

Chapitre 3

Développement des modèles analytique et numérique du liquide

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'aspect du problème du mouvement du liquide. Le but est de développer un modèle simple et complet, qui modélise fidèlement le mouvement du liquide dans une citerne. Il existe plusieurs configurations dans les quelles le mouvement du liquide peut être modélisé. Les cas typiques sont les mouvements longitudinal et transversal le long d'un chemin droit ou incurvé [47]. Le modèle est obtenu à partir des équations régissant le mouvement du liquide. Les équations qui régissent le mouvement d'un liquide sont connues avec les modèles *Navier* (1823) et *Stokes* (1845). Par contre, les équations de Navier ne peuvent pas être résolues analytiquement. Les modèles théoriques sont dérivés en admettant que l'oscillation est petite [48]. La section suivante fait une brève description mathématique des équations de *Navier-Stokes* régissant l'écoulement d'un liquide. C'est un ensemble d'équations aux dérivées partielles tridimensionnelles non linéaires. La première équation décrit la conservation de la masse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (3.1)$$

Où ρ est la densité du liquide et $v = (v_x, v_y, v_z)$ est la vitesse de l'écoulement dans un système de coordonnées spatiales (x, y, z) . La conservation de la quantité du mouvement (*deuxième loi de Newton*) nous donne trois équations de plus. Pour un liquide Newtonien visqueux, la conservation de la quantité du mouvement donne l'équation suivante, :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v \right) = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot v) + \mu\nabla^2 v + \mathbf{F} \quad (3.2)$$

Où p est la pression, λ est le facteur de compression du volume, μ la viscosité et $F = (F_x, F_y, F_z)$ représente le vecteur de la force externe par unité de volume. Les équations (3.1) et (3.2) sont appelées les équations de *Navier-stokes*.

3.2 Modélisation analytique du ballonnement du liquide

Comme nous l'avons mentionné précédemment, pour obtenir un modèle analytique, il est nécessaire d'imposer certaines hypothèses de nature physique. Dans cette étude, nous admettons que le liquide est incompressible ($\lambda = 0$) et non visqueux ($\mu = 0$), donc les équations de *Navier-Stokes* deviendront les équations *d'Euler*.

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F} \quad (3.4)$$

Si la surface libre du liquide se déplace avec une faible vitesse, alors en état d'équilibre ($v = 0$) et nous obtenons l'équation qui représente la forme de la surface libre :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F} \quad (3.5)$$

Le liquide est modélisé par les déplacements instantanés : longitudinal, vertical et latéral de son centre de masse. Le but est de calculer les coordonnées du centre de masse pour une citerne de section circulaire ou elliptique dans les deux plans longitudinal (oxz) et latéral (oyz) telle qu'illustrée par la figure (3.1).

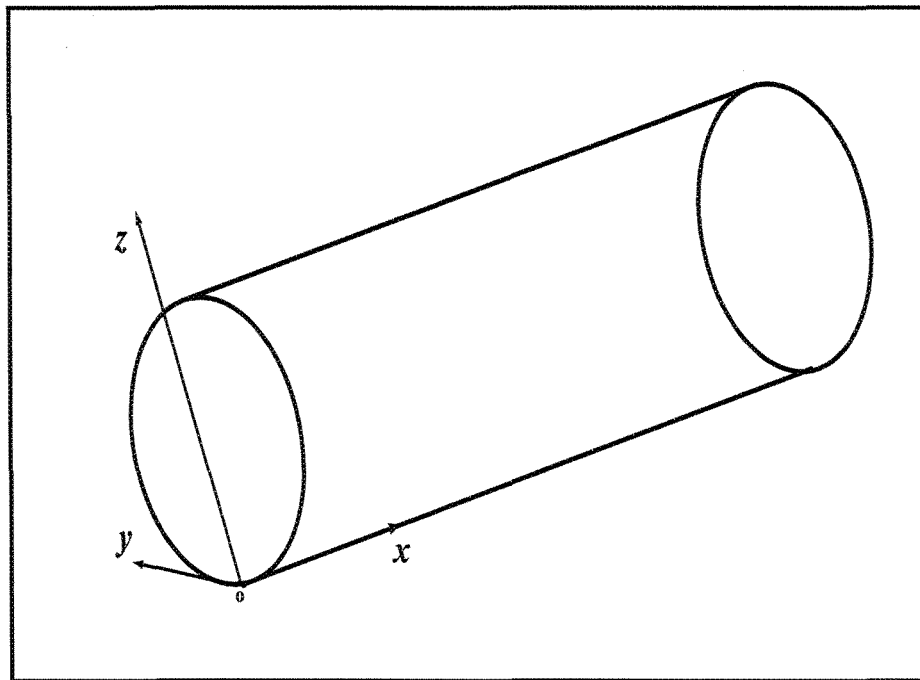


Figure 3.1: Système d'axe lié à la configuration de la citerne.

3.2.1 Décalage latéral de la charge du liquide

Nous étudions une coupe de section circulaire ou elliptique dans le plan (oyz) et sous l'influence de l'accélération latérale a_y . Dans ce cas, la configuration devient telle qu'illustrée par la figure (3.2).

Avec la projection de l'équation (3.5) dans le plan (oyz) nous obtenons :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) - a_y \quad (3.6)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - a_z \quad (3.7)$$

Où a_y est l'accélération latérale, $a_z = g$ représente l'accélération verticale due à la gravité et p est la pression statique. Notons que, le champs de l'accélération latérale n'est pas uniforme si le rayon de courbure est dans les dimensions du véhicule [49]. Donc, dans cette étude nous admettons que le rayon de courbure est plus grand que les dimensions du véhicule. À partir de l'équation (3.5) la dérivée totale de la pression sera de la forme suivante:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) dz = -\rho g dz - \rho a_y dy \quad (3.8)$$

Sur la surface libre, la variation de la pression est nulle, alors l'équation de la surface libre devient:

$$dz = -\frac{a_y}{g} dy \rightarrow z = -\frac{a_y}{g} y + z_0 \quad (3.9)$$

Où la constante z_0 (figure (3.2)) représente l'intersection entre l'équation de la surface libre et l'axe vertical z . L'angle d'inclinaison de la surface libre par rapport à l'horizontale a pour expression:

$$\tan(\gamma) = \frac{a_y}{g}$$

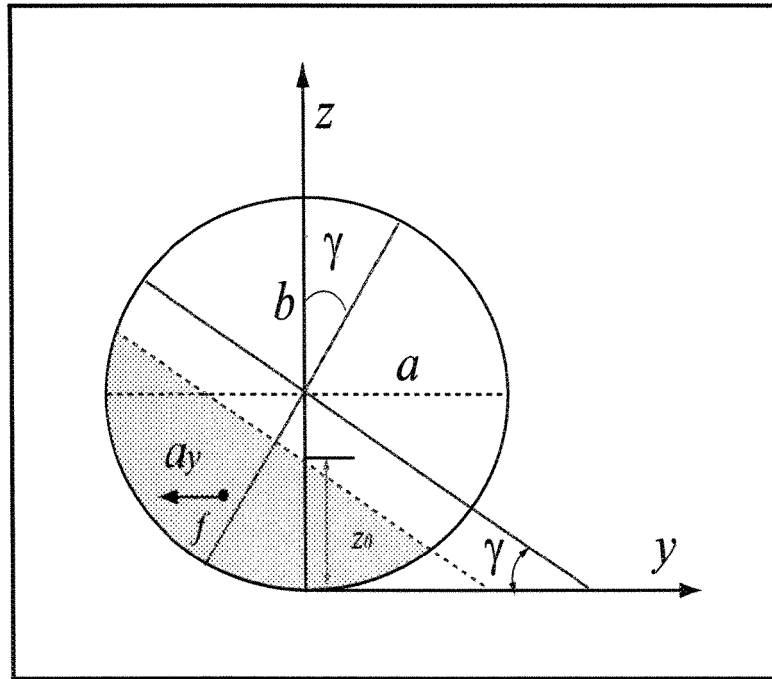


Figure 3.2: Surface libre du liquide sujet d'une accélération latérale a_y .

