

## Chapitre 5

# Développement du modèle du véhicule

### 5.1 Introduction

Des modèles numériques ont été développés pour modéliser le ballotement du liquide couplé avec la structure de la citerne. Ces derniers sont capables de déterminer le comportement du couplage, seulement pour des conditions spécifiques sous l'action des accélérations périodiques. La dynamique du véhicule n'a pas été prise en considération tel que l'effet du système de suspension, l'effet du pneu et l'état de la route. En ce qui concerne le véhicule lui-même, différents modèles de tracteurs et de semi-remorques simples ont été développés dans la littérature pour étudier le comportement dynamique des véhicules lourds lors de différentes manoeuvres. Ellis [59] a développé un modèle simple tracteur-semi-remorque de type bicycle avec quatre degrés de liberté où le transfert de charge est modélisé par un degré de liberté additionnel (mouvement de roulis). Hyun [60] a adopté un modèle de véhicule de quatorze degrés de liberté pour développer une prédiction de la commande active de renversement des véhicules lourds. Tandis que, divers modèles solide-liquide ont été développés pour déterminer le comportement dynamique des véhicules transportant des liquides, peu de modèles ont été développés pour tenir compte du système du véhicule et de ses sous-systèmes : les éléments de suspension et du pneu. Les modèles adoptés pour le système de véhicule sont tous des modèles simplifiés. Dans cette étude, le développement d'un modèle complet

est nécessaire, puisque le véhicule se compose de différents sous-systèmes et l'effet de ces sous-systèmes doit être considéré. Un des logiciels réputé dans la modélisation du comportement du véhicule a été développé à l'université du Michigan [61, 62]. Le logiciel se spécialise en créant trois sous logiciels basés sur AutoSim [63]. Ces logiciels sont: Carsim pour les voitures touristiques, Trucksim pour les véhicules lourds et BikeSim pour la motocycle. Cependant, le logiciel Trucksim des véhicules lourds n'inclut pas les effets du mouvement d'une charge mobile. Ils sont faciles à employer si nous nous intéressons à des véhicules conventionnels. Par contre, ils offrent moins de modèles de conception peu usuelle qui pourraient être utilisés dans un projet de recherche. Un autre inconvénient avec ces outils est qu'ils ont un environnement fermé. Donc, nous considérons qu'il est utile de travailler avec des modèles faits sur mesure. Ces derniers, nous fournissent plus de détails sur le modèle et son comportement dynamique.

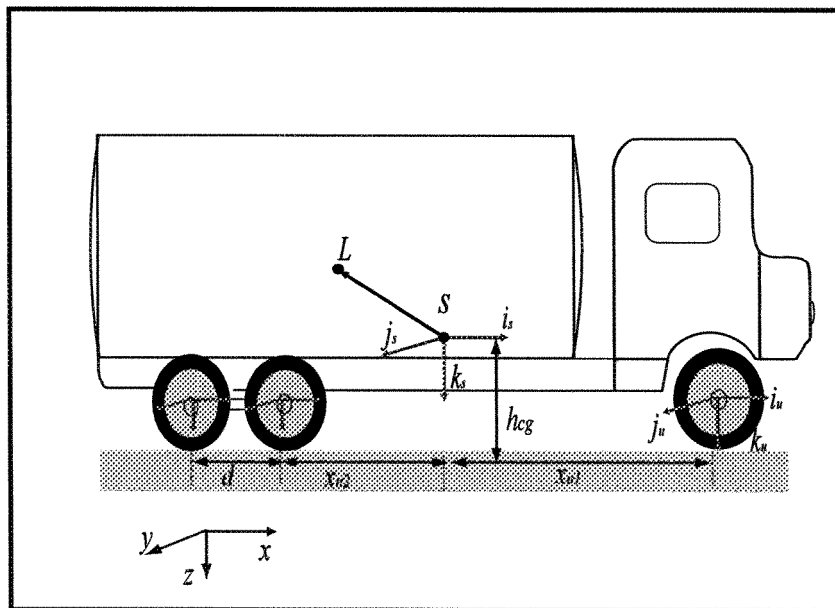
## 5.2 Cinématique du véhicule

Pour développer le modèle du véhicule, il existe plusieurs méthodes qui pourraient être exploitées pour dériver les équations du mouvement telles que la méthode de Lagrange, Newton et les travaux virtuels. L'approche alternative souvent citée dans les publications pour les modèles dynamiques des véhicules est d'utiliser des modèles simples avec un temps de calcul raisonnable. Dans cette étude, nous allons développer notre modèle en se basant sur le modèle simplifié de Ervin [62]. Ceci, sans aucune approximation mathématique et en ajoutant la complexité du mouvement du liquide à l'intérieur de la citerne. La dérivation des équations est obtenue à l'aide du logiciel du calcul mathématique Maple [64]. Le développement des équations est basé sur la formulation mécanique de Newton et la conservation de la quantité de mouvement linéaire et angulaire d'un corps plein.

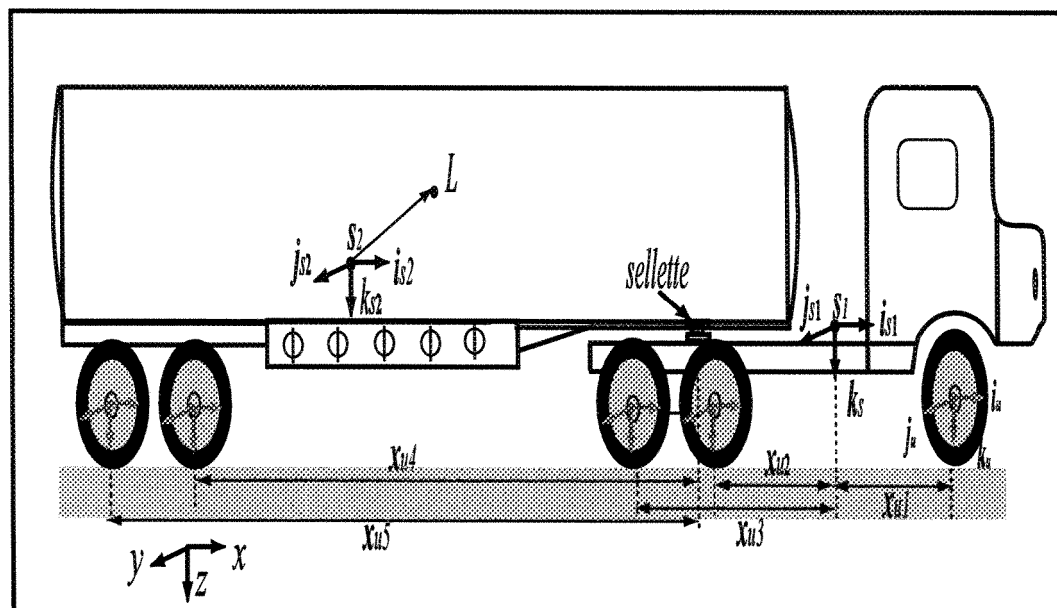
### 5.2.1 Système d'axe

Le grand nombre de degrés de liberté des mouvements de translation et de rotation requis pour représenter un véhicule articulé exclut l'utilisation d'un seul système du même rang. En fait, les équations du mouvement peuvent être écrites plus facilement si plusieurs systèmes sont employés. Le but de cette section est d'identifier l'orientation des divers systèmes d'axes, et d'identifier les variables de transformation utilisées qui relient les vecteurs unitaires dans les divers systèmes. Les systèmes à décrire sont le système d'axe inertiel, le système d'axe du corps fixé à la masse suspendue et le système d'axe fixé à la masse non suspendue. Les lois de Newton sont valides seulement pour une accélération mesurée à partir d'un système d'axe inertiel  $[x_n, y_n, z_n]$ . L'orientation des coordonnées est exprimée en accord avec le standard (SAE) "Society of Automotive Engineers" , où l'axe  $x$  s'oriente vers l'avant, l'axe  $y$  s'oriente vers la droite et l'axe  $z$  s'oriente vers le bas. Dans notre modèle, chaque masse suspendue est traitée comme un corps rigide avec six degrés de liberté nommés, longitudinal, latéral, vertical, roulis, tangage et lacet. Pour la masse non suspendue on assigne deux degrés de liberté nommés, le mouvement de roulis et le mouvement vertical par rapport à la masse suspendue où elle est attachée. Les équations sont formulées de sorte qu'il n'y aura aucune limitation pour le nombre de masses suspendues et de masses non suspendues. Toutes les équations sont développées sans aucune simplification mathématique avec le logiciel de calcul symbolique Maple [64].

Trois systèmes d'axes sont utilisés pour le développement des équations de mouvement. Le premier est fixé au système inertiel  $[x_n, y_n, z_n]$ , le deuxième est fixé à chaque masse suspendue  $[x_s, y_s, z_s]$  et le troisième est fixé à chaque masse non suspendue  $[x_u, y_u, z_u]$ . La figure (5.1) montre les systèmes d'axes fixés au véhicule d'unité et articulé respectivement.



a) Type unité



b) Type articulé

Figure 5.1: Camion-citerne de type unité et articulé.

### Système d'axe fixé à la masse suspendue

Les trois mouvements de rotation de la masse suspendue sont exprimés par les trois angles d'Euler: lacet  $\psi_s$  (autour l'axe  $z$ ), tangage  $\theta_s$  (autour l'axe  $y$ ) et roulis  $\phi_s$  (autour l'axe  $x$ ) telle qu'illustrée par la figure (5.2).

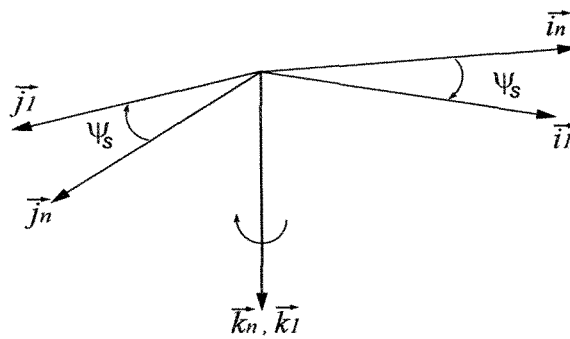
La matrice de transformation entre le système inertiel et le système fixé à la masse suspendue est définie respectivement par les trois mouvements successifs de rotation : lacet, tangage et roulis.

- **Lacet  $\psi_s$  :**

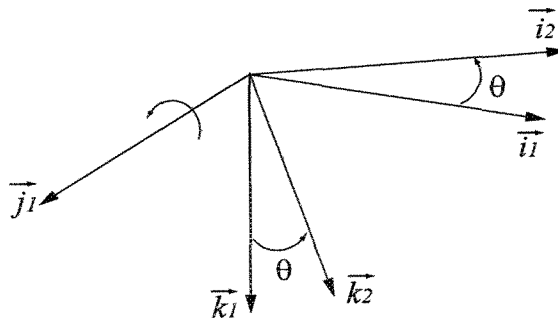
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_n & j_n & k_n \end{pmatrix}^T &= \lambda_{\psi_s} \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \end{pmatrix}^T \\ \lambda_{\psi_s} &= \begin{pmatrix} \cos \psi_s & -\sin \psi_s & 0 \\ \sin \psi_s & \cos \psi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

- **Tangage  $\theta_s$  :**

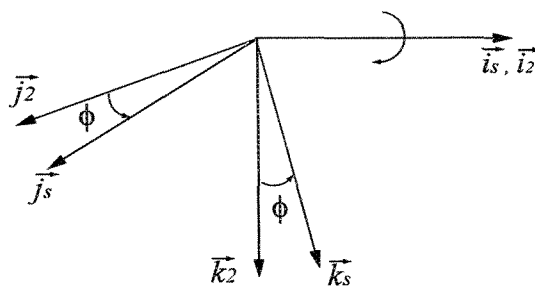
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \end{pmatrix}^T &= \lambda_{\theta_s} \begin{pmatrix} i_2 & j_2 & k_2 \end{pmatrix}^T \\ \lambda_{\theta_s} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_s & 0 & \sin \theta_s \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_s & 0 & \cos \theta_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$



a) Lacet  $w_{sz} = \dot{\psi}_s k_n$



b) Tangage  $w_{sy} = \dot{\theta}_s j_1$



c) Roulis  $w_{sx} = \dot{\phi}_s i_s$

Figure 5.2: Orientation de la masse suspendue définie par les angles d'Euler.

- Roulis  $\phi_s$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_2 & j_2 & k_2 \end{pmatrix}^T &= \lambda_{\phi_s} \begin{pmatrix} i_s & j_s & k_s \end{pmatrix}^T \\ \lambda_{\phi_s} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_s & -\sin \phi_s \\ 0 & -\sin \phi_s & \cos \phi_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dans ce cas, la matrice de transformation qui relie le système inertiel et le système fixé à la masse suspendue peut être obtenue par la combinaison des trois matrices comme suit:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_n & j_n & k_n \end{pmatrix}^T &= R_s^n \begin{pmatrix} i_s & j_s & k_s \end{pmatrix}^T \\ R_s^n &= [\lambda_{\psi_s}] [\lambda_{\theta_s}] [\lambda_{\phi_s}] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Où:

$$R_s^n = \begin{bmatrix} C\psi_s C\theta_s & -S\psi_s C\phi_s + C\psi_s S\theta_s S\phi_s & S\psi_s S\phi_s + C\psi_s S\theta_s C\phi_s \\ S\psi_s C\theta_s & C\psi_s C\phi_s + S\psi_s S\theta_s S\phi_s & -C\psi_s S\phi_s + S\psi_s S\theta_s C\phi_s \\ -S\theta_s & C\theta_s S\phi_s & C\theta_s C\phi_s \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

et:

$$\begin{pmatrix} i_s & j_s & k_s \end{pmatrix}^T = [R_s^n]^{-1} \begin{pmatrix} i_n & j_n & k_n \end{pmatrix}^T \quad (5.6)$$

Avec les indices ( $C \equiv \cos$ ,  $S \equiv \sin$ ).

