

## 2.2 Calcul numérique par la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (MEF) est préconisée, car c'est un puissant moyen de résolution des équations aux dérivées partielles [34]. Deux cas peuvent se présenter pour l'application des éléments finis :

- a- le premier cas, il existe une forme intégrale du problème physique à résoudre : ce peut être une fonctionnelle résultant d'un principe variationnel, dont le minimum correspond à la solution recherchée, comme en élasticité ou en viscoplasticité, ou plus généralement une équation intégrale à résoudre ;
- b- dans le second cas une formulation intégrale doit être obtenue à partir du système d'équations aux dérivées partielles initiales au moyen d'une formulation faible, appelée aussi méthode des résidus pondérés.

La méthode des éléments finis (MEF) se distingue par le caractère plus général de sa formulation : aptitude à représenter des géométries plus complexes, possibilité d'utiliser des maillages non structurés, imposition plus naturelle des conditions aux limites. Actuellement les connaissances sont restreintes au niveau des études des alliages légers d'aluminium et de magnésium par la MEF pour prédire la fissuration par fatigue dans les pièces mécaniques utilisées dans l'industrie automobile. Cette étude va l'enrichir entre autre par l'utilisation des méthodes statistiques plus précises et les méthodes numériques (MEF) pour modéliser le phénomène de fissuration par fatigue, concernant les métaux légers en l'occurrence les alliages d'aluminium et de magnésium. L'analyse par la MEF est réalisée grâce au code fourni dans l'un des logiciels spécifiques de l'université du Québec à Chicoutimi, en l'occurrence le logiciel Abaqus.

Abaqus/CAE peut être utilisé pour créer un modèle d'analyse complet. Abaqus/Standard ou Abaqus/explicit éditent le fichier «Abaqus-Input file » généré par

Abaqus/CAE, exécutent les analyses et envoient les informations à Abaqus/CAE pour contrôler la simulation et générer une base de donnée de sortie (output database). Abaqus/CAE permet aussi de visualiser les erreurs dans le modèle lorsqu'elles existent. Abaqus/Standard et Abaqus/Explicit sont capables de résoudre une large variété de problèmes. Les caractéristiques des procédures implicites et explicites déterminent quelle méthode appropriée pour chaque problème. Pour ces problèmes qu'on peut traiter avec l'une ou telle méthode, l'efficacité avec laquelle le problème peut-être résolu détermine la méthode à utiliser. Le tableau 4 résume les différences clefs entre ces procédures [35].

### **2.3 Étude spectrale de la fatigue due aux chargements aléatoires :**

Soit une pièce mécanique soumise à une contrainte  $\sigma(t)$  variable dans le temps. Cette contrainte variable produit, même si elle ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau, un endommagement par fatigue. Le but du concepteur est de dimensionner la section de cette pièce de façon à éviter la rupture en fatigue pendant la durée de service. L'approche développée dans ce cadre est traditionnellement temporelle, c'est-à-dire basée sur l'historique de la contrainte. Cette approche repose sur des variables telles que l'amplitude et la valeur moyenne des cycles parcourus par la contrainte  $\sigma(t)$  pendant la séquence de chargement [36]. Cependant, la fatigue peut également être provoquée par des vibrations et le problème de calcul de durée de vie peut demander l'étude de la réponse dynamique des structures à des excitations périodiques ou aléatoires. La réponse dans ce cas, est alors donnée dans le domaine fréquentiel. Ainsi, des méthodes alternatives de calcul de durée de vie à partir de la densité spectrale de puissance de la contrainte  $\sigma(t)$  ont alors été développées. Toutes ces approches approximent les

résultats obtenus par la méthode temporelle basée sur le comptage « rainflow » des cycles.

**tableau 4.** Différences clefs entre Abaqus/Standard et Abaqus/Explicite.

Entité	Abaqus/Standard	Abaqus/Explicite
Librairie.	Offre une vaste librairie.	Offre une vaste librairie qui convient mieux pour les analyses explicites. Les éléments disponibles sont un sous-ensemble de ceux disponibles dans Abaqus/Standard.
Procédures d'analyses.	Procédures générales et perturbation linéaire sont disponibles.	Procédures générales sont disponibles.
Modèles de matériau.	Offre une large gamme de modèles de matériau.	Similaire à ceux qui existent dans Abaqus/Standard, avec une différence notable qui est la présence du modèle de fissuration des matériaux.
Formulation des problèmes de contacts.	Robuste dans la résolution des problèmes de contacts.	A des fonctionnalités de contact robustes qui peuvent résoudre facilement même des simulations de contact complexes.
Technique de solution.	Utilise les techniques de solution rigide inconditionnellement stable.	Utilise la technique de solution par intégration explicite qui est conditionnellement stable.
Mémoire et capacité de l'ordinateur à calcul.	Dû au grand nombre d'itérations possibles lors de l'incrément, la mémoire utilisable peut être large.	Espace du disque et la mémoire de l'ordinateur sont typiquement plus petits que ceux dans le cas de Abaqus/Standard.