Si nous tenons compte du mouvement de roulis, la configuration de la citerne aura la forme illustrée par la figure (3.3) et l'équation de la surface libre aura comme expression:

$$z = -\tan(\sigma)y + z_0 \quad (3.10)$$

Où:

$$\sigma = \phi + \gamma \rightarrow \tan(\sigma) = \left(\frac{\tan(\gamma) + \tan(\phi)}{1 - \tan(\gamma)\tan(\phi)} \right) \quad (3.11)$$

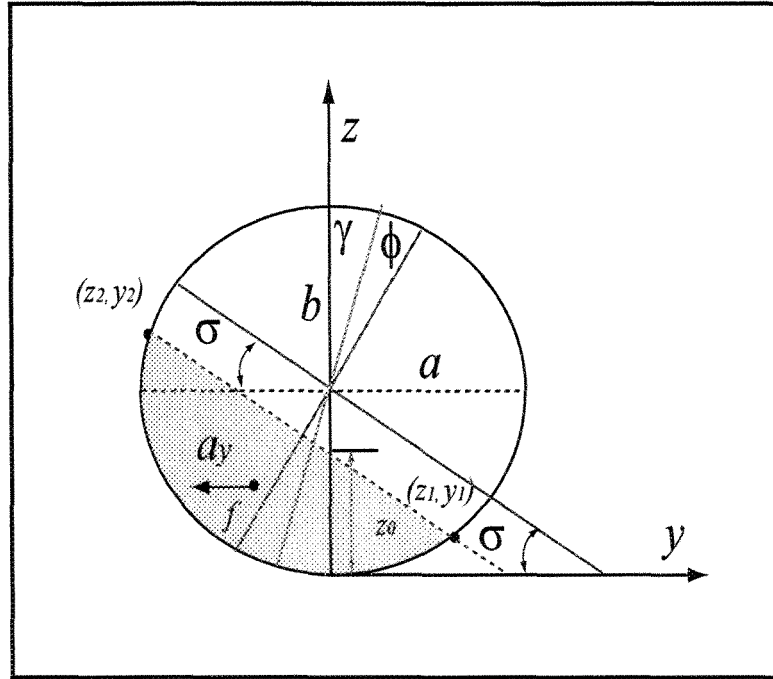


Figure 3.3: Surface libre du liquide sujet d'une accélération latérale a_y et l'angle de roulis ϕ .

La configuration varie en fonction du taux de remplissage τ , de l'accélération latérale a_y et l'angle de roulis ϕ . Cette variation implique un changement dans les coordonnées du centre de masse et de la matrice d'inertie. Ces derniers, seront calculés en fonction de la géométrie de la citerne.

$$\begin{aligned}
 y_L &= \frac{\iiint (y) dx dy dz}{V} & , \quad z_L &= \frac{\iiint (z) dx dy dz}{V} \\
 I_{xx} &= \rho \iiint (z^2 + y^2) dx dy dz & , \quad I_{xy} &= \rho \iiint (xy) dx dy dz \\
 I_{yy} &= \rho \iiint (x^2 + z^2) dx dy dz & , \quad I_{xz} &= \rho \iiint (xz) dx dy dz \\
 I_{zz} &= \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz & , \quad I_{yz} &= \rho \iiint (yz) dx dy dz \\
 F_i &= m_L a_i & , \quad M_i &= F_i \times r_{cg} \quad , \quad i \equiv (x, y, z)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Les bornes des intégrales sont les suivantes:

$$(\cdot) = \rho \left(\int_0^{L_c} \int_{-y_1}^{y_1} \int_0^{z_1} (\cdot) + \int_0^{L_c} \int_{-y_1}^y \int_{z_1}^{z_2} (\cdot) \right) dx dy dz \quad (3.13)$$

Où y représente l'équation (3.10) de la surface libre et L_c est la longueur de la citerne. Les bornes d'intégrales (y_1, y_2, z_1, z_2) sont les coordonnées des points d'intersections entre l'équation de l'ellipse (ou équation du cercle) et l'équation de la surface libre:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{(z - b)^2}{b^2} = 1 \quad , \quad z = -\tan(\sigma)y + z_0$$

Ce système d'équations sera solutionné par itérations dans un algorithme avec comme contrainte le volume initial constant. Les entrées de l'algorithme sont le taux de remplissage, l'angle de roulis et l'accélération latérale. Ce système est développé et programmé dans simulink (Matlab) [50] telle qu'illustrée par la figure (3.4).

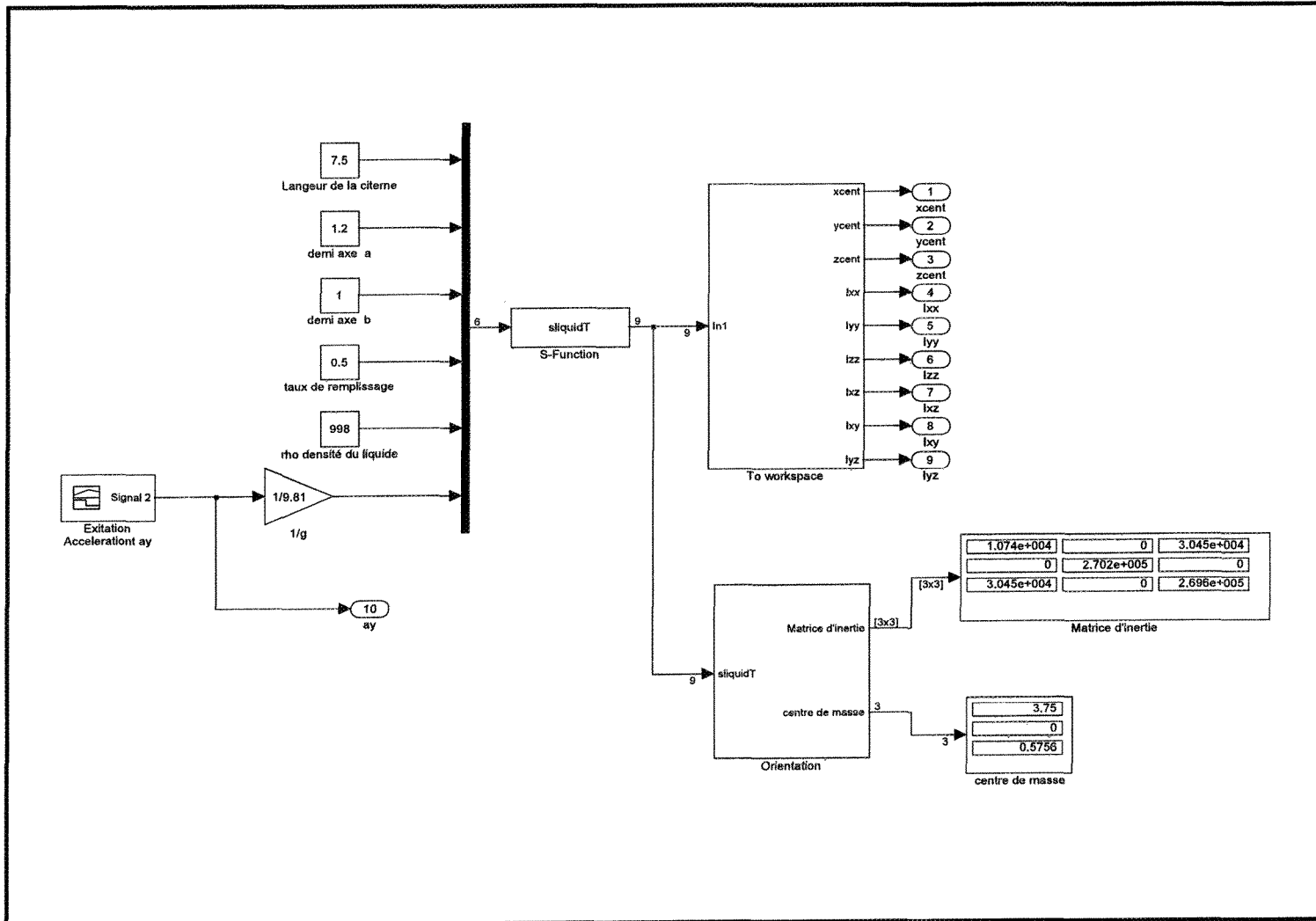


Figure 3.4: Programmation du décalage latéral du liquide avec Simulink.

