Chapitre II
Cadre conceptuel

Dans ce chapitre, les éléments à considérer dans l'apprentissage de l'algèbre sont dégagés. La première section porte sur l'habileté avec les langages qui joue un rôle de premier plan dans la réussite en mathématiques. Un bref aperçu historique de l'algèbre présente ensuite les fondements et fait connaître les différents usages de ce langage. La section suivante est consacrée au développement de la pensée algébrique qui constitue un élément crucial à considérer en didactique de l'algèbre. La dernière partie de ce chapitre traite des pratiques pédagogiques. On y parle du concept de transposition didactique, de la sémiotique dans l'apprentissage de l'algèbre et on présente quelques pratiques pouvant favoriser le développement de la pensée algébrique.

2.1 Le langage et les mathématiques

2.1.1 Compétences langagières et mathématiques

Selon certaines études, le langage exerce une forte influence sur la cognition. On a montré qu'il existe une relation entre l'habileté à comprendre le langage mathématique, les connaissances procédurales et la réussite en mathématiques (Bradley, 1990), mais les pratiques éducatives traditionnelles mettaient l'accent sur les procédures sans s'attarder à la compréhension du langage mathématique. D'après certaines études, la complexité des langages utilisés en mathématiques et en sciences, serait l'un des principaux facteurs à l'origine des difficultés qu'éprouvent les élèves dans ces disciplines (De Serres; Bélanger; Piché; Riopel; Staub & De Granpré, 2003). Les enseignants auraient donc avantage à adopter des stratégies d'intervention pour corriger les faiblesses des élèves sur le plan des langages (naturel, symbolique et graphique), afin de faciliter leurs apprentissages et améliorer leurs résultats scolaires.

En classe de mathématiques, l'élève est appelé à interpréter des graphiques et des diagrammes, à travailler dans le plan cartésien ou à traduire des données textuelles en équations algébriques pour pouvoir les solutionner et effectuer un retour au langage courant afin d'interpréter ses résultats. Il importe de faire en sorte que les élèves s'approprient correctement toutes ces formes d'écriture puisqu'à mesure que la scolarité avance, elles sont de plus en plus abstraites et de plus en plus utilisées pour introduire de nouvelles notions.

2.1.2 Importance du langage dans la compréhension de l'algèbre

Pour Sierpinska (1999), le sens et même la substance d'un contenu notionnel peuvent varier en fonction des choix que fait l'enseignant dans la préparation de ses cours ou de sa façon de communiquer avec les élèves. Déjà en 1988, Booth suggérait aux enseignants de s'exprimer de façon à mettre en évidence la relation qui existe entre deux nombres. Ainsi, il serait préférable de lire *« 3 fois le nombre p »* au lieu de *« 3p »* pour éviter que les élèves se méprennent sur le sens de cette expression en lui assignant la signification : *« 3 pommes »*. Stacey & Mc Gregor (1997) ont également souligné l'importance de mettre l'emphase sur le fait que les lettres utilisées en algèbre représentent des nombres. Ils conseillent entre autres d'éviter d'utiliser la formulation *« La lettre c représente le coût »* et de dire plutôt *« La lettre c représente le nombre de dollars »* et de préférer la formulation *« L représente le nombre de mètres »* à *« L représente la longueur »*. Ils suggèrent également de demander aux élèves d'exprimer les relations dans leurs propres mots lorsqu'ils travaillent avec les fonctions. Le fait d'avoir à exprimer à voix haute la signification des expressions qu'ils utilisent pousse les élèves à s'attarder à leur sens et à s'assurer de leur bien fondé.

Pour combler les lacunes observées chez les élèves en ce qui concerne leur interprétation des concepts sous-jacents aux structures algébriques, Vlassis et Demonty (1997) proposent d'enseigner l'algèbre à partir de la géométrie et des suites. L'approche par la géométrie permettrait de construire une image visuelle des termes non semblables en associant, par exemple, a^2 à un aire et 4a à un périmètre, donc deux entités différentes ne pouvant être réduites. Quant à l'élaboration de différentes formules pour représenter des suites, elles permettraient de donner du sens aux différents concepts liés à la généralisation et pourrait même fournir une aide aux élèves pour exprimer des nombres pairs, impairs, multiples, consécutifs, etc. Par exemple, la suite 3, 6, 9, 12, ... qui correspond à l'ensemble des multiples de trois, peut être représentée par l'expression « 3n » et celle-ci pourrait convenir à n'importe quel multiple de trois cité comme valeur inconnue dans la donnée d'un problème.

Cela dit, amener les élèves à donner du sens aux expressions algébriques qu'ils utilisent constitue un travail de longue haleine. Il est tout à fait légitime de s'attendre à ce que l'élève prenne quelques années pour s'approprier l'algèbre puisque ce langage s'est développé sur plusieurs siècles, et qu'il a atteint un niveau de complexité considérable (Kieran 1992).

2.2 L'évolution de l'algèbre au fil du temps

2.2.1 Bref aperçu historique

L'appropriation du langage algébrique demande plusieurs années d'investissement et implique des processus cognitifs particuliers. Pour Kieran (1992), certains de ces processus trouvent leur fondement dans l'histoire du symbolisme algébrique qui a connu une évolution s'étalant sur plusieurs siècles.