**a- Cumul du dommage :**

Lorsque les chargements se composent de différents cycles de différentes amplitudes et de différentes valeurs moyennes, il faut mesurer l'endommagement total produit par ces cycles. Selon la référence [36], Fatemi et Yang présentent une revue

complète des lois de cumul du dommage qui ont été développées depuis la règle de cumul linéaire proposée par Palmgren en 1924. Il n'existe pas encore de loi de cumul universellement acceptée. Par conséquent, la simple loi de cumul linéaire est encore largement utilisée en raison de sa simplicité. La formulation mathématique sous laquelle elle est actuellement connue a été proposée par Miner en 1945 et elle s'exprime selon l'équation 32:

$$\text{équation 32 : } D = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i}$$

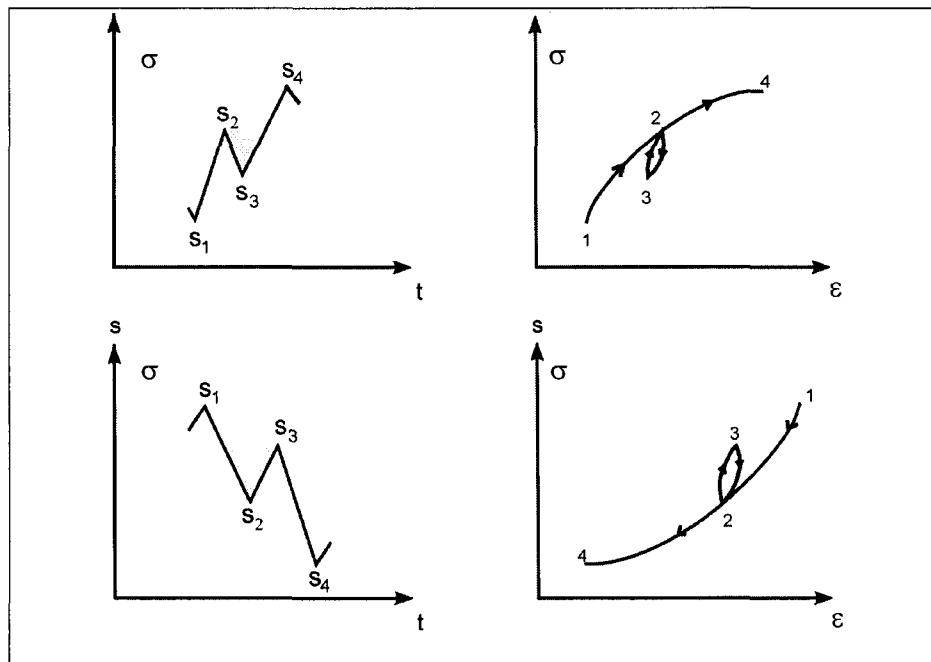
L'historique de la contrainte est décrite comme une séquence de blocs d'amplitude constante. Chaque bloc  $i$  est composé de  $n_i$  cycles d'amplitudes  $\sigma_i$ . La durée de vie  $N_i$  correspondant à cette amplitude de la contrainte est déterminée à partir de la courbe de Wöhler. L'amorçage est théoriquement prédit lorsque le dommage  $D$  est égal à 1. Le "dommage"  $D$  tel qu'il est défini dans l'approche macroscopique, par Xavier Pitoiset [36], est un instrument d'étude situant la pièce par rapport à sa durée de vie estimée. Malgré que la loi de cumul linéaire de Palmgren-Miner néglige de nombreux phénomènes observés expérimentalement, elle semble toutefois donner de bonnes estimations de durée de vie lorsque les chargements suivent des processus aléatoires stationnaires.

#### **c- Méthode « rainflow » de comptage des cycles :**

Les chargements réels sont généralement plus complexes. Qu'ils soient d'amplitude variable ou qu'ils soient décrits par des processus aléatoires (gaussiens, par exemple), l'application de la démarche nécessite l'utilisation d'une méthode de comptage de cycles, permettant de décomposer le chargement en cycles élémentaires

dont l'amplitude et la valeur moyenne, sont connues. Xavier Pitoiset [36] ajoute que pour identifier des cycles à partir de l'historique de la contrainte, la méthode de comptage rainflow, proposée par Matsuishi et Endo, est considérée, depuis l'étude de Dowling, comme celle menant à des prédictions de durée de vie les plus proches de la réalité. En plus, différents algorithmes ont été présentés dans la littérature, voir Downing et Socie, Amzallag *et al.*, conformément à la référence [36].