3.2.2 Décalage longitudinal de la charge du liquide

Pour le déplacement longitudinal, nous étudions une coupe rectangulaire dans le plan (oxz) . L'accélération due au mouvement de tangage est très faible comparativement à la décélération, ce qui nous permet de la négliger. Tout dépend du taux de remplissage et l'accélération longitudinale a_x , nous étudions plusieurs cas selon la forme de la section et la masse du liquide telle qu'illustrée par la figure (3.5). La configuration varie en fonction du taux de remplissage τ et de l'accélération longitudinale a_x . En utilisant la même méthodologie développée pour le modèle latéral, avec la projection de l'équation (3.5) dans le plan (oxz) nous obtenons:

$$dz = -\frac{a_x}{g} dx$$

Après l'intégration nous aurons:

$$z = -\frac{a_x}{g}(x - x_1) + z_1 \quad (3.14)$$

Où la constante z_1 (figure 3.5) représente l'intersection entre l'équation de la surface libre et l'axe vertical z . L'angle d'inclinaison de la surface libre par rapport à l'horizontale a pour expression:

$$\tan(\gamma) = \frac{a_x}{g} \quad (3.15)$$

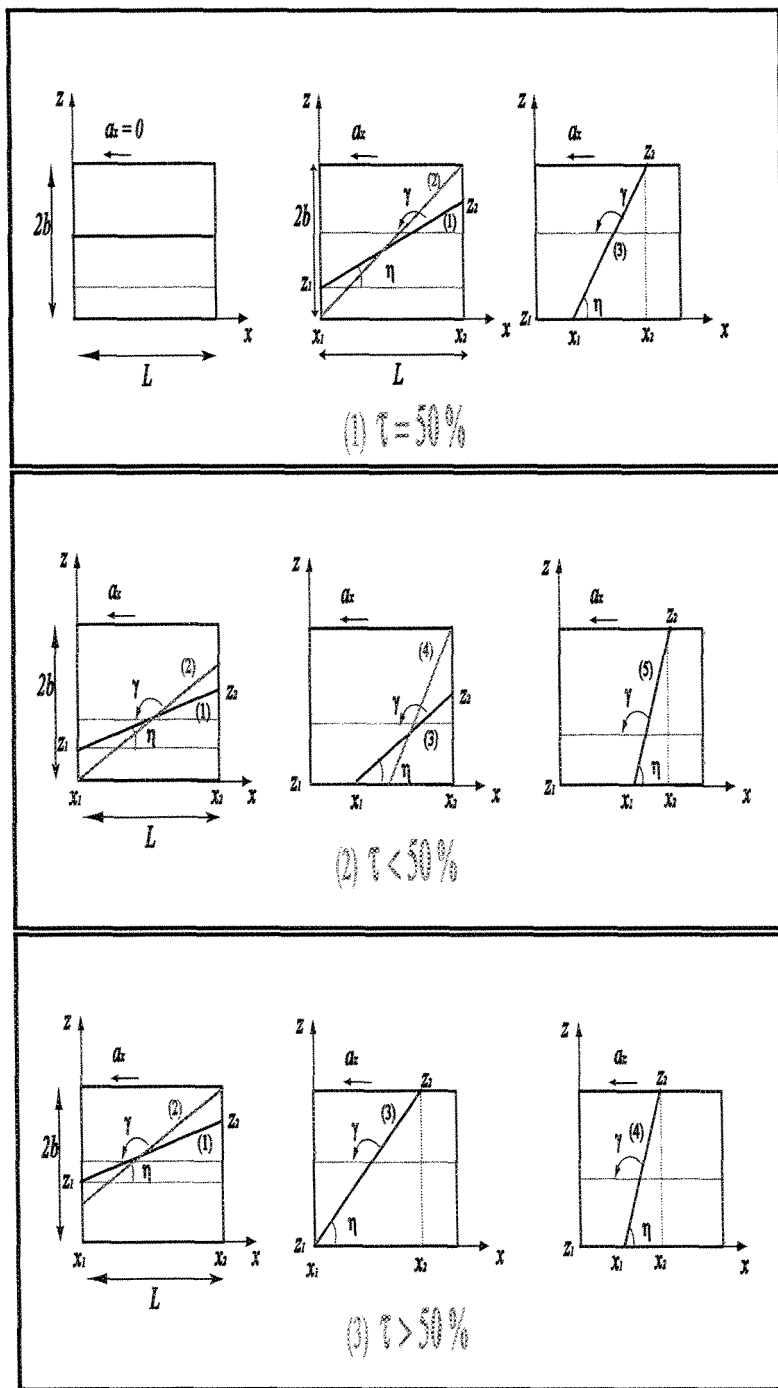


Figure 3.5: Surface libre du liquide sujet à différentes décélérations a_x et taux de remplissage.

La configuration varie en fonction du taux de remplissage τ et l'accélération longitudinale a_x . Ceci implique une variation dans les coordonnées du centre de masse et les moments d'inertie. Ces derniers seront calculés en fonction de la géométrie de la citerne:

$$\begin{aligned}
 x_L &= \frac{\int \int \int (x) dx dy dz}{V} & , & \quad z_L = \frac{\int \int \int (z) dx dy dz}{V} \\
 I_{xx} &= \rho \int \int \int (z^2 + y^2) dx dy dz & , & \quad I_{xy} = \rho \int \int \int (xy) dx dy dz \\
 I_{yy} &= \rho \int \int \int (x^2 + z^2) dx dy dz & , & \quad I_{xz} = \rho \int \int \int (xz) dx dy dz \\
 I_{zz} &= \rho \int \int \int (x^2 + y^2) dx dy dz & , & \quad I_{yz} = \rho \int \int \int (yz) dx dy dz \\
 F_i &= m_L a_i & , & \quad M_i = F_i \times r_{cg} \quad , \quad i \equiv (x, y, z)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Les bornes d'intégrales sont les coordonnées des points d'intersections entre l'équation de la surface libre et l'équation de la géométrie:

$$(..) = \left(\int_{x_1}^{x_2} \int_0^z \int_{-y_0}^{y_0} (..) + \int_{x_2}^L \int_0^{2b} \int_{-y_0}^{y_0} (..) \right) dx dz dy \tag{3.17}$$

Où:

$$y_0 = \frac{a}{b} \sqrt{2bz - z^2} \tag{3.18}$$

L'étude est similaire dans le cas où la citerne est compartimentée telle que représentée par la figure (3.6). Il reste à extrapoler les équations pour chaque compartiment et à calculer le centre de masse global en utilisant le théorème de composition des centres de masses et le théorème des axes parallèles. Ceci nous permet de calculer la matrice d'inertie par rapport au système de référence choisi.

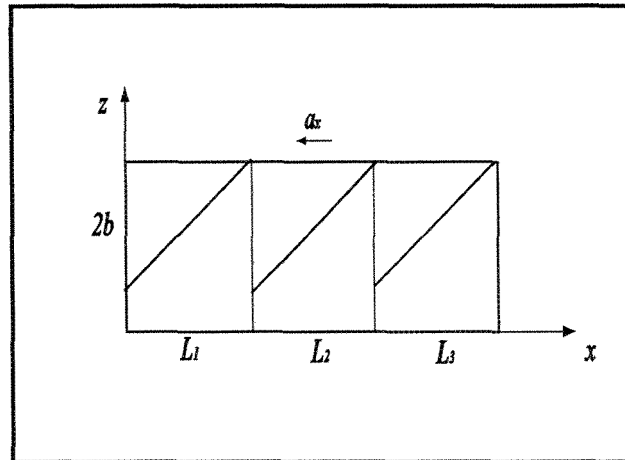


Figure 3.6: Citerne avec trois compartiments sujet à une décélération.

Ce système d'équations sera solutionné par itération dans un algorithme avec comme contrainte le volume initial constant. Les entrées de l'algorithme sont le taux de remplissage, l'angle de roulis et l'accélération longitudinale. Ce système d'équations est développé et programmé dans simulink (Matlab) [50] telle que représentée par la figure (3.7).