Dans l'histoire du développement de l'algèbre, on distingue trois grandes époques (Kieran, 1992). La période rhétorique qui date d'avant l'an 250, où le langage ordinaire est utilisé pour représenter des inconnus, de même que les opérations, à défaut de l'existence de symboles spécifiques. La période de l'algèbre numéreuse introduite par Diophante au 3e siècle, pendant laquelle l'utilisation de la lettre se limite à représenter des quantités inconnues. À cette époque, l'activité algébrique consiste principalement à découvrir la valeur numérique d'une lettre et non à exprimer des généralités. L'œuvre de Diophante est constituée en majeure partie de problèmes de premier et second degré dont les solutions sont entières ou fractionnaires.

Dans les années 1500, les travaux de Diophante commencent à circuler en Europe et inspirent Viète qui innove en associant la lettre à un nombre donné, aussi bien qu'à une quantité inconnue. Ce dernier utilise les symboles + et – qu'il a empruntés à l'allemand Widmann pour représenter la somme et la différence, ce qui permet d'alléger l'écriture. Il devient alors possible d'exprimer des solutions générales et d'utiliser l'algèbre en tant qu'outil de preuve, ce qui mène à la 3e époque du symbolisme algébrique : La période de l'algèbre symbolique. On doit à Viète la résolution des équations du 2e degré de la forme « $ax^2 + bx = c$ » et celles du 3e degré de la forme « $x^3 + ax = b$ ».

Durant les siècles qui suivent, l'expansion du symbolisme et la réduction de détails superflus facilitent le développement d'autres concepts mathématiques, notamment celui de fonction. La conception procédurale de la fonction en tant que processus d'entrée/sortie, est remplacée par une conception plus structurale par Dirichlet dans les années 1830. Celui-ci la définit comme une relation de correspondance entre des nombres réels, définition qui sera généralisée une centaine d'années plus tard par Bourbaki qui la voit comme une relation entre deux ensembles

Sans être exhaustif, cet historique permet d'illustrer comment, au fil du temps, le langage naturel a progressivement laissé place au symbolisme algébrique. L'usage même des symboles a évolué avec les années, passant d'une simple fonction de remplacement à des emplois de niveaux d'abstraction élevé. Il est devenu un outil indispensable dans plusieurs domaines et ses usages sont aujourd'hui très variés.

2.2.2 Les différents usages de l'algèbre

L'algèbre est l'instrument idéal pour énoncer simplement des propriétés numériques. Il se révèle être un moyen beaucoup plus efficace que l'arithmétique pour démontrer des propriétés particulières ou générales, et ce, sans compter que son écriture permet de conserver l'information pertinente tout en étant beaucoup plus concise que celle de la langue parlée. Pour l'utilisateur, il est aussi plus aisé de mémoriser une expression algébrique qu'un texte énonçant des propriétés numériques. Prenons par exemple la relation de Pythagore dans un triangle rectangle : Il va sans dire qu'il est beaucoup plus simple de retenir la formule « $c^2 = a^2 + b^2$ » que l'énoncé : *« Le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes. »* (Ledoux; Brousseau; Boivin & Ricard, 2007), page 37.

La modélisation est aussi un exemple de l'utilité du langage algébrique. Celle-ci permet d'interpréter des problèmes qui sont issus non seulement des mathématiques, mais d'une foule d'autres domaines. C'est notamment le cas des sciences qui utilisent une grande quantité de formules représentées sous forme d'équations algébriques. Celles-ci permettent de prédire le comportement d'une variable en fonction d'autres. Prenons, à titre d'exemple, la seconde loi de Newton $F=ma$. Cette formule, qui n'est rien d'autre qu'une équation algébrique, permet de déterminer la force appliquée sur un corps d'après sa masse et l'accélération subie. Par une simple manipulation algébrique, cette relation pourrait aussi servir à calculer l'accélération que subira un corps en fonction de la force qui lui sera appliquée.

À l'origine, les mathématiques ont été crées pour cerner le monde réel et le modéliser. Pour Chevallard (1989), le modèle mathématique existe sous deux registres: un système et un modèle mathématique de ce système. Quant au processus de modélisation, il s'effectue en trois étapes :

- Une définition du système à étudier précisant les aspects pertinents de ce système.

- La construction du modèle en établissant des relations entre les variables et le système étudié.
- L'utilisation du modèle dans le but de produire des connaissances prenant la forme de nouvelles relations entre les variables du système.

Il serait possible, à titre d'exemple, d'étudier la trajectoire d'une balle de golf à partir du modèle mathématique illustré ci-dessous (Breton; Deschênes & Ledoux 1996) :

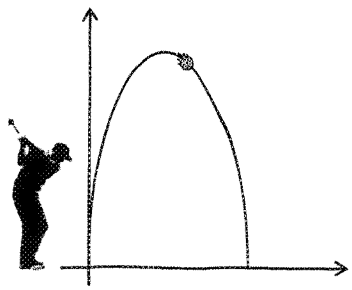

Figure 1: Modélisation de la trajectoire d'une balle de golf

Comme le montre la figure 1, la trajectoire de la balle de golf pourrait être associée à une fonction du second degré mettant en relation les variables temps et hauteur.

Enfin, qu'il s'agisse de résoudre des problèmes, d'exprimer des généralités, de démontrer des propriétés ou de modéliser, l'utilisation de l'algèbre s'avère essentielle. Toutefois, sa maîtrise nécessite un mode de pensée particulier.

