Chapitre I
Problématique

Ce chapitre traite de la complexité du travail intellectuel imposé par la coordination des différents langages utilisés en mathématiques et, plus spécifiquement, du passage du langage naturel au langage algébrique. Il est question des incohérences entre ces deux langages, des fréquentes erreurs commises par les apprenants, de même que du peu d'attrait que l'algèbre exerce chez les élèves. La problématique du passage de l'arithmétique à l'algèbre en tant que rupture entre deux modes de pensée y est également abordée, notamment en ce qui concerne l'interprétation du signe d'égalité et de l'évolution du statut de la lettre. La section suivante présente la nouvelle vision de l'enseignement fondée sur le socioconstructivisme et fait part des changements qu'elle impose en didactique et sur les stratégies éducatives reliées à l'apprentissage de l'algèbre. Les questions et objectifs qui découlent de la problématique sont exposés à la fin de ce chapitre.

1.1 L'activité cognitive de conversion

Le rôle des différents langages dans l'activité cognitive a été analysé par Duval (1995). Selon lui, l'activité cognitive de conversion qui consiste à passer d'un registre à un autre, soit du langage aux formules mathématiques ou aux graphes ou encore à l'interprétation d'un graphique en langage courant, est très sollicitée en mathématiques. Il déplore le fait qu'on y ait recours comme si elle était acquise chez tous les élèves, alors qu'elle fait appel à une suite de traitements, ce qui n'a rien d'évident ou de spontané. Il décrit l'activité mathématique comme un processus qui fait intervenir trois activités cognitives :

- **La formation** : Constitution d'une trace dans un système déterminé qui respecte certaines règles de façon à avoir du sens pour celui qui ne l'a pas lui-même produite.
- **Le traitement :** Transformation des représentations par des opérations qui s'effectuent dans un même registre.
- **La conversion :** Transfert des représentations dans un autre système, (comme un nombre décimal en fraction, par exemple).

Il s'agit donc d'une activité mentale qui n'a rien d'évident ou de spontané pour la plupart des élèves. Elle passe par l'intériorisation de différents registres qui deviendront pour eux des unités signifiantes. Elle commande également la capacité de les convertir et de les coordonner entre eux, de façon à permettre le traitement de l'information de la manière la plus efficace possible. À cela, il faut ajouter que les règles de conversion ne sont parfois pas les mêmes selon le sens dans lequel le changement de registre est effectué, ce qui ajoute aux difficultés. Par exemple, la représentation d'un nombre impair sous la forme algébrique ne peut pas être systématiquement reconvertie en langage naturel à partir de l'expression *« 2n + 1 »*, puisque celle-ci pourrait faire référence à une infinité de situations.

Dépendamment du contexte dans lequel elle est présentée, une même expression algébrique peut revêtir diverses significations. Celle-ci ne suit pas nécessairement un modèle linguistique car le langage symbolique de l'algèbre obéit à ses propres conventions, c'est pourquoi la coordination entre le langage naturel et le langage algébrique est particulièrement ardue (Duval, 1995).

1.2 Incohérences entre le langage naturel et le langage algébrique

La traduction d'expressions algébriques en langage naturel comporte certaines difficultés car ces deux langages obéissent à des règles différentes. Par exemple, *« Le carré de la somme de x et y »* ne se lit pas de gauche à droite, comme un texte, à partir de l'expression *« $(x + y)^2$ »*, tout comme la lecture d'un grand nombre, tel que 35 400 000 000, dont l'appellation dépend du nombre de chiffres qu'il comporte. Cependant, l'activité inverse, soit la conversion d'informations du langage naturel au langage algébrique, est encore plus complexe.

En effet, le langage algébrique ne possède pas d'adverbes comme « toujours » ce qui contraint l'élève à faire appel à un système de signification qui est en opposition avec le langage naturel pour passer à la généralisation symbolique (Radford, 2004). De plus, il arrive fréquemment qu'une règle que l'on peut facilement exprimer en langage naturel doive être reformulée avant d'être exprimée sous forme algébrique puisque la forme ne peut être traduite directement. Par exemple, si on propose le problème suivant à des jeunes du secondaire :

Un fermier a 6 fois plus de cochons que de vaches. Si C représente le nombre de cochons et V représente le nombre de vaches, donne l'équation associée à cette situation.