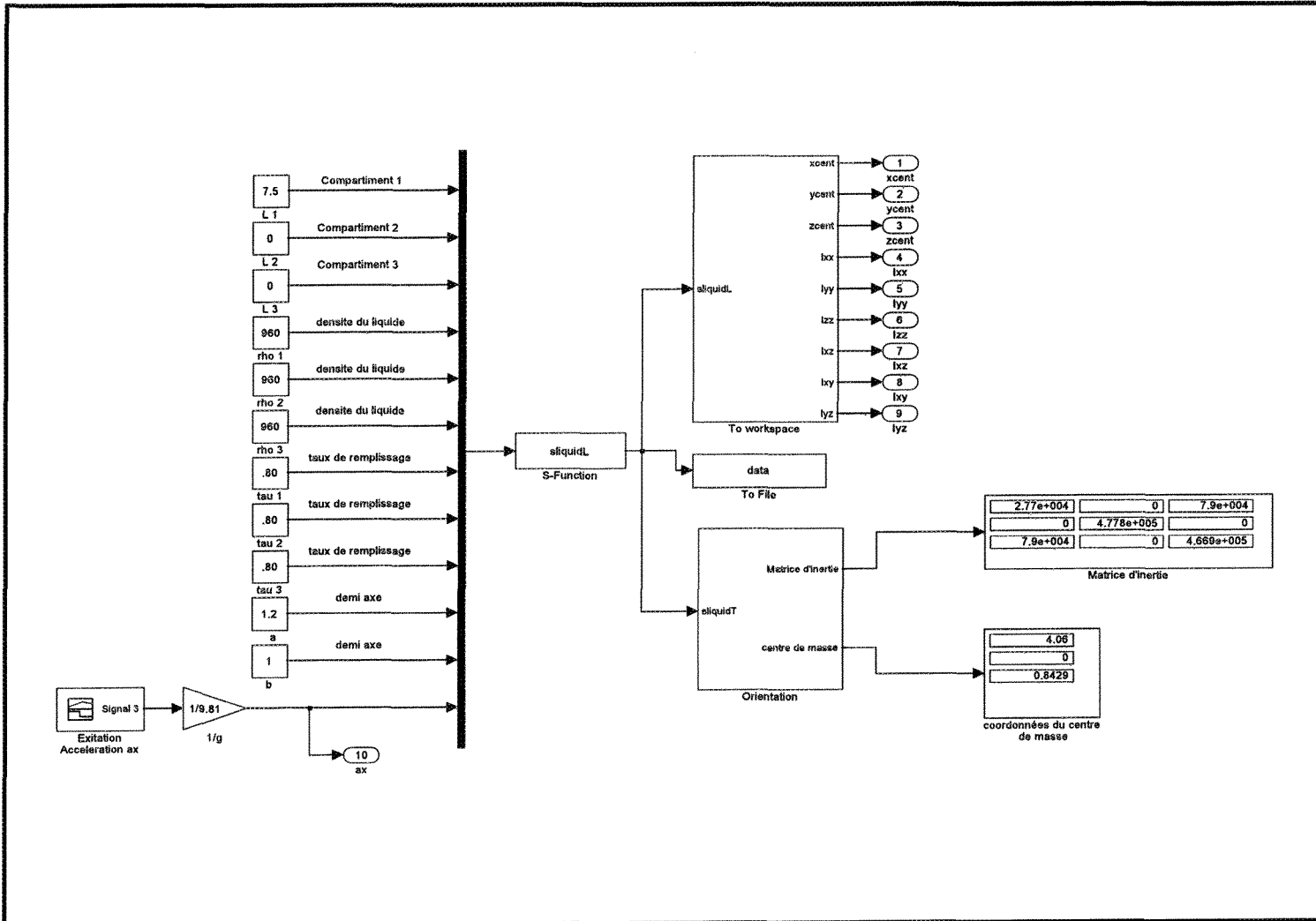


Figure 3.7: Programmation du décalage longitudinal du liquide avec simulink.

Citerne compartimentée avec des orifices

Pour une citerne compartimentée avec des orifices telle qu'illustrée par la figure (3.8) nous posons certaines hypothèses de nature physique afin de développer le modèle analytique. Dans cette étude, nous supposons que le liquide est incompressible ($\lambda = 0$), non visqueux ($\mu = 0$) et il se déplace uniformément. Nous supposons également que la densité du liquide est constante. Pour développer ce modèle nous utilisons le principe du travail-énergie [51]. L'énoncé de ce principe décrit que le travail effectué par les forces sur le liquide est égal à la somme des variations de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

Par exemple, pour le compartiment 1 telle que représentée par la figure (3.8), la variation du travail généré par les forces de pression appliquées au centre de masse du liquide entre la section A_1 et A_2 est obtenue par:

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= - \left[\int_0^{\Delta x_2} \sum F dx - \int_0^{\Delta x_1} \sum F dx \right] \\
 &= - (F_2 \Delta x_2 - F_1 \Delta x_1) \\
 &= - (P_2 A_2 \Delta x_2 - P_1 A_1 \Delta x_1)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Avec: $F_i = P_i A_i$

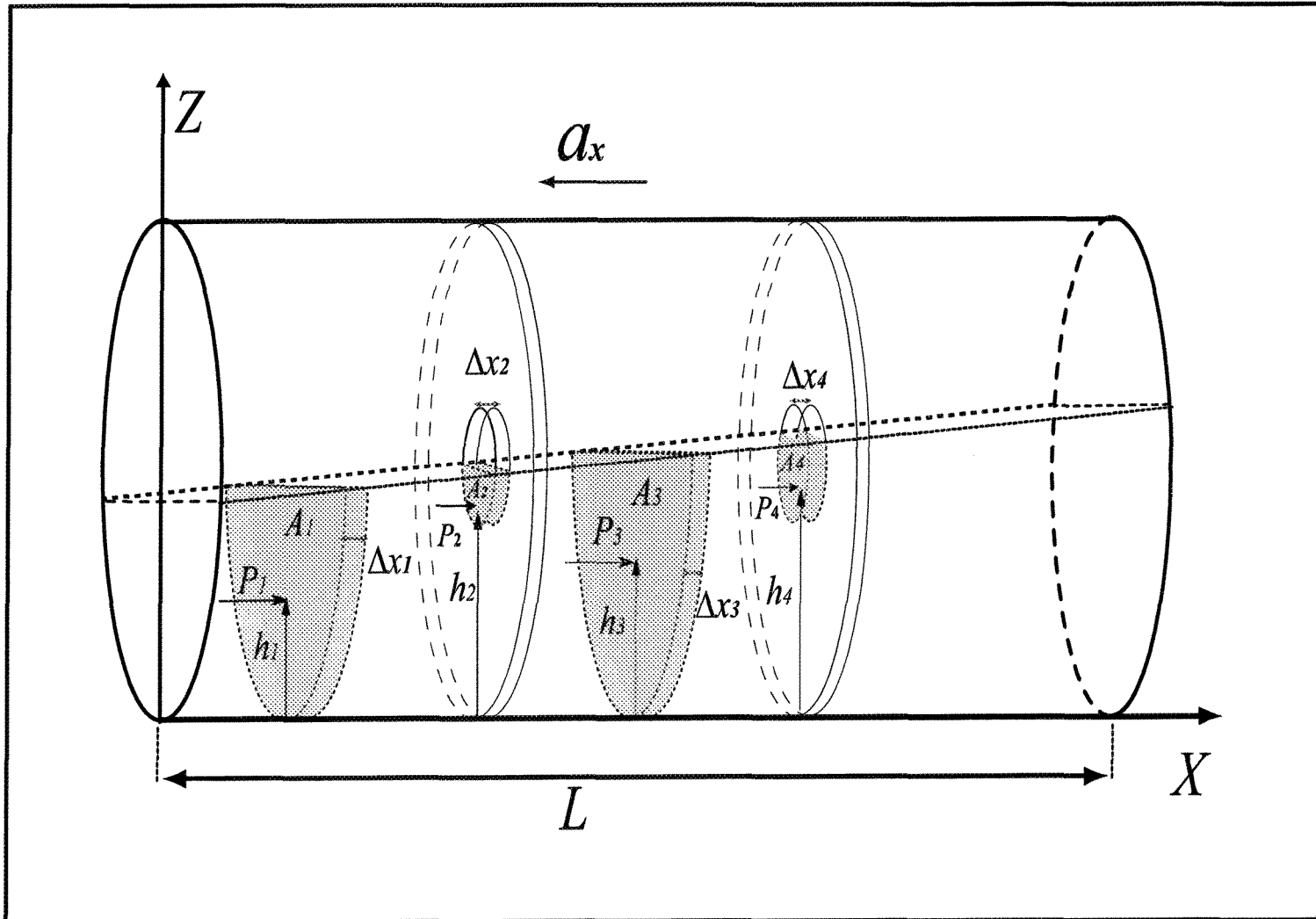


Figure 3.8: Modèle d'une citerne avec chicanes à orifices sujet à une décélération.