2.3 La pensée algébrique

2.3.1 Les deux dimensions de l'algèbre

Douady (1986) a établi deux dimensions de l'algèbre, soient la dimension outil et la dimension objet de l'algèbre. Bien qu'elle fasse la distinction entre ces deux dimensions, elle précise qu'elles ne sont ni hiérarchisées, ni indépendantes l'une de l'autre. Il importe cependant de les distinguer.

L'algèbre est un ensemble structuré d'objets tels les coefficients, les variables, les équations, les fonctions, etc. pouvant être représentés sous différentes formes. La dimension objet de l'algèbre fait appel à la manipulation formelle des expressions algébriques ainsi qu'à l'interprétation de ces objets.

L'utilisation de l'algèbre en tant qu'objet peut se limiter à effectuer des manipulations sans finalité explicite comme additionner des polynômes, factoriser une équation du 2e degré ou faire l'étude des signes d'une fonction. Cela peut s'apprendre par imitation, à l'aide d'exercices de répétition ou en mémorisant des algorithmes.

Quant à la dimension outil de l'algèbre, celle-ci occupe un domaine plus vaste que la dimension objet. Elle peut être utilisée pour résoudre des problèmes, pour généraliser ou démontrer des propriétés numériques, et pour modéliser.

Utiliser l'algèbre en tant qu'outil implique une maîtrise fonctionnelle du calcul algébrique. C'est notamment le cas lorsqu'on doit partir d'énoncés présentés dans le langage naturel pour les convertir en équations algébriques, pour ensuite les solutionner à l'aide des propriétés de transformation des équations. L'utilisation de l'outil algébrique est très efficace pour traiter plusieurs inconnus à la fois et permet une économie de temps pour qui sait l'utiliser à bon escient. À titre d'exemple, le problème suivant implique une maîtrise fonctionnelle du calcul algébrique :

Le produit de deux nombres naturels pairs consécutifs est égal à 28 de plus que dix fois le plus grand de ces deux nombres. Quels sont ces deux nombres ?

Pour résoudre ce problème, l'élève doit poser lui-même l'équation qui le mènera à la solution en établissement correctement les relations qui existent entre les nombres cherchés. Cela implique le recours à certaines habiletés mentales qui sont très sollicitées en mathématiques, mais qui ne font pas spécifiquement l'objet d'un enseignement.

2.3.2 Notions enseignables et notions non enseignables

Chevallard (1991) fait la distinction entre les objets de savoir, les notions paramathématiques et les notions protomathématiques qui constituent des strates de plus en plus profondes du fonctionnement didactique du savoir.

Pour les enseignants de mathématiques, les objets de savoir sont les notions mathématiques (l'addition, le cercle, l'exponentiation, etc.). Ces notions sont clairement identifiées dans les programmes de mathématiques et font l'objet d'un enseignement direct. Comme elles sont construites par des définitions, elles peuvent facilement faire l'objet d'une évaluation. L'enseignant s'attend à ce que l'élève sache en donner la définition, les propriétés et les utiliser correctement.

Les notions paramathématiques, quant à elles, sont des notions outils de l'activité mathématique (la démonstration, les paramètres, etc.). Ce sont des objets de savoir « auxiliaires » nécessaires à l'apprentissage des mathématiques. Elles ne font pas l'objet d'un enseignement en tant que tel, mais elles doivent tout de même être apprises. Ces notions sont généralement exclues de l'évaluation directe.

Quant aux notions protomathématiques, elles sont situées dans une strate encore plus profonde. Ces dernières font référence à certaines aptitudes, comme la reconnaissance de certaines occasions d'emploi des notions mathématiques ou la capacité de faire des liens entre les éléments de contenus. Elles font appel à des capacités sous-jacentes qui sont attendues de l'élève sans être spécifiquement enseignées.

2.3.3 Conceptions procédurale et structurale

Comme il a été mentionné précédemment, le passage de l'arithmétique à l'algèbre nécessite une certaine évolution dans la façon de penser. En fait, il implique une transition entre une conception procédurale et une conception structurale (Sfard, 1991). Le langage algébrique est effectivement beaucoup plus qu'un outil procédural visant à effectuer des opérations sur des nombres. Il est utilisé en tant qu'objet structural, c'est-à-dire fondé sur des transformations d'écritures algébriques.

De manière générale, la résolution d'un problème arithmétique consiste à choisir les opérations appropriées pour calculer la valeur d'inconnus à partir de données connues. Chacune des étapes du processus permet d'obtenir une valeur numérique intermédiaire qui, par la suite, peut être utilisée pour en calculer une autre, et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention de la solution. Ces suites d'opérations font référence à une conception procédurale des mathématiques.

La résolution algébrique, quant à elle, consiste à mettre en relation des inconnus et des données à l'aide d'expressions algébriques qui sont considérées comme des objets en soi. La progression vers la solution s'effectue en suivant un raisonnement logique et rigoureux où les structures présentes sont transformées en d'autres structures. Cette perspective dite structurale implique le recours à un raisonnement qui s'appuie sur des règles et des conventions qui régissent un langage abstrait.

Pour Sierpinska (1999), l'algèbre est un produit de la pensée analytique et elle nécessite un fonctionnement cognitif particulier. C'est une pensée qui s'appuie sur des systèmes de représentations externes et conventionnels, qui permet d'entrer en contact avec un objet à partir d'une description verbale. *« La langue ne sert pas seulement à nommer les objets, mais aussi à les décrire et surtout à les créer par des définitions et des systèmes de propositions »* p. 159.

