe des méthodes de pénalisation extérieure. Cependant,

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

ces méthodes présentent l'inconvénient de pouvoir calculer des solutions ne respectant pas les contraintes.

Une alternative consiste alors à considérer des méthodes de pénalisation intérieure pouvant être utilisées pour résoudre le problème de commande optimale sous contraintes d'état (de la forme $g(x(t)) \leq 0$). Il s'agit de méthodes d'optimisation consistant à pénaliser la fonction coût par une fonction barrière faisant exploser le coût dès que la solution s'approche de la contrainte d'état permettant de s'assurer de son respect. Ainsi, le problème (5.13)-(5.14) devient :

$$\min_{u \in U} \left[J(u) = \int_0^{t_f} L(x^u(t), u(t)) dt + \varepsilon \int_0^{t_f} \gamma(g(x(t))) dt \right] \quad (5.16)$$

sous la contrainte de dynamique suivante :

$$\dot{x}^u(t) = f(x^u(t), u(t)) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (5.17)$$

où le paramètre ε décroît vers 0, et où γ est la fonction barrière. L'objectif est alors d'approcher la solution du problème avec contraintes (5.13)-(5.14) par la résolution d'une suite de problèmes sans contraintes (5.16)-(5.17) et de faire décroître ε progressivement. L'avantage des méthodes de point intérieur est de pouvoir calculer des solutions admissibles. Cependant ces solutions sont sous-optimales d'où la nécessité de faire tendre ε vers 0 pour s'approcher de la solution optimale. La Figure 66 illustre le fonctionnement de la méthode des points intérieurs où l'objectif de l'optimisation est de minimiser la température tout en respectant la contrainte. On peut y constater que lorsque ε diminue ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$), la température s'approche de la contrainte sans l'enfreindre.

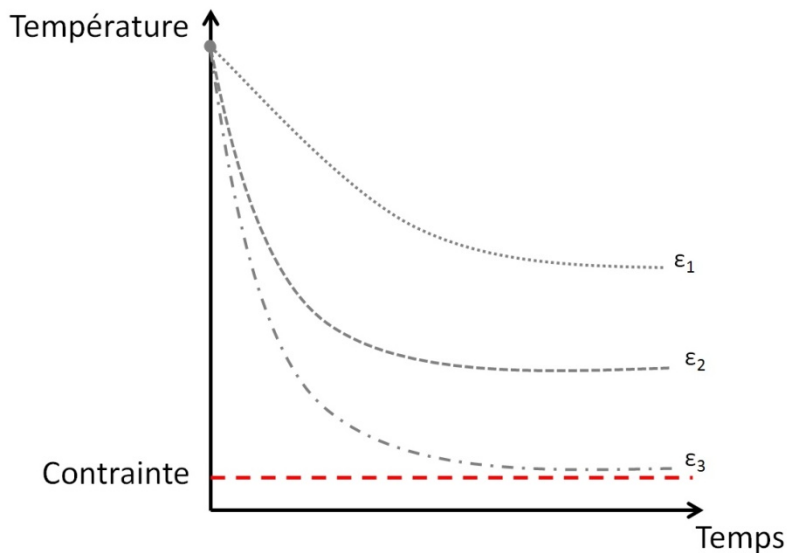


Figure 66 : Illustration du fonctionnement de la méthode des points intérieurs

3.2 Algorithme d'optimisation

L'algorithme utilisé dans le cadre de cette thèse repose sur celui développé par Malisani et al. (2014). Ce dernier permet de résoudre un problème de commande optimale (5.13)-(5.14) sous contraintes et plus précisément correspond à l'extension des méthodes des points intérieurs aux contraintes d'état de la forme $g(x(t)) \leq 0$ et aux contraintes de commande de la forme $u(t) \in C$ où C est un convexe fermé borné.

Cette méthode porte sur la définition des fonctions de pénalité γ_g et γ_u ainsi que d'une fonction de saturation généralisée ϕ ($u = \phi(v)$ correspondant à un changement de variable de la commande u permettant de supprimer la contrainte de commande de la formulation du problème) pour formuler le problème suivant :

$$\min_{v \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)} \int_0^{t_f} L(x^{\phi(v)}, \phi(v)) dt + \varepsilon \int_0^{t_f} \gamma_g(x^{\phi(v)}) + \gamma_u(v) dt \quad (5.18)$$

où γ_g et γ_u sont les fonctions de pénalité portant sur la contrainte d'état et la contrainte de commande respectivement. Il est alors démontré que ce problème (5.18) génère, lorsque ε tend vers 0, une séquence de solutions convergeant vers la solution du problème de commande optimale sous contraintes (5.13)-(5.14). Chaque solution de la séquence est facile à résoudre sachant que le problème (5.18) n'est pas contraint. La définition générale des fonctions de pénalité γ_g et γ_u sont définies dans l'article de Malisani et al. (2014).

Pour résoudre le problème de commande optimale, on définit l'Hamiltonien du problème pénalisé (5.18) :

$$H_\varepsilon(x^{\phi(v)}, v, p) = L(x^{\phi(v)}, \phi(v)) + \varepsilon[\gamma_g(x^{\phi(v)}) + \gamma_u(v)] + p^t f(x^{\phi(v)}, \phi(v)) \quad (5.19)$$

où $p \in \mathbb{R}^n$ est l'état adjoint.

L'algorithme de résolution se déroule de la manière suivante :

Étape 1 : Initialiser les fonctions $x^{\phi(v)}(t)$ et $p(t)$ telles que les valeurs initiales satisfassent $\forall t \in [0, t_f], g(x^{\phi(v)}(t)) < 0$. Définir une série décroissante $\varepsilon_i > 0, i = 0, \dots, N$ et initialiser à $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Étape 2 : Soit l'Hamiltonien $H_\varepsilon(x^{\phi(v)}, v, p)$. Calculer v_ε^* solution de l'équation $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial v} = 0$.

Étape 3 : Résoudre les 2 n équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, \phi(v_\varepsilon^*)), & x(0) &= x_0 \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x}(x, \phi(v_\varepsilon^*), p), & p(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de ce problème aux deux bouts peut être faite à l'aide des routines `bvp5c` ou `bvp4c` du logiciel Matlab (Shampine et al. 2000).

Étape 4 : Si $i = N$, fin. Sinon décroître ε , initialiser $x^{\phi^{(v)}}(t)$ et $p(t)$ avec les solutions trouvées à l'étape 2 et retourner à l'étape 2.

3.3 Application au cas d'étude

On se propose d'appliquer cet algorithme à notre cas d'étude, à savoir l'effacement de la consommation électrique de pointe sur un horizon d'une semaine. Pour rappel, l'objectif de l'optimisation est de déterminer la stratégie optimale qui minimise le coût de la consommation énergétique tout en respectant des contraintes de température de confort (contraintes d'état) et des contraintes de puissance maximale du système de chauffage (contraintes de commande).

3.3.1 Paramètres de l'optimisation

3.3.1.1 Notations du modèle

Nous utilisons le modèle réduit à l'ordre 3 ou 4 suivant (correspondant à un modèle monozone) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BP(t) + d(t) \\ T(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.20)$$

avec

- x l'état du modèle ;
- T la température intérieure de la zone ;
- P la puissance de chauffage (variable de commande) ;
- d l'influence du climat, des occupants et des équipements (apports solaires et internes).

3.3.1.2 Contraintes

Pour rappel, les contraintes portant sur l'état et la commande sont les suivantes :

- **Contraintes d'état** : la température intérieure de la zone doit être comprise entre 19°C (T_{min}) et 24°C (T_{max}).

$$T_{min} \leq T_{zone}(t) \leq T_{max} \quad (5.21)$$

- **Contraintes de commande** : la puissance de chauffage doit être comprise entre 0 W (P_{min}) et 5000 W (P_{max}).

$$P_{min} \leq P(t) \leq P_{max} \quad (5.22)$$

3.3.1.3 Climat

Les conditions météorologiques utilisées pour la résolution du problème de commande optimale sur une semaine sont représentatives d'une période froide d'un mois de janvier de la zone H1C (zone

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

thermique de la réglementation thermique) (Figure 67). La température moyenne sur la semaine considérée est de -2,5°C avec un minimum à -7°C.

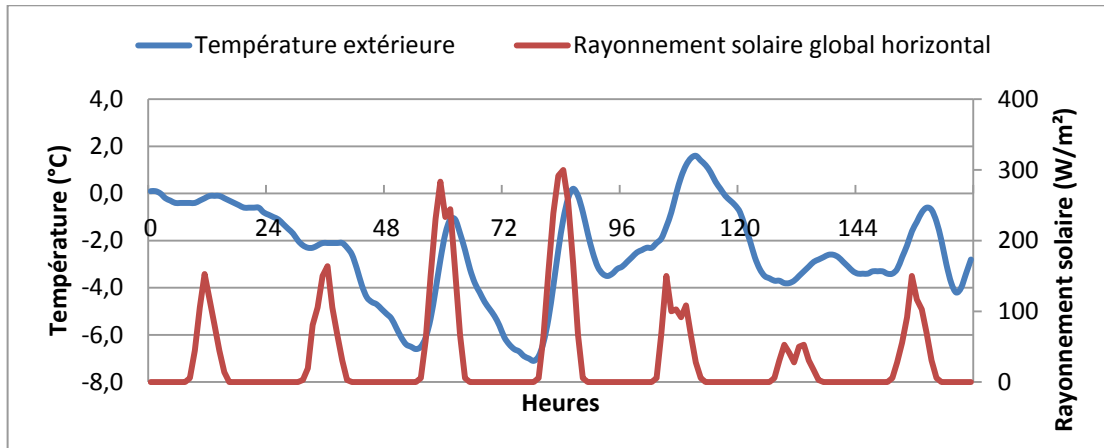


Figure 67 : Conditions météorologiques (semaine froide d'hiver)

3.3.1.4 Scénarios d'utilisation

Les scénarios d'occupation, de ventilation et de puissance dissipée correspondent à ceux définis dans le §2.1 du chapitre 4. Pour rappel, en ce qui concerne la ventilation externe, une valeur moyenne est considérée pour les débits de ventilation dans le système linéaire (§2 du chapitre 2).

3.3.1.5 Tarifs de l'électricité

Les tarifs de l'électricité correspondent à ceux définis au chapitre 4 et sont rappelés dans le Tableau 25.

Tableau 25 : Tarifs des heures creuses, pleines et de pointe

	Heures creuses	Heures pleines	Heures de pointe
Horaire	0h-9h	9h-17h 22h-0h	17h-22h
Prix du kWh en €	0,0864	0,1275	0,255

3.3.2 Résolution du problème de commande optimale

Le but de l'optimisation est de déterminer la stratégie optimale qui minimise la consommation énergétique connaissant les tarifs de l'électricité. Le critère à minimiser est donc le suivant :

$$\min_P \int_0^{t_f} C_{elec}(t)P(t)dt \quad (5.23)$$

où $C_{elec}(t)$ est le coût de l'électricité et $P(t)$ est la puissance de chauffage à injecter dans le bâtiment.

Le problème de commande optimale revient à minimiser le critère (5.23) sous la dynamique (5.20) tout en respectant les contraintes d'état (5.21) et de commande (5.22). Pour résoudre ce problème, la méthode présentée au §3.2 est utilisée.

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

On utilise le changement de variable suivant ($P = \phi(v)$) pour la puissance de chauffage (Malisani 2012) :

$$P = \phi(v) = P_{max} \left(\frac{e^{kv}}{1 + e^{kv}} \right), k > 0 \quad (5.24)$$

L'hamiltonien du problème pénalisé de commande optimale est alors :

$$H(x, v, p) = C_{elec}\phi(v) + p^t(Ax + B\phi(v) + d) + \varepsilon[\gamma_g(Cx - T_{min}) + \gamma_g(T_{max} - Cx) + \gamma_u \circ \phi(v)] \quad (5.25)$$

Le vecteur adjoint doit alors satisfaire l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp}{dt}(t) = -A^t p(t) - \varepsilon C^t [\gamma'_g(Cx(t) - T_{min}) - \gamma'_g(T_{max} - Cx(t))] \quad (5.26)$$

où γ'_g est la dérivée de la fonction γ_g définie de la manière suivante :

$$\gamma_g(s) = \begin{cases} s^{-1.1} & \forall s > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.27)$$

Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de définir explicitement la fonction γ_u . En effet, dans la résolution du problème aux deux bouts, seule la définition de γ'_u est requise (Malisani et al. 2014). L'algorithme utilisé pour résoudre le problème pénalisé de commande optimale est alors le suivant :

Étape 1 : Initialiser les fonctions $x(t)$ et $p(t)$ telle que $Cx(t) \in (T_{min}, T_{max})$ pour tout $t \in [0, t_f]$ (p peut être choisi égal à 0). Fixer $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Étape 2 : Calculer $v_\varepsilon^* = \sinh^{-1} \left(-\frac{C_{elec}(t) + p^t(t)B}{\varepsilon} \right)$, solution⁷ de $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial v} = 0$ où nous avons choisi $\gamma'_u \circ \phi(v) = \sinh(v)$.