Près des deux tiers d'entre eux commettent une erreur d'inversion (6C=V au lieu de C=6V) en transposant directement la forme linguistique *« Il y a 6 cochons pour une vache »* (Sims-Knight & Kaput, 1983). Pour obtenir l'équation appropriée, l'élève doit développer le réflexe de traduire mentalement l'énoncé de manière à bien illustrer la relation qui existe entre les deux variables, soit : « Le nombre de cochons est égal à 6 fois le nombre de vaches ».

De même, pour représenter un nombre impair algébriquement, la forme $2n + 1$ ne constitue pas une traduction directe de : *« Nombre non divisible par deux »*. Elle découle d'une logique mathématique. Stacey & MacGregor (1997) nous donnent un autre exemple de problème de conversion : La façon naturelle de décrire la suite *« 2, 5, 8, 11, 14, ... »* se limiterait normalement à décrire l'addition répétée, soit : "Commencer à 2 et ajouter 3 à chaque terme". Cependant, pour la décrire en langage algébrique, il importe de considérer le rang occupé par chacun des termes pour obtenir la règle : $y = 3n - 1$. Bien que cette représentation donne une description plus abstraite de la suite, elle a l'avantage de permettre d'accéder à n'importe lequel des termes qui la composent, à partir de son rang et à l'aide d'un calcul simple. La représentation algébrique est en effet très efficace pour calculer rapidement la valeur d'une quantité inconnue, c'est pourquoi elle est l'outil à privilégier à partir d'un certain niveau. Pour s'investir dans l'apprentissage de l'algèbre, l'élève doit en connaître les avantages et il est du ressort de l'enseignant de les faire valoir auprès de ses élèves.

Cela dit, les écarts entre le langage naturel et le langage algébrique exposés un peu plus haut, découragent les élèves qui ont de la difficulté à comprendre le sens des expressions algébriques qu'ils utilisent. On note d'ailleurs qu'ils commettent régulièrement des erreurs d'interprétation en algèbre.

1.3 Fréquentes erreurs commises par les élèves en algèbre

L'addition de termes non semblables, les erreurs de signe, ou la soustraction d'un nombre pour annuler son opposé, ne sont qu'une partie des erreurs récurrentes en algèbre. Vlassis et Demonty (2002) font remarquer que plusieurs élèves ont de la difficulté à résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$, ou qu'ils sont incapables de supprimer correctement les parenthèses dans l'expression $c - (e - f)$, que certains élèves croient toujours que $a + a + a = a^3$ ou que $(a^2 + b^2) = (a + b)^2$. On note également certaines erreurs d'interprétation qui transgressent les règles associées au langage algébrique.

Günther (1990) a recensé les fréquentes erreurs commises par les élèves dans le processus de mise en équation qui mettent en cause certaines conventions :

- En algèbre, les lettres ne représentent pas des objets, mais des nombres. Par exemple, x ne représente pas les pommes, mais x nombre de pommes.

- Une expression algébrique représente à la fois un processus et le résultat de ce processus. Par exemple, x + 4 veut dire : ajouter 4 au nombre x, mais il veut également dire : Le nombre plus grand que x de 4 unités.

- Une expression algébrique représente à la fois une action et une relation. Par exemple, S = 6P peut vouloir dire : On obtient S en multipliant P par 6, mais il peut aussi vouloir dire : S est 6 fois plus grand que P.

- Une même variable ne peut pas prendre deux valeurs différentes. Par exemple, dans l'expression x + 13 = x, on ne peut pas attribuer une valeur à la variable x dans le membre de droite pour obtenir x + 13 = 20 et obtenir une valeur de 7 pour la seconde variable x.