### Vitesse linéaire et angulaire de la masse suspendue

Les équations de mouvement pour chaque masse suspendue sont développées et écrites dans le système attaché à la masse suspendue en terme de vitesse linéaires  $[U_s, V_s, W_s]$  et angulaires  $[p_s, q_s, r_s]$  du centre de masse de la masse suspendue. Dans le but de calculer les angles d'Euler, nous avons besoin de trouver la relation qui relie les vitesses linéaire et angulaire dans les deux systèmes.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix}^T = R_s^n \begin{pmatrix} U_s & V_s & W_s \end{pmatrix}^T \quad (5.7)$$

$$p_s i_s + q_s j_s + r_s k_s = \dot{\phi}_s i_s + \dot{\theta}_s j_2 + \dot{\psi}_s k_n \quad (5.8)$$

En introduisant les matrices de transformation entre les deux systèmes, la relation entre les vitesses angulaires peut être calculée par les équations suivantes:

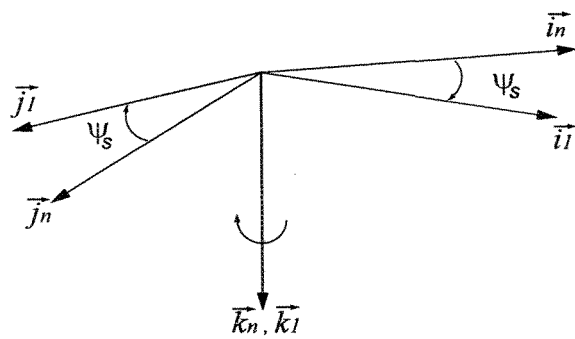
$$\begin{aligned} \dot{\phi}_s &= p_s + \frac{\sin \theta_s \sin \phi_s}{\cos \theta_s} q_s + \frac{\sin \theta_s \cos \phi_s}{\cos \theta_s} r_s \\ \dot{\theta}_s &= \cos \phi_s q_s - \sin \phi_s r_s \\ \dot{\psi}_s &= \frac{\sin \phi_s}{\cos \theta_s} q_s + \frac{\cos \phi_s}{\cos \theta_s} r_s \end{aligned} \quad (5.9)$$

### Système d'axe fixé à la masse non suspendue

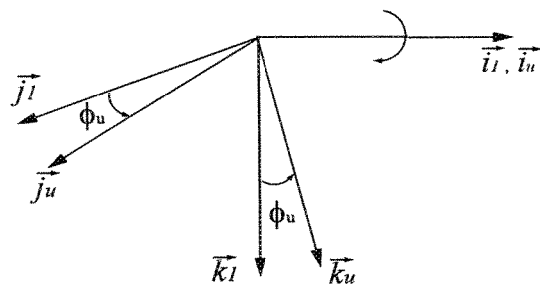
Comme nous l'avons mentionné précédemment, deux mouvements sont assignés pour chaque masse non suspendue qui sont le mouvement de roulis et le mouvement vertical par rapport à la masse suspendue. Il reste à noter que le mouvement de tangage de la masse non suspendue (essieu) est infiniment petit ce qui nous permet de le négliger [61]. L'orientation de la masse suspendue par rapport au système d'axe inertiel est définie par deux mouvements de rotation : mouvement de lacet  $\psi_s$  et de roulis  $\phi_u$  de



l'axe telle qu'illustrée par la figure (5.3).



a) Lacet



b) Roulis

Figure 5.3: Orientation de la masse non suspendue définie par les angles d'Euler.

La matrice de transformation entre le système attaché à la masse non suspendue et le système inertiel est exprimée par:

- **Lacet**  $\psi_s$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_n & j_n & k_n \end{pmatrix}^T &= \lambda_{\psi_s} \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \end{pmatrix}^T \\ \lambda_{\psi_s} &= \begin{pmatrix} \cos \psi_s & -\sin \psi_s & 0 \\ \sin \psi_s & \cos \psi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

- **Roulis**  $\phi_u$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_u & j_u & k_u \end{pmatrix}^T &= \lambda_{\phi_u} \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \end{pmatrix}^T \\ \lambda_{\phi_u} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_u & -\sin \phi_u \\ 0 & -\sin \phi_u & \cos \phi_u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Donc, la matrice de transformation qui relie le système attaché à la masse non suspendue (essieu) et le système inertiel peut être obtenue par la combinaison des deux transformations (5.10 et 5.11) ci-dessus:

$$\begin{pmatrix} i_u & j_u & k_u \end{pmatrix}^T = [\lambda_{\phi_u}][\lambda_{\psi_s}] \begin{pmatrix} i_n & j_n & k_n \end{pmatrix}^T \quad (5.12)$$

La vitesse angulaire de la masse non suspendue est définie par la relation suivante:

$$w_u = p_u i_u + r_s k_s \quad (5.13)$$

En introduisant les matrices de transformation entre le système inertiel et le système fixé à la masse non suspendue, la vitesse angulaire pourrait être exprimée en fonction des angles d'Euler comme suit:

$$p_u = \dot{\phi}_u \quad (5.14)$$

D'un autre coté, les forces d'excitations de la route sont en contact avec la masse non suspendue. Ces forces seront transférées à la masse suspendue via le système de suspension. Donc, nous aurons besoin de calculer également la matrice de transformation entre les deux systèmes fixés à la masse suspendue et non suspendue.

$$\begin{pmatrix} i_u & j_u & k_u \end{pmatrix}^T = [\lambda_{\phi_u}] [\lambda_{\theta_s}] [\lambda_{\phi_s}] \begin{pmatrix} i_s & j_s & k_s \end{pmatrix}^T \quad (5.15)$$

Où:

$$R_s^u = [\lambda_{\phi_u}] [\lambda_{\theta_s}] [\lambda_{\phi_s}] \quad (5.16)$$

$$R_s^u = \begin{bmatrix} C\theta_s & S\theta_s S\phi_s & S\theta_s C\phi_s \\ -S\theta_s S\phi_u & C\phi_s C\phi_u + S\phi_s S\phi_u C\theta_s & -C\phi_u S\phi_s + S\phi_u C\phi_s C\theta_s \\ C\phi_u S\theta_s & -S\phi_u C\phi_s + C\phi_u S\phi_s C\theta_s & S\phi_u S\phi_s + C\phi_u C\phi_s C\theta_s \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

### 5.2.2 Cinématique de la masse suspendue

Pour la dérivation des équations du mouvement du véhicule il est nécessaire de calculer l'expression de l'accélération d'un point arbitraire sur le véhicule. Notons  $O_f$  le système d'axe fixé à la piste (inertiel) et  $O_b$  le système d'axe du corps en translation avec une vitesse  $v_s$  et en rotation avec une vitesse angulaire  $w_s$  telle que représentée par la figure (5.4). Pour un vecteur donné  $q$ , nous obtenons l'expression suivante [65]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_f q = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_b q + w_s \times q \quad (5.18)$$

Les indices  $f$  et  $b$  sont pour indiquer que la dérivée est par rapport au système inertiel et au système du corps concerné respectivement.

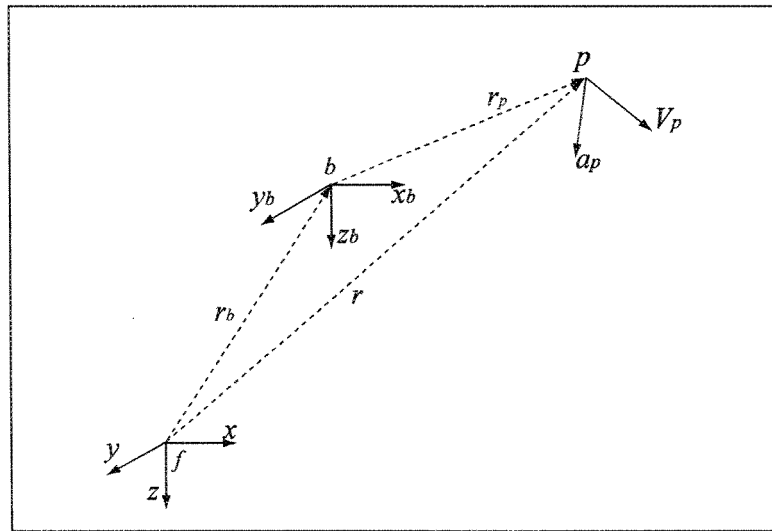


Figure 5.4: Système de coordonnées.

La vitesse du point  $p$  située sur le véhicule par rapport au système inertiel sera calculée par l'expression ci-dessous:

$$v_p = v_s + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_f r_p \quad (5.19)$$

Donc, en remplaçant l'équation (5.18) dans l'équation (5.19) nous aurons:

$$v_p = v_s + \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_b r_p + w_s \times r_p = v_s + \dot{r}_p + w_s \times r_p \quad (5.20)$$

L'accélération du point  $p$  sera calculée en dérivant l'équation (5.20) par rapport au temps:

$$\begin{aligned} a_p &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_f v_p \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_b (v_s + \dot{r}_p + w_s \times r_p) + w_s \times (v_s + \dot{r}_p + w_s \times r_p) \\ &= \dot{v}_s + w_s \times v_s + \dot{w}_s \times r_p + w_s \times (w_s \times r_p) + 2w_s \times \dot{r}_p + \ddot{r}_p \end{aligned} \quad (5.21)$$

Puisque le centre de masse de la masse suspendue coïncide avec l'origine du système des coordonnées fixé à la masse suspendue, l'accélération du centre de masse de la masse suspendue est obtenue en remplaçant ( $r_p \equiv 0$ ) dans l'équation (5.21).

$$\begin{aligned} a_s &= \dot{v}_s + w_s \times v_s \\ \begin{pmatrix} a_{sx} \\ a_{sy} \\ a_{sz} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}U + qW - rV \\ \frac{d}{dt}V + rU - pW \\ \frac{d}{dt}W + pV - qU \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dans cette étude, nous admettons que la charge du liquide représentée par le centre de masse est en mouvement comme un point matériel distant d'un vecteur  $r_L = [x_L, y_L, z_L]^T$  du centre de masse de la masse suspendue et avec la même vitesse angulaire  $[p_s, q_s, r_s]^T$  que la masse suspendue du véhicule telle que représentée par la figure (5.5). Donc, l'accélération du centre de masse du liquide peut être obtenue en

remplaçant ( $r_p \equiv r_L$ ) dans l'équation (5.21). De plus, dans cette étude l'interaction entre le véhicule et le liquide sera modélisé comme un système multi-corps en utilisant un pas de temps  $\Delta t$  petit. Les coordonnées du vecteur  $r_L$  seront mises à jour à chaque pas de temps ce qui nous permet de négliger la vitesse relative et l'accélération relative par rapport au système d'axe fixé à la masse suspendue.

$$a_L = \dot{v}_s + w_s \times v_s + \dot{w}_s \times r_L + w_s \times (w_s \times r_L) \quad (5.23)$$

$$\begin{pmatrix} a_{Lx} \\ a_{Ly} \\ a_{Lz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}U + \left(\frac{d}{dt}q\right) z_L - \left(\frac{d}{dt}r\right) y_L + q(W + py_L - qx_L) - r(V + rx_L - pz_L) \\ \frac{d}{dt}V + \left(\frac{d}{dt}r\right) x_L - \left(\frac{d}{dt}p\right) z_L + r(U + qz_L - ry_L) - p(W + py_L - qx_L) \\ \frac{d}{dt}W + \left(\frac{d}{dt}p\right) y_L - \left(\frac{d}{dt}q\right) x_L + p(V + rx_L - pz_L) - q(U + qz_L - ry_L) \end{pmatrix}$$

