

Chapitre 4

Développement du modèle élastique multiaxial

Dans ce chapitre nous analysons en profondeur la possibilité de remplacer des pièces automobile en acier par d'autres en alliage d'aluminium en terme d'endurance tout en gagnant en poids. Par la suite nous développons un modèle de rupture par fatigue multiaxial élastique, du bras de suspension inférieur d'un véhicule sous sollicitations dynamiques réelles via le système de suspension du véhicule, par le critère multiaxial de densité d'énergie de déformation. Nous identifions un cas extrême pour lequel on peut trouver une solution analytique au tenseur de contrainte (tenseur de Cauchy).

4.1 Développement d'une solution analytique de l'état des contraintes :

Il s'agit du cas de la figure 11 qui représente le cas extrême de l'état des contraintes puisque la pièce est encastree : la pièce triangulaire, représentant le bras de suspension inférieur, est sous chargement aléatoire P et stabilisée par la force F_2 en contre réaction. La plaque homogène mince ne s'éloigne pas de sa position d'équilibre donnant une flèche négligeable. Il s'agit d'une flexion simple, puisque le moment fléchissant ne s'annule pas. La plaque est mince et l'une de ses côtés est libre, on

suppose alors que la distribution des contraintes est plane et que la flexion est de nature élastique. Les trois forces qui s'appliquent sur la plaque sont :

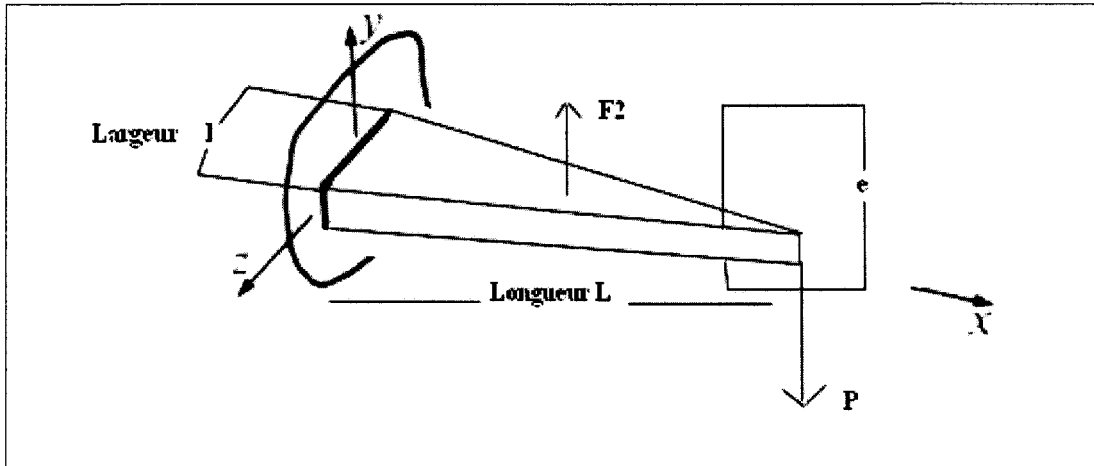


figure 11. Plaque triangulaire mince.

$e =$ épaisseur e , $l =$ largeur l , $L =$ longueur.

- la force P représente l'excitation aléatoire ou sinusoïdale à amplitude constante : singularité en $x = L$,
- la force F_2 l'action du poids du véhicule mais en opposition par rapport à P : condition aux limites pour $x = \frac{L}{2}$. On peut écrire par exemple $F_2 = \text{signe}(-P) \times 3750$ pour $P = \sin(\omega t)$.
- la réaction F_1 au niveau du joint de suspension : condition aux limites pour $x = 0$.

Selon la figure 11, il y a une singularité au point d'application de la force F_2 , $x = \frac{L}{2}$.