La procédure de comptage proposée est basée sur la méthode dite des quatre points présentée à la figure 2. Physiquement, une boucle fermée dans le plan contrainte-déformation  $\sigma - \varepsilon$  est décrite pour chaque cycle rainflow extrait de l'historique de la contrainte.



**figure 2.** Définition d'un cycle « Rainflow » [36].

La décomposition du signal se déroule en plusieurs étapes :

1<sup>ère</sup> étape : L'historique de la contrainte, ou signal, est réduit à une séquence de maxima et minima locaux, appelée processus des extrema.

2<sup>ème</sup> étape : Les quatre premiers points successifs  $s_1 (\sigma_1)$ ,  $s_2 (\sigma_2)$ ,  $s_3 (\sigma_3)$  et  $s_4 (\sigma_4)$  sont examinés, ces quatre points forment trois étendues  $\Delta s_{1,2,3} = \Delta \sigma_{1,2,3}$  qui sont calculées de la façon suivante :

$$\text{équation 33 : } \Delta \sigma_1 = |\sigma_2 - \sigma_1|; \Delta \sigma_2 = |\sigma_3 - \sigma_2|; \Delta \sigma_3 = |\sigma_4 - \sigma_3|$$

3<sup>ème</sup> étape : si  $\Delta \sigma_2 \leq \Delta \sigma_3$  et  $\Delta \sigma_2 \leq \Delta \sigma_1$ , le cycle rainflow défini par le couple d'extrema  $(s_2, s_3)$ , montré dans la figure 2 par la zone grise, est extrait du signal et son amplitude est défini par :

$$\sigma_a = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \text{ et sa valeur moyenne est donnée par : } \sigma_m = \frac{|\sigma_2 + \sigma_3|}{2}. \text{ } s_2 \text{ et } s_3$$

sont éliminés du signal,  $s_1$  est raccordé à  $s_4$ .

4<sup>ème</sup> étape : sinon, le rang des quatre points est incrémenté d'une unité et le test précédant est repris.

5<sup>ème</sup> étape : ce traitement est répété jusqu'au dernier point de la séquence des extrema. Suite à cette procédure, certains points du signal n'ont pas été extraits. Ils forment un résidu, qui est un signal dont les étendues vont en croissant puis en décroissant. Le maximum et le minimum de la séquence de départ se trouvent dans ce résidu, formant ainsi la plus grande étendue observée sur la séquence considérée. L'effet de ce résidu est par conséquent non négligeable, c'est pourquoi il est nécessaire de le décomposer en cycles élémentaires [36]. Ainsi, une nouvelle séquence de chargement est formée à

partir du résidu, à la suite duquel est ajouté une nouvelle fois ce même résidu. De nouveaux cycles peuvent alors être extraits en appliquant la procédure précédente. L'ensemble de la décomposition est alors terminé.

Le même auteur [36] ajoute qu'en pratique, il est possible de discrétiser les niveaux de contrainte en définissant  $n$  classes d'amplitudes. Chaque cycle « rainflow »  $(j; k)$  est une transition d'un extremum de niveau  $j$  (classe de départ) à un extremum de niveau  $k$  (classe d'arrivée), il peut alors être stocké dans une matrice « rainflow »  $R = r(j; k)$  de dimension  $n \times n$  dite classe de départ – classe d'arrivée. Le calcul du dommage à partir de cette matrice « rainflow » est alors facilement réalisé à partir de la courbe de Wöhler, du diagramme de Haigh et de la loi de cumul de Palmgren-Miner.