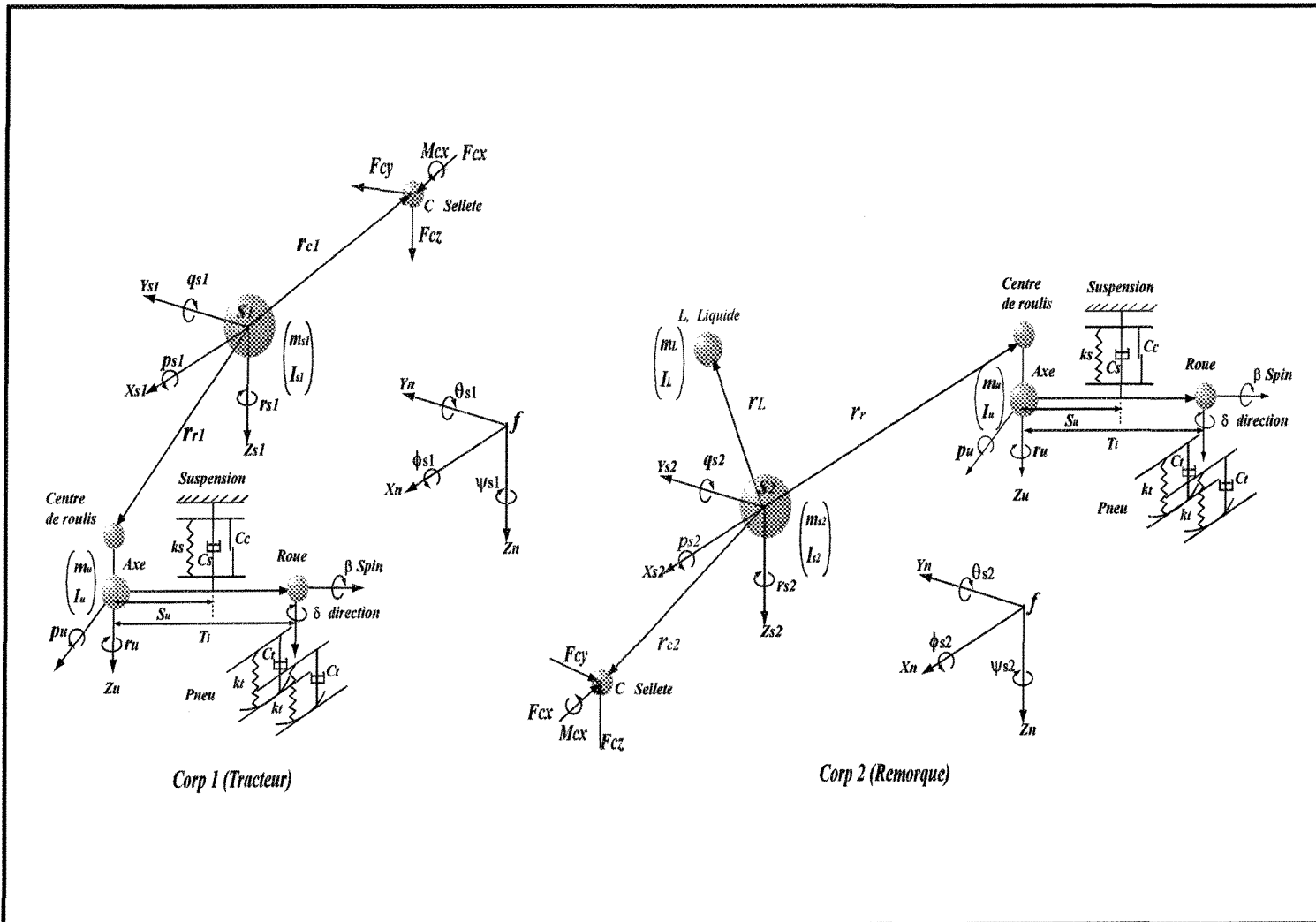


Figure 5.5: Modèle mathématique du véhicule.

### 5.2.3 Cinématique de la masse non suspendue

La position de la masse non suspendue est localisée relativement à la masse suspendue où elle est attachée telle qu'illustrée par les figures (5.5 et 5.6).

$$(r_u)_f = r_f + r_r + r_{ru} \quad (5.24)$$

Où:

- $r_f$  : représente la position du centre de masse suspendue par rapport au système inertiel.
- $r_r = (x_r, 0, z_r)_s$  : représente la position du centre de roulis par rapport au système fixé à la masse suspendue.
- $r_{ru} = (0, 0, z_u)_u$  : représente la position du centre de roulis par rapport au système fixé à la masse non suspendue.

La vitesse sera calculée en dérivant l'équation (5.24) par rapport au temps:

$$\begin{aligned} V_u &= V_s + w_s \times r_r + \dot{r}_r + w_u \times r_{ru} + \dot{r}_{ru} \\ &= (V_s + w_s \times r_r)_s + (w_u \times r_{ru} + \dot{r}_{ru})_u \end{aligned} \quad (5.25)$$

L'accélération sera calculée en dérivant l'équation (5.25) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} a_u &= (a_s + \dot{w}_s \times r_r + w_s \times (w_s \times r_r))_s + \\ &(\dot{w}_u \times r_{ru} + w_u \times (w_u \times r_{ru}) + 2w_u \times \dot{r}_{ru} + \dot{w}_u \times r_{ru} + \ddot{r}_{ru})_u \end{aligned} \quad (5.26)$$

Où les indices ( $s$ ) et ( $u$ ) indiquent les systèmes attachés respectivement à la masse suspendue et à la masse non suspendue.



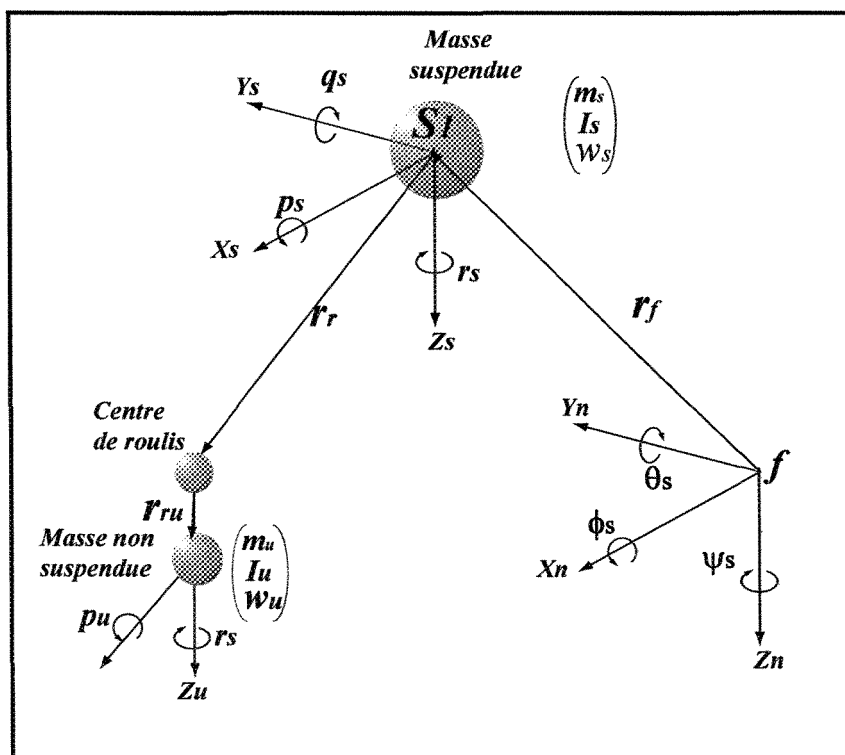


Figure 5.6: Cinématique de la masse non suspendue.

Avec  $w_s = [p_s, q_s, r_s]^T$  est la vitesse angulaire de la masse suspendue et  $w_u = [p_u, 0, r_s]^T$  est la vitesse angulaire de la masse non suspendue.

Telle que décrit par la figure(5.7), les forces de la suspension transmises vers la masse suspendue pour chaque axe  $i$  sont exprimées comme suit:

$$F_{supi} = \begin{pmatrix} F_{sxi1} + F_{sxi2} \\ F_{syi} \\ F_{szi1} + F_{szi2} \end{pmatrix}_{ui} \quad (5.27)$$

Où:

- $F_{szi1}$  et  $F_{szi2}$  sont respectivement les forces de suspension verticales du coté droit et gauche.
- $F_{syi}$  est la force latérale interne appliquée au centre de roulis de chaque axe  $i$ . Cette force est due aux forces latérales appliquées aux pneus.
- $F_{sxi1}$  et  $F_{sxi2}$  sont respectivement les forces de suspension longitudinales du coté droit et gauche.

Les forces de suspension peuvent être définies dans les systèmes attachés à la masse suspendue  $Si$  en utilisant la matrice de transformation qui relie la masse non suspendue et la masse suspendue (équation 5.17).

$$F_{supi} = \begin{pmatrix} R_{ui}^{si} \begin{pmatrix} F_{sxi1} + F_{sxi2} \\ F_{syi} \\ F_{szi1} + F_{szi2} \end{pmatrix}_{ui} \end{pmatrix}_{si} \quad (5.28)$$

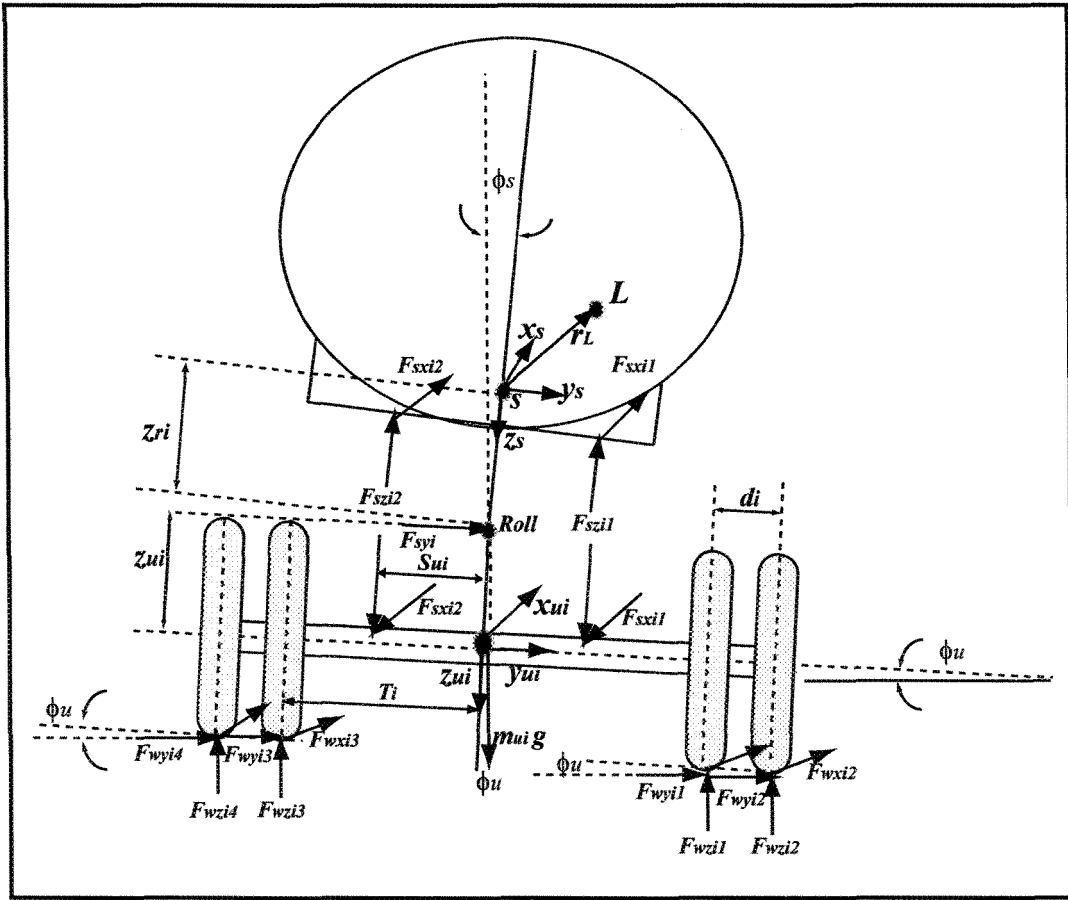


Figure 5.7: Vue de face du modèle du véhicule.

Les forces internes seront éliminées en fonction des équations dynamiques du mouvement de chaque axe  $i$ , telle qu'illustrée par la figure (5.7).

$$\begin{aligned}
 F_{ysi} &= -(m_{ui}a_{ui}) \cdot j_{ui} + \left( \sum_{j=1}^4 F_{wyj} \right) \cos \phi_{ui} \\
 &\quad - \left( \sum_{j=1}^4 F_{wzj} \right) \sin \phi_{ui} + m_{ui}g \sin \phi_{ui}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$F_{xsi1} + F_{xsi2} = -(m_{ui}a_{ui}) \cdot i_{ui} + \sum_{j=1}^4 F_{wxj} \tag{5.30}$$

### 5.2.4 Cinématique de la sellette

Le mouvement des masses suspendues du tracteur et la remorque sont liés dû au couplage du point d'articulation de la sellette. Plusieurs études supposent la sellette rigide dans le cas du mouvement de translation. Ceci nous permet de la considérer comme un point. Avec cette hypothèse, le nombre de degrés de liberté sera réduit. Alors, nous pourrions calculer l'expression de la vitesse et de l'accélération de la remorque en fonction de la vitesse et l'accélération du tracteur [62]. Dans le cas où la sellette n'est pas assez rigide, nous pourrions la modéliser comme un assemblage d'un ressort et un amortisseur en parallèle [61]. Cependant, la sellette réagit en torsion dans le cas du mouvement de roulis. De la figure (5.8), la vitesse et l'accélération du point C seront calculées par rapport aux deux systèmes attachés aux masses suspendues du tracteur et de la remorque comme suit:

$$\begin{aligned} V_c &= V_{s1} + V_{c/s1} \\ &= V_{s2} + V_{c/s2} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} a_c &= a_{s1} + a_{c/s1} \\ &= a_{s2} + a_{c/s2} \end{aligned}$$