Les conceptions procédurale et structurale d'une notion mathématique seraient hiérarchisées, mais indissociables l'une de l'autre. Selon Sfard (1991), il est aussi illusoire d'espérer qu'une personne puisse accéder à une compréhension structurale d'un objet sans d'abord être passée par une compréhension procédurale, que de reconnaître l'image d'un cube en perspective sans jamais avoir vu un cube en trois dimensions dans la réalité. Pour elle, l'évolution des concepts mathématiques consiste en une longue chaîne de transition entre des conceptions procédurales et structurales, où certaines notions deviennent des unités de base pour des théories plus avancées.

Pour illustrer cette chaîne de transition vers des objets de plus en plus élaborés, elle a construit le modèle général de formation d'un concept. Le schéma de la figure 2 illustre ce modèle qui montre que la transition des opérations mathématiques vers les objets abstraits s'effectue en trois étapes : L'intériorisation, la condensation et la réification.

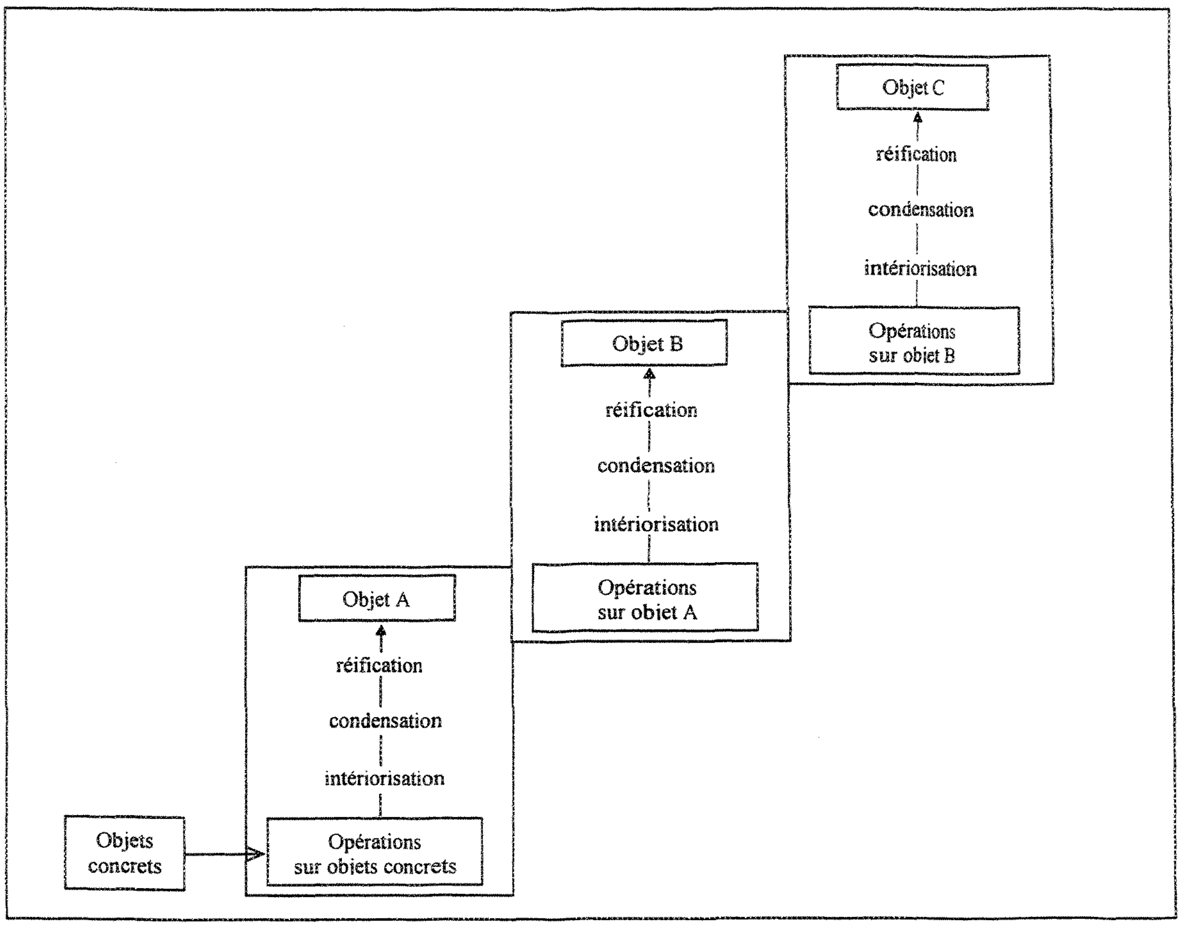

Figure 2: Modèle général de formation d'un concept de Sfard (1991)

À la phase d'intériorisation, l'apprenant est familiarisé avec des opérations lui permettant d'accéder à un nouveau concept à partir d'objets déjà conceptualisés (comme le comptage qui repose sur les nombres naturels ou la soustraction qui ouvre la voie sur les nombres négatifs). Graduellement, l'élève devient compétent avec ces opérations et ressent de moins en moins le besoin d'aller dans les détails. Il atteint alors la phase de condensation qui consiste à compresser les longues séquences d'opérations en unités plus maniables. À la phase de condensation, l'élève peut combiner des opérations, faire des comparaisons et généraliser plus facilement. C'est seulement à partir du moment où il devient capable de concevoir la notion comme une entité en soi qu'on peut dire que le concept a été réifié. La réification est le moment où l'intégration de concepts de haut niveau débute. C'est lorsque la personne est capable de concevoir l'objet comme faisant partie intégrante d'un ensemble bien défini, et non seulement en tant que prescription pour certaines opérations. C'est, en d'autres mots, lorsqu'elle a accédé à une conception structurale de l'objet. Une fois l'objet bien conceptualisé, celui-ci pourra ensuite servir de tremplin pour accéder à des notions de niveau supérieur en suivant le même processus.