La solution optimale $P_\varepsilon^*(t) = \phi(v_\varepsilon^*(t))$ est alors donnée en utilisant l'équation (24).

Étape 3 : Résoudre le problème aux deux bouts suivants :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + BP_\varepsilon^*(t) + d(t) \\ P_\varepsilon^*(t) = \phi \left(\sinh^{-1} \left(-\frac{C_{elec}(t) + p^t(t)B}{\varepsilon} \right) \right) \\ \frac{dp(t)}{dt} = -A^t p(t) - \varepsilon C^t [\gamma'_g(Cx(t) - T_{min}) - \gamma'_g(T_{max} - Cx(t))] \end{cases}$$

avec comme conditions aux limites $x(0) = x_0$ et $p(t_f) = 0$.

Étape 4 : Diminuer ε . Initialiser $x(t)$ et $p(t)$ avec les solutions trouvées à l'étape 3 et retourner à l'étape 2.

La suite (ε_n) a été choisie, dans notre cas d'étude, telle que $\varepsilon_n = 10^{-\frac{n}{10}}$ avec $n = -90 \dots +70$, de telle sorte que ε varie de 10^9 à 10^{-7} .

⁷ $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial v} = 0$ donne $C_{elec}(t) + p^t(t)B + \varepsilon \gamma'_u \circ \phi(v) = 0$

3.3.3 Résultats

La Figure 68 présente les résultats obtenus par l'algorithme d'optimisation en considérant soit un modèle réduit à l'ordre 3 soit un modèle réduit à l'ordre 4. Pour éviter les effets de bords, l'horizon d'optimisation considéré a été fixé à huit jours mais seuls les sept premiers jours de l'optimisation ont été comparés. On peut constater que les stratégies de commande de la puissance de chauffage sont très proches l'une de l'autre. Par exemple, grâce à l'inertie thermique du bâtiment, ces stratégies ne chauffent que pendant les heures creuses. Plus précisément, elles augmentent progressivement la puissance de chauffage utilisée (jusqu'à la puissance maximale) de manière à atteindre une température intérieure suffisante en fin de période d'heures creuses permettant d'assurer, lors de l'effacement de la puissance de chauffage, une température supérieure à la température minimale (19°C) à la fin de période de pointe (Figure 69). On peut également remarquer une pointe de la puissance de chauffage en début de chaque période d'heures creuses pouvant s'expliquer par la discontinuité du coût de l'électricité et la non convexité du critère à minimiser. Enfin, les stratégies calculées par les modèles réduits à l'ordre 3 et 4 présentent un coût cumulé très proche avec 14,31 € et 14,33 € respectivement. Cependant, les temps de calculs de l'optimisation en considérant un modèle réduit soit à l'ordre 3 soit à l'ordre 4 sont respectivement de deux heures et de quatre heures (sur un ordinateur de bureau comprenant 16 Go de mémoire vive et un processeur cadencé à 2,8 GHz). Par conséquent, l'ordre de réduction du modèle a été fixé à trois permettant un bon compromis entre précision du modèle réduit et temps de calculs.

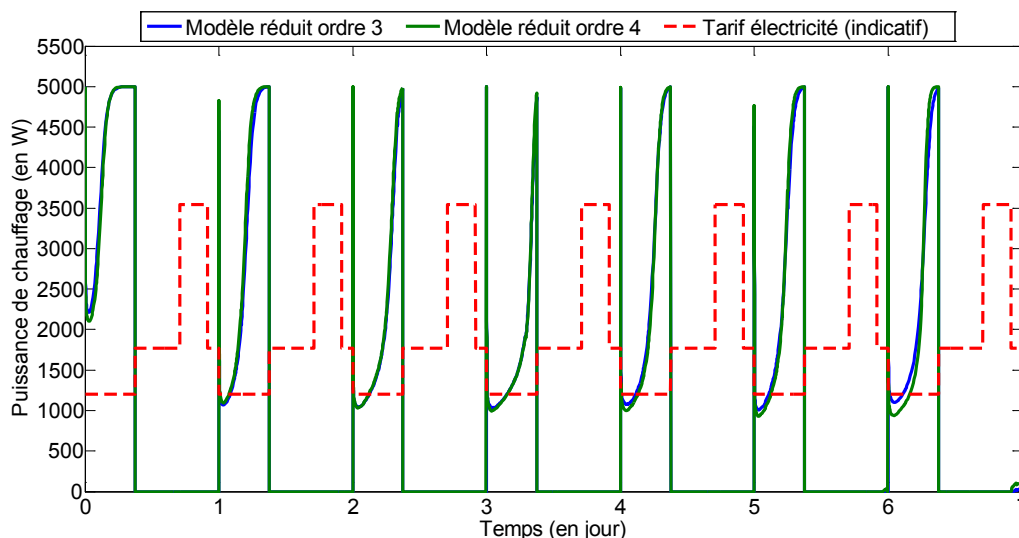


Figure 68 : Stratégies optimales de la puissance de chauffage calculées en considérant un modèle réduit à l'ordre 3 ou à l'ordre 4

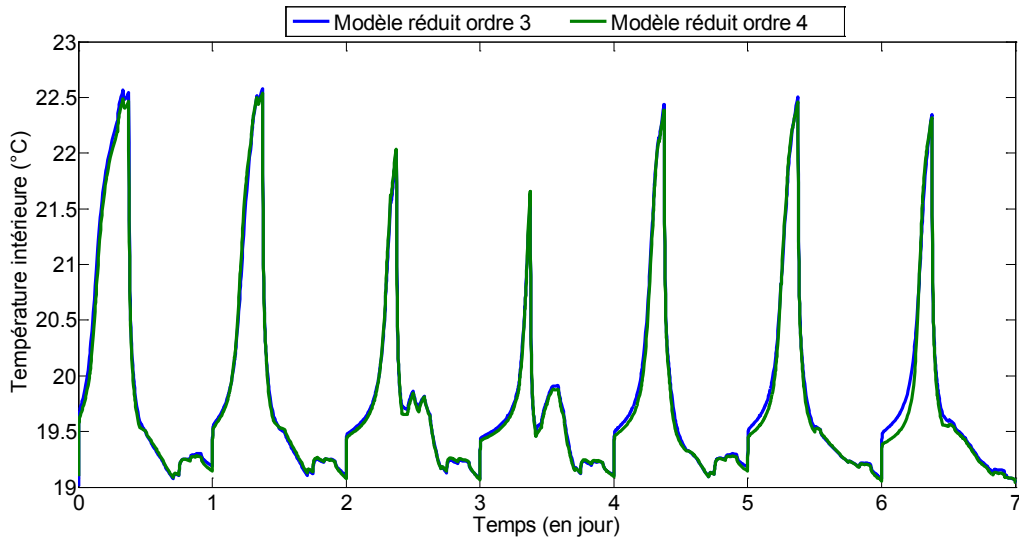


Figure 69 : Évolution de la température intérieure en considérant un modèle réduit à l'ordre 3 ou à l'ordre 4

3.4 Analyse de sensibilité

La mise place d'une commande prédictive nécessite tout d'abord de fixer la période à laquelle la commande optimale est recalculée (période d'échantillonnage). Dans le cas d'application de la gestion énergétique des bâtiments, cette période d'échantillonnage peut dépendre de la mise à jour des prévisions météorologiques (prévisions pouvant être mises à jour d'une à plusieurs fois par jour selon les fournisseurs), de l'estimation de l'état du bâtiment ou encore d'un changement de scénario des sollicitations. Dans l'objectif de développer un algorithme le plus général possible, la période d'échantillonnage a été fixée à 24 heures. Ensuite, il est nécessaire de fixer l'horizon d'optimisation de la commande optimale. Ce choix correspond à un compromis entre temps de calculs et précision de la commande calculée (§ 3.4.1). Enfin, l'évaluation de la robustesse de la commande calculée par rapport aux sollicitations (prévisions météorologiques, occupation) est indispensable dans l'objectif de déterminer la précision des prévisions des sollicitations nécessaire au calcul de la commande optimale (§ 3.4.2).

3.4.1 Horizon d'optimisation

La période d'échantillonnage de la commande prédictive a été fixée à 24 heures. Par conséquent, une analyse de sensibilité peut être menée consistant à comparer, par rapport à une référence, la commande calculée sur les 24 premières heures suivant un horizon testé. Dans cette analyse, la référence correspond aux 24 premières heures de la commande calculée selon un horizon de trois semaines (horizon supérieur à la plus grande constante de temps du modèle réduit d'ordre 3). On peut ainsi évaluer l'impact de l'horizon sur la commande calculée.

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

Deux indicateurs sont utilisés pour comparer les commandes calculées :

- l'écart moyen absolu (en Watt) correspondant à la moyenne des écarts absolus à chaque seconde entre la commande calculée avec un horizon testé et la référence ;
- la variation du coût (en pourcentage) de la commande calculée avec un horizon testé.

Le choix de l'horizon d'optimisation a suivi un processus itératif consistant à incrémenter d'un jour l'horizon d'optimisation si les performances de la commande calculée sur les 24 premières heures s'éloignaient trop de la référence. Les données météorologiques considérées dans cette étude correspondent à celles présentées au § 3.3.1.3 car elles ont l'avantage d'inclure une vague de froid sur trois jours commençant au 2^{ème} jour. Les résultats de cette étude sont présentés dans le Tableau 26 et la Figure 70. Le coût et la puissance moyenne de référence sur 24 heures est de 3,22 € et 1600 W respectivement. Le temps de calcul la commande de référence calculée selon un horizon de trois semaines est d'une dizaine d'heures.

Tableau 26 : Résultats de l'analyse de sensibilité portant sur l'horizon

	Horizon = 1 jour	Horizon = 2 jours	Horizon = 3 jours	Horizon = 4 jours
MAE (W)	850	17	1	0,3
Variation coût (%)	-22	-1	-0,05	-0,01
Temps de calcul (minutes)	12	17	25	49

On peut tout d'abord constater qu'un horizon d'un jour d'optimisation n'est pas suffisant. En effet, les écarts sont importants aussi bien sur la commande calculée (MAE de 850 W) que sur le coût (-22 %). Ceci s'explique par le fait qu'avec un horizon d'un jour, l'algorithme d'optimisation n'anticipe pas la vague de froid commençant au deuxième jour. Par conséquent, il ne surchauffe pas le bâtiment pour anticiper la baisse de température au deuxième jour expliquant ainsi le coût plus faible sur les 24 premières heures. Toutefois, il sera obligé par la suite de chauffer plus pendant la vague de froid conduisant au total à un coût plus élevé. Ensuite, en considérant un horizon de deux jours d'optimisation, on peut remarquer que les performances sont proches entre la commande calculée et la référence, avec un MAE de 17 W et une variation du coût de -1 %. Le coût de la commande calculée est plus faible que la référence car l'algorithme d'optimisation ne voit pas toute la vague de froid qui se termine au troisième jour. Enfin, les résultats de l'optimisation en considérant un horizon de trois jours sont pratiquement équivalents à la référence, avec un MAE de 1 W et une variation du coût de -0,05 %. L'ajout d'un jour dans l'horizon d'optimisation n'améliore qu'à la marge les résultats avec un MAE de 0,3 W et une variation du coût de -0,01 % tout en augmentant significativement les temps de calcul (49 minutes). On peut également noter que, sur la Figure 70, les courbes correspondant à un horizon de trois et quatre jours sont confondues avec la référence.