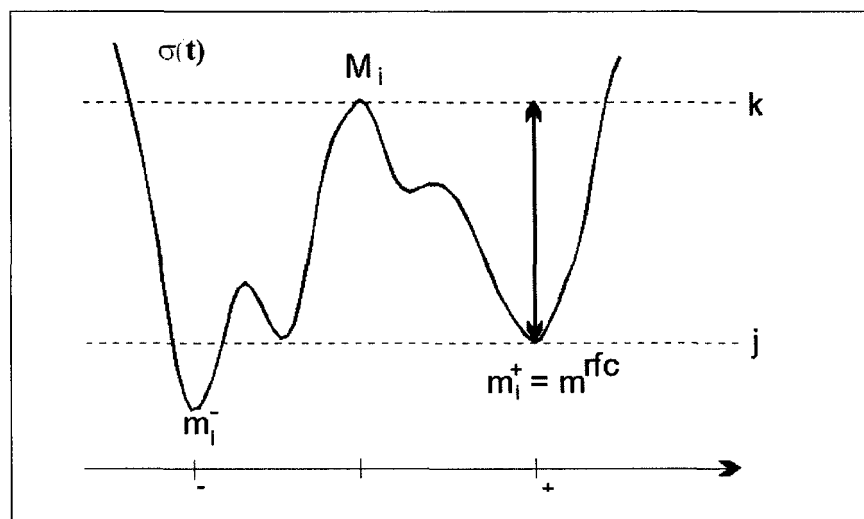
Les méthodes de calcul de durée de vie en fatigue ont traditionnellement été développées dans le domaine temporel. Toutefois, lorsqu'une structure est soumise à des vibrations aléatoires, le calcul de sa réponse dynamique à partir d'un modèle en éléments finis, est souvent réalisé dans le domaine fréquentiel. La contrainte aléatoire est alors donnée sous forme de densité spectrale de puissance (power spectral densities, en anglais, notées PSD dans la suite du texte). Le comptage des cycles « rainflow » par l'algorithme de Markov est préconisé.

### **c- Méthode de Markov :**

Le problème du passage direct de la PSD du processus  $\sigma(t)$  au comptage des cycles « rainflow » a ensuite été résolu par une théorie rigoureuse basée, d'une part, sur la définition d'un cycle « rainflow » proposée en 1987 par Rychlik et d'autre part, sur la théorie des chaînes de Markov comme rapporté par la référence [36]. En effet, un cycle « rainflow », tel qu'il est illustré par la figure 3, peut être mathématiquement caractérisé de la façon suivante: Considérons la contrainte  $\sigma(t)$  où  $t \in [0, T]$  et le maximum de la

contrainte  $M_i$  de niveau  $k$  se produisant au temps  $t_i$ . Nous pouvons définir les étendues  $(m_i^-, M_i)$  et  $(M_i, m_i^+)$  où:

- $m_i^-$  est le minimum de  $\sigma(t)$  qui se trouve entre le dernier passage à pente négative de  $\sigma(t)$  par le niveau  $k$  et le maximum  $M_i$ . Ce minimum se trouve à gauche de  $M_i$  et se produit au temps  $t_i^-$ .
- $m_i^+$  est le minimum de  $\sigma(t)$  qui se trouve entre  $M_i$  et le premier passage à pente positive de  $\sigma(t)$  par le niveau  $k$ . Ce minimum se trouve à droite de  $M_i$  et se produit au temps  $t_i^+$ .



**figure 3.** Caractérisation mathématique d'un cycle rainflow [36].

S'il n'existe pas de passage de  $\sigma(t)$  par le niveau  $k$  avant ou après le temps  $t_i$ , alors respectivement  $t_i^- = 0$  ou  $t_i^+ = T$ . Le cycle rainflow extrait au temps  $t_i$  est alors défini, soit comme l'étendue  $(m_i^{rfc}, M_i)$ , soit  $(M_i, m_i^{rfc})$ . Ce minimum  $m_i^{rfc}$  est déterminé en appliquant la condition :



$$\text{équation 34 : } m_i^{rc} = j = \begin{cases} \max(m_i^-, m_i^+) & \text{si } t_i^- > 0 \\ m_i^+ & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensuite, nous supposons que le processus des extrema peut être modélisé par une chaîne de Markov. La contrainte est alors discrétisée en un nombre  $M$  de niveaux, le processus des extrema devient alors un processus discret. Si  $n_{jk}$  représente le nombre de transitions arrivant à un extremum de niveau  $k$  partant d'un extremum de niveau  $j$ , la probabilité conditionnelle  $t_{jk}$  d'observer une transition vers un niveau  $k$  sachant que l'extremum précédent est de niveau  $j$  peut s'écrire :

$$\text{équation 35 : } t_{jk} = \frac{n_{jk}}{\sum_{m=1}^M n_{jm}}$$

Le nombre de transitions peut être observé sur une réalisation du processus  $\sigma(t)$ , mais également être déterminé théoriquement à partir d'une PSD.