Par ailleurs, on remarque que certains élèves ont de la difficulté à repérer les quantités inconnues qui pourraient être représentées par des expressions algébriques et ne savent pas par où commencer lorsqu'ils sont placés devant un problème qui nécessite le recours à l'algèbre. Ils n'ont pas le réflexe de représenter les quantités inconnues par des variables, si cela n'est pas précisé dans l'énoncé, par une formulation du genre : *« Utilise la variable x pour représenter le nombre de pommes »* (Vlassis & Demonty, 2002). De plus, ils ne sont pas portés à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes car il ne leur apparaît pas comme étant un outil aussi efficace que les méthodes arithmétiques.

1.4 Résistance au langage algébrique

On constate que l'algèbre ne représente pas un outil de prédilection pour les jeunes du secondaire. Une étude menée par Lee & Wheeler (1989) a montré que, pour les élèves, les exemples numériques représentent une preuve beaucoup plus fiable que la démonstration algébrique. Encore de nos jours, lorsqu'on demande à des élèves du secondaire d'expliquer leur raisonnement en situation de résolution de problèmes, seule une minorité (généralement ceux qui se situent au dessus de la moyenne), choisissent le mode de représentation algébrique pour se justifier (Neria & Amit, 2004). La grande majorité d'entre eux préfèrent s'exprimer verbalement ou à l'aide d'exemples numériques. Il convient ici de préciser que les situations problèmes qui sont présentées aux élèves de 2e et 3e secondaire pour les introduire au langage algébrique peuvent habituellement être résolues par des modes différents, et parfois tout aussi efficacement. Par exemple, si on propose ceci aux élèves :

« On ajoute 17 à un nombre, on le multiplie par 3 et on obtient 114. Quel est ce nombre ? »

Ce type de problème peut être facilement résolu en effectuant les opérations inverses à rebours, c'est-à dire diviser 114 par 3 et soustraire 17 au résultat pour trouver 21. Même lorsque les équations sont présentées sous forme algébrique, il arrive qu'elles soient résolues avec des méthodes arithmétiques, sans faire appel aux propriétés des transformations des équations algébriques. C'est notamment le cas des équations de la forme $x + a = b$, $ax = b$ et $ax + b = c$.

Il arrive même que certains problèmes dits *« algébriques »* puissent être résolus en recourant à des procédés arithmétiques (Coulange, 2000). C'est notamment le cas des problèmes de partage en parties inégales qui, autrefois, étaient étudiés dans un contexte arithmétique. Prenons par exemple le problème suivant :

Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de 288 timbres. Si Marie en a six fois plus que Paul et Brenda en a 128 de moins que Marie, quel est le nombre de timbres de chacun ?

Ce problème pourrait être qualifié de *« problème déconnecté »*, puisqu'on ne peut calculer directement les données inconnues à partir des données connues (Bednarz & Janvier, 1997). Il apparaît donc pertinent de recourir à l'algèbre pour le résoudre. Il existe bel et bien une technique de résolution arithmétique qui était enseignée dans la première moitié du XXe siècle, mais de nos jours, ce type de problème serait systématiquement abordé dans un cadre algébrique. L'algèbre est en effet considéré comme un outil très efficace, qui devient incontournable dès qu'on atteint un certain niveau. Il n'est toutefois pas facile de convaincre les élèves que les efforts que demande l'appropriation de ce langage en valent la peine, puisque la démonstration de la puissance de cet outil n'est pas encore à leur portée.

1.5 Le passage de l'arithmétique à l'algèbre

1.5.1 Rupture entre deux modes de pensée

On remarque que l'algèbre constitue un obstacle majeur pour un nombre signifiants d'élèves du début du secondaire (Freiman & Lee, 2004). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre, en tant qu'élément de rupture entre deux modes de pensée, a d'ailleurs déjà fait l'objet de plusieurs études (Booth, 1988; Chevallard, 1989; Kieran, 1994; Vlassis & Demonty, 1999; Subramaniam, 2004). Pour l'apprenant, il ne s'agit pas uniquement de transférer ou généraliser des connaissances, mais de procéder à un changement de mode de raisonnement qui ne s'opère pas de façon spontanée. L'arithmétique utilise un nombre d'outils sémiotiques très limité, ces derniers ayant pour fonction de mettre des quantités en relation. Chevallard (1989) la considère comme étant le langage ordinaire, auquel on a ajouté le calcul sur les nombres. En général, faire de l'arithmétique se limite à effectuer des opérations en vue d'obtenir la valeur numérique d'une quantité inconnue, ce qui n'est pas nécessairement le cas avec le calcul algébrique.