Cette théorie de Sfard fait ressortir que lorsqu'une personne est confrontée à une nouvelle notion, la conception procédurale est habituellement la première à être développée. L'enseignant ne peut donc aspirer à amener directement ses élèves vers une conception structurale d'un objet mathématique. Il doit s'attendre à ce que ceux-ci mettent un certain temps pour y parvenir. Ainsi, le travail de l'enseignant consiste à accompagner les élèves dans leur progression vers une conception structurale de l'algèbre, c'est-à-dire vers la pensée algébrique.

2.3.4 Le développement de la pensée algébrique

Il semble que le contexte mathématique dans lequel les élèves évoluent puisse contribuer au développement de la pensée algébrique. Selon Teppo & Esty (1995), la structure d'une tâche a une incidence sur le type de connaissances qu'elle fait intervenir.

Voici trois exemples pouvant être résolus à l'aide de la formule quadratique, mais dont l'énoncé diffère:

Exercice numéro 1 : (Teppo & Esty, 1995)

Calculer $-b \pm \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{2a}}$ pour a = 5, b = 2 et c = -3

Dans ce type d'exercices, l'élève n'a pas à interpréter les symboles, il doit simplement remplacer les variables par les valeurs proposées, à la manière d'un ordinateur.

Exercice numéro 2 (Teppo & Esty, 1995) :

Utiliser le théorème de la fonction quadratique pour résoudre ces équations :

a) $5x^2 - 7x - 12$
b) $10 - 2x^2 + 7x = 0$
c) $x(x + 1) = 7$

Dans ce second exercice, l'élève doit centrer son attention sur la forme générale de l'équation quadratique, ce qui était ignoré dans l'exercice précédent. Toutefois, il s'agit encore là d'une simple utilisation de la formule dans le but d'en arriver à un résultat qui n'est pas signifiant pour l'élève.

Exercice numéro 3 (Breton & al, 1996 p.305) :

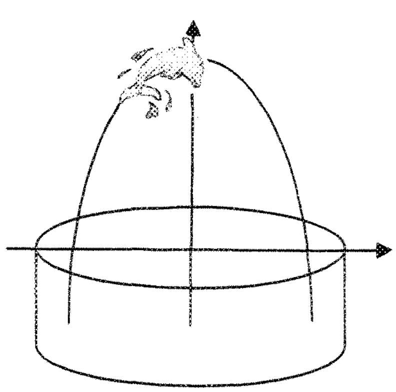

Figure 3 : Trajectoire du dauphin

Au cours d'un spectacle, le dauphin Kino doit effectuer un saut hors de l'eau. La trajectoire qu'il décrit dans un système gradué en mètres est la parabole d'équation :
$f(x) = -0{,}3125(x+4)(x-4)$

Sur quel intervalle le dauphin est-il hors de l'eau ?

L'énoncé de ce troisième exercice ne fait pas référence au théorème de la fonction quadratique, ce qui implique que l'élève doive comprendre par lui-même qu'il faut y avoir recours. Il s'agit là d'une habileté sous-jacente de l'activité mathématique. Cet exercice demande implique également d'interpréter les variables en fonction de ce qu'elles représentent dans la situation. Le théorème prend ici tout son sens; il occupe un statut d'outil et commande une conception structurale de l'objet mathématique. Toutefois, l'élève confronté à cet exercice trop précocement aurait sans doute du mal à s'acquitter de la tâche. Les acquis procéduraux n'étant pas assez solides, il ne disposerait pas des assises nécessaires à sa résolution et le sens lui échapperait. Cela dit, pour donner du sens, il n'est pas essentiel de recourir à la dimension outil de l'algèbre.

En effet, Douady (1994) estime que les situations dans lesquelles les élèves évoluent peuvent être génératrices de sens selon deux points de vue : sémantique ou syntaxique. Lorsque les notions occupent le statut d'outil, c'est-à-dire qu'elles sont mises en contexte et qu'on en fait usage pour résoudre des problèmes ou interpréter de nouvelles situations, elles sont génératrices de sens d'un point de vue sémantique. Lorsqu'il s'agit d'identifier des théorèmes, de formuler des définitions ou encore d'effectuer des opérations en respectant des règles précises, les notions sont décontextualisées et occupent le statut d'objet. Elles sont alors génératrices de sens d'un point de vue syntaxique. Ces deux aspects du travail mathématique contribuent à la construction de sens et à la capitalisation des savoirs, c'est pourquoi il importe de travailler autant sur les techniques par le biais d'exercices que sur les outils à l'aide de problèmes bien construits.

Kinzel (2001), a fait ressortir trois caractéristiques importantes à prendre en considération lors de l'élaboration d'un problème faisant intervenir le langage algébrique:

- Imposer le travail sur une valeur inconnue :
  La tâche proposée devrait être telle que le recours au travail sur une variable soit nécessaire pour pouvoir aller de l'avant.