On estime que la valeur de l'effort tranchant au point de discontinuité $x = \frac{L}{2}$ est égale à

la moyenne de l'effort tranchant à $x_0^- = \left(\frac{L}{2}\right)^-$ et $x_0^+ = \left(\frac{L}{2}\right)^+$. En effet, et d'une manière

grossière l'effort tranchant au point de discontinuité $x_0 = \frac{L}{2}$ est égale à :

$$V(x_0 = \frac{L}{2}) = \frac{V(x_0^-) + V(x_0^+)}{2}$$

La contrainte normale $\sigma_{xx} = -\frac{My}{I_z}$ est constante dans une coupe selon l'axe OY ,

car e est petite devant l et L , avec $M = Vx$ est le moment de flexion, V est l'effort

tranchant et $I_z = \frac{le^3}{12}$ est le second moment de la plaque rectangulaire ($I_z = \frac{le^3}{3}$ dans le

cas d'une plaque triangulaire). Puisque la distribution des contraintes est plane et que

$\sigma_{xx} = -\frac{My}{I_z}$ est supposé constante, σ_{xx} est égale à sa valeur maximale pour $y = \frac{e}{2}$ par

rapport à l'axe neutre : $\sigma_{xx} = -\frac{My}{I_z} = -\frac{Me}{I_z 2}$, avec e est en valeur algébrique.

À cause de la singularité au point $x_0 = \frac{L}{2}$ on distingue les deux cas suivants :

- si $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$; l'effort tranchant V et le moment de flexion M sont respectivement

égales à :

$$V = F_2 - P$$

$$M = x(F_2 - P)$$

si $\frac{L}{2} \leq x \leq L$; l'effort tranchant V et le moment de flexion sont respectivement

égales à :

$$V = F_2 - 2P$$

$$M = x(F_2 - 2P)$$

Les équations d'équilibre, en négligeant le poids de la plaque par rapport au chargement, s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xy} = -\frac{Ve}{2I_z} + f(x) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{cases}$$

La constante $f(x)$ doit être déterminée grâce aux conditions aux limites d'équilibre.

En effet, pour $z = \pm \frac{l}{2}$ on a $\tau_{xy} = 0$ d'où : $f(x) = \frac{Vel}{4I_z}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xy} = -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le tenseur de Cauchy ainsi déterminé est :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Vxe}{2I_z} & -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} \\ -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} & 0 \end{pmatrix}, e \text{ est une valeur algébrique.}$$

Il est essentiel de déterminer les valeurs maximales et minimales de σ et τ en tout point, particulièrement dans l'analyse de rupture. Ces valeurs extrêmes sont déterminées dans l'espace et dans le temps. Dans le temps, elles correspondent aux pics et aux vallées de la contrainte dans le matériau et dans l'espace, elles correspondent aux

contraintes selon une direction θ_1 par rapport à la direction OX et OY . Connaissant les pics et les vallées d'une excitation sinusoïdale à amplitude constante, on détermine la direction θ_1 . En effet, les contraintes maximales et minimales en un point I ne correspondent pas nécessairement aux contraintes orientées selon OX et OY . Ainsi, on démontre que l'état des contraintes $(\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \tau'_{xy})$ en un point I du matériau selon une direction θ s'écrit en fonction de $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$ comme suit :

$$\begin{aligned} 1-a : \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \text{équation 61 : } 1-b : \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ 1-c : \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \end{aligned}$$

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 respectivement σ_{\max} et σ_{\min} sont déterminées

lorsque : $\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0$ ou $\frac{d\sigma_{y'}}{d\theta} = 0$. En effet on obtient :

$$\text{équation 62 : } \operatorname{tg}(2\theta_1) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Les limites de la variation de l'angle θ étant de 180° , l'angle double varie de 360° , donc l'équation 62 a deux solutions : un angle $2\theta_1$ et $2\theta_1 + 180^\circ$. Les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont alors déterminées en remplaçant θ_1 dans l'équation 61-a, ce qui nous permet d'écrire après simplification :

équation 63 :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}}$$

Selon les directions 1 et 2, correspondant à σ_1 et σ_2 , la contrainte de cisaillement est nulle. Ce sont les axes principaux selon lesquels l'élément ne subit aucune contrainte de cisaillement.