#### 2.4 Dynamique d'un système de suspension d'un véhicule :

Dans la présente étude, nous nous intéressons au côté théorique des vibrations et son application dans l'industrie automobile, car les pièces de l'automobile subissent des efforts dynamiques et vibratoires très importants. Ces efforts dynamiques et vibratoires conduisent, avec le temps, à la fatigue du matériau constituant les pièces en question, et causent leur rupture. La connaissance du mode d'action de ces efforts et de l'interaction entre eux, étant donné que ces efforts interviennent dans les quatre quarts de l'automobile, permet de prédire la durée de vie de ces pièces.

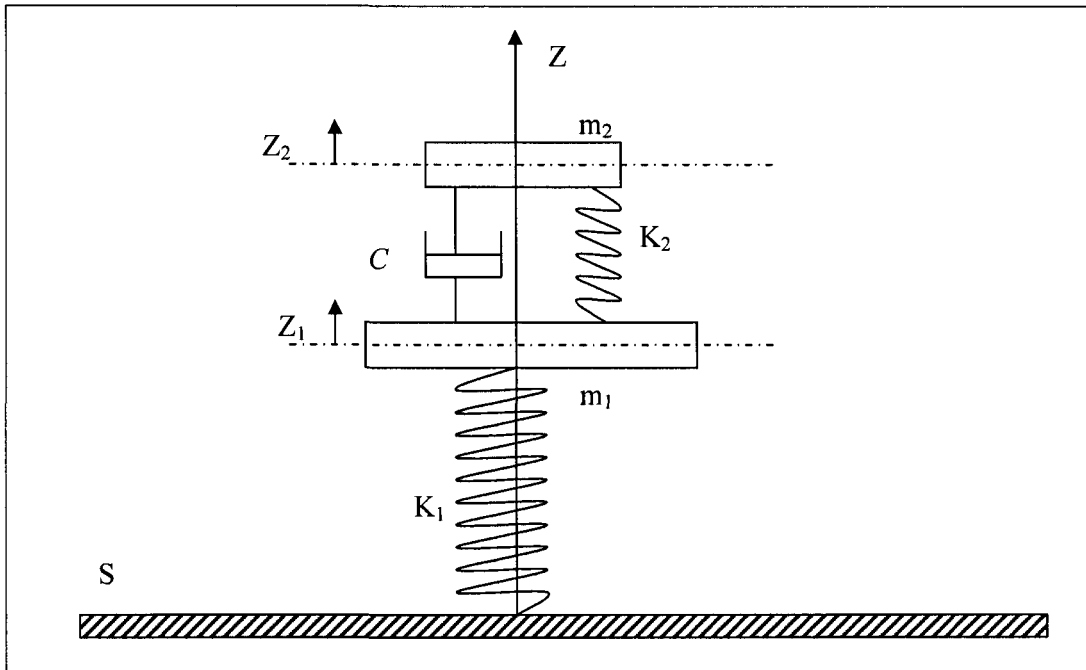
L'approche variationnelle de la mécanique repose sur les concepts d'énergie et de travail. Elle permet ainsi une compréhension beaucoup plus profonde des phénomènes en jeu. En même temps, elle est un outil de travail très performant, pour deux raisons :

- elle facilite l'écriture analytique des équations du mouvement d'un système complexe,
- elle conduit à des méthodes numériques approchées pour le calcul des systèmes continus.

Un système amorti, qui représente le cas naturel étant donné qu'il tient compte de la dissipation d'énergie par frottement (même pour une déformation élastique) avec le milieu ambiant ou au sein des matériaux déformés. Les mécanismes d'amortissement sont caractérisés par une expression relativement simple des efforts retardateurs agissant sur les mouvements. On distingue ainsi :

- le frottement solide, ou de coulomb, à réaction sensiblement constante et indépendante des vitesses des déplacements,
- le frottement visqueux, où l'effort retardateur est proportionnel aux vitesses des déplacements,
- l'amortissement hydraulique, enfin, qui agit en proportion du carré de ces mêmes vitesses.

La figure 4 montre une représentation du système de suspension d'un quart de véhicule en mode vertical.



**figure 4.** Représentation d'un système de suspension.

$m_2$  = masse du reste du véhicule,  $m_1$  = masse du pneu,  
 $c$  = la coefficient d'amortissement de l'amortisseur,  
 $k_1$  = la constante de raideur du pneu,  
 $k_2$  = la constante de raideur du ressort,  $S$  = support vibrant.