Avec:

$$r_{c/s1} = x_{c1}i_{s1} + z_{c1}k_{s1}$$

$$r_{c/s2} = x_{c2}i_{s2} + z_{c2}k_{s2}$$

D'où:

$$V_{c/s1} = w_{s1} \times r_{c/s1}$$

$$V_{c/s2} = w_{s2} \times r_{c/s2}$$

$$a_{c/s1} = \dot{w}_{s1} \times r_{c/s1} + w_{s1} \times (w_{s1} \times r_{c/s1})$$

$$a_{c/s2} = \dot{w}_{s2} \times r_{c/s2} + w_{s2} \times (w_{s2} \times r_{c/s2}) \quad (5.32)$$

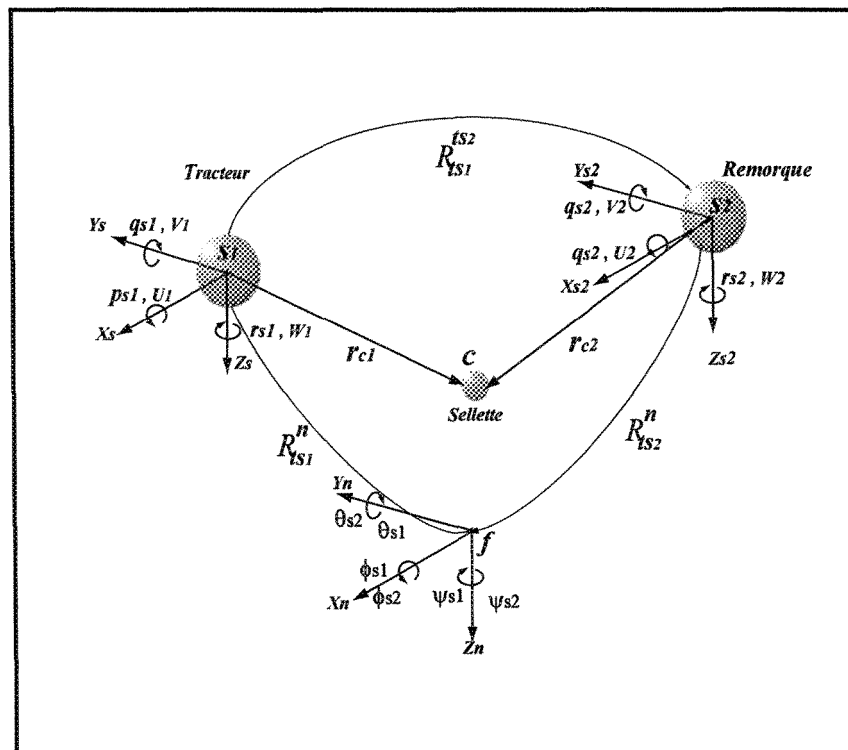


Figure 5.8: Cinématique de la sellette.

En introduisant les expressions de l'équation (5.32) dans l'équation (5.31), nous aurons :

$$\begin{aligned}
 V_c &= \left( \left( \begin{array}{c} U_1 + qz_{c1} \\ V_1 + r_1x_{c1} - p_1z_{c1} \\ W_1 - q_1x_{c1} \end{array} \right)_{s1} \right)_{s2} \\
 &= \left( \begin{array}{c} U_2 + qz_{c2} \\ V_2 + r_2x_{c2} - p_2z_{c2} \\ W_2 - q_2x_{c2} \end{array} \right)_{s2}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
 a_c &= \left( \left( \begin{array}{c} \frac{d}{dt}U_1 + \left(\frac{d}{dt}q_1\right)z_{c1} + q_1(W_1 - q_1x_{c1}) - r_1(V_1 + r_1x_{c1} - p_1z_{c1}) \\ \frac{d}{dt}V_1 + \left(\frac{d}{dt}r_1\right)x_{c1} - \left(\frac{d}{dt}p_1\right)z_{c1} + r_1(U_1 + q_1z_{c1}) - p_1(W_1 - q_1x_{c1}) \\ \frac{d}{dt}W_1 - \left(\frac{d}{dt}q_1\right)x_{c1} + p_1(V_1 + r_1x_{c1} - p_1z_{c1}) - q_1(U_1 + q_1z_{c1}) \end{array} \right)_{s1} \right)_{s2} \\
 &= \left( \begin{array}{c} \frac{d}{dt}U_2 + \left(\frac{d}{dt}q_2\right)z_{c2} + q_2(W_2 - q_2x_{c2}) - r_2(V_2 + r_2x_{c2} - p_2z_{c2}) \\ \frac{d}{dt}V_2 + \left(\frac{d}{dt}r_2\right)x_{c2} - \left(\frac{d}{dt}p_2\right)z_{c2} + r_2(U_2 + q_2z_{c2}) - p_2(W_2 - q_2x_{c2}) \\ \frac{d}{dt}W_2 - \left(\frac{d}{dt}q_2\right)x_{c2} + p_2(V_2 + r_2x_{c2} - p_2z_{c2}) - q_2(U_2 + q_2z_{c2}) \end{array} \right)_{s2}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

La matrice de transformation  $R_{s1}^{s2}$  entre le système fixé à la masse suspendue de la remorque ( $s2$ ) et le système fixé à la masse suspendue du tracteur ( $s1$ ) sera calculée en passant par le système inertiel comme suit:

$$R_{s1}^{s2} = R_n^{s2} \cdot R_{s1}^n$$

La solution simultanée des deux équations (5.33 et 5.34) donne finalement l'expression de la vitesse et de l'accélération de la remorque en fonction de la vitesse et de l'accélération du tracteur.

Le déplacement angulaire relatif à l'angle de roulis entre le tracteur et la remorque sera utile pour calculer la contrainte de la sellette pour le mouvement de roulis (moment de roulis):

$$\begin{aligned} M_{cs1} &= k_{xc} (\phi_{s1} - \phi_{s2}) i_{s1} \\ M_{cs2} &= -R_{s1}^{s2} (k_{xc} (\phi_s - \phi_{s2}) i_{s1}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

### 5.3 Cinétique du véhicule

Cette section est consacrée à la définition des variables avec certaines manipulations algébriques choisies pour les équations du mouvement. Tous les paramètres de la cinétique seront développés pour un véhicule articulé. Les mêmes paramètres seront appliqués dans le cas d'un véhicule d'unité. Le diagramme du corps libre illustré par la figure (5.7) introduit les forces et les moments externes et internes appliqués sur chaque sous système du véhicule. Pour obtenir l'équation du mouvement linéaire et angulaire, il est important de modéliser le corps rigide comme un ensemble de points

matériels.

### 5.3.1 Mouvement linéaire

L'application des lois de Newton donne finalement les équations du mouvement linéaire du tracteur et de la remorque.

$$\sum F_i = m_i a_i \quad (5.36)$$

En introduisant dans l'équation (5.36) les équations des accélérations de la masse suspendue et du liquide ( 5.22 et 5.24) ainsi que les équations des forces de suspension (5.29 et 5.30), nous obtenons finalement les équations de mouvement de translation représentées par les équations différentielles de 2<sup>e</sup> ordre de la masse suspendue  $S_i$ :

**Équation de mouvement longitudinal :**

$$\begin{aligned} (m_{si} a_{si} + m_{Li} a_{Li}) \cdot i_{si} &= \cos \theta_{si} \sum_{j=1}^k (F_{sxj1} + F_{sxj2}) - \sin \phi_{uj} \sin \theta_{si} \sum_{j=1}^k F_{syj} \\ &+ \cos \phi_{uj} \sin \theta_{si} \sum_{j=1}^k (F_{szj1} + F_{szj2}) \\ &- \sin \theta_{si} (m_{si} + m_{Li}) g \\ &+ \sum (forces\ de\ contrainte) \cdot i_{si} \end{aligned} \quad (5.37)$$



Équation de mouvement latéral :

$$\begin{aligned}
(m_{si}a_{si} + m_{Li}a_{Li}).j_{si} &= (\cos \phi_{uj} \cos \phi_{si} + \sin \phi_{uj} \cos \theta_{si} \sin \phi_{si}) \sum_{j=1}^k F_{syj} \\
&+ \sin \phi_{uj} \cos \phi_{si} \sum_{j=1}^k (F_{szj1} + F_{szj2}) \\
&- \cos \phi_{uj} \cos \theta_{si} \sin \phi_{si} \sum_{j=1}^k (F_{szj1} + F_{szj2}) \\
&+ \sin \theta_{si} \sin \phi_{si} \sum_{j=1}^k (F_{sxj1} + F_{sxj2}) \\
&+ \cos \theta_{si} \sin \phi_{si} (m_{si} + m_{Li}) g \\
&+ \sum (forces\ de\ contrainte) .j_{si} \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Équation de mouvement vertical :

$$\begin{aligned}
(m_{si}a_{si} + m_{Li}a_{Li}).k_{si} &= (-\cos \phi_{uj} \sin \phi_{si} + \sin \phi_{uj} \cos \theta_{si} \cos \phi_{si}) \sum_{j=1}^k F_{syj} \\
&- \sin \phi_{uj} \sin \phi_{si} \sum_{j=1}^k (F_{szj1} + F_{szj2}) \\
&- \cos \phi_{uj} \cos \theta_{si} \cos \phi_{si} \sum_{j=1}^k (F_{szj1} + F_{szj2}) \\
&+ \sin \theta_{si} \cos \phi_{si} \sum_{j=1}^k (F_{sxj1} + F_{sxj2}) \\
&+ \cos \theta_{si} \cos \phi_{si} (m_{si} + m_{Li}) g \\
&+ \sum (forces\ de\ contrainte) .k_{si} \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Avec:

- $i = 1$  : masse suspendue du tracteur.
- $i = 2$  : masse suspendue de la remorque.
- $j$  : numéro d'axe.
- $k$  : le nombre des axes où  $k = 3$  pour le tracteur et  $k = 2$  pour la remorque.
- $L$  : liquide.
- $s_i$  : masse suspendue  $i$ .

Dans cette étude les forces de contrainte dues à la sellette seront éliminées en utilisant les équations de la cinématique de la sellette (5.33 et 5.34) développées précédemment. Il est à noter, que toutes ces équations de mouvement sont programmées dans le logiciel Maple d'une façon systématique. Donc, pour obtenir les équations de mouvement dans le cas d'un véhicule d'unité, il suffit seulement de remplacer les indices ( $i = 1$ ,  $k = 3$ ).

L'équation du mouvement vertical de la masse suspendue de chaque axe  $i$  est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 (m_{ui}a_{ui}) \cdot k_{ui} = & - \left( \sum_{j=1}^k F_{wzij} \right) \cos \phi_{ui} - \left( \sum_{j=1}^k F_{wyij} \right) \sin \phi_{ui} \\
 & + m_{ui}g \cos \phi_{ui} + F_{szi1} + F_{szi2}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Avec:

- $i$  : numéro d'axe.
- $j$  : le nombre des pneus dans chaque axe.
- $k$  :  $k = 2$  pour l'axe avant du tracteur et  $k = 4$  pour les autres axes.

### 5.3.2 Mouvement angulaire

Pour obtenir l'équation du mouvement angulaire, il est important de modéliser le corps rigide comme un système de points matériels  $p$  avec des masses  $m_p$ . Selon l'équation de Newton, le moment angulaire par rapport au système inertiel est donné par l'expression suivante :

$$M_s = \sum_p M_p = \sum_p r_p \times m_p \ddot{r}_p \quad (5.41)$$

En substituant l'équation (5.21) dans (5.41) nous obtenons:

$$M_s = \sum_p m_p r_p \times [\dot{v}_s + w_s \times v_s + \dot{w}_s \times r_p + w_s \times (w_s \times r_p)] \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} M_s = & \sum_p m_p r_p \times [\dot{v}_s + w_s \times v_s] + \sum_p m_p r_p \times [\dot{w}_s \times r_p] \\ & \sum_p m_p r_p \times [w_s \times (w_s \times r_p)] \end{aligned} \quad (5.43)$$

Le premier terme de l'équation (5.43) peut être simplifié:

$$\sum_p m_p r_p \times [\dot{v}_s + w_s \times v_s] = m_s r_s \times [\dot{v}_s + w_s \times v_s]$$

Le deuxième et le troisième terme de l'équation (5.43) peuvent être simplifiés également [65]:

$$\begin{aligned}\sum_p m_p r_p \times [\dot{w}_s \times r_p] &= I_s \dot{w}_s \\ \sum_p m_p r_p \times [w_s \times (w_s \times r_p)] &= w_s \times I_s w_s\end{aligned}$$

Donc, l'équation (5.42) prendra la forme suivante:

$$M_s = m_s r_s \times [\dot{v}_s + w_s \times v_s] + I_s \dot{w}_s + w_s \times I_s w_s \quad (5.44)$$

Puisque le centre de masse suspendue coïncide avec l'origine du système d'axe du corps ( $r_s \equiv 0$ ), l'expression du mouvement angulaire (5.44) peut être formulée comme suit:

$$\begin{aligned}M_s &= I_s \dot{w}_s + w_s \times I_s w_s \\ &= \begin{pmatrix} -r_s q_s I_{ys} - \left(\frac{d}{dt} r_s\right) I_{xzs} + \left(\frac{d}{dt} p_s\right) I_{xs} - p_s q_s I_{xzs} + r_s q_s I_{zs} \\ \left(\frac{d}{dt} q_s\right) I_{ys} + (p_s)^2 I_{xzs} - (r_s)^2 I_{xzs} - p_s r_s I_{zs} + p_s r_s I_{xs} \\ \left(\frac{d}{dt} r_s\right) I_{zs} + p_s q_s I_{ys} + r_s q_s I_{xzs} - p_s q_s I_{xs} - \left(\frac{d}{dt} p_s\right) I_{xzs} \end{pmatrix} \quad (5.45)\end{aligned}$$

La matrice d'inertie  $I_{si}$  est exprimée dans le système  $si$  comme suit:

$$\begin{aligned}
 I_{si} &= \sum_{s_i} (r_p^2 \mathbf{1} - r_p r_p^T) m_p \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{s_i} (y_p^2 + z_p^2) m_p & -\sum_{s_i} (x_p y_p) m_p & -\sum_{s_i} (x_p z_p) m_p \\ -\sum_{s_i} (x_p z_p) m_p & \sum_{s_i} (x_p^2 + z_p^2) m_p & -\sum_{s_i} (y_p z_p) m_p \\ -\sum_{s_i} (z_p x_p) m_p & -\sum_{s_i} (z_p y_p) m_p & \sum_{s_i} (x_p^2 + y_p^2) m_p \end{pmatrix} \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

Puisque les corps du tracteur et la remorque pourrait être modélisés comme des corps contenus; donc, toutes les expressions mathématiques peuvent être exprimées par des intégrales ( $f$ ) au lieu d'une sommation ( $\sum$ ).