Les champs de déformation sont connus lorsque les trois composantes du champ de déplacement sont déterminées, grâce aux relations qui les relient. Cependant le cas inverse est plus délicat puisqu'il n'a pas de solution unique, car le nombre de variable passe de six déformations à trois déplacements. Physiquement on interprète le problème comme suit : lorsqu'il s'agit de déplacement, la différence entre le déplacement de corps rigides (sans déformation) et ceux qui s'accompagnent de déformations n'est pas faites. Ainsi, pour passer des déformations aux déplacements, il est nécessaire de contraindre le problème par des relations supplémentaires qui sont appelées : relations de compatibilité. Trompette [34] a défini ces relations en se basant sur le principe obligatoire lors de l'intégration du champs des déformations et que le résultat ne doit pas dépendre du chemin suivi.

Dans le cas cyclique, la détermination de la durée de vie d'une pièce est basée sur des relations semi-empiriques ou semi empiriques. La contrainte, la déformation et le moment varient respectivement entre deux valeurs (σ_{\max} , σ_{\min}), (ε_{\max} , ε_{\min}) et (M_{\max} , M_{\min}). On suppose que les effets de l'accélération sont petites, l'équilibre des forces existe à chaque instant et que l'équation suivante :

$$\begin{aligned} dM &= (\sigma)(l)ydy \\ \text{équation 64 : } M &= \int \sigma y dy \end{aligned}$$

soit toujours satisfaite. Un programme en langage Fortran est conçu pour le calcul des valeurs numériques de σ_{\max} et σ_{\min} (voir annexe 2).

4.2 Gain en poids : cas uniaxial sous chargement sinusoïdale (SWT) :

Une étude préliminaire dans le cas uniaxial est préconisée pour connaître l'ordre de grandeur de l'état de contrainte dans une plaque triangulaire ressemblant au bras de suspension inférieur. Cette pièce est soumise à un chargement sinusoïdal à amplitude constante contrôlé par une contre réaction constante égale au quart du poids du véhicule. Ces conditions de chargements sont arbitraires et sont les mêmes dans le cas d'une pièce en alliage d'aluminium que dans une autre en acier comme illustré dans la figure 11, pour montrer qu'on peut gagner en poids sans perdre en propriété mécanique de fatigue. Pour pouvoir étudier le gain en poids, on fixe des paramètres arbitraires de chargement dans le cas d'une pièce en alliage d'aluminium et d'une autre pièce en acier. On suppose que l'état des contraintes est uniaxial, et que la pièce est chargée par une force $P=4000\sin(\omega t)$ qui est en contre réaction avec la force $F_2=3750\text{signe}(-P)$ comme illustré par la figure 12.

Généralement, les tests déterminant la limite d'endurance sont appliqués dans le cas d'un chargement cyclique complètement renversé. Des éprouvettes standard sans entaille sont utilisées dans la majorité des cas. Dans les alliages d'aluminium, la courbe contrainte-déformation présente une partie plastique non négligeable. Pour décrire le comportement de ces types d'alliages qui diffère de celui des matériaux élastiques, viscoplastiques ou élastiques parfaitement plastiques, on utilise la relation de Ramberg-Osgood dans le cas cyclique [5] :

$$\text{déformation}_{\text{Totale}} = \text{déformation}_{\text{élastique}} + \text{déformation}_{\text{plastique}}$$

équation 65 :

$$(\varepsilon_a)_{\text{Ramberg-Osgood}} = (\varepsilon_a)_{\text{R-O}} = \varepsilon_{\text{élastique}} + \varepsilon_{\text{plastique}} = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{H}\right)^{1/n'}$$

avec H est le coefficient de résistance cyclique, E le module de Young, n' est l'exposant de durcissement cyclique et σ_a est la gamme de contrainte comme le montre la figure 12 dans le cas d'une contrainte locale sinusoïdale à amplitude constante : $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$. Le tableau 7 résume les propriétés mécaniques de quelques alliages d'aluminium et d'un acier.

tableau 7. Propriétés mécaniques de certains alliages [5].