L'amortisseur, de coefficient  $c$ , joue sur la différence des vitesses

$\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} = \dot{z}_1 - \dot{z}_2$  des mouvements des deux masses en exerçant sur la première

masse  $m_1$  l'action  $-c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)$  et l'autre masse  $m_2$  la force  $-c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$ . On peut

introduire les équations du mouvement des deux masses par l'équation de Lagrange :

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_s} = Q_s$  en considérant ces forces comme des forces généralisées de type

$Q_s$ . Les équations du mouvement sont :

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + (k_1 + k_2)z_1 - k_2 z_2 + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) + c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

On pose :

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1} = \lambda\omega_2^2, \omega_3^2 = \frac{k_2}{m_1} = \mu\omega_2^2, 2\varepsilon\omega_2 = \frac{c}{m_2},$$

$$\text{d'où : } \frac{c}{m_1} = \frac{c}{m_2} \cdot \frac{m_2}{m_1} = 2\mu\varepsilon\omega_2$$

on voit que  $\varepsilon$  définit le taux d'amortissement relatif au système secondaire

$$\varepsilon = \frac{c}{c_{crit}} = \frac{c}{2\sqrt{k_2 m_2}} \text{ on aboutit à l'expression suivante :}$$

$$\text{équation 36: } \left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 + 2\mu\varepsilon\omega_2 \dot{z}_1 + (\mu + \lambda)\omega_2^2 z_1 - 2\mu\varepsilon\omega_2 \dot{z}_2 - \mu\omega_2^2 z_2 &= 0 \\ \ddot{z}_2 + 2\varepsilon\omega_2 \dot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 - 2\varepsilon\omega_2 \dot{z}_1 - \omega_2^2 z_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Selon M.A. Julien [37], des solutions de ce système sont de la forme :

$z_1 = Ae^{pt}$  et  $z_2 = Be^{pt}$ . On substitue ces solutions dans le système de l'équation 36 et

faisant un changement de variable  $p = \varpi\omega_2$ , où  $\varpi$  est un nombre sans dimension, on

obtient un système d'équations en  $A$  et  $B$  de déterminant  $\Delta(\varpi)$ .

## 2.5 Les fréquences propres des structures et résonance :

Tout système possédant une masse et de l'élasticité, est capable de vibrer librement avec ou en absence des excitations externes. Le système en question, a par conséquent ses fréquences naturelles de vibrations. Il est donc nécessaire d'élaborer ses équations de mouvement et évaluer ses fréquences naturelles qui sont principalement une fonction de la masse et la raideur du système. L'amortissement en quantité modérée a peu d'influence sur les fréquences naturelles, peut-être négligé dans les calculs [38]. L'effet de l'amortissement est principalement évident dans la diminution de l'amplitude des vibrations avec le temps. Ainsi lors du design d'un système

mécanique, soumis en service à des sollicitations aléatoires, on doit prendre en considération en plus de sa durée de vie, le phénomène de résonance car le spectre des sollicitations aléatoires doit être loin des fréquences naturelles du système mécanique en question.

Le modèle de base d'un système oscillatoire consiste en une masse, un ressort et un amortisseur. Le ressort supportant la masse est supposée avoir une masse négligeable. La relation entre la force et la déflexion du ressort est considérée comme linéaire, suivant la loi de Hooke,  $F = kx$ , où  $k$  est la constante de raideur du ressort en N/m. L'amortissement visqueux, généralement représenté par un amortisseur, est décrit par une force proportionnelle à la vitesse où  $F = c\dot{x}$ . Le coefficient d'amortissement  $c$  est mesuré en N.s/m.

### 2.5.1 Équation de mouvement : Fréquences naturelles :

Une masse reliée à un ressort suspendu est un simple système non amorti, qui se déplace dans la direction verticale. Ce système a un seul degré de liberté (DOF), car son mouvement est décrit par une seule coordonnée  $x$ . Lorsque le système est en mouvement, des oscillations prennent naissance à des fréquences naturelles qui sont propres au système. La déformation du ressort à l'équilibre statique est  $\Delta$  et la force du ressort est  $F = k\Delta$  qui égale au poids  $w$  de la masse :

$$F = k\Delta = w = mg \text{ où } g \text{ est l'accélération de l'apesanteur.}$$

En mesurant le déplacement  $x$  à partir de la position d'équilibre, les forces qui agissent sur la masse  $m$  sont  $k(\Delta + x)$  et  $w = mg$  ( $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  sont choisis positifs vers le bas).