Suite à cette rapide analyse de sensibilité, il est possible de déterminer l'horizon d'optimisation à considérer. Ce choix correspond à un compromis entre temps de calcul et précision de la commande calculée par rapport à la référence. Un horizon d'optimisation de trois jours a ainsi été considéré dans la suite de l'étude. En effet, bien qu'un horizon de deux jours aurait pu être suffisant, un horizon de trois

jours permet de prendre une sécurité quant à l'anticipation des phénomènes climatiques tout en présentant des temps calculs acceptables. Cependant, ce choix de l'horizon d'optimisation dépend du cas d'étude considéré et en particulier des conditions météorologiques. Une étude de sensibilité plus approfondie serait ainsi nécessaire pour évaluer l'impact de l'horizon d'optimisation en considérant d'autres conditions météorologiques (vague de froid plus longue, conditions intersaisonniers). De plus, le choix de l'horizon d'optimisation se heurte à des considérations pratiques telles que la fiabilité des prévisions météorologiques

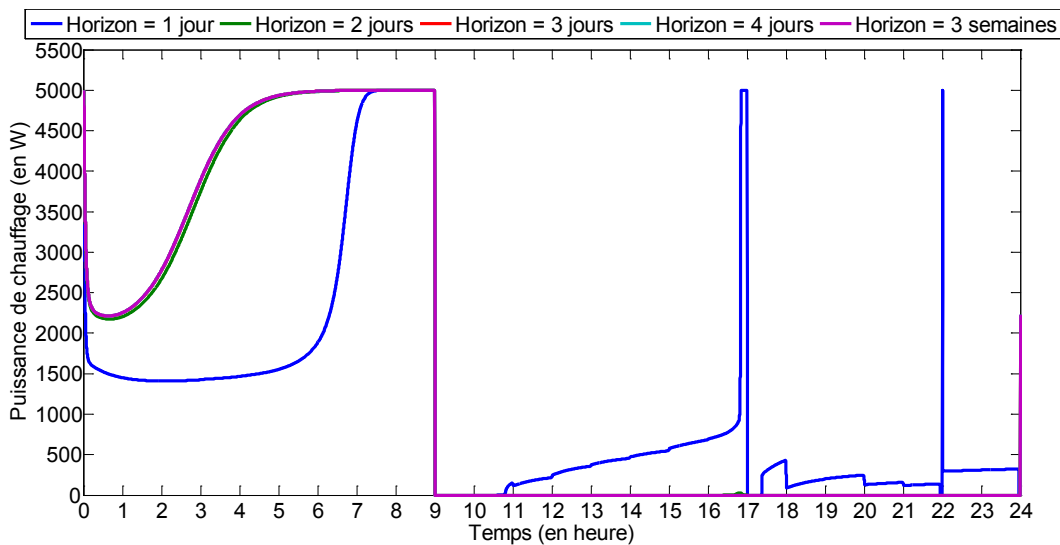


Figure 70 : Commandes calculées selon l'horizon d'optimisation

3.4.2 Échantillonnage des sollicitations

Dans les études précédentes, la prévision des sollicitations (conditions météorologiques, occupation) était considérée comme parfaite. Cette analyse de sensibilité a donc pour objectif d'évaluer la robustesse de la commande calculée par rapport à ces prévisions. Plus précisément, il s'agit de déterminer l'impact de la précision des prévisions des sollicitations sur le calcul de la commande.

Cette analyse peut être réalisée en considérant des sollicitations moyennées. Le principe est ici de ne plus considérer des prévisions des sollicitations heure par heure sur une journée, mais de diviser la journée en un nombre fixe de périodes et de prendre la moyenne des sollicitations sur ces périodes. Par exemple, on considérant une seule période, les sollicitations moyennées correspondront à la moyenne sur une journée des conditions météorologiques et des effets de l'occupation.

Cette méthode présente plusieurs intérêts. Elle permet tout d'abord de déterminer la précision à respecter concernant la prévision des sollicitations. De plus, elle diminue les temps de calculs en simplifiant la résolution du problème. Enfin, elle montre, sur un cas empirique, si l'on peut se satisfaire d'une commande calculée à partir de données météorologiques et d'occupation moyennées. Plus précisément, il s'agit de montrer si la commande obtenue en résolvant un problème de commande optimale similaire au problème réel, mais où la dynamique des sollicitations est remplacée par des moyennes, donnera lieu, une fois utilisée dans le problème réel, à un coût proche du coût minimal.

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

Cette méthode découle des travaux théoriques réalisés par Bernard (2014). Ces travaux ont montré qu'il était possible de réaliser une majoration de la différence des coûts correspondant l'un à la commande optimale réelle et l'autre à la commande obtenue par échantillonnage.

Dans cette analyse, la référence est la même que celle utilisée dans le § 3.4.1, à savoir une optimisation sur un horizon de trois semaines en considérant des sollicitations parfaitement connues. Les mêmes indicateurs sont également utilisés. Plusieurs échantillonnages ont été testés, à savoir des échantillonnages sur une période, sur deux périodes, sur trois périodes et sur quatre périodes, en considérant à chaque fois un horizon d'optimisation de trois jours. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 27 et la Figure 71.

Tableau 27 : Résultats de l'analyse de sensibilité portant sur les sollicitations

	1 période	2 périodes	3 périodes	4 périodes
MAE (W)	34	33	37	2,5
Variation coût (%)	2,1	2,1	-2,4	-0,2
Temps de calcul (minutes)	9	12	13	14

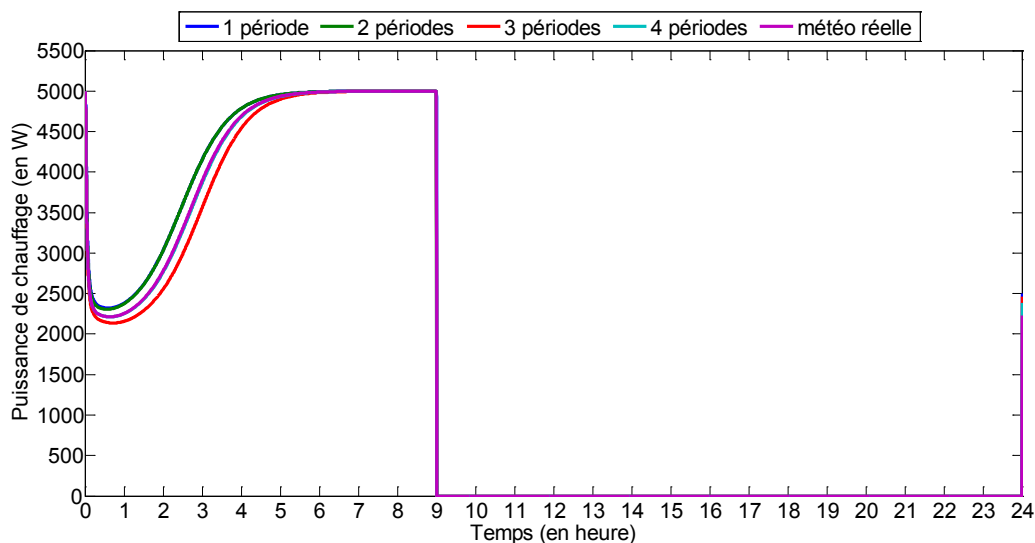


Figure 71 : Commandes calculées selon l'échantillonnage des sollicitations

On peut noter que lorsque l'on moyenne les sollicitations sur une période la commande calculée par le problème moyenné a tendance à être supérieure à la commande de référence (MAE de 34 W), entraînant une augmentation du coût. Les résultats sont équivalents lorsque l'on considère deux périodes (avec un MAE de 33 W et une variation du coût de 2,1 %). Le constat est inverse lorsque l'on considère un échantillonnage sur trois périodes (MAE de 37 W et variation du coût de -2,4 %). Bien que minimes, ces différences peuvent entraîner un risque de violation des contraintes de confort lors de l'application de la commande calculée par le problème moyenné au modèle réel (correspondant aux sollicitations parfaitement connues). On peut cependant remarquer les très bonnes performances de l'échantillonnage sur quatre périodes, avec un MAE de 2,5 W et une variation du coût de -0,2 %. Par

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

conséquent cela signifie qu'il est nécessaire de connaître en moyenne les sollicitations, et en particulier les conditions météorologiques, sur quatre périodes (correspondant d'un point de vue physique à la nuit, le matin, l'après-midi et le soir) pour obtenir un coût proche du coût optimal. Les sollicitations moyennées sont présentées de la Figure 72 à la Figure 74 et les quatre périodes sont définies comme suit :

- 1^{ère} période : 0 h - 8 h ;
- 2^{ème} période : 8 h - 13 h ;
- 3^{ème} période : 13 h - 18 h ;
- 4^{ème} période : 18 h - 0 h ;

En conclusion de cette analyse de sensibilité, un horizon d'optimisation de trois jours et un échantillonnage des sollicitations sur quatre périodes seront considérés dans la suite lors de la mise en place de la commande prédictive.

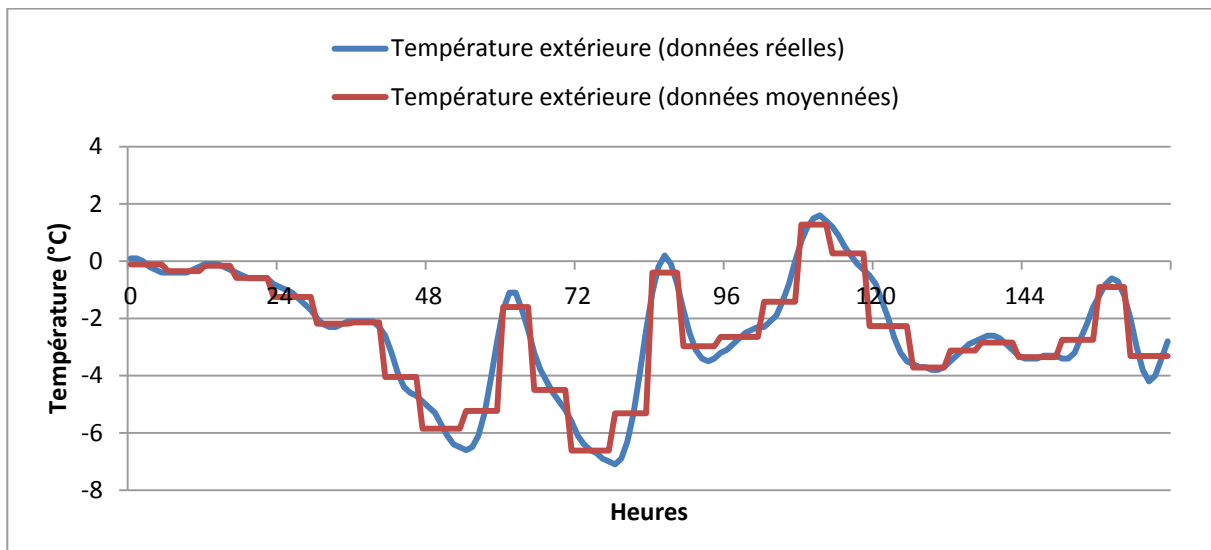


Figure 72 : Température extérieures (données réelles et données moyennées)

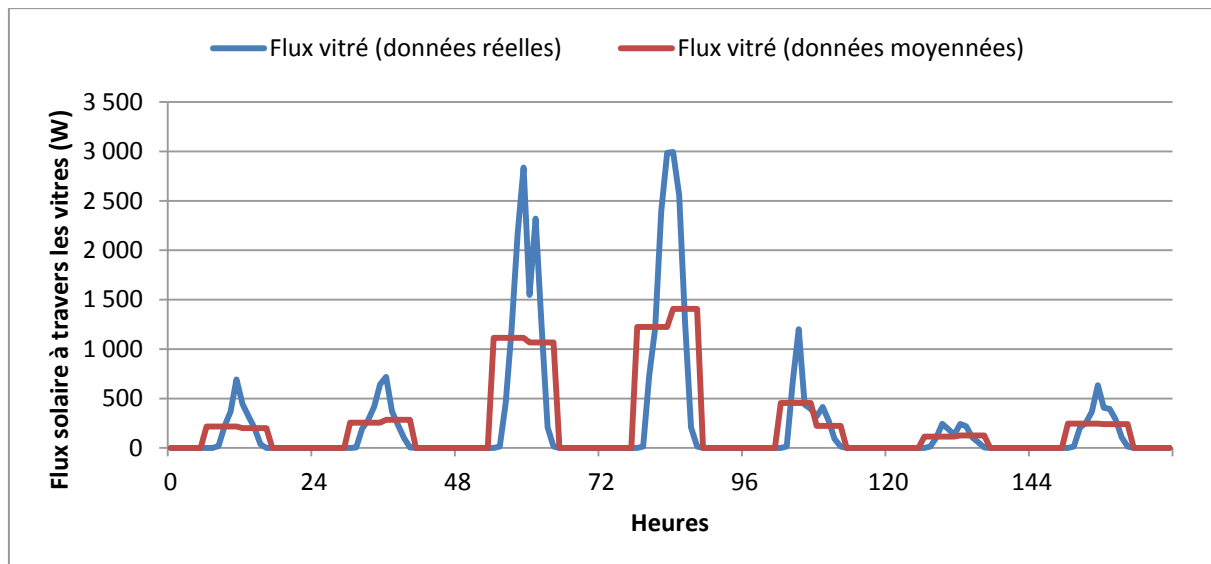


Figure 73 : Flux solaire passant à travers les vitres (données réelles et données moyennées)