La variation de l'énergie potentielle est égale au produit du poids et de la variation de la hauteur du centre de masse du liquide :

$$\Delta W_g = \Delta m_2 g h_2 - \Delta m_1 g h_1 \quad (3.20)$$

Avec:

$$\Delta m_i = \rho A_i \Delta x_i \quad , \quad \Delta x_i = V_i \Delta t$$

Le travail produit par la portion du liquide lorsqu'elle se déplace entre deux positions est égale à la variation de son énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} \Delta m_2 V_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m_1 V_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho A_2 V_2 \Delta t V_2^2 - \frac{1}{2} \rho A_1 V_1 \Delta t V_1^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le principe du travail et de l'énergie peut être résumé comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta V_g + \Delta T \\ -(P_2 A_2 \Delta x_2 - P_1 A_1 \Delta x_1) &= \frac{1}{2} \rho A_2 V_2 \Delta t V_2^2 - \frac{1}{2} \rho A_1 V_1 \Delta t V_1^2 - (P_2 A_2 V_2 \Delta t - P_1 A_1 V_1 \Delta t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Puisque le liquide est incompressible, donc le flux du liquide est constant :

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = A_i V_i$$

Après avoir divisé l'équation (3.22) par $A_i V_i \Delta t$, l'équation prendra la forme de

l'équation de Bernoulli [52]:

$$P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (3.23)$$

De la même manière pour le deuxième compartiment nous obtenons l'équation équivalente:

$$P_4 + \rho gh_4 + \frac{1}{2}\rho v_4^2 = P_3 + \rho gh_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 \quad (3.24)$$

Pour calculer la quantité du liquide qui passe d'un compartiment à l'autre, nous devons savoir le taux de remplissage et l'amplitude de la décélération. Ces paramètres représentent l'entrée d'un algorithme qui évalue la forme de la surface libre dans chaque compartiment à l'instant t . Les points d'intersections entre l'équation de la surface libre et l'équation de la géométrie de la citerne seront connus. Les valeurs de ces coordonnées seront les paramètres d'entrées au deuxième algorithme qui calcule la quantité du liquide qui passe d'un compartiment à l'autre dans un intervalle de temps Δt choisi en employant les équations (3.23) et (3.24). Cette itération continue jusqu'à ce que le temps désiré soit atteint. Les entrées et les sorties de chaque algorithme seront mises à jour à chaque pas de temps Δt choisi.

3.3 Modélisation numérique du ballonnement du liquide

Une interface gaz-liquide est appelée souvent sous le nom d'une surface libre. La raison de la désignation "libre" résulte de la grande différence dans les densités du gaz et du liquide. Par exemple, le rapport de densité pour l'eau et l'air est de 1000. La faible densité du gaz signifie que son inertie peut être généralement ignorée comparée à celle du liquide. Dans ce cas, le mouvement du liquide est indépendant, ou libre. La seule influence du gaz est la pression exercée sur la surface du liquide. En d'autres

termes, la surface gazeuse-liquide n'est pas contrainte, mais libre. Plusieurs approches numériques ont été employées pour modéliser le problème multi phases. Voici certaines méthodes:

- Méthode Lagrangienne
- Méthode Eulérienne
- Arbitraire Eulérien Lagrangien (*ALE*): Dans cette formulation la maille en partie se déplace et se déforme parce qu'elle suit le matériel (formulation lagrangienne), alors qu'en même temps le matériel peut également traverser la maille (formulation Eulérienne) [53, 54, 55].
- Méthode du "Volume-of fluid" (*VOF*) développée par Hirt et Nichols [56] : Cette méthode est basée sur le concept d'une fraction du volume de liquide . Dans chaque cellule de maillage (volume de contrôle), il est usuel de maintenir seulement une valeur pour chaque quantité d'écoulement (par exemple, pression, vitesse, température). Selon ce raisonnement, l'utilisation d'une seule quantité, la fraction volumique du liquide en chaque cellule du maillage, est conforme à la résolution des autres quantités d'écoulement. Si nous connaissons la quantité de liquide sur chaque cellule, il est possible de localiser les surfaces, de déterminer les pentes et les courbures extérieures pour chaque cellule donc, nous obtenons la forme de la surface libre liquide-gaz.

Voici une brève discussion des diverses techniques employées pour modéliser numériquement la surface libre. Dans notre étude, nous utilisons la méthode (*VOF*) qui est probablement la technique la plus réussie en raison de sa simplicité et sa robustesse. Les équations sont solutionnées avec le logiciel de volumes finis **Fluent** [57]. La formulation de "volume de contrôle" (*VOF*) se base sur le fait que deux fluides ou plus (ou phases) n'interpénètrent pas. Pour chaque phase additionnelle que nous

ajoutons au modèle, une variable est définie : la fraction de volume de la phase dans la cellule. Sur chaque volume de contrôle, la somme de toutes les fractions de volume est égale à l'unité. Les champs pour toutes les variables et les propriétés sont partagés par les phases et représentent des valeurs de volume moyen, tant que la fraction de volume de chacune des phases est connue à chaque endroit. Ainsi, les variables et les propriétés à n'importe quelle cellule représentent une des phases (liquide ou gaz), ou représentent un mélange des deux phases telle que représentée par la figure (3.9) . Tout dépend des valeurs de la fraction volumique. Si la fraction du volume du fluide q dans la cellule est nommée comme α_q , alors les trois conditions suivantes sont possibles:

- $\alpha_q = 0$: La cellule est vide.
- $\alpha_q = 1$: La cellule est pleine.
- $0 < \alpha_q < 1$: Présence de mélange dans la cellule.

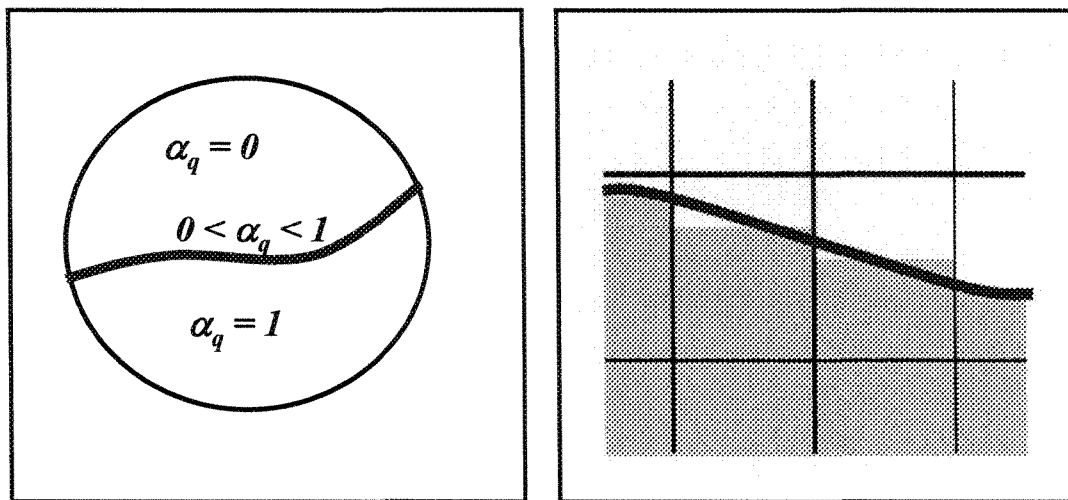


Figure 3.9: Représentation de la méthode volume de contrôle "VOF".

Basé sur la valeur locale de α_q , les propriétés et les variables appropriées seront assignées à chaque volume de contrôle dans le domaine.

Le cheminement de l'interface entre les phases est accompli par la solution d'une équation de continuité pour la fraction de volume d'une (ou plus) des phases. Pour la phase q , cette équation aura la forme suivante [57]:

$$\frac{1}{\rho_q} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) \right) = S_{\alpha q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (3.25)$$

et \dot{m}_{pq} est le transfert de masse à partir de la phase q à la phase p et \dot{m}_{qp} est le transfert de masse à partir de la phase p à la phase q . Dans notre étude le transfert de masse entre le liquide et l'air est nul. $S_{\alpha q}$ représente le terme source qui est nul dans cette étude. Donc, l'équation (3.25) aura la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q v_q) = 0 \quad (3.26)$$

L'équation de la fraction volumique ne sera pas résolue pour la phase primaire (air). La fraction volumique de l'air sera calculée à partir de la contrainte que la somme des fractions volumiques dans chaque cellule est égale à l'unité :

$$\sum_{q=1}^2 \alpha_q = 1 \quad (3.27)$$

Les propriétés qui apparaissent dans les équations de transport sont déterminées par la présence des phases composées en chaque volume de contrôle. Dans notre système (liquide et air), les phases sont représentées par les indices: 1 pour l'air et 2 pour le liquide.