- Présenter quelques ambigüités ou de multiples références à la valeur cherchée :
  Lorsqu'un problème présente des ambiguïtés ou de multiples références à l'inconnu, l'élève doit s'attarder au sens qu'il attribue à la variable pour construire les expressions appropriées.

- Coordonner plusieurs informations dans des situations complexes :
  Le premier travail de l'élève devrait consister à organiser l'information sans s'attendre à un certain type d'application dans des cas spécifiques.

La notion de problème dans un contexte plus large que celui de l'algèbre devrait, selon Douady (1994), répondre à quatre conditions pour être source et occasion d'apprentissage:

- À l'aide de ses connaissances antérieures, un élève peut comprendre l'énoncé et est en mesure d'entreprendre une démarche.

- Avec ses connaissances, l'élève ne peut pas résoudre complètement le problème, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas d'une simple application de notions ou méthodes connues.

- Les objets d'enseignement que l'enseignant veut que les élèves apprennent sont des outils adaptés à la résolution du problème.

- Le problème s'exprime dans au moins deux cadres (algébrique, graphique, numérique, ...).

Comme on peut le constater, la construction des savoirs ne peut s'opérer sans le recours à des situations variées et de plus en plus complexes. Les choix pédagogiques semblent donc revêtir une place importante dans le processus didactique, ce qui nous amène à parler des pratiques pédagogiques.

2.4 Les pratiques pédagogiques

2.4.1 La transposition didactique

Les mathématiques ont été créés dans un esprit particulier et façonnées dans l'histoire. Ces objets, qui sont une invention humaine, sont désignés par Chevallard (1991), sous le terme de savoir savant. Ceux-ci ne sont pas directement enseignables, et pour les rendre aptes à être enseignés, le didacticien doit leur faire subir certaines transformations. Le savoir enseigné est alors différent du savoir initial et, pour ainsi dire, coupé de ses origines. Le concept de transposition didactique renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné et à la distance qui les sépare.

En tant qu'intermédiaire entre les mathématiciens et les apprenants, l'enseignant a pour mission d'adapter le contenu du programme pour le rendre assimilable par ceux qui doivent se l'approprier. Il se doit en même temps de le conserver suffisamment proche du savoir savant pour ne pas le dénaturer. Enseigner consiste donc à faire des choix qui permettront aux élèves d'apprendre en construisant leurs propres connaissances.

En effet, selon la thèse constructiviste de l'apprentissage, ce sont les apprenants qui construisent leurs propres connaissances à travers des situations-problèmes. Les situations-problèmes sont des activités d'apprentissage que les apprenants ne parviennent pas à résoudre complètement à l'aide des savoirs qu'ils possèdent déjà, ce qui les contraint à s'adapter. Le déséquilibre provoqué par ces situations pousse les élèves à reconsidérer leur point de vue, ce qui peut mener à une réorganisation des connaissances ou à l'acquisition de nouveaux savoirs. Avec l'ajout de la dimension sociale amenée par Vygotsky (1985), l'appoche de type de constructiviste a évolué vers celui de socioconstructivisme. Pour Vygotsky, la place des interactions sociales est centrale dans le processus d'apprentissage. L'apprenant ne construit pas ses connaissances seul, mais en collaboration avec les pairs et l'enseignant. L'enseignant occupe alors le rôle de médiateur qui favorise les échanges et relance la discussion.

En conformité avec l'approche socioconstruviste de l'apprentissage, l'une des principales tâches de l'enseignant consiste à traduire le programme en contenus de cours et à présenter des tâches susceptibles de faire évoluer les connaissances et les compétences des élèves. Lorsque les concepts sont assez simples, il peut suffire de décomposer l'action et de présenter les étapes successives, mais l'enseignement de l'algèbre ne se résume pas à de tels procédés. Pour Douady (1994) : *« ...on a besoin de prendre en compte l'influence du sens dans l'élaboration d'algorithmes et, en même temps, de travailler à s'en détacher »*, p. 11 . La conquête du sens est devenu aujourd'hui un élément primordial à considérer dans l'apprentissage des mathématiques car la mémorisation d'algorithmes ne peut suffire à elle seule à permettre une réelle compréhension des concepts mathématiques. L'algèbre, plus particulièrement, est un langage composé d'objets de nature symbolique appartenant à l'univers des significations et des représentations. On ne peut ignorer le rôle de la sémiotique dans l'apprentissage de cette discipline.

2.4.2 La sémiotique

Charles S. Pierce (1978), fondateur de la sémiotique (ou science des signes), fut l'un des premiers à s'intéresser au rôle de la fonction symbolique dans la pensée humaine.

Pour lui, penser et signifier sont un même processus que l'on nomme sémiosis, et toute pensée s'effectue à l'aide de signes. Le signe permet de se représenter un objet absent. C'est un symbole spécialisé, qui est souvent collectif et qui sert à communiquer. La fonction symbolique facilite la réflexion et permet l'établissement du jugement. Elle permet une multitude de phénomènes de pensée et de signification, allant de l'expression artistique à la démonstration d'un théorème.

Pour Pierce, un signe est une triade :

- Un representamen : Signe qui tient lieu de quelque chose et qui s'adresse à quelqu'un.
- Un interprétant : Signe que le représentamen évoque dans l'esprit de celui qui le perçoit.
- Un objet : Raison d'être du signe, ce qu'il représente en réalité.