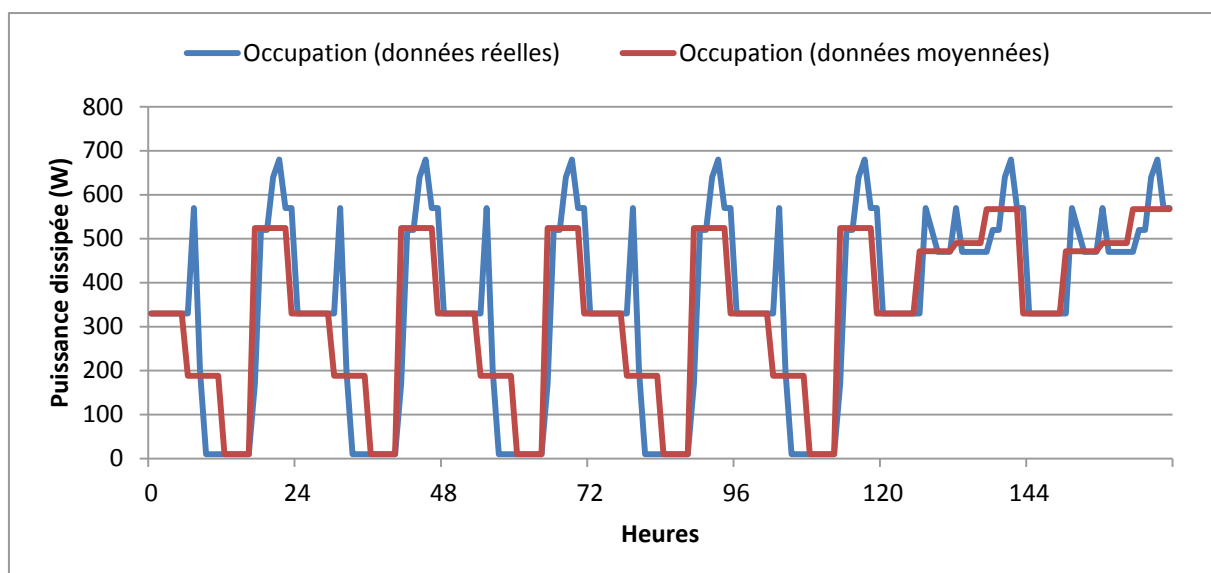


Figure 74 : Puissance dissipée due à l'occupation et aux équipements (données réelles et données moyennées)

4. OBSERVATEUR ASYMPTOTIQUE

L'utilisation de l'algorithme d'optimisation, présenté au paragraphe précédent, nécessite de connaître les conditions initiales portant sur l'état ($x(0) = x_0$), c'est-à-dire l'état du bâtiment. Cependant, celui-ci n'est pas directement mesurable : la simple mesure de sa température intérieure n'est pas suffisante pour le caractériser. Il est indispensable de pouvoir estimer cet état à partir d'un observateur. Ce dernier a pour vocation de reconstruire l'état du bâtiment en se basant sur un modèle dynamique. L'objectif de cette partie est de construire un tel observateur.

4.1 Structure de l'observateur

Soit un système à réguler modélisé par la représentation d'état suivante avec m entrées notées u , n états notés x et p sorties notées y :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.28)$$

où A est une matrice $n \times n$, B une matrice $n \times m$ et C une matrice $p \times n$, avec $p < n$. En général, l'état du système n'est pas complètement accessible ou mesurable. La dimension du vecteur d'état est en effet supérieure à celle de la sortie. Cela signifie que pour tout instant t , le vecteur $x(t)$ ne peut être complètement mesuré ou déduit des sorties. Cependant, ce dernier peut être reconstruit à l'aide d'un observateur dimensionné judicieusement dans l'objectif de réaliser une estimation précise et rapide de la valeur des composantes du vecteur d'état $x(t)$. On notera dans la suite par $\hat{x}(t)$ et $\hat{y}(t)$ les estimations des quantités $x(t)$ et $y(t)$ respectivement. Le principe général (Figure 75) est qu'à partir des entrées u et des sorties mesurées y l'observateur puisse estimer l'état du système à réguler ($\hat{x}(t)$).

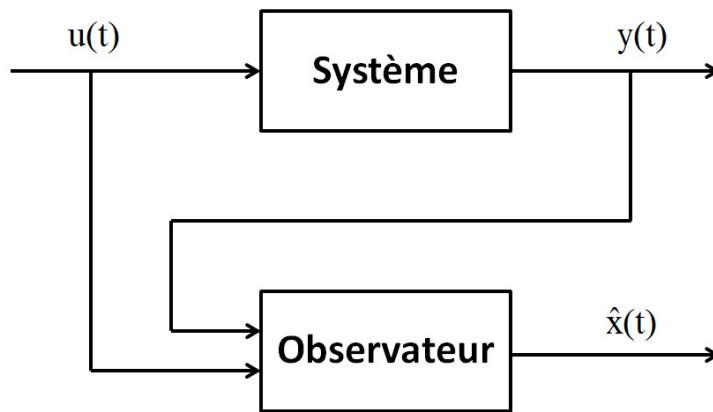


Figure 75 : Diagramme d'un observateur

L'idée générale de l'observateur asymptotique est de reprendre la dynamique de l'état et de la modifier par un terme correspond à l'erreur d'observation. La structure de l'observateur peut alors être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.29)$$

Le problème consiste alors à choisir la matrice L de façon à ce que la solution \hat{x} du système (5.28) converge vers x . Plus précisément, considérons la dynamique de l'erreur d'estimation $e_x = \hat{x} - x$ définie par :

$$\frac{d}{dt}e_x = (A - LC)e_x \quad (5.30)$$

L'objectif est de s'assurer que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0, c'est-à-dire d'imposer, par un choix judicieux de L , que toutes les valeurs propres de $A - LC$ soient à partie réelle

strictement négative. La construction d'un tel observateur asymptotique est possible si et seulement si (A, C) est observable. Dans l'objectif d'assurer une dynamique de l'erreur d'estimation plus rapide que celle du système en boucle ouverte, les valeurs propres de $A - LC$ doivent être choisies judicieusement. Cependant, en pratique on est limité au niveau de la grandeur de cette dynamique et il n'est pas possible de prendre des dynamiques très grandes. En effet, d'une part on ne peut choisir que des gains réalisables, et d'autre part plus le gain sera élevé plus les bruits influenceront sur la reconstruction de l'état.

4.2 Application

La construction d'un tel observateur a été appliquée à notre cas d'étude. Le modèle du bâtiment utilisé dans l'algorithme d'optimisation est un modèle réduit d'ordre trois ($\dim x = 3$) et nous ne disposons en sortie que de la température intérieure ($\dim y = 1$). Le dimensionnement de la matrice L (réalisé sous Matlab) a été fait de manière à assurer une convergence plus rapide de l'observateur (la réponse de l'observateur à un échelon de puissance de chauffage est de quelques secondes) par rapport à la dynamique du modèle réduit d'ordre 3 tout en assurant un gain pas trop élevé.

Pour valider le fonctionnement de cet observateur, une comparaison sur un cas d'étude entre l'état estimé et l'état réel est nécessaire. Pour cela, on se place dans le cas d'étude défini au § 3.3.3. Connaissant parfaitement les sollicitations et en utilisant le profil optimal de puissance calculé, il est possible de simuler l'évolution de l'état du système d'ordre 3 et d'obtenir les températures simulées. Suite au dimensionnement de la matrice L , on peut alors simuler l'évolution de l'état estimé et le comparer à l'état réel. Les résultats sont présentés de la Figure 76 à la Figure 78 où l'on a considéré un état estimé initial nul. Il s'agit d'une configuration très défavorable où l'erreur entre l'état réel et l'état estimé est importante. Dans la pratique, cette erreur sera beaucoup plus faible. On peut constater que la convergence de l'erreur entre l'état estimé et l'état réel est d'environ quatre jours. Après cette période, l'évolution des courbes de l'état réel et de l'état estimé sont confondues. Ainsi, lors de l'estimation de l'état du bâtiment, il est suffisant de disposer des mesures des sollicitations (conditions météorologiques, occupation et puissance de chauffage) et de la température du bâtiment sur quatre jours pour s'assurer de la convergence de l'observateur asymptotique.

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

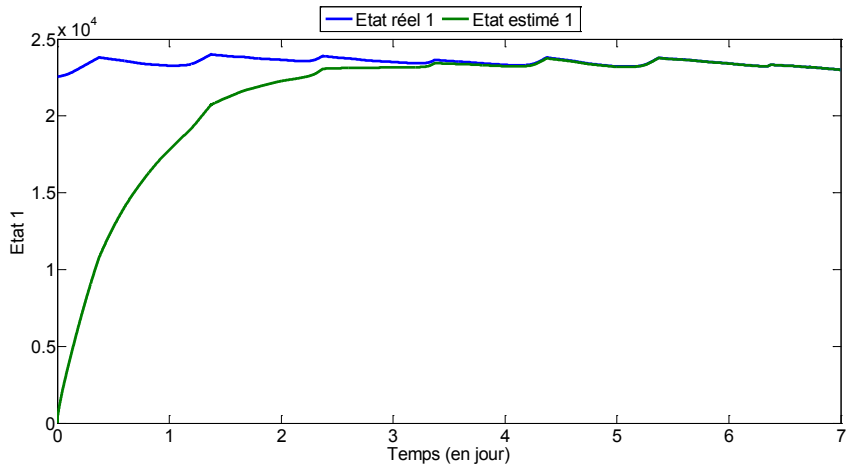


Figure 76 : Comparaison entre l'état réel 1 et l'état estimé 1

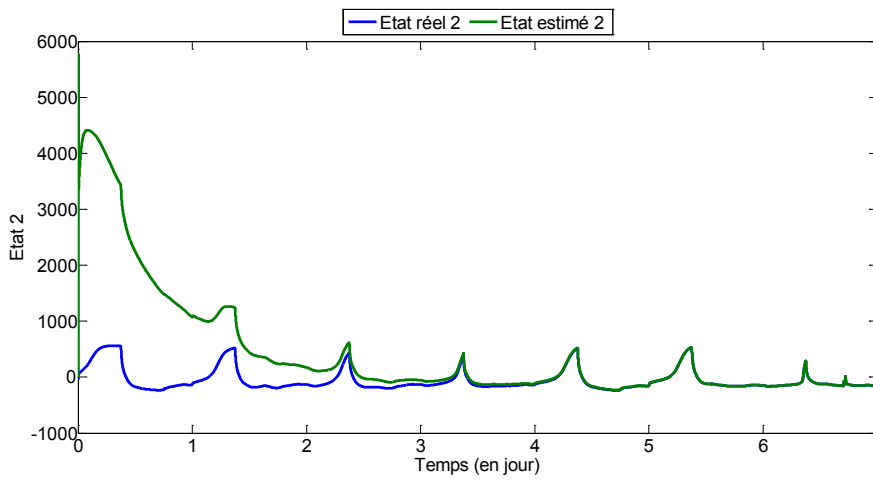


Figure 77 : Comparaison entre l'état réel 2 et l'état estimé 2

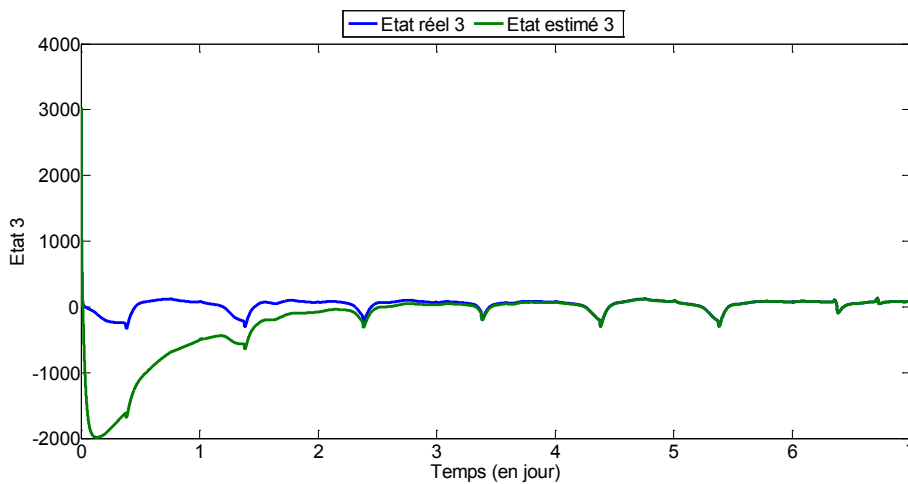


Figure 78 : Comparaison entre l'état réel 3 et l'état estimé 3

5. COMMANDE PRÉDICTIVE

Suite à la définition de l'algorithme d'optimisation (§ 3) et de l'observateur asymptotique (§ 4) permettant d'une part de calculer la commande optimale en boucle ouverte et d'autre part d'initialiser l'algorithme d'optimisation, il est désormais possible de mettre en place la commande prédictive. Cette commande prédictive a pour objectif de réguler un bâtiment en temps réel avec une mise à jour de la commande optimale toutes les 24 heures (période d'échantillonnage).