Les moments appliqués sur la masse suspendue due à la charge du liquide et les forces de la suspension exprimées dans le système d'axe fixé à la masse suspendue sont calculés comme suit:

**Moment dû à la charge du liquide :**

$$M_{Li} = \begin{pmatrix} x_{Li} \\ y_{Li} \\ z_{Li} \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} m_{Li}(a_{Li}) \cdot i_{si} \\ m_{Li}(a_{Li}) \cdot j_{si} \\ m_{Li}(a_{Li}) \cdot k_{si} \end{pmatrix} + [\lambda_{\theta_{si}} \lambda_{\phi_{si}}]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{Li}g \end{pmatrix} \right] \quad (5.47)$$

**Moment dû aux forces de suspension :**

$$\begin{aligned}
 M_{susp_i} = & \sum_{j=1}^k \left[ \begin{pmatrix} x_{uj} \\ s_{uj} \\ z_{rj} \end{pmatrix} \times R_{uj}^{si} \begin{pmatrix} F_{sxj1} + F_{sxj2} \\ 0 \\ F_{szj1} + F_{szj2} \end{pmatrix} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^k \left[ \begin{pmatrix} x_{uj} \\ 0 \\ z_{rj} \end{pmatrix} \times R_{uj}^{si} \begin{pmatrix} 0 \\ F_{syj} \\ 0 \end{pmatrix} + k_{\phi_i} (\phi_{si} - \phi_{uj}) \right] \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (5.45), les expressions des moments dus à la charge du liquide (5.47), les moments de la suspension (5.48) et les moments dus à la contrainte de la sellette (5.35), nous obtenons finalement les équations du mouvement angulaire de la masse suspendue ( $si$ ) sous forme d'équation différentielle de 2<sup>e</sup> ordre :

**Mouvement angulaire de roulis :**

$$\begin{aligned}
 (I_{x_{si}} + I_{x_{Li}}) \left( \frac{d}{dt} p_s \right) = & -r_s q_s (I_{z_{si}} + I_{z_{Li}} - I_{y_{si}} - I_{y_{Li}}) \\
 & + \left( p_s q_s + \left( \frac{d}{dt} r_s \right) \right) (I_{xz_{si}} + I_{xz_{Li}}) \\
 & + (y_{Li} \cos \theta_{si} \cos \phi_{si} - z_{Li} \cos \theta_{si} \sin \phi_{si}) m_{Li} g \\
 & + y_{Li} (a_{Li})_z - z_{Li} (a_{Li})_y + \sum_{j=1}^k (k_{\phi_i} (\phi_{si} - \phi_{uj})) \\
 & + (M_{csi} + M_{supi}) \cdot \dot{i}_{si} \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

Mouvement angulaire de tangage :

$$\begin{aligned}
(I_{y_{si}} + I_{y_{Li}}) \left( \frac{d}{dt} q_s \right) &= - (p_s^2 - r_s^2) (I_{xz_{si}} + I_{xz_{Li}}) + (M_{csi} + M_{supi}) \cdot j_{si} \\
&+ p_s r_s (I_{z_{si}} + I_{z_{Li}} - I_{x_{si}} - I_{x_{Li}}) \\
&- (z_{Li} \sin \theta_{si} + x_{Li} \cos \theta_{si} \cos \phi_{si}) m_{Li} g \\
&+ z_{Li} (a_{Li})_x - x_{Li} (a_{Li})_z
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Mouvement angulaire de lacet :

$$\begin{aligned}
\left( I_{z_{si}} + I_{z_{Li}} + \sum_{j=1}^k I_{z_{uj}} \right) \left( \frac{d}{dt} r_s \right) &= - p_s q_s (I_{y_{si}} + I_{y_{Li}} - I_{x_{si}} - I_{x_{Li}}) \\
&- \left( r_s q_s - \left( \frac{d}{dt} p_s \right) \right) (I_{xz_{si}} + I_{xz_{Li}}) \\
&+ (y_{Li} \sin \theta_{si} + x_{Li} \cos \theta_{si} \sin \phi_{si}) m_{Li} g \\
&+ x_{Li} (a_{Li})_y - y_{Li} (a_{Li})_x + \sum_{j=1}^k M_{Tj} \\
&+ (M_{csi} + M_{supi}) \cdot k_{si}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Avec:

- $i = 1$  : masse suspendue du tracteur.
- $i = 2$  : masse suspendue de la remorque.
- $j$  : numéro d'axe.
- $k$  : le nombre des axes,  $k = 3$  pour le tracteur et  $k = 2$  pour la remorque.
- $L$  : liquide.

- $s$  : masse suspendue.
- $M_{csi}$  : moment dû à la contrainte de la sellette.
- $M_{supi}$  : moment dû au système de suspension.

L'équation du mouvement de roulis de la masse suspendue de chaque axe  $i$  est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 I_{xx_{ui}} p_{ui} &= (F_{sz_{i1}} - F_{sz_{i1}}) s_{ui} - z_{ui} F_{syi} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^k (F_{wy_{ij}}) (h_{ri} \cos(\phi_{ui}) - z_{ui}) \\
 &\quad + (F_{wz_{i1}} - F_{sz_{i3}}) T_i + (F_{wz_{i2}} - F_{sz_{i4}}) (T_i + d_i) \\
 &\quad + k_{\phi_i} (\phi_{si} - \phi_{ui})
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Avec:

- $i$  : l'axe.
- $j$  : le nombre des pneus dans chaque axe.
- $k$  :  $k = 2$  pour l'axe avant du tracteur et  $k = 4$  pour les autres axes.

### 5.3.3 Modèle de suspension

Les forces externes appliquées sur le véhicule sont générées principalement par les forces de contact entre la roue et le sol. Ces forces, sont transmises à la masse suspendue à travers le système de suspension du véhicule. Afin de simplifier le modèle, nous modélisons la suspension avec un ressort linéaire et un amortisseur assemblés en parallèle.



La force verticale appliquée sur le véhicule à travers le système de suspension est égale à la somme de la force en équilibre statique plus la force d'excitation.

$$F_{si} = K_{uj}e_{uj} + C_{uj}\dot{e}_{uj} + F_{statique} \quad (5.53)$$

Où les  $e_{uj}$  sont les deflexions de suspension calculées en fonction de la géométrie du véhicule.

$$\begin{aligned} e_{uj} &= z_s + (-\sin \phi_{uj} \cos \phi_{si} + \cos \phi_{uj} \cos \theta_{si} \sin \phi_{si}) s_{uj} - (\cos \phi_{uj} \sin \theta_{si}) x_{uj} \\ \dot{e}_{uj} &= \frac{d}{dt} e_{uj} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Avec:

- $i = 1$  : pour la masse suspendue du tracteur.
- $i = 2$  : pour la masse suspendue de la remorque.
- $j$  : l'axe ( $j = 1, 2, 3$  pour le tracteur et  $j = 4, 5$  pour la remorque).

### 5.3.4 Modèle du pneu

Le pneu est un élément essentiel dans un véhicule. Il représente le contact entre la roue et le sol. Les forces et les moments transmis au véhicule par les pneus dus à l'interaction roue-sol sont complexes et non linéaires. Ces forces et moments dépendent principalement des forces normales, de décalage longitudinal et latéral de la charge, du taux de glissement longitudinal (*slip ratio*)  $\lambda$  et les angles de glissement (*slip angle*)  $\alpha$  telle qu'illustrée par la figure (5.9). Il existe plusieurs modèles de pneu. La majorité des

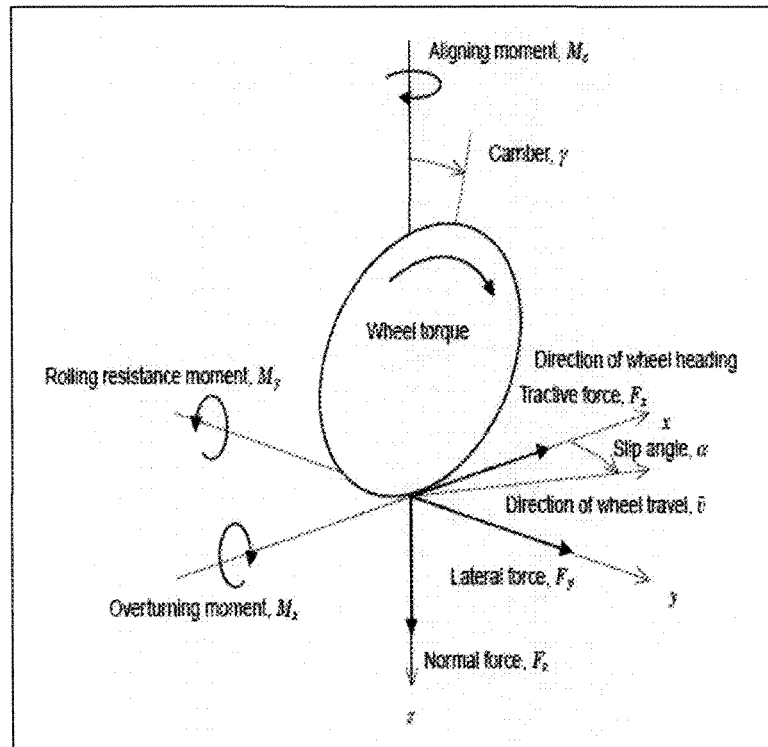


Figure 5.9: Forces et moments appliqués sur le pneu.

études ont employé des modèles linéaires ou des modèles basés sur des tableaux issus des tests expérimentaux. Ceci est pour caractériser les forces et les moments en fonction de la vitesse du véhicule, force normale, taux de glissement longitudinal et l'angle de glissement [19, 62, 66, 67, 68]. Ces modèles ont une meilleure prédiction de la force de traction de contact. Cependant, leurs données sont spécifiques pour chaque type de pneu ce qui réduit leur utilisation universelle. Il existe d'autres modèles numériques en passant par différents modèles analytiques [69, 70, 71]. Le choix du modèle du pneu influence le calcul des efforts au niveau de l'interface roue-sol. Les données issues de ces modèles sont importantes lorsqu'on veut procéder à une modélisation dynamique d'un véhicule.

Dans cette étude les efforts des pneus sont modélisés avec le modèle appelé cercle de glissement (slip circle model) [19, 72]. Ce dernier, est étroitement lié au modèle d'ellipse de friction illustré par la figure (5.10) [19].

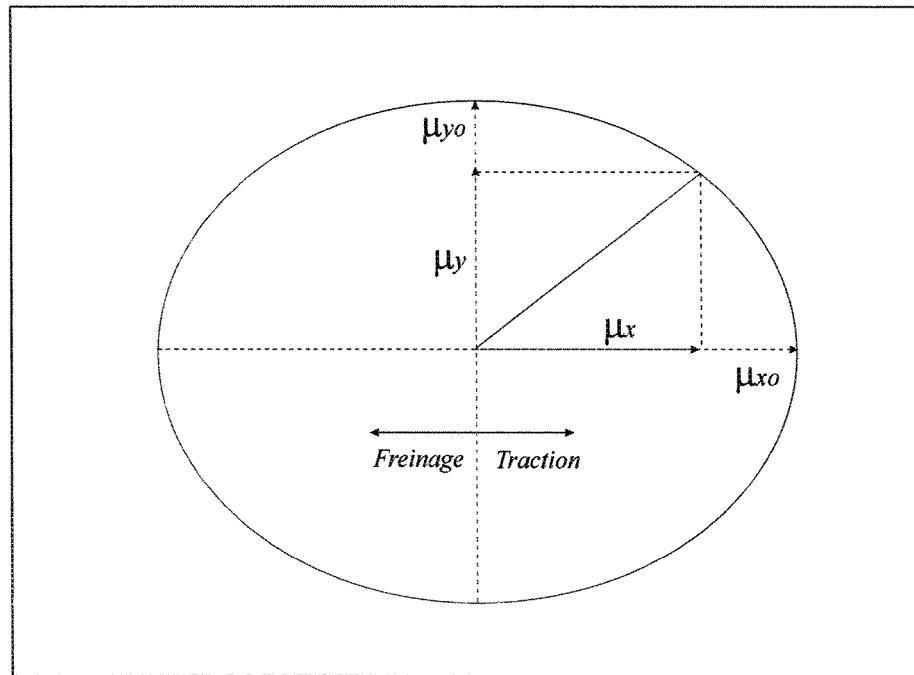


Figure 5.10: Concept de l'ellipse de friction.