Il importe ici de préciser que le rôle joué par les représentations sémiotiques ne se limite pas à la communication ou au remplacement. Duval (2006) précise que leur principale fonction est : *« ... le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles connaissances »* p.57. Il s'est grandement intéressé au rôle des représentations sémiotiques dans l'activité mathématique.

> *La spécificité des représentations sémiotiques consiste dans ce qu'elles sont relatives à un système de signes, le langage, l'écriture algébrique ou les graphes cartésiens, et qu'elles peuvent être converties en des représentations équivalentes dans un autre système sémiotique, mais pouvant prendre des significations différentes pour le sujet qui les utilise* (Duval, 1995, p.17).

Toujours selon Duval (1995), le développement des représentations mentales est lié à l'acquisition et à l'intériorisation de systèmes et de représentations sémiotiques, à commencer par le langage. Ainsi, pour que les apprenants aient accès à l'objet de savoir, ils doivent disposer d'au moins deux systèmes sémiotiques différents pour le représenter et être capables de le convertir spontanément d'un système à un autre. Par exemple, l'élève à qui on présente : $0,2$, $2/10$ et $2x10^{-1}$ devrait être en mesure de reconnaître qu'il s'agit du même nombre présenté sous des formes différentes. Il en va de même pour certaines expressions algébriques qui n'utilisent pas les mêmes lettres mais qui font référence au même objet ($2x + 3$ et $2n + 3$, par exemple) ou celles dont l'ordre des termes est inversé ($5x - 100$ et $-100 + 5x$, par exemple).

2.4.3 Sémiotique dans l'apprentissage des mathématiques

En général, le déroulement d'un cours de mathématiques consiste à présenter des exemples en rapport avec un objet mathématique et à demander aux élèves d'effectuer des tâches similaires. Pour Bloch (2005), cette façon de procéder ne permet pas d'accéder à la connaissance fondamentale de l'objet (utilité, propriétés, ...). Elle peut même porter certains élèves à considérer la connaissance mathématique comme une activité ritualisée où l'on reproduit des modèles et à adopter une attitude de dépendance envers l'enseignant auquel ils se réfèrent pour justifier leur raisonnement par des formulations du genre *« C'est ce que l'on a appris »* ou *« C'est ce qu'il faut faire »*. C'est ce constat qui a amené Brousseau (1988) à proposer le concept de dévolution. La dévolution consiste à suggérer à l'élève des situations qui suscitent chez lui une activité non convenue et à faire en sorte qu'il se sente responsable du résultat obtenu. Cela l'amène à accepter sa part de responsabilité dans l'acte d'apprendre.

Bloch (2005) postule que l'analyse sémiotique peut aider à identifier les difficultés rencontrées par des élèves en situation de résolution de problème. Selon elle, la théorie des situations didactiques (TDS) proposée par Brousseau (1997), qui a d'abord été conçue pour les concepts mathématiques de l'école primaire, pourrait être adaptée à l'école secondaire. Elle propose de jumeler cette approche à la sémiotique de Pierce dans les pratiques pédagogique.

La TDS a pour objectif de donner du sens aux symboles mathématiques. Elle propose plusieurs situations en lien avec des thèmes mathématiques du primaire qui permettent aux élèves de s'engager dans un processus de découverte. Chacune de ces situations se déroule dans un milieu composé d'objets concrets permettant aux élèves d'expérimenter, et donne accès à des procédures de vérification à partir desquelles ils peuvent formuler des propriétés mathématiques.

Adapter cette stratégie à l'école secondaire peut sembler difficile puisque les mathématiques de ce niveau sont constituées de symboles abstraits. Le succès de la méthode proposée par Bloch (2005) réside donc dans la capacité des situations à proposer des activités qui mèneront les élèves à interpréter les symboles du milieu. Autrement dit, elles doivent mettre les élèves en contact avec une variété de signes, comme les symboles mathématiques, et permettre à l'enseignant de déterminer si le lien entre le signe et l'objet est bien établi par l'élève. Cette approche se déroule en trois phases :

- La première phase consiste à faire évoluer les élèves dans un milieu qui leur fournit des rétroactions, afin de leur permettre d'énoncer des propriétés.

- La seconde phase consiste à demander aux élèves de représenter leurs résultats (calculs, écrits, justification…). Dans un premier temps, les élèves formulent des propriétés mathématiques avec leurs propres symboles. À ce stade, on n'exige pas des élèves d'élaborer des écritures mathématiques correctes, mais de produire leur propre formulation. Ces écritures constituent des connaissances « privées » qui peuvent être exprimés à l'aide de différentes représentations sémiotiques, incluant les dessins, les mots, les phrases, les graphiques …

- La dernière phase consiste en la conceptualisation des objets mathématiques.

Généralement, lors de la seconde phase, il est possible de constater que le lien entre le symbole et l'objet n'est pas tout à fait bien établi, d'où la nécessité d'étudier la dimension sémiotique dans le processus de conceptualisation. Il est alors essentiel pour l'enseignant d'avoir une vision claire de l'utilisation que font les élèves des différentes représentations sémiotiques et de comprendre leur niveau d'interprétation.

2.4.4 Didactique de l'algèbre

Dans nos écoles secondaires, on enseigne les notions algébriques à partir de manuels scolaires. Dans ces ouvrages, les règles de transformation des équations algébriques sont souvent présentées sans justification par souci d'économie d'écriture.