Le problème transitoire de la surface est résolue par une seule équation de quantité de mouvement dans tout le domaine, et le champ de vitesse résultant est mis en commun

entre les phases.

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla v + \nabla v^T)] + \rho g + F \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (3.29)$$

Une limitation de l'approximation du champs partagé est que dans les cas où des grandes différences de vitesse existent entre les phases, l'exactitude des vitesses à calculer près de l'interface peut être compromise. Ce dernier cas n'est pas présent dans notre étude.

L'équation de quantité de mouvement (3.28), dépend des fractions volumiques de toutes les phases par les propriétés ρ et μ . La densité et la viscosité en chaque cellule sont définies par :

$$\rho = \rho_2 \alpha_2 + (1 - \alpha_2) \rho_1 \quad (3.30)$$

$$\mu = \mu_2 \alpha_2 + (1 - \alpha_2) \mu_1$$

Où: les indices **2** et **1** représentent respectivement la phase seconde (liquide) et la phase primaire (Air).

L'équation de quantité de mouvement composée (3.28) est résolue conjointement avec l'équation de continuité (3.29), pour dériver l'écoulement transitoire avec la surface libre, en appliquant l'algorithme de correcteur de pression PISO [57] (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) qui est employé pour le couplage de pression-vitesse. Ceci est dans le but de tenir compte des valeurs accrues sur tous les facteurs de sous-relaxation sans perte de stabilité.

3.3.1 Choix des paramètres d'analyse

Pour atteindre notre objectif de comparaison entre le modèle analytique et le modèle numérique, nous allons utiliser les mêmes paramètres. Donc, le comportement transitoire du ballonnement du liquide des camions citernes partiellement remplis sera évalué en fonction du décalage de la charge du liquide. Cette évaluation est obtenue en étudiant le déplacement instantané du centre de masse, force et moment due à la pression du liquide et la variation des moments d'inertie. Le logiciel Fluent ne donne pas directement ces données mais il nous permet d'ajouter une sous-routine (User Defined Function) écrite en langage *C* afin de calculer la variation dans le temps de ces quantités.

Force et moment dus à la pression du liquide

Les forces résultantes sont dues à la pression exercée et distribuée sur les murs de la citerne. Les forces dues à la viscosité pour un tel liquide avec faible viscosité sont infiniment petites comparativement aux forces de pression. Donc, elles seront négligées. Ces forces de pression seront calculées par intégration numérique sur toutes les cellules du liquide adjacentes au mur de la citerne. Les moments dus aux forces de pression du liquide par rapport au centre du système des coordonnées, illustrés par la figure (3.10) seront calculés de la même manière telle que définie par l'équation (3.31).

$$\begin{aligned}
 Fp_j &= \sum_{i=1}^{liquide} P_{c_i} A_{j_{c_i}} \\
 Mp_j &= \sum_{i=1}^{liquide} r_{c_i} \times Fp_j
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Avec:

$A_{j_{c_i}}$: Surface de la face de la cellule c_i dans la direction j .

P_{c_i} : Pression du centre de la cellule c_i .

F_{p_j} : Force de pression dans la direction j .

M_{p_j} : Moment de la force de pression par rapport à l'origine du système de référence o .

r_{c_i} : Vecteur du centre de masse par rapport à l'origine du système de référence o .

$j \equiv (x, y, z)$.

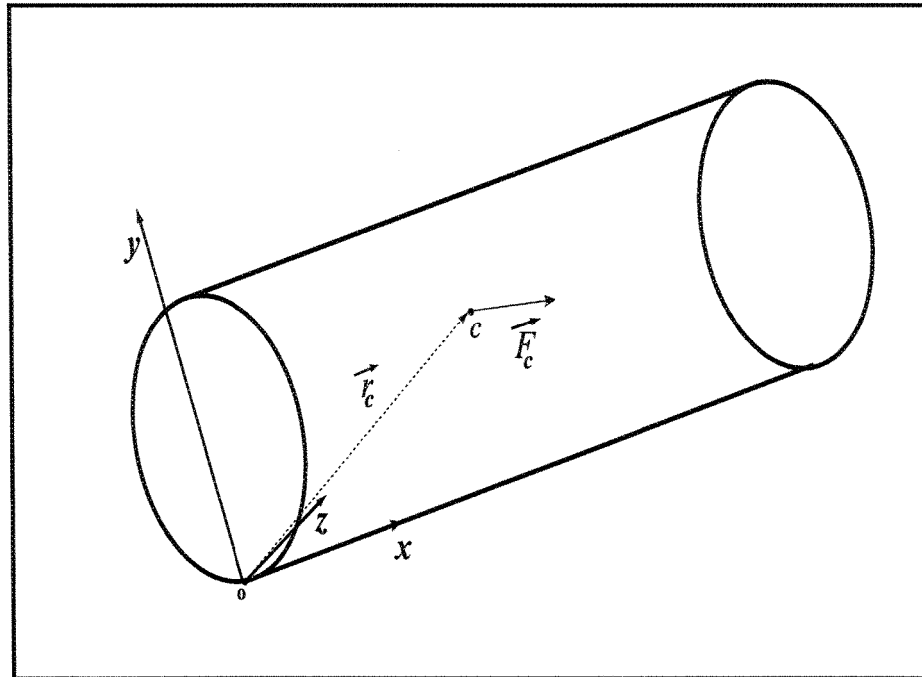


Figure 3.10: Force et moment dus à la pression du liquide.

Décalage de la charge du liquide

Le déplacement instantané du centre de masse sera calculé par intégration numérique qui couvre le domaine du liquide comme suit:

$$\begin{aligned}
 x_L &= \frac{\sum_{i=1}^{liquide} x_{c_i} V_{c_i}}{V_{liquide}} \\
 y_L &= \frac{\sum_{i=1}^{liquide} y_{c_i} V_{c_i}}{V_{liquide}} \\
 z_L &= \frac{\sum_{i=1}^{liquide} z_{c_i} V_{c_i}}{V_{liquide}}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Avec:

V_{c_i} : Volume de la cellule i .

$(x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i})$: Coordonnées de la cellule c_i par rapport à l'origine du système de référence o .

Moments d'inertie

Les moments d'inertie de masse sont calculés par l'intégration numérique de la somme des coordonnées instantanées de la cellule du liquide multiplié par le volume et la densité du liquide telles que exprimées par les expressions suivantes :

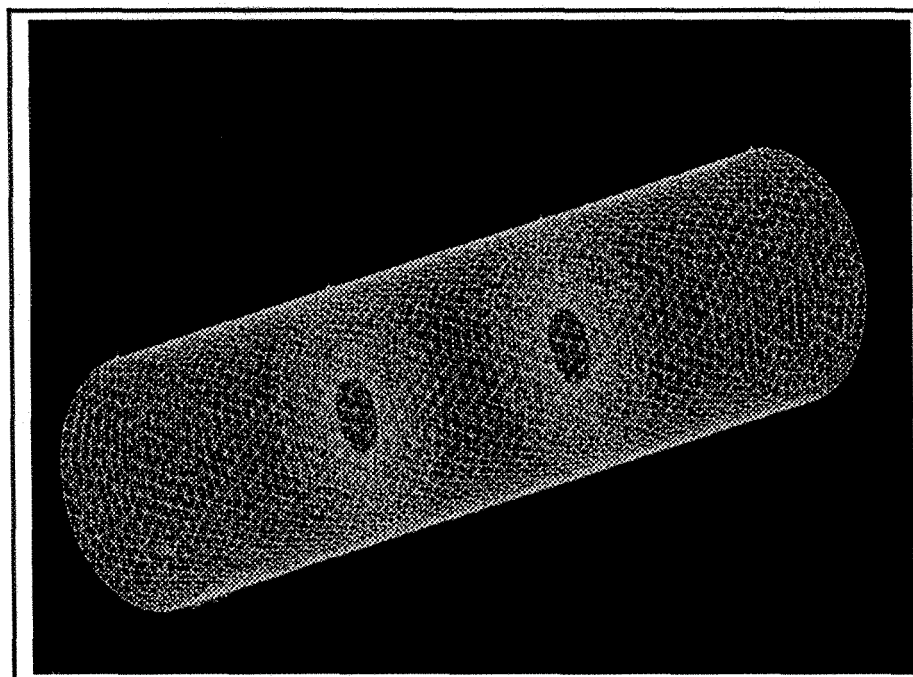
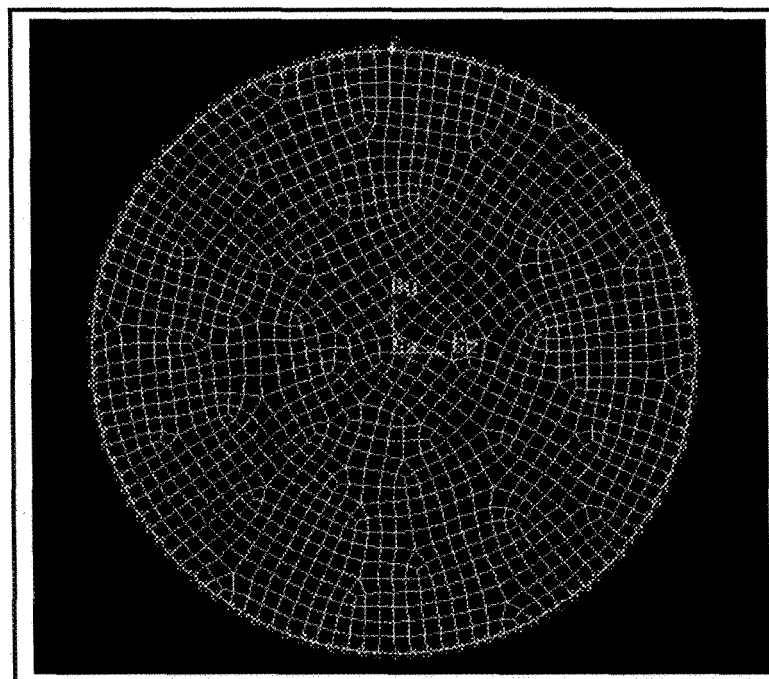