En outre, l'élève ne doit pas toujours s'attendre à en arriver à un résultat numérique lorsqu'il fait de l'algèbre; il peut aboutir à une expression contenant des variables et même des signes opératoires, comme : $2x^2 + 3x$. Cela peut être difficile à concevoir étant donné la présence du signe d'addition que l'élève a l'habitude d'interpréter comme une opération qui demande à être effectuée. Il est d'ailleurs fréquent que des élèves commettent l'erreur de réduire cette expression à un seul terme ($5x^3$).

1.5.2 Interprétation du signe d'égalité

Lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre, la façon d'interpréter le signe d'égalité évolue. En arithmétique, il est perçu comme l'annonce d'un résultat et les jeunes du niveau primaire croient qu'il doit obligatoirement être associé à une opération, considérant que 3 = 3 n'est pas une formulation acceptable et qu'il est préférable de la remplacer par 0+3 = 3 (Freiman & Lee, 2004). Pour les élèves qui font de l'arithmétique, le signe d'égalité signifie "donnent" ou "font" comme dans "3 et 5 font 8". Les enseignants peuvent d'ailleurs constater que des élèves commettent souvent cette erreur d'interprétation, lorsqu'ils effectuent des calculs de gauche à droite, et qu'ils pocèdent comme suit: $3 + 5 = 8 \times 7 = 56 \div 2 = 28$ (Stacey & MacGregor, 1997).

Lors des manipulations algébriques, le signe d'égalité demande à être interprété comme une relation d'équivalence entre deux quantités, ce qui ne va pas de soi pour beaucoup d'élèves (Kieran, 1981). Les équations du type $3x + 5 = 17$ peuvent être interprétées ainsi: « en multipliant un certain nombre par 3 et en y ajoutant 5, on obtient 17 ». Cette façon d'aborder les équations relève d'une conception arithmétique du signe d'égalité. Lorsque l'inconnu apparaît dans les deux membres de l'égalité, comme dans l'équation $2x + 4 = 5x - 5$, une conception algébrique de l'égalité est indispensable pour lui donner du sens, à savoir qu'il s'agit de deux écritures différentes du même nombre.

1.5.3 Évolution du statut des lettres

L'interprétation des lettres en calcul algébrique pose particulièrement problème. Tantôt elles sont vues comme l'abréviation de certains mots, et tantôt on leur attribue une valeur en fonction de l'ordre alphabétique, comme *« a=1, b=2, c=3,... »* (Stacey & MacGregor, 1997; Kieran, 1994; Kücheman, 1978). En arithmétique, la lettre occupe une place très accessoire et elle est totalement ignorée dans les calculs intermédiaires. À l'école primaire, on l'utilise parfois pour découvrir un "code secret" en lui assignant une valeur fixée à l'avance. Stacey & MacGregor (1997) croient que cette pratique pourrait être à l'origine de la croyance des élèves selon laquelle la valeur d'une lettre correspond au rang qu'elle occupe dans l'alphabet.

On remarque que les lettres sont rarement considérées comme des variables représentant des nombres et les formules comme des expressions qui indiquent la relation entre ces nombres. Par exemple, la formule de l'aire du rectangle : A = L x l est considérée comme une version simplifiée de la procédure à appliquer pour calculer l'aire d'un rectangle (Vlassis et Demonty, 1997).

Pour les élèves, il paraît insensé d'effectuer des opérations sur des lettres qui sont supposées représenter des nombres, mais dont les valeurs numériques demeurent inconnues. Or, s'il est vrai que ces derniers ont de la difficulté à composer avec des lettres ayant un tel statut, alors ils risquent fort d'être complètement dépassés lorsqu'ils seront confrontés à des expressions algébriques où se côtoient variables et paramètres, tous représentés par des lettres, mais dont les unes représentent des quantités inconnues, et les autres des quantités supposément connues, comme dans l'équation $y = ax + b$.