Ne disposant pas d'un bâtiment réel pour étudier le comportement de la commande prédictive, cette dernière sera étudiée en simulation numérique. Le modèle de bâtiment considéré correspond au modèle complet (de dimension 28) modélisé par COMFIE auquel on a rajouté les corrections concernant les échanges par ventilation. Pour rappel (§ 2 du chapitre 2), une valeur moyenne est considérée pour les débits de ventilation externe dans le système complet. Les corrections concernant les échanges par ventilation consistent à prendre en compte les écarts par rapport à la moyenne. Le comportement de la commande prédictive sera étudié sur deux cas d'application correspondant à la mise en place ou non d'un suivi de trajectoire par un régulateur.

5.1 Commande prédictive sans contrôleur

5.1.1 *Fonctionnement de la commande prédictive*

Le fonctionnement de la commande prédictive se déroule en cinq étapes.

La première étape (Figure 79) correspond à l'initialisation. Lors de cette étape, une consigne de chauffage constante (par exemple 19°C) peut être appliquée au bâtiment. L'objectif de cette étape est double. Le premier est de modéliser le bâtiment à réguler grâce au logiciel de simulation thermique dynamique Pléiades+COMFIE. Le modèle du bâtiment ainsi obtenu est ensuite réduit à l'ordre 3 (par la réalisation équilibrée § 2) dans le but de l'utiliser pour le calcul de la commande optimale (étape n°3). Le second objectif est de collecter les données nécessaires pour estimer l'état du bâtiment (étape n°2). La convergence de l'observateur asymptotique étant de quatre jours environ (§ 4), il est nécessaire de disposer d'au moins quatre jours de données concernant la température intérieure du bâtiment, la puissance de chauffage injectée ainsi que les sollicitations (conditions météorologiques, occupation).

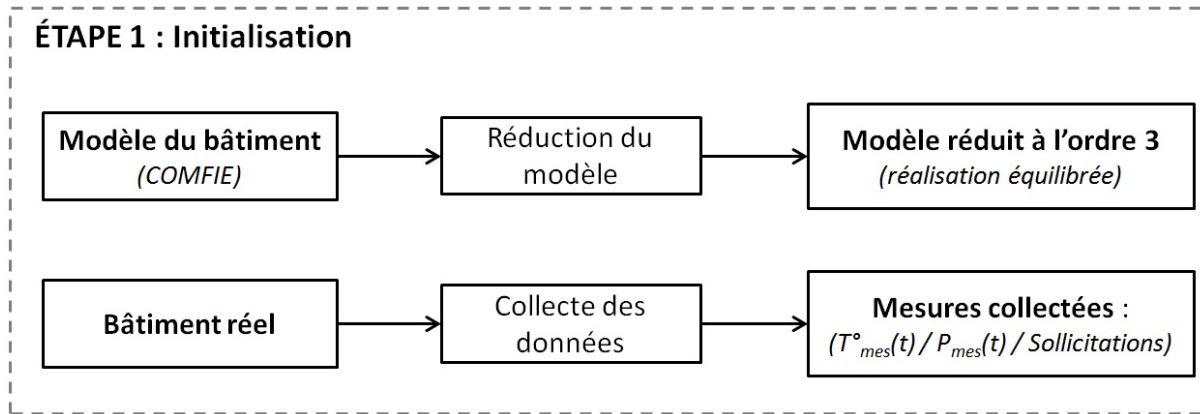


Figure 79 : Schéma de l'étape n°1

Suite à l'initialisation, il est possible lors de l'étape n°2 d'estimer l'état initial du bâtiment (Figure 80). Grâce aux mesures collectées à l'étape n°1 et au développement d'un modèle réduit d'ordre 3 du bâtiment, il est possible d'estimer l'état du bâtiment à partir d'un observateur asymptotique basé sur la dynamique du modèle réduit (§ 4). Cette étape est indispensable pour déterminer les conditions initiales nécessaires à la résolution du problème de commande optimale (étape n°3).

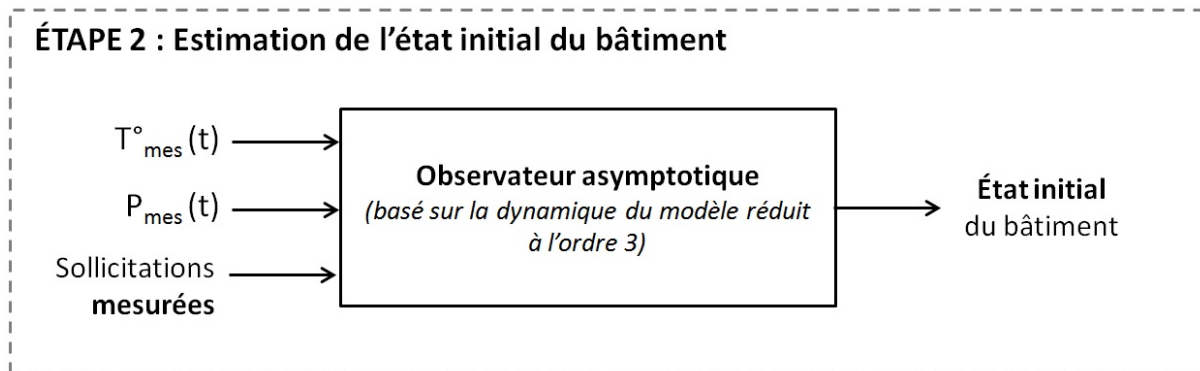


Figure 80 : Schéma de l'étape n°2

L'état du bâtiment étant connu, il est alors possible de résoudre le problème de commande optimale et de calculer la commande de chauffage grâce à l'algorithme présenté au § 3 (Figure 81). Dans le but de diminuer les temps de calculs et suite à l'analyse de sensibilité, seule la connaissance de la tendance des prévisions des sollicitations à trois jours (sollicitations moyennées sur quatre périodes) est nécessaire pour calculer une commande proche de la commande optimale. Cette étape permet alors de définir la commande de chauffage à appliquer au bâtiment (profil de puissance de référence) ainsi que l'évolution supposée de la température à l'intérieur du bâtiment (trajectoire de température de référence).

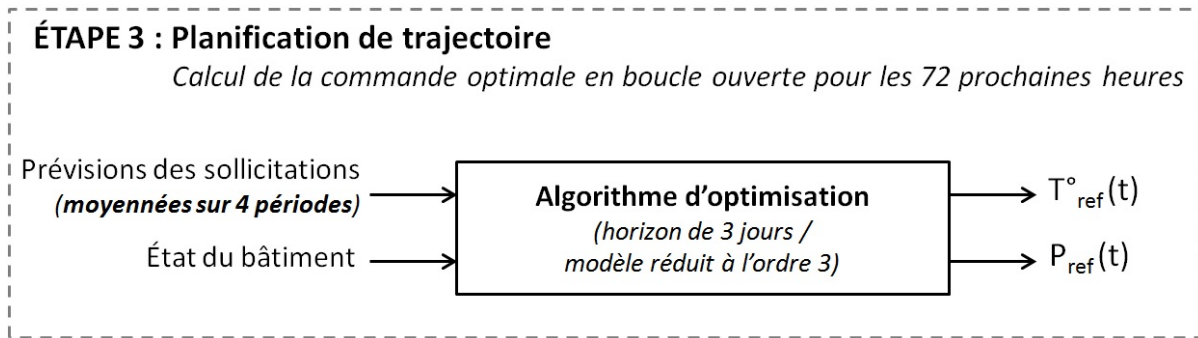


Figure 81 : Schéma de l'étape n°3

Dans le cas de la commande prédictive sans contrôleur, l'étape n°4 (Figure 82) correspond simplement à l'application sur les 24 premières heures du profil de puissance de référence (calculée pour les 72 prochaines heures) au bâtiment à réguler. Lors de cette étape la température réelle à l'intérieure du bâtiment est mesurée.

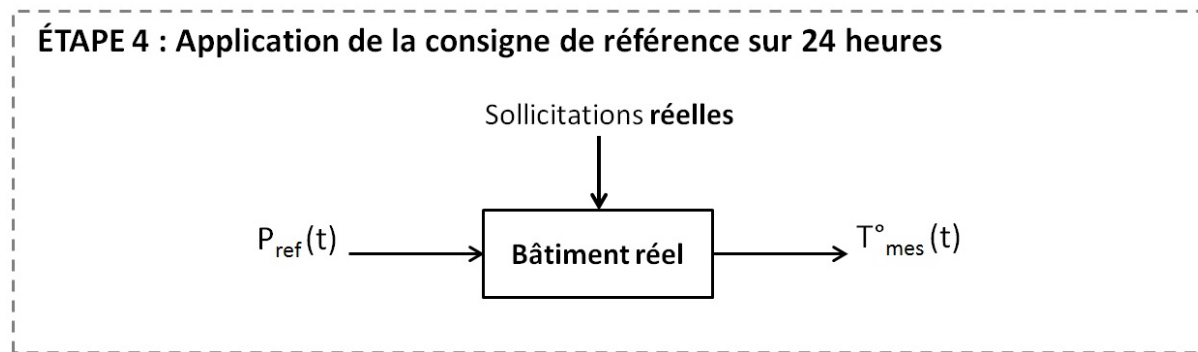


Figure 82 : Schéma de l'étape n°4 (sans régulateur)

Enfin, lors de l'étape n°5 (Figure 83), l'état courant du bâtiment est estimé suite à l'application du profil de puissance de référence sur 24 heures et à la mesure des sollicitations et de la température intérieure. Cet état estimé permettra alors de fermer la boucle et de retourner à l'étape n°3 pour calculer la commande de référence pour les 72 prochaines heures.