Sachant que,  $k\Delta = w = mg$ , la deuxième loi de Newton nous permet d'écrire :

$$\text{équation 37: } m\ddot{x} = \sum F = -k(x) \Rightarrow m\ddot{x} + k(x) = 0$$

En définissant la fréquence circulaire  $\omega_n$  par :  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ , l'équation 37 peut s'écrire comme suit :

$$\text{équation 38: } \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

L'équation 38 montre que le mouvement de la masse est harmonique. C'est une équation différentielle linéaire homogène de second ordre qui a pour solution générale :

$$x = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + x(0) \cos(\omega_n t).$$

La période naturelle des oscillations est établie à partir de  $T\omega_n = 2\pi$  où  $T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$

et la fréquence naturelle est :

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Le cas d'une poutre de masse négligeable devant le poids d'une masse  $M$  est à signaler pour mettre en évidence la notion de rigidité d'une poutre. Pour une poutre encastree de masse négligeable au bout de son extrémité chargé d'une masse  $M$ , la déflexion  $x$  de la poutre soumis au poids  $P$  de la masse  $M$  à son extrémité est :

$$x = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{P}{k} \text{ où } EI \text{ est la rigidité flexurale.}$$

Ainsi, la constante de raideur de la poutre devient :  $k = \frac{3EI}{l^3}$  et la fréquence naturelle du système est :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{Ml^3}}$$

#### 2.5.4 Analyse fréquentielle des structures complexes :

Athanasios C. *et al.* [39], ont utilisé les changements dans les fréquences naturelles pour identifier les fissures multiples dans une poutre sous flexion. En effet, identifier une fissure c'est trouver sa position et sa profondeur. Dans la majorité des cas il existe plusieurs fissures dans une seule poutre. Chaque fissure est caractérisée par sa profondeur, position et l'angle relatif. Toutes les fissures sont supposées rester dans des positions angulaires arbitraires par rapport à l'axe longitudinal de la poutre et à chaque position du coté gauche. Une matrice locale de coefficient, de degré de liberté et flexion dans le plan vertical et horizontal, est utilisée pour modéliser les fissures transversales de rotation dans la gaine et elle est calculée sur la base des expressions des facteurs d'intensité de contrainte et des expressions associées des taux d'énergie de déformation dégagée. Lorsqu'une fissure existe dans une structure, comme le cas d'une poutre, les fréquences naturelles des vibrations diminuent. Cette réduction dans les valeurs des fréquences naturelles a été étudiée pour six paramètres indépendants principalement ; la profondeur, la position et l'angle de rotation de chaque fissure. À cause de la sensibilité dans les changements des déplacements ou des pentes, la théorie des ondelettes identifie les positions des fissures réduisant ainsi le nombre de paramètres indépendants. Les mêmes auteurs [39] ajoutent que les transformations par les ondelettes des vibrations propres ou des réponses vibratoires de la structure sous certaines circonstances, peuvent être utilisées pour localiser les fissures. En introduisant les fréquences propres dans les équations caractéristiques, les modes propres sont obtenus et présentés dans les lieux intacts et multi fissurés de la gaine. Comme les modes propres présentent une discontinuité de la pente à chaque lieu de la fissuration, cette propriété est utilisée pour localiser les fissures.

N.G Stephen et Y. Zhang [40] ont étudié une structure de poutre répétitive, au point de vue vibration et chargement en couplage torsion-tension. Les propriétés équivalentes de raideur continue dérivées de l'analyse aux valeurs propres d'une seule cellule d'une structure de poutre répétitive plane, ont été utilisées auparavant dans les théories dynamiques, comme Euler-Bernoulli et Timoshenko pour les vibrations flexurales, modifiées convenablement, pour prédire les fréquences naturelles des vibrations. Ces mêmes auteurs [40] ont utilisé la théorie dynamique torsion-tension de Di Prima. Cette approche, combinaison de structure périodique et un continuum substituant, donne une bonne correspondance avec les prédictions à partir de la méthode des éléments finis MEF, spécialement pour les faibles modes des vibrations. Ces résultats sont à  $\pm 1\%$  éloignés de ceux de la MEF pour les basses fréquences naturelles 8-10 pour les plus longues (30 cellules ont été considérées dans ce cas, et la majorité des modes ont été pris en torsion), et à  $\pm 1\%$  pour les modes les plus bas 4-5, les plus courts (dix cellules).