Avec ce modèle, il est possible d'obtenir les forces latérale et longitudinale dans le cas de mouvements combinés, en se basant seulement sur les données de mesure de mouvements séparés freinage/traction seulement et cas de direction seulement telles qu'illustrée par la figure (5.11).

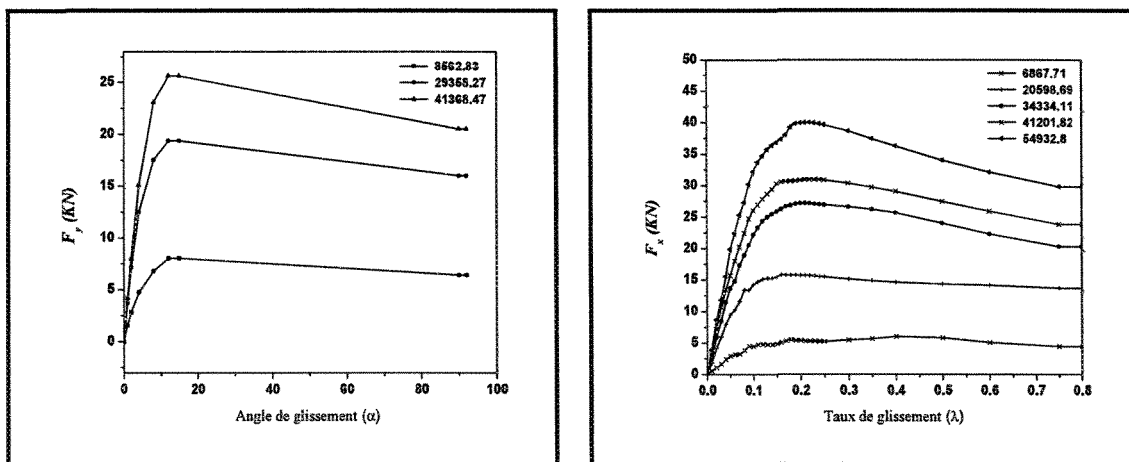
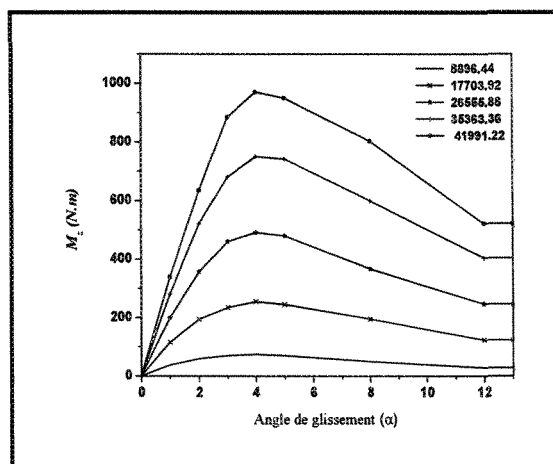
a) Force latérale du pneu.  $F_y$ b) Force longitudinale du pneu.  $F_x$ c) Moment d'alignement du pneu.  $M_T$ 

Figure 5.11: Force et moment du pneu caractérisés par les tables du logiciel Trucksim [1].

Le calcul des efforts repose sur le calcul du coefficient de frottement  $\mu_x$  et  $\mu_y$ . Le calcul de ces coefficients dépend du taux de glissement longitudinal  $\lambda$  et de l'angle de glissement  $\alpha$ .

Le taux de glissement longitudinal et l'angle de glissement du pneu sont calculés par la formule suivante :

**Freinage (décélération) :**

$$\lambda = \frac{r_w \omega_w - U_p}{U_p} \quad (5.55)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{V_{axe}}{U_p} - \delta$$

**Traction (accélération) :**

$$\lambda = \frac{r_w \omega_w - U_p}{r_w \omega_w} \quad (5.56)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{V_{axe}}{U_p} - \delta$$

Où  $r_w$  est le rayon de la roue et  $\omega_w$  la vitesse de rotation de la roue.  $V_{axe}$  est la vitesse de translation latérale de l'axe et  $U_p$  est la vitesse longitudinale du pneu telle que représentée par la figure (5.12).

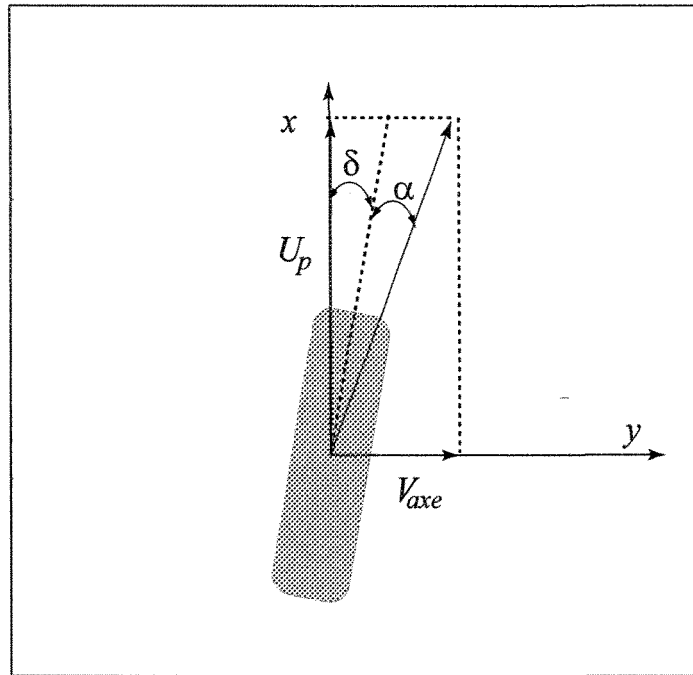


Figure 5.12: Modèle du pneu

Ces derniers, seront calculés à partir de la vitesse du centre de masse du véhicule.

$$V_{axe_j} = \cos \phi_{si} (V_{si} + r_{si} x_{uj} - p_{si} z_{rj}) - \cos \phi_{uj} p_{uj} H_{uj} \quad (5.57)$$

$$U_{pj1} = U_{si} + T_j r_{si}$$

$$U_{pj2} = U_{si} + (T_j + d_j/2) r_{si}$$

$$U_{pj3} = U_{si} - T_j r_{si}$$

$$U_{pj4} = U_{si} - (T_j + d_j/2) r_{si} \quad (5.58)$$

$U_{si}$  : Vitesse longitudinale de la masse suspendue  $s_i$ .

$V_{si}$  : Vitesse latérale de la masse suspendue  $s_i$ .

$r_{si}$  : Taux de lacet de la masse suspendue  $s_i$ .

$p_{si}$  : Taux de roulis de la masse suspendue  $s_i$ .

$d_j$  : Distance qui sépare les deux pneus.

$T_j$  : Distance entre le centre de masse de l'axe  $j$  et le centre des deux pneus.

$x_{uj}$  : Distance longitudinale entre le centre de masse de l'axe  $j$  et le centre de la masse suspendue  $s_i$ .

$z_{rj}$  : Distance verticale entre le centre de roulis de l'axe  $j$  et le centre de la masse suspendue  $s_i$ .

$H_{uj}$  : Distance verticale entre le centre de roulis de l'axe  $j$  et la route.

### Charge verticale du pneu

Dans cette étude le pneu est modélisé comme un ressort linéaire. Donc, la force verticale est en fonction de la constante du ressort.

$$F_{wzij} = Kt_{ij}\Delta_{ij} \quad (5.59)$$

Les deflexions des pneus seront calculées à partir de la géométrie du véhicule comme suit:

$$\Delta_{j1} = \Delta_{01} + z_{si} - z_{uj0} + z_{uj}(1 - \cos \phi_{uj}) - z_{rj} - \sin \theta_{si} x_{uj} + \cos \theta_{si} \cos \phi_{si} z_{rj} + \sin \phi_{uj} T_j + z_{uj} \cos \phi_{uj} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{j2} &= \Delta_{j1} + d_j \cos \phi_{uj} \\ \Delta_{j3} &= \Delta_{j1} - T_j \cos \phi_{uj} \\ \Delta_{j4} &= \Delta_{j1} - (T_j + d_j) \cos \phi_{uj} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Avec:

- $\Delta_{01}$  : Déflexion initiale due à la charge statique.
- $z_{si}$  : Déplacement vertical de la masse suspendue  $si$ .
- $z_{uj}$  : Distance verticale entre le centre de roulis et le centre de l'axe  $j$ .
- $z_{uj0}$  : Distance verticale initial entre le centre de roulis et le centre de l'axe  $j$ .
- $z_{rj}$  : Distance verticale entre le centre de roulis et le centre de masse de la masse suspendue  $si$ .

Afin de calculer les forces combinées, un vecteur de glissement dimensionnel total d'amplitude  $\gamma$  et de direction  $\beta$  est défini [73]:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\lambda^2 + (\sin(\alpha))^2} \\ \tan(\beta) &= \frac{\sin(\alpha)}{\lambda} \end{aligned} \quad (5.62)$$



Les coefficients de frottement entre le pneu et le sol dans le cas des forces combinées prendront la forme ci-dessous:

$$\mu(\gamma, \beta) = \mu_x(\gamma) (\cos(\beta))^2 + \mu_y(\gamma) (\sin(\beta))^2 \quad (5.63)$$

$$\mu_x(\gamma, \beta) = \mu(\gamma, \beta) \cos(\beta)$$

$$\mu_y(\gamma, \beta) = \mu(\gamma, \beta) \sin(\beta)$$

Finalement, les forces longitudinale et latérale dans le cas de mouvement combinés seront calculées:

$$F_x(\gamma, \beta) = \mu_x(\gamma, \beta) F_z \quad (5.64)$$

$$F_y(\gamma, \beta) = \mu_y(\gamma, \beta) F_z$$

### Force de freinage

La force de freinage est calculée en prenant en considération les forces et les moments développés dans la roue plus le mouvement de rotation (spin) de la roue telle que montrée par la figure (5.13). Les accélérations de rotation (spin) des roues  $\ddot{\omega}_{wi}$  sont calculées à partir du mouvement de rotation des roues comme suit [74] :

$$I_{wi}\ddot{\omega}_{wi} = T_d - (T_{bi} + M_{ri} + F_{xi}r_w) \quad (5.65)$$

$$T_d = T_e \eta_{diff} \eta_{trans} \varepsilon$$

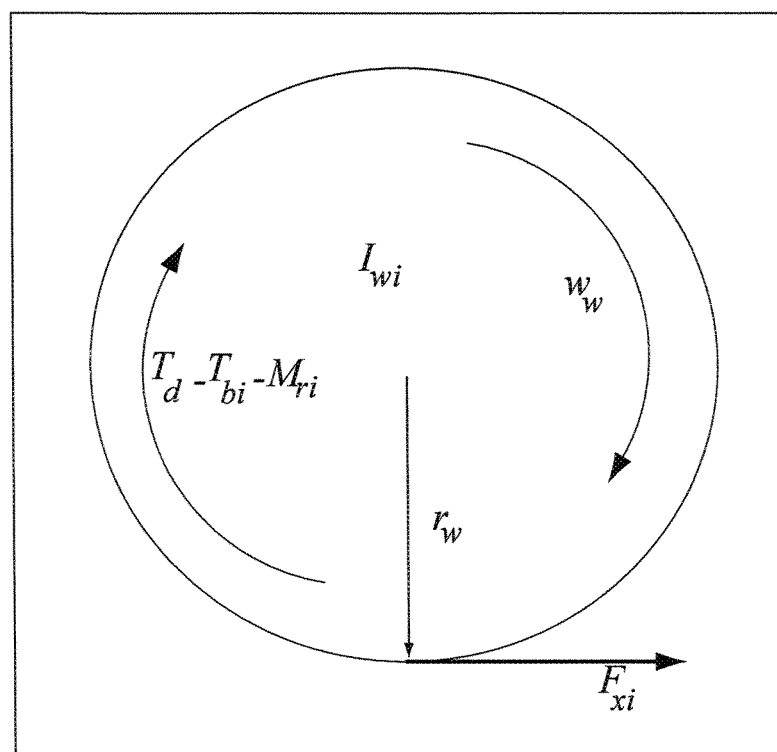


Figure 5.13: Dynamique de la roue

Avec:

$T_d$  : Couple d'entraînement de la roue.

$T_e$  : Couple du moteur.

$T_{bi}$  : Couple de freinage de la roue.

$T_{wi}$  : Moment d'inertie de rotation de la roue.

$\eta_{trans}$  : Rapport de transmission (transmission ratio).

$\eta_{diff}$  : Rapport de différentiel (différentiel ratio).