Figure 3.11: Maillage non structuré appliqué sur la citerne.

3.4 Effect du maillage et du pas de temps

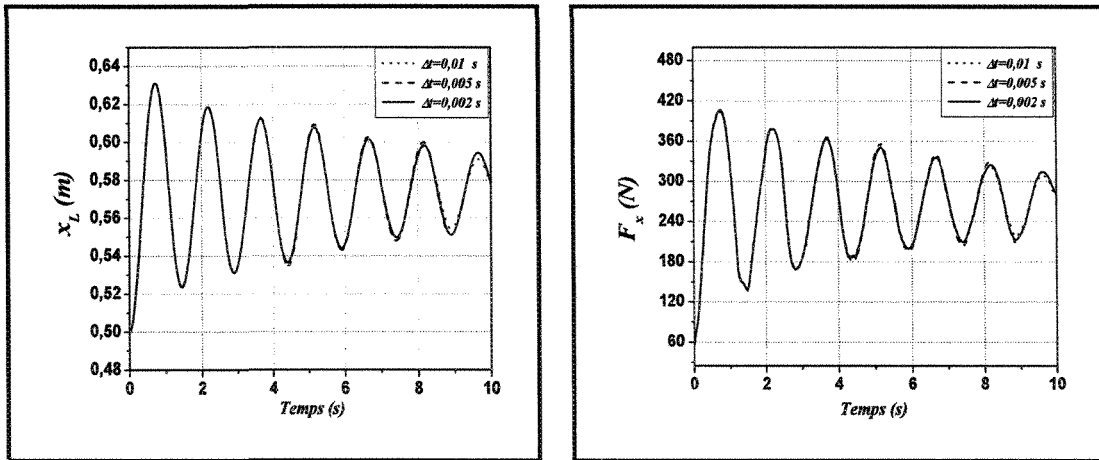
Cette section étudie l'effet du maillage et du pas de temps sur les calculs numériques. Nous avons choisi trois différents maillages pour analyser cet effet pour une citerne de section circulaire partiellement remplie $\tau = 50\%$ de rayon $r = 0.3 \text{ m}$ et de longueur d'unité sujet à une excitation de décélération d'impulsion d'échelon $a_x = 2 \text{ m/s}^2$. Les détails du nombre de cellules, du nombre de faces et du nombre de noeuds sont représentés par le tableau (3.1). De la même manière, nous avons choisi trois différents pas de temps de simulation $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ et $\Delta t = 0.002 \text{ s}$. Nous avons choisi deux paramètres pour analyser l'effet du maillage et du pas de temps. Le déplacement de la coordonnée longitudinale x_L du centre de masse et la force de pression longitudinale F_x . Ces deux paramètres sont en accord avec le choix de l'excitation de décélération choisie comme critère de comparaison.

Tableau 3.1: Caractéristiques de trois maillages

Maillage	Nombre de faces	Nombre de cellules	Nombre de noeuds
Maillage 1	13648	4800	5600
Maillage 2	26127	9090	10292
Maillage 3	39925	13825	15444

Les figures (3.12) et (3.13) représentent la comparaison de simulations numériques pour trois cas de maillages différents et trois pas de temps de simulation différents en terme de déplacement longitudinal de la coordonnée du centre de masse du liquide x_L et de force de pression longitudinale F_x . Dans le cas du maillage, nous observons que nous avons une petite différence entre le maillage 1 et 2, cependant, nous constatons que le maillage 2 colle parfaitement avec le maillage 3. Ces résultats nous ont permis de conclure que le fait de raffiner le maillage de plus en plus n'influence pas les résultats, par contre il va augmenter le temps de calcul et nous perdons la stabilité de la solution.

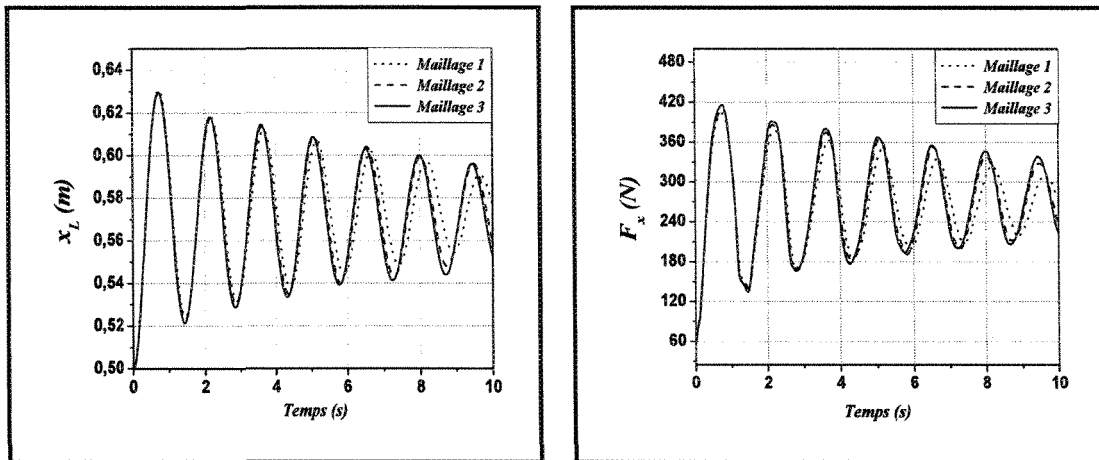
Dans le cas de la comparaison de différents pas de temps de simulation, nous constatons que pour $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ c'est suffisant. D'après cette comparaison, nous concluons qu'un maillage raisonnable et un pas du temps de $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ seront des paramètres de simulation idéals pour toutes les simulations de cette étude.



a) Déplacement longitudinal x_L .

b) Force de pression longitudinale F_x .

Figure 3.12: Comparaison entre trois différents pas de temps de simulation.



a) Déplacement longitudinal x_L .

b) Force de pression longitudinale F_x .

Figure 3.13: Comparaison entre trois différents maillage.

3.5 Effet de la viscosité du liquide

Deux liquides de densité égale et de viscosité différente, tel qu'illustré dans le tableau (3.2), sont choisis pour analyser l'effet de la viscosité sur le ballonnement du liquide. Afin d'analyser cet effet, nous avons modélisé le décalage longitudinal de la charge du liquide dans le cas d'une citerne non compartimentée. Ce cas, génère plus de ballonnement que dans le cas latéral. La citerne est partiellement remplie ($\tau = 50\%$ et $\tau = 70\%$) de section circulaire de rayon $r = 1.05m$ et de longueur $L = 4.5m$ sujet à une décélération d'impulsion d'échelon d'amplitude ($a_x = 0.25g$ et $a_x = 0.45g$). Le déplacement longitudinal du centre de masse Δx et la force de pression longitudinale F_x seront les deux paramètres choisis pour analyser l'effet de la viscosité.