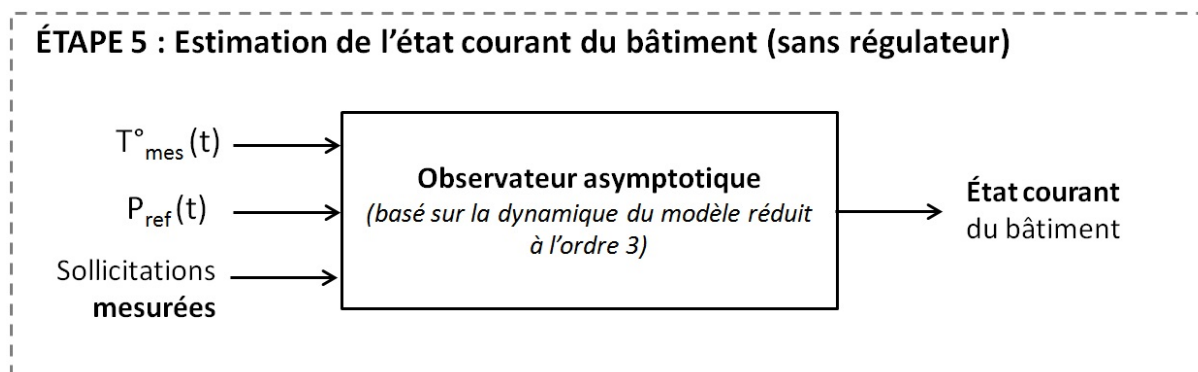


Figure 83 : Schéma de l'étape n°5

5.1.2 Résultats

La commande prédictive sans régulateur a été appliquée sur le cas d'étude défini au § 3.3.1 où la commande de la puissance de chauffage est mise à jour tous les jours à minuit. Les résultats sont présentés dans la Figure 84 et la Figure 85. Le coût de la commande de chauffage sur une semaine est de 13,37 €. On peut remarquer que le profil de la puissance de chauffage est très proche de celui calculé par la commande optimale sur un horizon d'une semaine avec les sollicitations parfaitement connues (§ 3.3.3). On constate par exemple que l'ensemble des heures pleines et de pointe sont effacées. En ce qui concerne les profils de température (Figure 85), plusieurs remarques peuvent être faites. Pour rappel, la température de référence (en bleu) correspond à la trajectoire calculée par la commande optimale avec un modèle réduit d'ordre 3 (sans correction sur la ventilation) et des sollicitations moyennées sur quatre périodes. La température mesurée (en vert) correspond quant à elle à la température simulée lorsqu'on applique le profil de puissance de référence au modèle complet (avec correction sur la ventilation) sous les sollicitations réelles. On constate que lors de la surchauffe du bâtiment pendant les heures creuses, la température mesurée et la température de référence sont proches. Cependant, lors des heures pleines, on peut remarquer une différence avec une température mesurée supérieure à la température de référence. Ce phénomène est particulièrement remarquable au troisième et quatrième jour. L'origine de ces différences est double. D'une part elles s'expliquent par le fait que la commande optimale (à partir de laquelle est calculée la trajectoire de référence) utilise des données de sollicitations moyennées. Ainsi, la valeur moyenne des sollicitations lors de cette période est inférieure à la valeur réelle des sollicitations (en particulier pour le rayonnement) expliquant la remontée de la température mesurée. Ce phénomène est mis en évidence sur la Figure 86 où l'on compare les températures de référence calculées avec des sollicitations réelles et moyennées. D'autre part, ces écarts peuvent également s'expliquer par une différence dans la dynamique de l'évolution de la température. En effet, la trajectoire de température de référence est calculée en considérant le modèle réduit à l'ordre 3 (sans correction sur la ventilation) alors que la température mesurée est calculée en considérant le modèle complet (avec correction sur la ventilation). Ce phénomène est mis en évidence sur la Figure 87 où l'on compare les températures de référence et mesurée en considérant dans les deux cas des sollicitations réelles. On constate alors que le modèle réduit à l'ordre 3 a tendance à surestimer la chute de température pendant les heures pleines et de pointe.

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

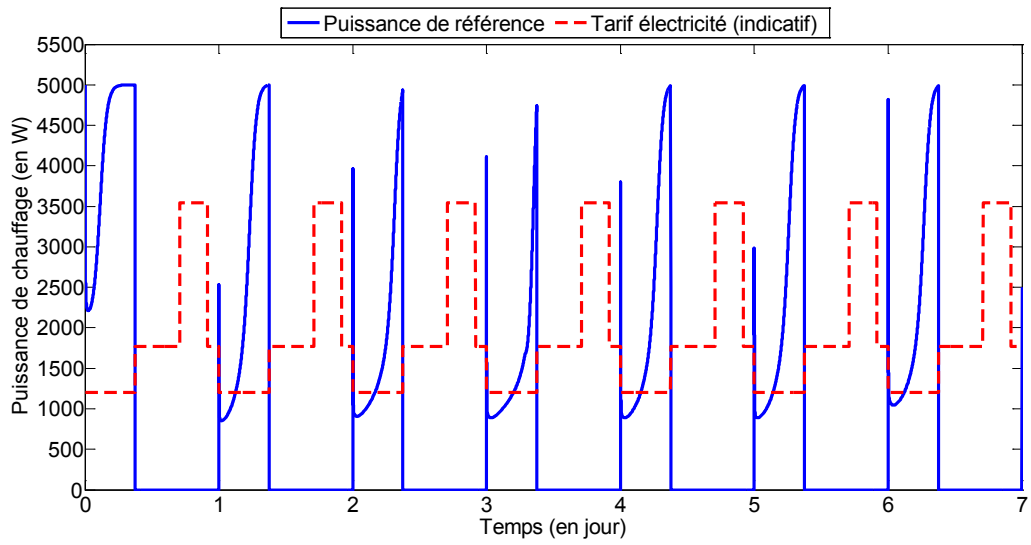


Figure 84 : Puissance de référence calculée par la commande prédictive sans régulateur

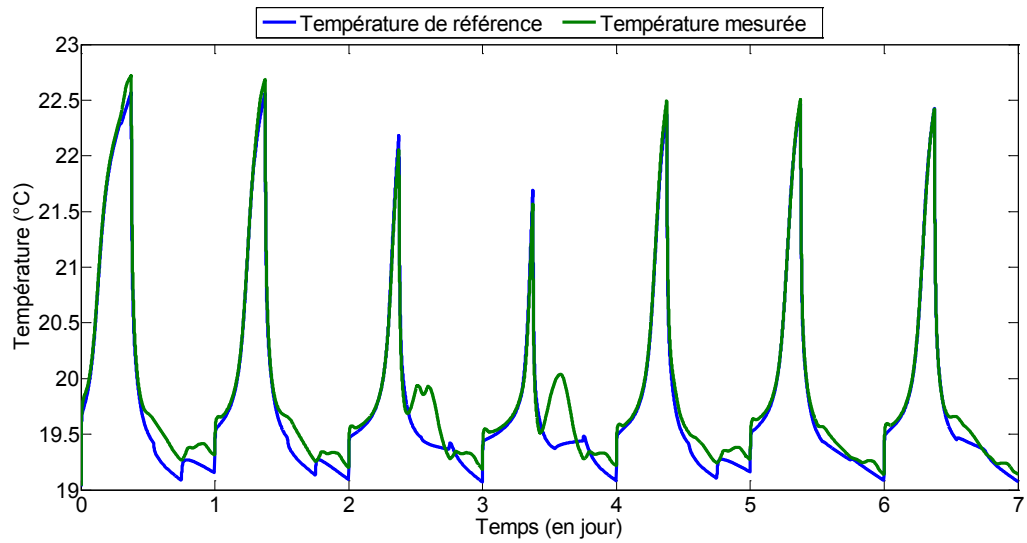


Figure 85 : Comparaison entre la température de référence et la température mesurée

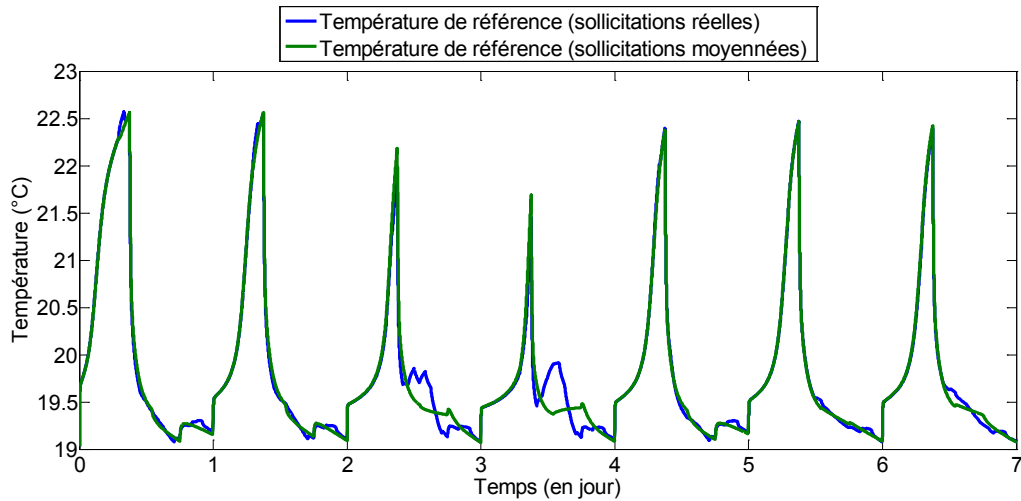


Figure 86 : Comparaison entre les températures de référence calculées avec des sollicitations réelles ou moyennées

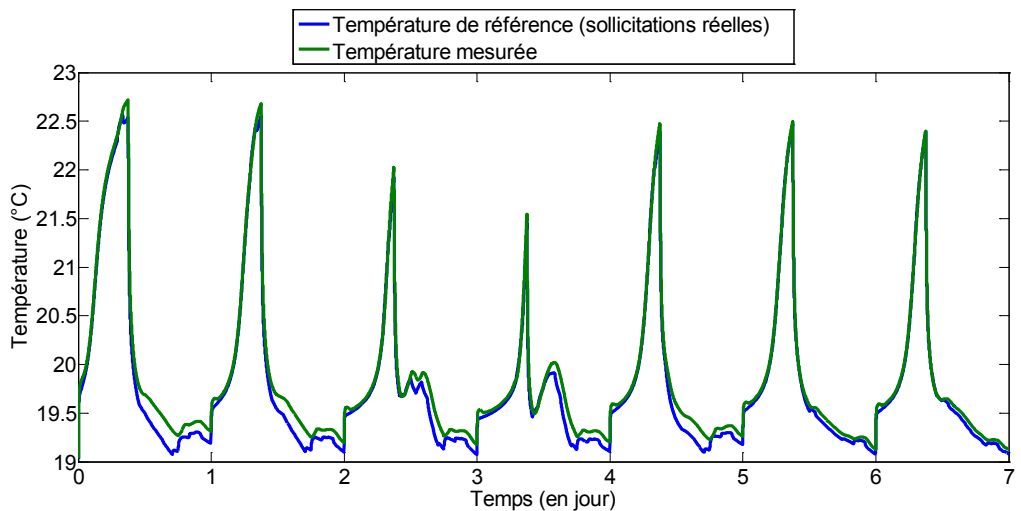


Figure 87 : Comparaison entre la température de référence (solicitations réelles) et la température mesurée

Enfin, il peut être intéressant de comparer les profils de puissance de référence obtenus avec des sollicitations réelles et moyennées (Figure 88). On constate que ces profils sont quasiment confondus et que les coûts calculés sont très proches avec respectivement 13,37 € et 13,32 €. Ces résultats valident l'intérêt de l'utilisation de sollicitations moyennées permettant d'obtenir une commande de la puissance de chauffage proche de la commande optimale tout en diminuant les temps de calcul.

En pratique, l'ajout d'un régulateur est nécessaire pour faire face à des événements imprévus (tels que des perturbations) et s'assurer de suivre la trajectoire de référence.

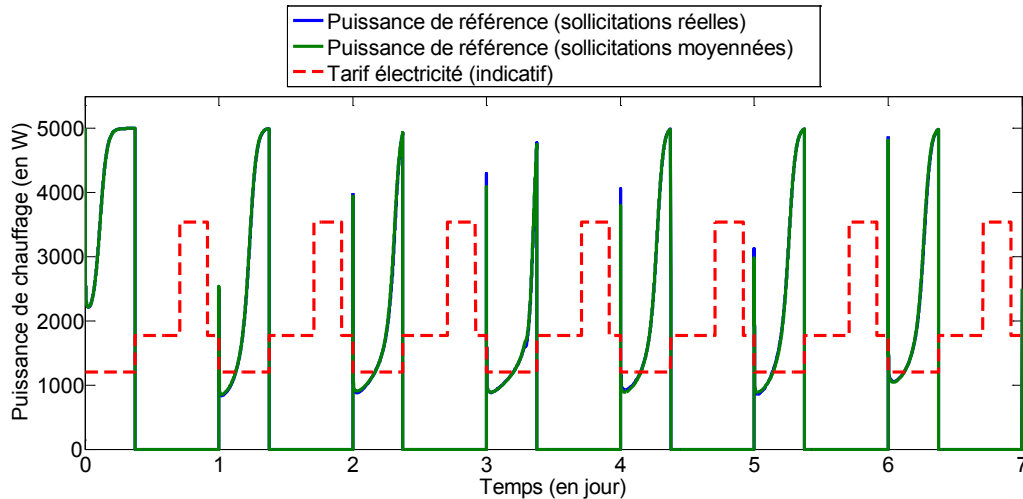


Figure 88 : Comparaison entre les puissances de référence calculées avec des sollicitations réelles ou moyennées

5.2 Commande prédictive avec régulateur

Lors de l'application de la commande de référence au bâtiment réel (étape n°4), des écarts peuvent être constatés entre l'évolution supposée de la température à l'intérieur du bâtiment (trajectoire de température de référence) et la température réellement mesurée. Ces écarts peuvent être la conséquence d'erreurs de modélisation (le modèle utilisé pour la planification de trajectoire est un modèle réduit d'ordre 3) ou d'erreurs dans l'échantillonnage des sollicitations et leurs prévisions (la trajectoire de référence est calculée à partir de la prévision des sollicitations moyennées sur quatre périodes). Une solution est de mettre en place un *feedback* qui assure le suivi asymptotique de la trajectoire de référence. Plus précisément, il s'agit de corriger la commande de chauffage calculée en boucle ouverte en fonction de l'erreur entre la température de référence et la température mesurée pour compenser les déviations entre la trajectoire réelle et la trajectoire de référence (Figure 89). Ce suivi de trajectoire peut être assuré par la mise en place d'un régulateur lors de l'étape n°4.