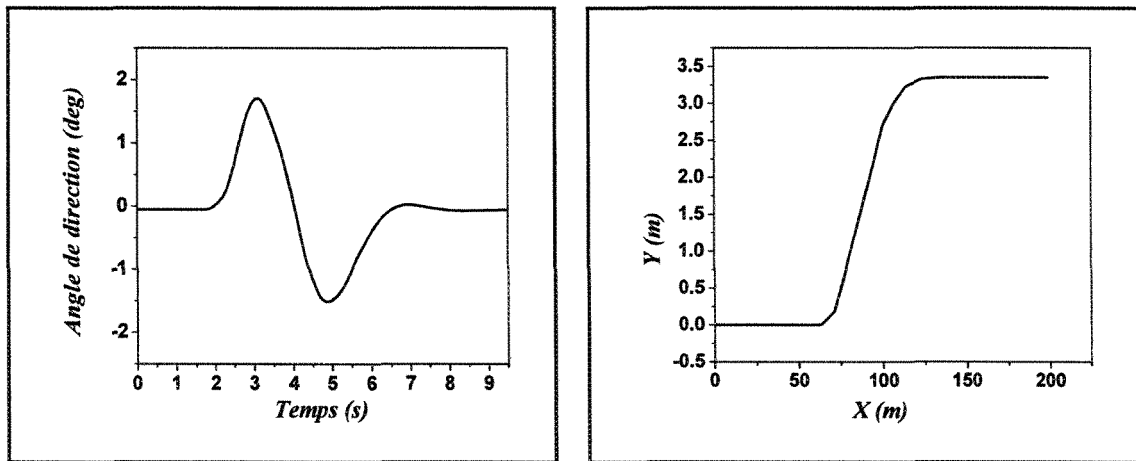
$\varepsilon$  : Fonction de couple (la fraction du couple du  
moteur appliqué à la roue spécifique).

$F_{xi}$  : Effort longitudinal appliqué au pneu.

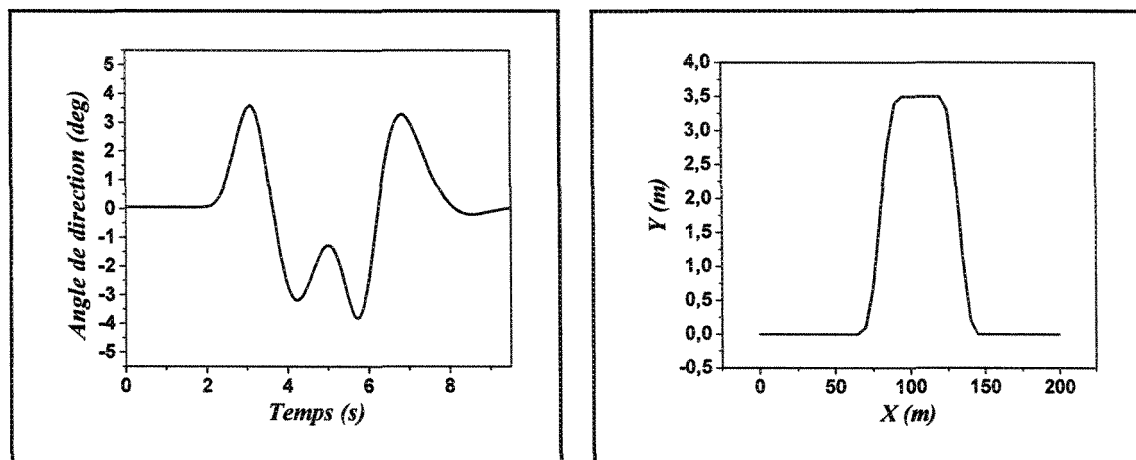
$M_{ri}$  : Moment de la résistance du pneu.

## 5.4 Validation du modèle de véhicule vs Trucksim

Le logiciel Trucksim développé par le centre de transport de l'université Michigan (*UMTRI*) est spécialisé dans la simulation de véhicules lourds [1, 63, 75]. Ce centre a développé également le logiciel Carsim pour les véhicules touristiques et BikeSim pour la moto. Trucksim est utilisé pour représenter et étudier la dynamique des véhicules dans un environnement informatique. Il s'agit d'un logiciel renommé mondiale dans ce domaine. Il est possible d'analyser un très grand nombre de configurations de véhicules puisque le logiciel est, en quelque sorte, une librairie de modèles existants dans l'industrie du transport. Par contre, Trucksim permet seulement d'ajouter un chargement qui est considéré comme étant fixe sur la semi-remorque. Cette particularité ne permet pas d'étudier le comportement dynamique du ballonnement du liquide dans les camions citernes. La librairie de Trucksim possède aussi un bon nombre de manoeuvres et de trajectoires prédéfinies qui va nous permettre de valider le comportement du modèle du véhicule développé. Pour des manoeuvres difficiles telles que le mouvement dans une courbe, changement de voie simple et double. Il est à noter que dans l'environnement de Trucksim, les manoeuvres sont des trajectoires prédéfinies, c'est à dire l'excitation est représentée par un vecteur de déplacement. Cependant, dans le modèle développé, l'excitation est définie par l'angle de direction ou couple de freinage comme paramètre d'entrée. À partir du vecteur de sortie, on enregistre la réponse de l'angle de direction. Cette réponse est le paramètre d'entrée pour notre modèle qui traite la même configuration que ce soit pour un véhicule d'unité ou articulé tel que définis par les tableaux (5.1 et 5.2) [75]. Deux manoeuvres de changement de voie simple et double avec une vitesse constante  $v = 70\text{km/h}$  ont été choisis pour comparer les deux modèles. La figure (5.14) présente la trajectoire et l'angle de direction des deux manoeuvres enregistrés à partir de Trucksim [75].



a) Manoeuvre de changement de voie simple et la trajectoire désirée.



b) Manoeuvre de changement de voie double et la trajectoire désirée.

Figure 5.14: Paramètres de comparaison entre le modèle développé et le logiciel Trucksim.

Tableau 5.1: Paramètres du véhicule d'unité.

Paramètres	Symboles	Valeurs
Masse suspendue	$m_s$	4457 kg
Moment d'inertie de roulis	$I_{xs}$	2287 kg.m <sup>2</sup>
Moment d'inertie de tangage	$I_{ys}$	35408 kg.m <sup>2</sup>
Moment d'inertie de lacet	$I_{zs}$	34823 kg.m <sup>2</sup>
Hauteur du (CM) de la masse suspendue	$z_{cg}$	1.173 m
Distance entre le centre de masse et l'axe avant	$x_{u1}$	1.135 m
Distance entre le centre de masse et l'axe arrière 1	$x_{u2}$	3.252 m
Distance entre le centre de masse et l'axe arrière 2	$x_{u3}$	4.522 m

Masse non suspendue.

Paramètres	Axe 1	Axe 2	Axe 3
$m_{su}$ (kg)	527	1007	973
$I_{xu}$ (kg.m <sup>2</sup> )	612	579	584
$I_{zu}$ (kg.m <sup>2</sup> )	612	579	584
$K_\phi$ (kg.m <sup>2</sup> /rad)	432	3389.54	3389.54
$2T_i$ (m)	2.022	2.06	2.06
$2S_i$ (m)	0.828	1.029	1.031
$d_i$ (m)	0	0.31	0.31
$H_{ri}$ (m)	0.553	0.686	0.704

Tableau 5.2: Paramètres du véhicule articulé.

Paramètres	Tracteur ( $s_1$ )	Remorque ( $s_2$ )
Masse suspendue ( $kg$ )	6308	2800
Moment d'inertie de roulis ( $kg.m^2$ )	6879	2400
Moment d'inertie de tangage ( $kg.m^2$ )	21711	40000
Moment d'inertie de lacet ( $kg.m^2$ )	19665	40000
Produit d'inertie $I_{xz}$ ( $kg.m^2$ )	130	—
Hauteur du ( $CM$ ) de la masse suspendue ( $m$ )	1.02	1.7
Distance entre le ( $CM_1$ ) et la sellette	4.601	—
Distance entre le ( $CM_2$ ) et la sellette	—	5.5
Distance entre le ( $CM_1$ ) et l'axe 1 du tracteur	1.384	—
Distance entre le ( $CM_1$ ) et l'axe 2 du tracteur	3.242	—
Distance entre le ( $CM_1$ ) et l'axe 3 du tracteur	4.522	—
Distance entre le ( $CM_2$ ) et l'axe 4 de la remorque	—	3.9
Distance entre le ( $CM_2$ ) et l'axe 5 de la remorque	—	5.2

## Masse non suspendue.

Paramètres	Axe 1	Axe 2	Axe 3	Axe 4	Axe 5
$m_{us}$ ( $kg$ )	527	1007	973	735	735
$I_{xu}$ ( $kg.m^2$ )	612	579	584	586	593
$I_{zu}$ ( $kg.m^2$ )	612	579	584	586	593
$K_\phi$ ( $kg.m^2/deg$ )	1186.3	1581.8	119.8	1468.2	1468.2
$2T_i$ ( $m$ )	2.022	2.06	2.06	2.06	2.06
$2S_i$ ( $m$ )	0.828	1.029	1.031	1.118	1.118
$d_i$ ( $m$ )	0	0.31	0.31	0.31	0.31
$H_{ri}$ ( $m$ )	0.553	0.686	0.704	0.717	0.676

Les figures (5.15 et 5.16) représentent la comparaison de simulations entre le modèle du véhicule d'unité développé et le logiciel Trucksim. La réponse directionnelle du véhicule est évaluée avec deux mouvements difficiles soit: changement de voie simple et double. Cette comparaison est caractérisée en terme de l'angle roulis, l'accélération latérale du centre de masse et la trajectoire parcourue du centre de masse. La simulation montre que nous avons obtenu une bonne corrélation entre les deux modèles. Nous enregistrons une petite différence pour la trajectoire du centre de masse. Cette différence est due à l'erreur d'angle de direction enregistré à partir de Trucksim. De plus dans le logiciel Trucksim l'excitation est en boucle fermée (trajectoire prédéfinie).



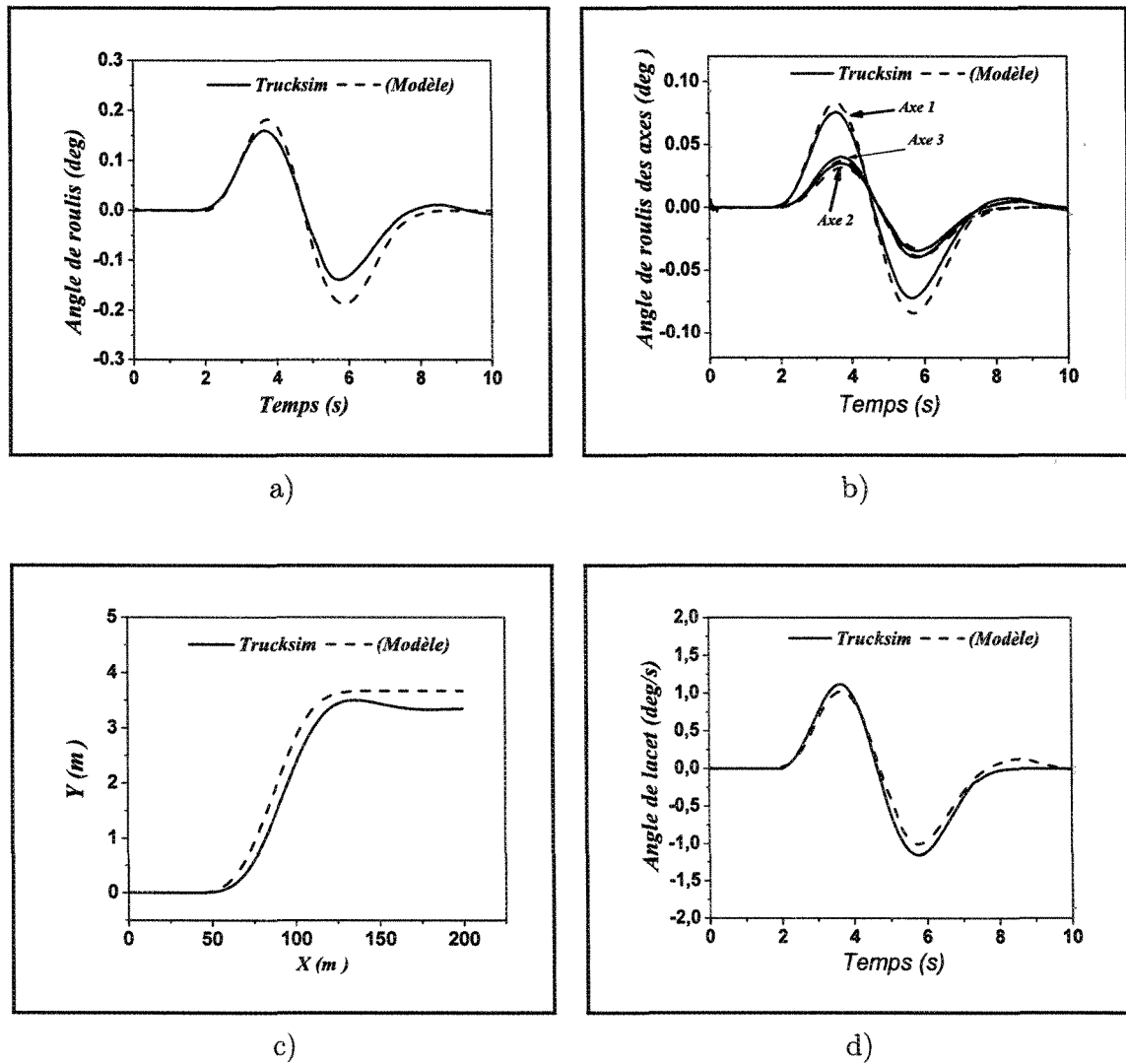


Figure 5.15: Comparaison entre le modelé développé et Trucksim pour un véhicule d'unité lors d'un mouvement de changement de voie simple.