Un couplage torsion-flexion fut l'objet d'une étude menée par H. Salarieh et M. Ghorashi [41] sur une poutre Timoshenko sous la charge d'une masse rigide dans une des extrémités. Le centre de masse de la masse attachée ne coïncide pas obligatoirement avec le point d'attache avec la poutre. Ainsi, la poutre peut être exposée à des déformations d'origine torsion et de flexion élastique plane. Les formulations dérivant du principe de Hamilton (équations de mouvement et les conditions aux limites) ont été transformées à des formes équivalentes sans dimensions. Les résultats obtenus par H. Salarieh et M. Ghorashi [41] sont significatifs, car le modèle de la poutre Timoshenko est plus précis que le modèle de la poutre Euler-Bernoulli et peut être appliqué à des poutres fines et épaisses dans le domaine des



vibrations de basses et hautes fréquences. Ainsi, le modèle de la poutre Timoshenko permet une généralisation des résultats existant dans la littérature. Un autre cas rencontré souvent dans la littérature a été traité par E. Hamed et Y. Frostig [42]. En effet, trois cas ont été étudiés : (a) poutre pré-stressé « prestressed beam » avec un câble pré stressé « prestressed cable » (b) poutre réelle (c) câble pré stressé. Ces derniers ont proposé la formule suivante des fréquences naturelles pour une poutre compressée et suspendue axialement :

$$\text{équation 39: } \omega_n = \frac{n\pi}{L_{beam}} \sqrt{\frac{1}{m_{beam}} \left[ EI \left( \frac{n\pi}{L_{beam}} \right)^2 - N \right]}$$

où  $EI$  la rigidité flexurale de la poutre,  $L_{beam}$  est sa longueur,  $m_{beam}$  est sa masse par unité de longueur,  $n$  est le numéro de mode et  $N$  est la force compressive axiale. La fréquence naturelle d'un câble sous tension  $T$  est :

$$\text{équation 40: } \omega_n = \frac{n\pi}{L_{câble}} \sqrt{\frac{T}{m_{câble}}}$$

où  $L_{câble}$  est la longueur du câble,  $m_{câble}$  sa masse par unité de longueur et  $T$  est l'intensité de la force de tension. L'équation 39 et l'équation 40 révèlent que si on augmente l'intensité de la force axial, la fréquence naturelle diminue dans le cas d'une poutre compressée (« compression softening ») et augmente dans le cas du câble sous tension. Selon la même source [42], Saïidi *et al.* ont déterminé les fréquences naturelles d'un pont réel pré stressé, en utilisant l'équation 39. Les résultats obtenus par ce dernier montrent qu'une augmentation de l'intensité de la force réduit les fréquences naturelles. A. Kyprianou *et al.* [43], ont résolu le problème inverse de modification des structures pour déterminer les dimensions de la section transversale de la poutre surtout lorsqu'elle est ajoutée à la structure originale, elle contrôle les fréquences naturelles ou

l'antirésonance. Dans une autre publication, ces mêmes auteurs [44] ont étudié le contrôle des fréquences naturelles en ajoutant une masse et un ou plusieurs ressorts.

## **2.6 Synthèse de la revue de littérature :**

La revue de littérature nous a permis d'avoir une vue générale sur les travaux les plus récents dans les domaines qui sont proches du présent travail de recherche. Ainsi, nous avons pu isoler le critère de fatigue qui permet de prendre en considération l'état multiaxial des contraintes pour le coupler avec le comportement dynamique du véhicule. Le critère multiaxial de fatigue en question est décrit par la densité d'énergie de déformation liée par une relation empirique et un développement analytique et/ou numérique, à la durée de vie de la pièce  $N_f$ . Ce critère est fondé sur une base plus rationnelle que les critères purement empiriques qui sont basés sur l'observation comme la loi de Paris qui est limitée et spécifique à la propagation des fissures, la courbe de Whöler, et d'autres critères qui exigent des corrections comme la loi de Morrow lorsque la valeur moyenne du chargement est non nulle. Nous avons étudié aussi la dynamique du système de suspension d'un véhicule pour pouvoir calculer les excitations externes qui agissent sur la chaîne d'action à travers le pneu et la chaîne de retour se composant d'un ressort et d'un amortisseur. Nous avons analysé quelques publications concernant l'analyse numérique par la méthode des éléments finis avec ses principales variantes, pour identifier les conditions de convergences des schémas d'intégration numérique qui existent dans les codes commerciaux comme Abaqus. Étant donné l'aspect aléatoire de l'excitation de la route, une étude des méthodes spectrales du calcul de l'endommagement et les différentes méthodes du calcul des fréquences naturelles des structures, s'était avérée nécessaire. En effet, nous avons trouvé que la méthode de Markov dans l'extraction des cycles « rainflow », est un outil rigoureux puisqu'elle peut

être utilisée dans le domaine temporel et fréquentiel. Quand aux calculs des fréquences naturelles, nous avons fait un rappel de certains cas particuliers où les équations générales donnant les modes propres peuvent s'appliquer. En effet, nous avons conclu que les fréquences propres pour un système ayant des conditions aux limites bien déterminées, sont généralement proportionnelles à la rigidité flexurale et inversement proportionnelles à la masse.