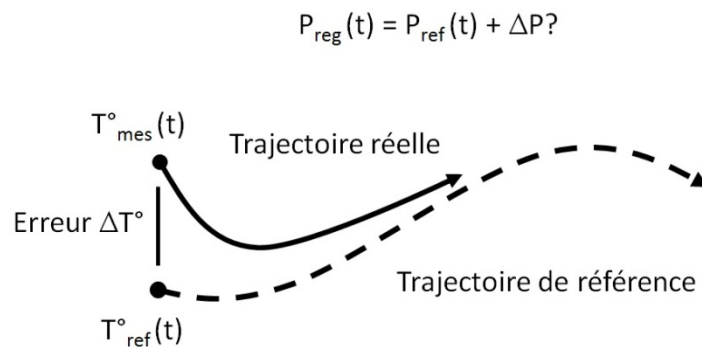


Figure 89 : Schéma de principe du suivi de trajectoire (adapté de Petit et Rouchon (2014))

5.2.1 Définition du régulateur

Le régulateur PI (proportionnel / intégral) est classiquement employé pour la régulation des bâtiments et peut être utilisé pour assurer le suivi de trajectoire. Le principe est alors de lui ajouter un terme d'anticipation, terme correspondant à la puissance de chauffage de référence calculée à l'étape n°3. Dans ce cadre, la puissance en sortie du régulateur peut être définie par :

$$\begin{cases} e(t) = T_{ref}^{\circ}(t) - T_{mes}^{\circ}(t) \\ P_{reg}(t) = S^{at} \left(P_{ref}(t) + K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \right] \right) \end{cases} \quad (5.31)$$

où S^{at} est la fonction de saturation permettant de respecter les contraintes, K est le gain proportionnel et T_i est le temps d'intégration. La fonction S^{at} est ici définie par :

$$\begin{cases} S^{at}(s) = P_{max} & \text{si } s > P_{max} \\ S^{at}(s) = s & \text{si } s \in [P_{min}, P_{max}] \\ S^{at}(s) = P_{min} & \text{si } s < P_{min} \end{cases} \quad (5.32)$$

L'intérêt de cette formulation est double. D'une part, l'ajout du terme d'anticipation permet de mieux gérer les variations de la trajectoire de référence (par exemple lors de la surchauffe du bâtiment pendant les heures creuses). D'autre part, la partie rétroaction permet quant à elle de compenser les erreurs du modèle du bâtiment ou encore les erreurs dans les prévisions des sollicitations.

En considérant le régulateur ainsi défini, un phénomène d'emballement peut apparaître. Ce phénomène se manifeste lorsque la commande calculée par le régulateur est différente de celle appliquée au système, c'est-à-dire lorsque la commande calculée par le régulateur dépasse les contraintes. Le régulateur continue alors d'intégrer l'erreur et à fournir une valeur de commande très supérieure (respectivement inférieure) à P_{max} (respectivement P_{min}). Un mécanisme d'anti-emballement (*anti-windup*) est alors classiquement ajouté au régulateur pour contrer ce phénomène. Une des solutions est de stopper l'intégration de l'erreur dès que la commande calculée sature (Astrom et Hagglund 1995). Les paramètres du régulateur ainsi défini ont été identifiés à l'aide du logiciel Matlab ($K = 2 \times 10^4 \text{ W/}^{\circ}\text{C}$ et $T_i = 30$ secondes).

L'étape n°4, définie au § 5.1.1, a été par conséquent modifiée par l'ajout de ce régulateur permettant de réaliser le suivi de trajectoire (Figure 90). Suite à cette étape, on dispose de la puissance en sortie du régulateur, ainsi que des mesures des sollicitations et de la température à l'intérieur du bâtiment. Ces données sont ensuite utilisées pour estimer l'état courant du bâtiment à l'étape n°5, où la puissance de référence (utilisée dans le cas de la commande prédictive sans régulateur) est remplacée par la puissance en sortie du régulateur (Figure 91). A la suite de cette étape, on retourne à l'étape n°3 pour calculer la commande de référence pour les 24 prochaines heures.

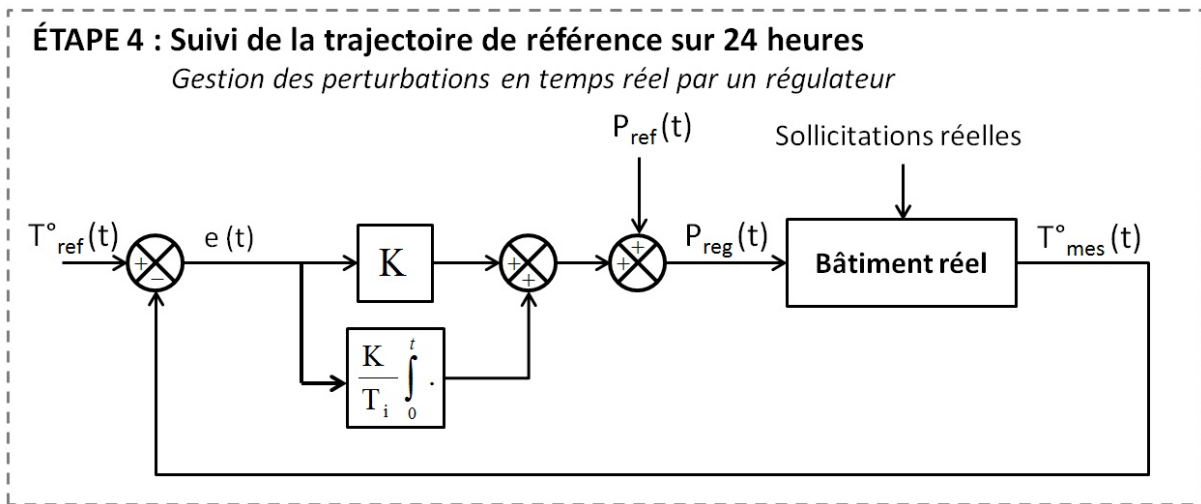


Figure 90 : Schéma de l'étape n°4 modifiée (avec régulateur)

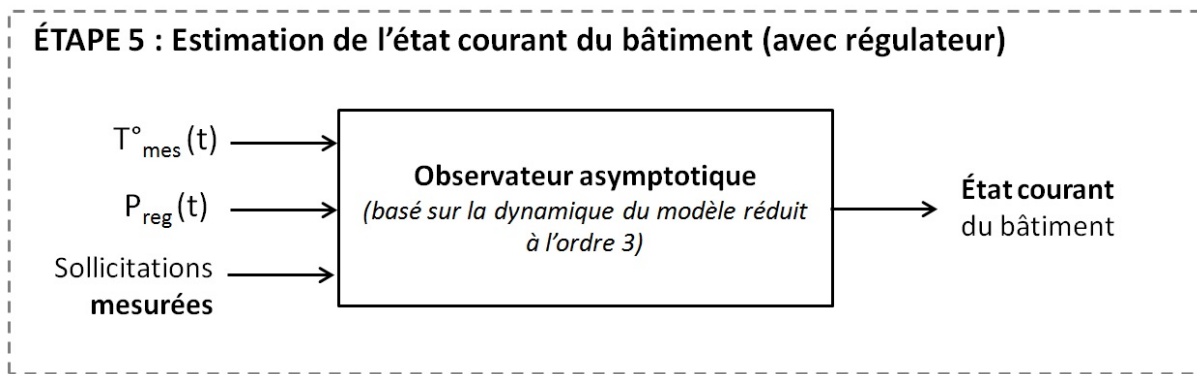


Figure 91 : Schéma de l'étape n°5 (avec régulateur)

5.2.2 Résultats

La commande prédictive avec régulateur a été appliquée sur le cas d'étude défini au § 3.3.1. Les résultats sont présentés dans la Figure 92 et la Figure 93. On peut constater qu'avec l'ajout du régulateur, le chauffage est utilisé lors des heures pleines et de pointe dans l'objectif de suivre au mieux la trajectoire de référence (Figure 92). Ceci entraîne une augmentation du coût de la commande de chauffage sur une semaine (13,49 €) par rapport à celui de la commande prédictive sans régulateur (13,37 €). On peut également noter que l'utilisation du régulateur permet de suivre plus précisément la trajectoire de référence en limitant les écarts à la température de référence (Figure 93). Enfin, comme dans le cas de la commande prédictive sans régulateur, on constate les mêmes écarts entre la température mesurée et la température de référence. Ces écarts s'expliquent par l'utilisation de sollicitations moyennées et du modèle réduit à l'ordre 3 lors du calcul de la commande optimale à partir de laquelle est calculée la trajectoire de référence.

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

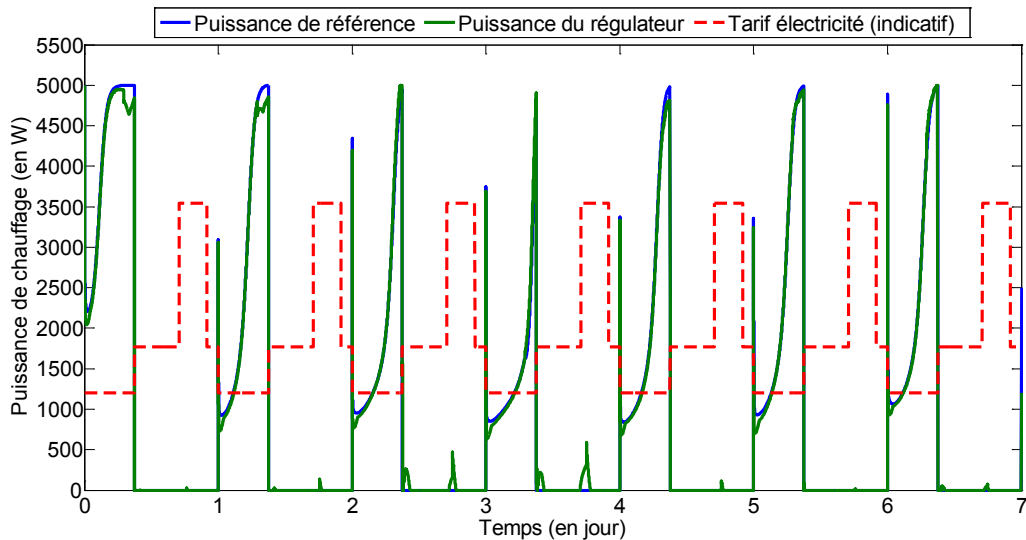


Figure 92 : Comparaison entre la puissance de référence et la puissance du régulateur

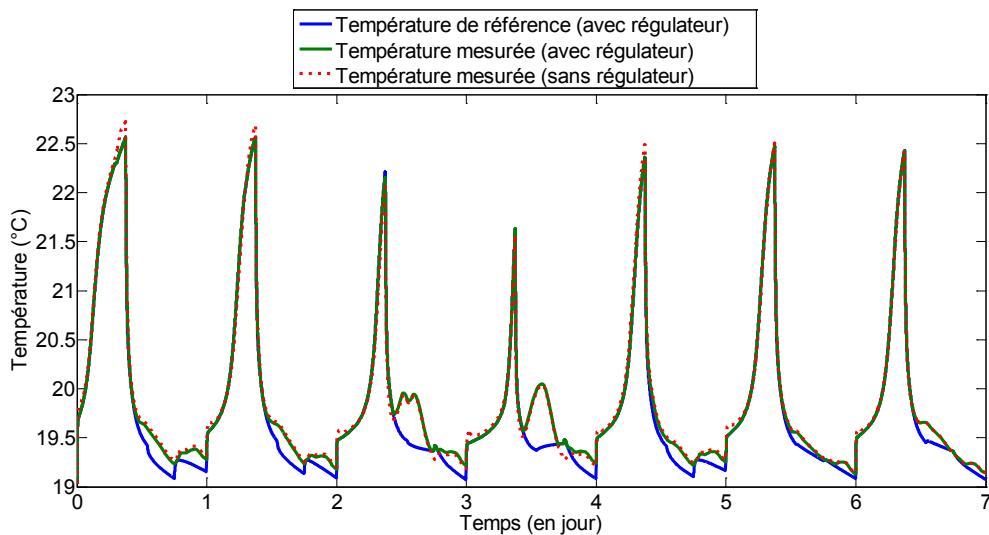


Figure 93 : Comparaison entre la température de référence et les températures mesurées (avec ou sans régulateur)

Ces résultats peuvent être comparés avec ceux obtenus par la commande prédictive avec régulateur en considérant les sollicitations parfaitement connues. Tout d'abord, les coûts calculés sont très proches avec respectivement 13,49 € et 13,31 € avec les sollicitations moyennées et les sollicitations réelles. De même sur la Figure 94 on peut remarquer qu'il existe très peu de différence entre la température mesurée engendrée par une commande calculée sous des sollicitations réelles (en bleu) et celle résultant de la commande calculée sous des sollicitations moyennées (en vert). Ceci valide l'intérêt de l'utilisation des sollicitations moyennées permettant d'obtenir une commande proche de la commande optimale tout en diminuant les temps de calculs (§ 3.4.2). Enfin, de manière logique, on constate que le régulateur a tendance à plus chauffer pendant les heures pleines ou de pointe lorsque la commande de référence a été calculée en considérant des sollicitations moyennées dans le but de

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

compenser les écarts (engendrés par les imprécisions sur les sollicitations) par rapport à la température de référence (Figure 95).