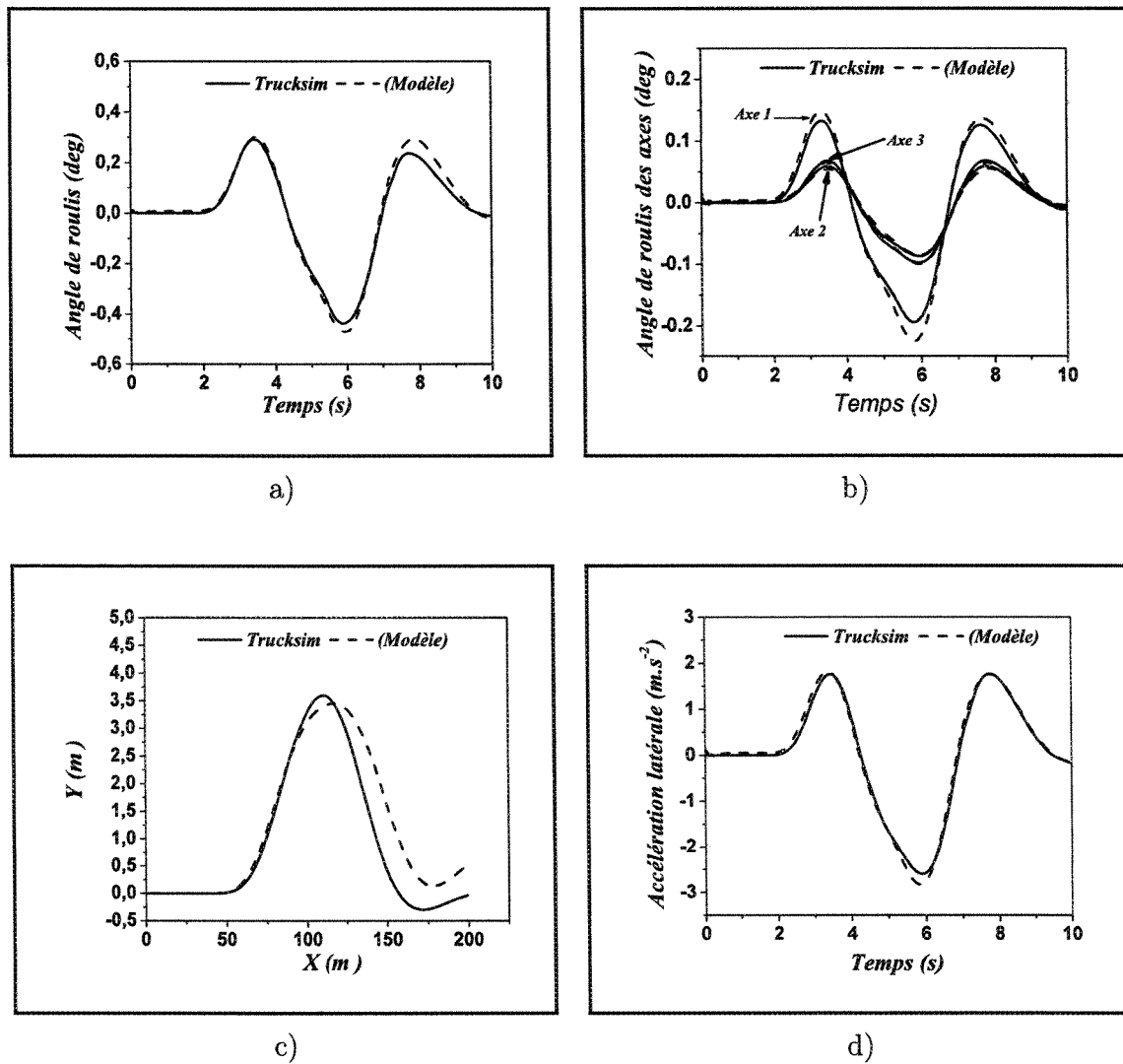


Figure 5.16: Comparaison entre le modelé développé et Trucksim pour un véhicule d'unité lors d'un mouvement de changement de voie double.

Dans le cas d'un véhicule articulé l'analyse est plus compliquée. Cette difficulté est due à l'ajout du point d'articulation où il y a des moments et des forces supplémentaires entre le tracteur et la remorque. Les figures (5.17 et 5.18) représentent la comparaison entre les deux modèles pour les mêmes mouvements difficiles tels que, changement de voie simple et double. Une bonne corrélation globale a été observée. Cependant, nous remarquons que notre modèle sous estime la réponse. Cette différence a été observée dans la réponse de lacet. Une différence dans la réponse de roulis en faveur du logiciel Trucksim a été enregistrée. Cette différence est expliquée par l'hypothèse que nous avons considéré la sellette comme corps rigide. Par contre, dans Trucksim elle est modélisée par une combinaison ressort-amortisseur. Cette technique est basée sur le principe de multi-corps ou la connexion entre les sous systèmes est de type ressort-amortisseur. Cette augmentation dans la réponse de lacet influence la trajectoire du véhicule telle qu'illustrée par les figures (5.17 et 5.18). Ceci est dû à l'erreur d'angle de direction enregistré à partir du vecteur de sortie de Trucksim. Finalement, cette différence n'influence pas la très bonne corrélation entre les deux modèles.

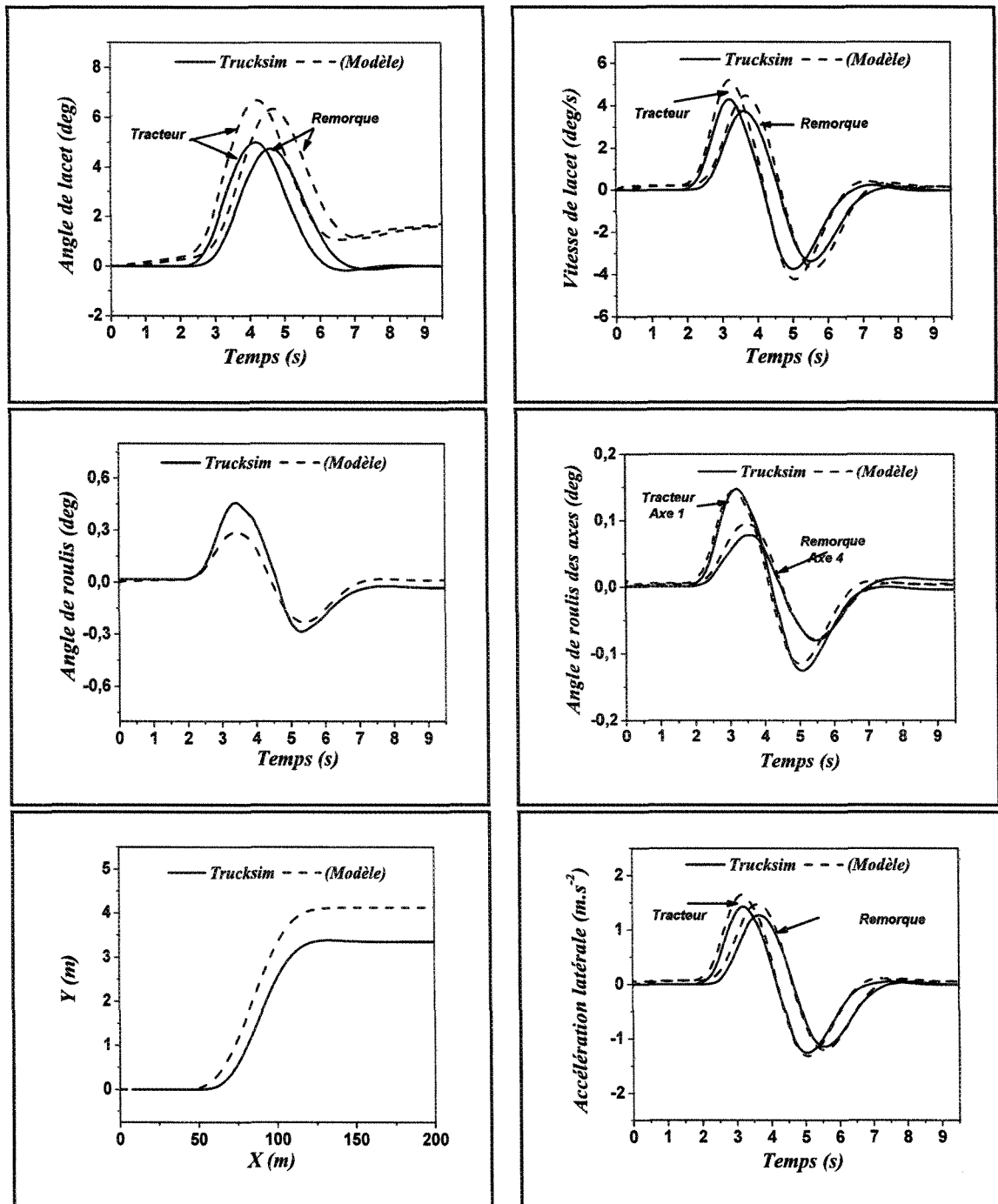


Figure 5.17: Comparaison entre le modèle développé et Trucksim pour un véhicule articulé lors d'un mouvement de changement de voie simple.

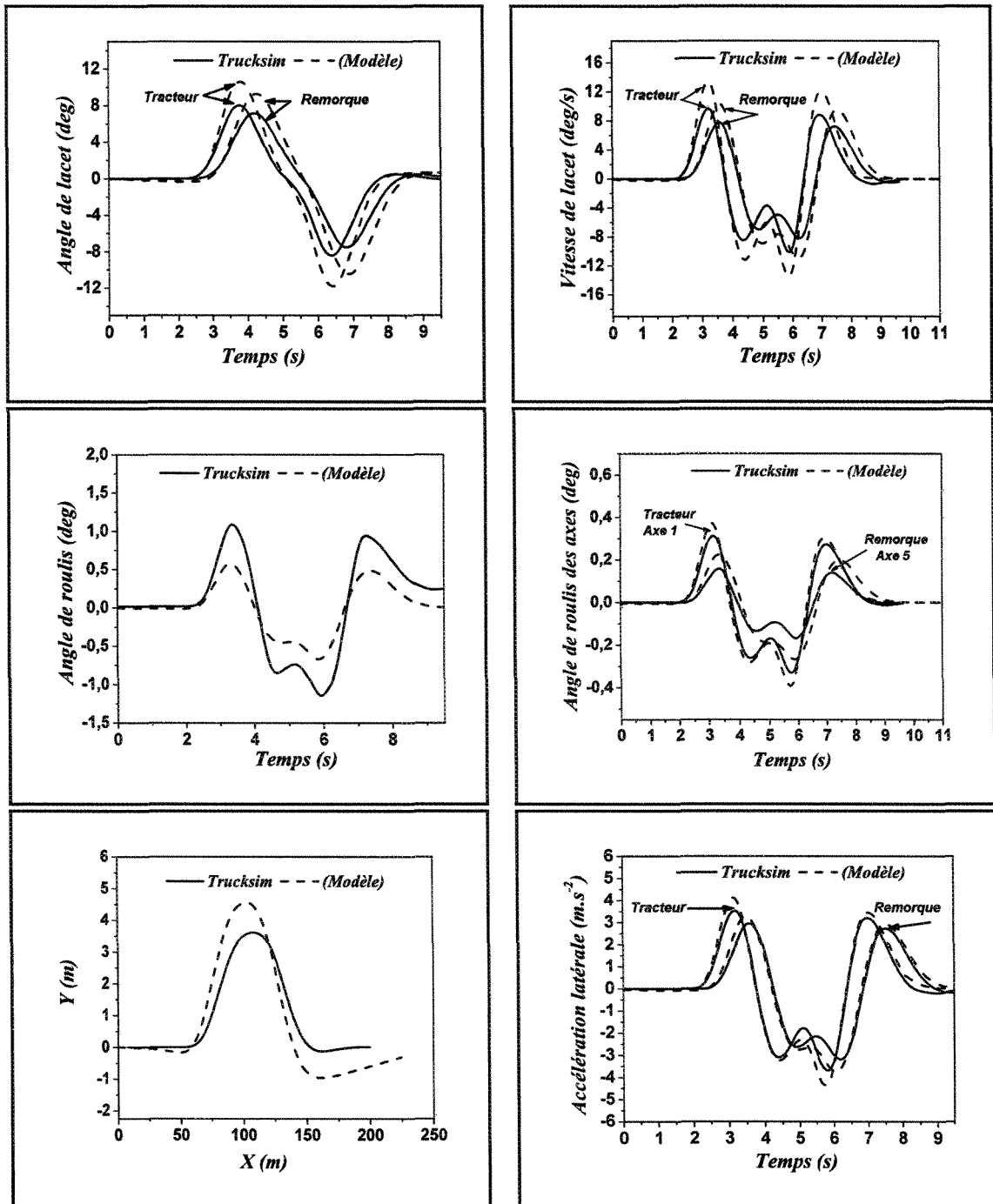


Figure 5.18: Comparaison entre le modelé développé et Trucksim pour un véhicule articulé lors d'un mouvement de changement de voie double.