Pour Cortés et Kavafian (1999), cette absence de justification amène un grand nombre d'élèves à se représenter les mathématiques comme une juxtaposition de règles, correctes et parfois fausses, sans jamais s'interroger sur la justification des règles utilisées. Puisque les significations construites par les élèves risquent d'influencer leurs performances actuelles et à venir, le rôle de l'enseignant consiste en grande partie à relever les erreurs et à les aider à faire évoluer leurs conceptions erronées.

Plusieurs auteurs (Fluckiger, 2006; Lemoyne, 2000 ; Baruk, 1985; Astolfi, 1997) ont déjà mis en évidence la place inhérente de l'erreur dans les apprentissages. L'erreur est considérée d'un point de vue positif, comme une indication que l'élève est en processus d'apprentissage. Elle est l'expression d'une connaissance antérieure qui fait obstacle à de nouveaux apprentissages. Analyser les erreurs commises par les élèves permet d'en comprendre le sens et d'apporter le traitement didactique approprié. Elle est donc un élément fondamental du processus d'apprentissage scolaire.

Demander aux élèves d'exprimer dans leurs propres mots ce qu'ils comprennent de certains concepts peut contribuer à s'enquérir de leurs perceptions et susciter leur progression. L'apport de la théorie des interactions sociales (Vygotsky, 1985) de même que l'importance des conflits socio-cognitifs (Gilly, 1989) dans le processus d'apprentissage sont connus depuis longtemps. Pour Gilly (1989), le conflit socio-cognitif, qui est caractérisé par une confrontation des idées dans une perspective de dépassement des contradictions pour parvenir à une réponse commune, est source d'apprentissage. Radford et Demers (2004), indiquent que la communication en classe de mathématiques est un moyen incontournable d'apprentissage qui englobe diverses facettes de l'activité mathématique. Ils ajoutent qu'en participant à une discussion avec ses pairs et l'enseignant, l'élève acquiert une conscience de plus en plus nette de l'objet d'apprentissage.

2.5 Principaux constats sur lesquels s'appuie cette recherche

Les lectures relevées lors des pages précédentes ont fait ressortir que les habiletés langagières influencent positivement la réussite en mathématique (Booth, 1988; Bradley, 1990; Sierpinska, 1999; De Serres et al., 2003). La section portant sur l'historique de l'algèbre a illustré comment le langage algébrique a évolué au fil du temps (Kieran, 1992) et combien ses applications se sont multipliées, à tel point qu'il est devenu un outil indispensable dans plusieurs domaines d'étude de niveaux supérieurs. Par conséquent, l'algèbre est aujourd'hui un langage très rigoureux avec un niveau d'abstraction élevé, mais son appropriation ne se fait pas sans heurt puisqu'elle commande un mode de pensée particulier. Un premier objectif de la présente recherche consiste donc à déterminer les éléments qui entravent la compréhension des élèves en algèbre. Pour ce faire, on utilise le processus de mise en équation car il fait intervenir la dimension outil de l'algèbre.

En effet, on a vu que l'algèbre comporte deux dimensions : La dimension objet et la dimension outil (Douady, 1986). La dimension objet de l'algèbre réfère à la manipulation d'expressions algébriques et elle peut être apprise simplement en reproduisant des exemples qui servent de modèle. Quant à la dimension outil de l'algèbre, elle fait appel à des processus mentaux de plus haut niveau comme la reconnaissance d'utilisation d'un concept ou la capacité d'abstraction. Or, pour Chevallard (1991), il s'agit là d'habiletés qui ne sont pas directement enseignables puisqu'elles font appel à des processus internes. L'utilisation de l'algèbre en tant qu'outil exige une conception structurale, c'est-à-dire une connaissance approfondie de l'objet par opposition à la conception procédurale qui est basée uniquement sur les opérations sur les nombres. Par contre, le modèle de formation d'un concept apporté par Sfard (1991) montre que ces deux conceptions sont hiérarchisées, mais indissociables l'une de l'autre puisque la conception procédurale précède inévitablement la conception structurale dans le processus de formation d'un concept. L'apprentissage du calcul algébrique se caractérise donc par un équilibre entre la construction de sens et l'habileté technique avec des algorithmes (Douady, 2004). Cela dit, il n'est pas évident de traduire cette préoccupation par des gestes concrets en classe de mathématiques, c'est pourquoi le second objectif de cette recherche consiste à identifier des pratiques éducatives qui influencent positivement le développement de la pensée algébrique. Toutefois, avant d'en arriver là, il importe de savoir comment l'élève évolue dans l'apprentissage de l'algèbre.

Lorsqu'il se familiarise à un nouvel objet, l'apprenant peut lui attribuer un sens plus ou moins exact, ce qui crée un obstacle à son apprentissage. En l'occurrence, les activités proposées par les enseignants devraient être conçues de façon à contrer les effets perturbateurs des représentations qui sont propres à chacun. C'est dans cette optique que Bloch propose de jumeler la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) à l'analyse sémiotique dans les cours de mathématiques. La TDS pourrait favoriser la construction de connaissances en tant qu'outils de solution dans une situation, et l'analyse sémiotique permettrait de déceler les écarts entre ce qui a été enseigné et ce qui a été perçu. Cela suppose le recours aux échanges verbaux, ce qui amène à penser que la communication est un moyen incontournable d'apprentissage puisqu'elle permet d'apporter les correctifs aux erreurs commises par les élèves. Elle représente ainsi un élément de solution à certaines erreurs.