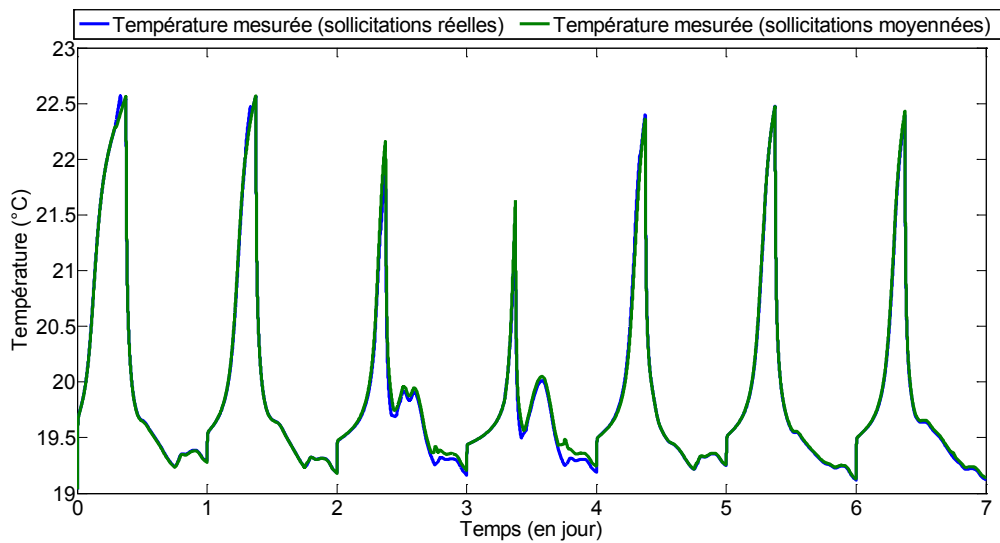


Figure 94 : Comparaison entre les températures mesurées (sollicitations réelles et moyennées)

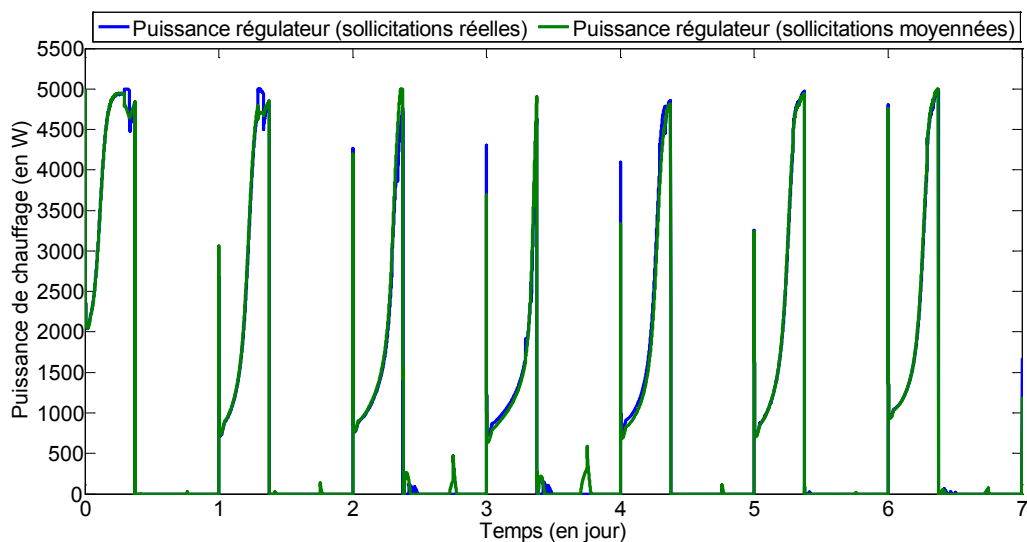


Figure 95 : Comparaison entre les puissances du régulateur calculées (sollicitations réelles et moyennées)

L'utilisation d'un régulateur est indispensable pour faire face à des événements imprévus en particulier lorsqu'une erreur importante est faite sur la prévision des sollicitations. Nous avons ainsi testé le régulateur sur le premier jour d'optimisation, en considérant que, contrairement aux prévisions, l'occupation réelle était nulle. Les résultats sont présentés dans la Figure 96 et la Figure 97. On constate que sans l'utilisation du régulateur, la température mesurée descend en dessous de la contrainte de température de 19°C. Au contraire, l'utilisation du régulateur permet de compenser les erreurs de prévisions (avec l'utilisation du chauffage de 18 h à 24 h), de suivre la trajectoire de référence et de respecter les contraintes de température. Ceci met en évidence l'intérêt du régulateur qui permet de

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

compenser les erreurs faites sur la modélisation et la prévision des sollicitations dans l'objectif de suivre la trajectoire de référence.

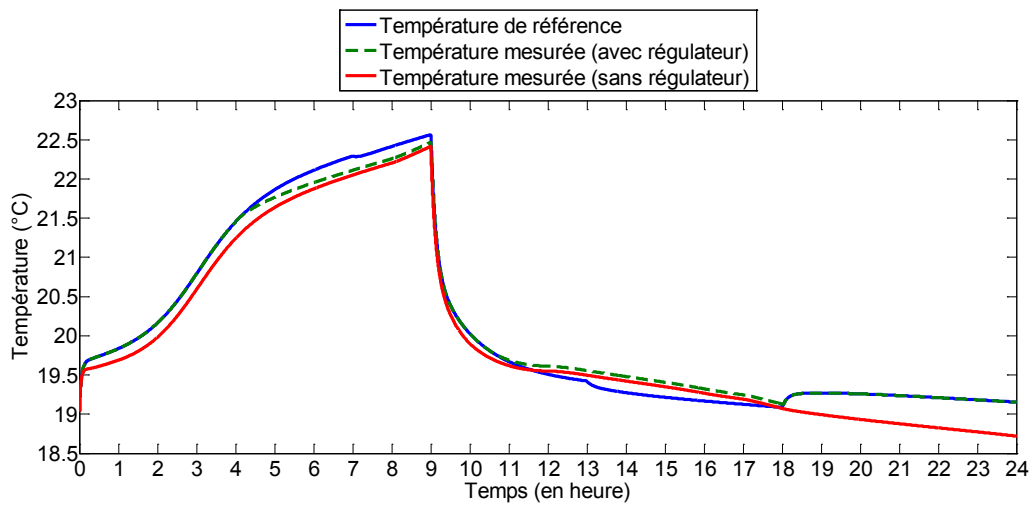


Figure 96 : Comparaison entre la température de référence et les températures mesurées (avec ou sans régulateur)

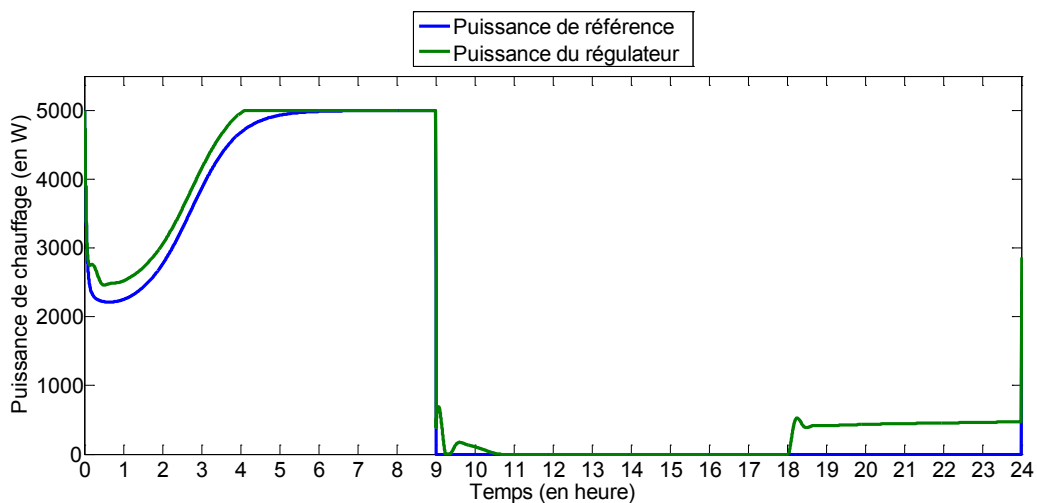


Figure 97 : Comparaison entre la puissance de référence et la puissance du régulateur

6. CONCLUSION DU CHAPITRE

Ce chapitre présente le développement d'une approche basée sur la commande prédictive, dont l'utilisation par les professionnels du bâtiment est destinée à se démocratiser dans un futur proche grâce au développement et à la diffusion des technologies nécessaires à son implémentation d'une part et à une demande accrue des acteurs économiques du bâtiment et de l'énergie pour le développement de solutions techniques dans le domaine de la gestion intelligente de l'énergie d'autre part. L'avantage

Chapitre 5 : Application de la commande prédictive

de la commande prédictive est de s'appuyer sur un modèle du bâtiment à réguler permettant d'anticiper son comportement et de calculer la commande qui minimise une fonction de coût donnée tout en respectant des contraintes imposées. La mise en place d'un tel système nécessitait cependant de répondre à de nombreuses difficultés théoriques à travers le développement d'un algorithme performant.

La première difficulté était de disposer d'un modèle réduit de bâtiment précis permettant une convergence rapide de l'algorithme d'optimisation. Dans le cadre de la régulation, l'utilisation de la réalisation équilibrée s'avère particulièrement efficace. Elle permet d'une part d'obtenir un modèle réduit complètement observable et commandable et d'autre part de réaliser un compromis entre précision et taille du modèle. Les résultats ont montré que, dans notre cas d'étude, un modèle réduit à l'ordre trois était nécessaire.

La deuxième difficulté était de disposer d'un algorithme d'optimisation rapide et robuste. Un algorithme d'optimisation basé sur la pénalisation intérieure a été présenté permettant de résoudre un problème de commande optimale sous contraintes d'état et de commande. Dans l'objectif de diminuer les temps de calcul, une analyse de sensibilité a été menée sur l'horizon d'optimisation de l'algorithme et sur la précision des sollicitations nécessaires.

La troisième difficulté était de connaître, à chaque période d'échantillonnage, l'état du bâtiment. Le développement d'un observateur asymptotique a été réalisé permettant d'estimer l'état du bâtiment à travers les mesures des sollicitations et de la température du bâtiment.

Enfin, la dernière difficulté était de pouvoir faire face, lors de l'application de la commande optimale, aux différentes perturbations faisant s'éloigner la trajectoire réelle de la température de la trajectoire de référence. Un régulateur PI utilisant un terme d'anticipation a été développé permettant d'assurer le suivi de trajectoire et de compenser les éventuelles erreurs de modélisation ou de prévision des sollicitations.

En conclusion, l'algorithme de commande prédictive développé présente de bonnes performances en terme de robustesse et de temps de calcul permettant d'envisager son utilisation dans des systèmes avancés de commande de bâtiment en temps réel. Plusieurs améliorations de l'algorithme peuvent être envisagées. Par exemple, l'utilisation de contraintes portant sur la variation de la température dans l'algorithme d'optimisation peut être intéressant dans l'objectif de prendre mieux en compte le confort de l'occupant, de même que l'extension de l'algorithme d'optimisation à un bâtiment multizone. Enfin, les mesures utilisées pour estimer l'état du bâtiment pouvant être incomplètes ou entachées d'incertitudes, le développement d'un filtre de Kalman à la place d'un observateur asymptotique peut être considéré.