Tableau 3.2: Paramètres physiques.

Fluide	Paramètres	Valeurs
Huile domestique (Fuel oil)	densité	$\rho = 960 \text{ kg/m}^3$
	viscosité dynamique	$\eta = 0.048 \text{ kg/m.s}$
Huile de ricin (Castor oil)	densité	$\rho = 960 \text{ kg/m}^3$
	viscosité dynamique	$\eta = 0.985 \text{ kg/m.s}$

Les résultats montrées, par les figures (3.14 et 3.15), démontrent que l'effet de la viscosité pour la gamme de variation choisie peut être considéré comme négligeable. Nous pouvons conclure que dans cette recherche un liquide avec faible viscosité tel que l'huile domestique est suffisant pour performer la comparaison entre le modèle analytique et numérique.

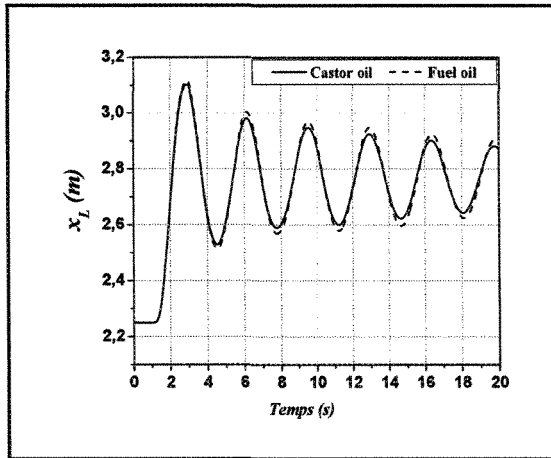
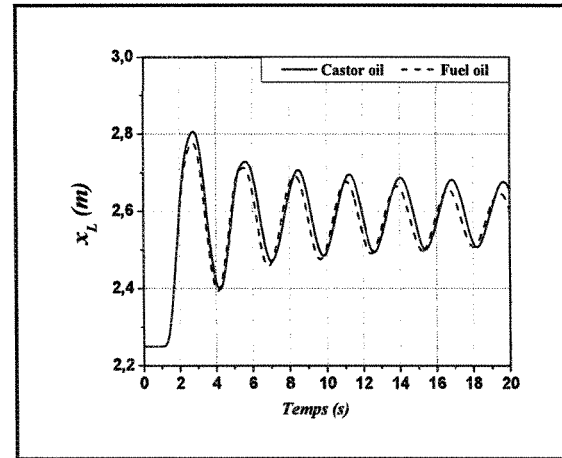
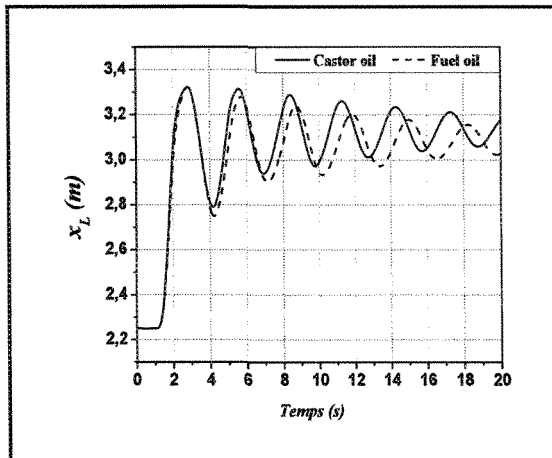
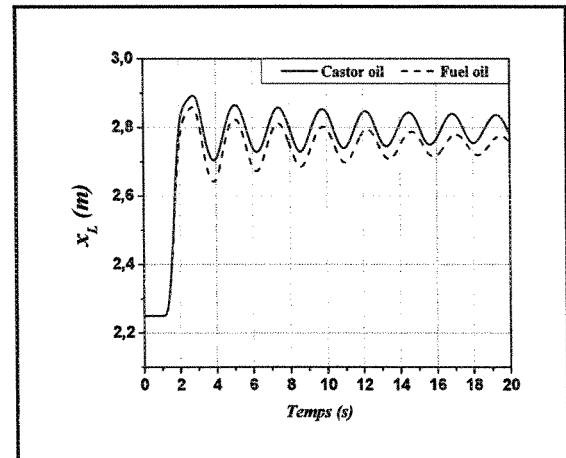
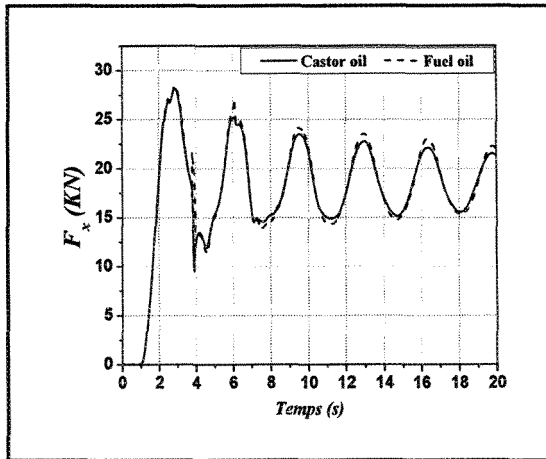
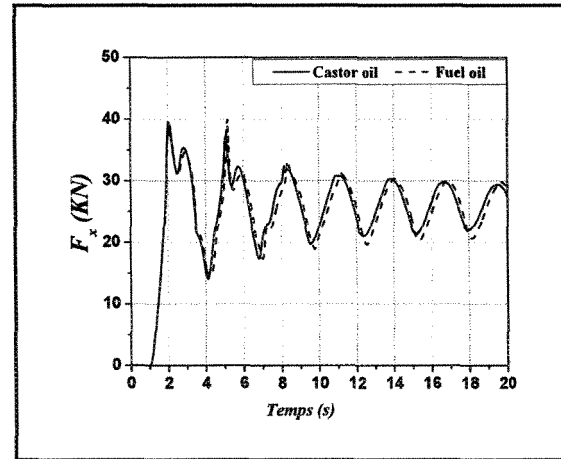
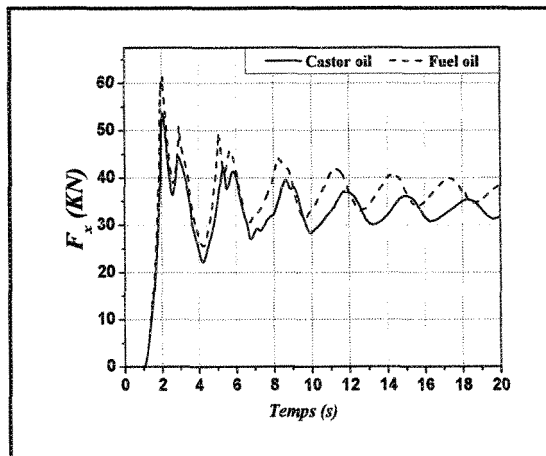
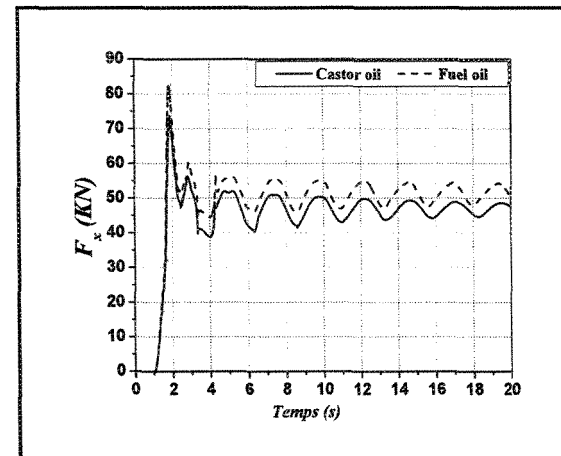
a) $a_x = 0.25g$, $\tau = 50\%$ b) $a_x = 0.25g$, $\tau = 70\%$ c) $a_x = 0.45g$, $\tau = 50\%$ d) $a_x = 0.45g$, $\tau = 70\%$

Figure 3.14: Effet de la viscosité sur le décalage longitudinal de la charge du liquide x_L .

a) $a_x = 0.25g$, $\tau = 50\%$ b) $a_x = 0.25g$, $\tau = 70\%$ c) $a_x = 0.45g$, $\tau = 50\%$ d) $a_x = 0.45g$, $\tau = 70\%$ Figure 3.15: Effet de la viscosité sur la force de pression longitudinale F_x .