1.6 Nouvelle vision de l'enseignement et didactique de l'algèbre

Par le passé, les enseignants avaient l'habitude d'accorder très peu d'importance aux interactions et aux échanges dans les cours de mathématique. (Lafortune, Mongeau, et Pallascio, 2002). Cette discipline faisait généralement l'objet d'exposés magistraux qui se limitaient à la présentation de procédures et à l'application d'algorithmes. Avec le renouveau pédagogique basé sur le socioconstructivisme, les enseignants se voient contraints d'adopter une nouvelle conception de l'apprentissage. Selon cette nouvelle conception, l'enseignant ne transmet pas uniquement des connaissances; il propose des activités permettant aux élèves de construire leurs propres savoirs. Les activités de ce type sont généralement élaborées de manière à porter l'élève à se questionner, et peuvent faire l'objet d'une discussion en classe. L'enseignement de type socioconstructiviste ne se limite donc pas à l'exposé de type magistral; il est composé de situations d'apprentissages signifiantes et favorisant les échanges sociaux. Ainsi, pour les socioconstructivistes, les élèves apprennent mieux dans un contexte favorisant les interactions sociales où le jugement des élèves est sollicité.

Le recours au conflit sociocognitif, qui est caractérisé par la confrontation entre les opinions divergentes (Gilly, 1989), est fréquemment suggéré en tant que dispositif de dépassement des obstacles à l'apprentissage (Lefebvre, 2006; Gauthier, 2005). Il est source de progrès (Descaves, 1992), car il amène les partenaires à prendre conscience de l'existence des réponses différentes de la leur ou à considérer des informations ou des significations qui leur avaient échappé. Les conflits générés par de telles situations, amènent les élèves à partager leurs réflexions et à argumenter, ce qui peut favoriser, à moyen ou à long terme, la construction de nouvelles connaissances. Dans un tel contexte, le rôle de l'enseignant consiste à alimenter la discussion et à relancer la réflexion par un questionnement judicieux. Il doit être soucieux de présenter des objets mathématiques qui soient contextualisés et porteurs de sens, c'est-à-dire rattachés à des situations de la vie courante (Gilly, 1989).

Or, la plupart des concepts mathématiques avancés ne sont pas accessibles par les sens; ils sont constitués de notions abstraites qui existent seulement dans la pensée. C'est notamment le cas du langage algébrique qui, jusqu'à présent, a toujours fait l'objet d'un enseignement de type magistral. En effet, l'exposé magistral est souvent la seule méthode que les enseignants connaissent ou maîtrisent (Chamberland; Lavoie & Marquis, 1995). Ces derniers sont donc contraints à réorienter leur pratique pour adhérer à une nouvelle vision de l'apprentissage pour laquelle ils ne possèdent pas de repère et pour laquelle les enseignants d'expérience n'ont pas été formés.

1.7 Questions et objectifs de recherche

La problématique soulevée dans les précédentes pages indique que de tous les modes de représentations auxquels les mathématiques font appel, c'est surtout le langage algébrique qui cause des difficultés. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre impose une rupture entre deux modes de pensée impliquant une évolution dans la façon d'interpréter certains concepts mathématiques. La pensée algébrique est particulièrement sollicitée lors de la conversion du langage naturel au langage algébrique, et c'est dans le processus de mise en équation algébrique que surgissent les problèmes les plus criants. C'est ce constat, de même que les implications didactiques qui y sont associées qui ont motivé la présente recherche et suscité certaines interrogations.

Questions :

Quels sont les éléments qui entravent la compréhension des élèves dans le processus de mise en équation algébrique ?

Quelles sont les pratiques éducatives qui influencent positivement le développement de la pensée algébrique ?

Objectifs de recherche:

Identifier certains éléments causant obstacle à la compréhension dans le processus de mise en équation algébrique.

Définir les pratiques enseignantes qui influencent positivement le développement de la pensée algébrique.