Alliage :	Code	Densité kg/m ³	Module de Young en MPa	Limite ultime σ_u en MPa	Limite élastique σ_e en MPa
D'acier	AISI1015	7900	206	415	227
	RQC-100	8000	200	758	683
D'aluminium	2024-T351	2700	73	455	379
	2024-T4 Al	2700	73	476	303
	7075-T6 Al	2800	71	578	469

Dans la relation Manson-Coffin, la durée de vie N_f , est liée à la déformation totale par la relation suivante :

équation 66 :

$$(\varepsilon_a)_{\text{Manson-Coffin}} = (\varepsilon_a)_{\text{M-C}} = \varepsilon_{\text{élastique}} + \varepsilon_{\text{plastique}} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c$$

où σ_f' est le coefficient de résistance à la fatigue, b est l'exposant de résistance à la fatigue, c est l'exposant de ductilité de la fatigue et ε_f' est le coefficient de la ductilité de la fatigue [5].

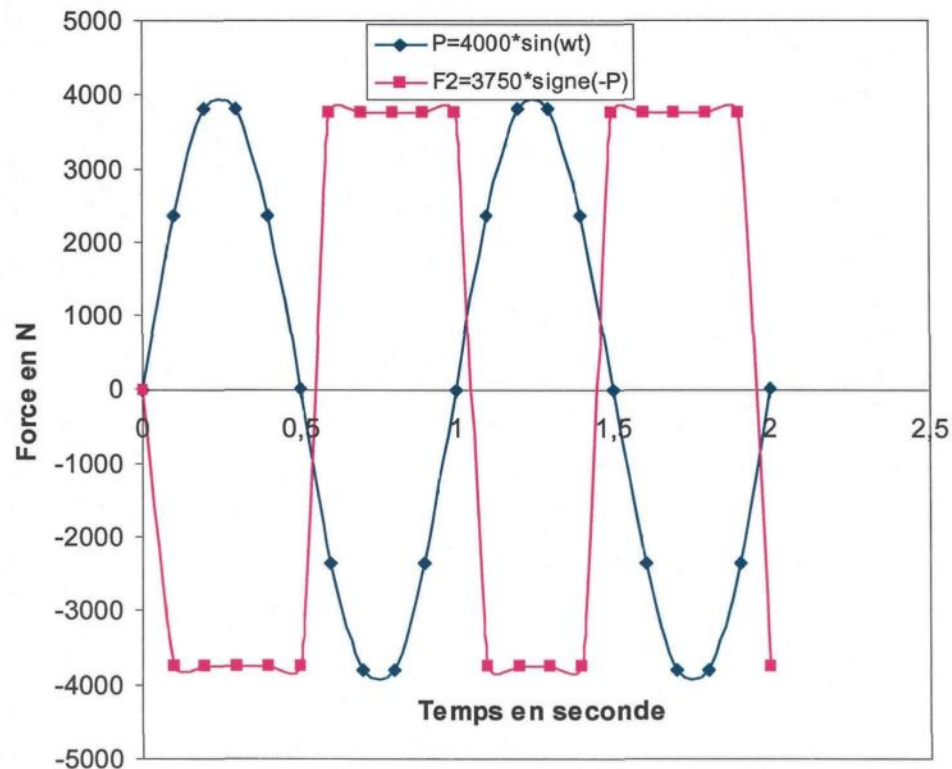


figure 12. Chargement sinusoïdal à amplitude constante avec une valeur moyenne nulle.

On utilise la relation décrite par l'équation 67, qui lie la gamme de contrainte à la durée de vie, comme une interpolation de la courbe $S-N$:

$$\text{équation 67 : } \sigma_a = \sigma_f' (2N_f)^b$$

Selon Norman E. Dowling [5], J.Morrow a suggéré un modèle tenant compte de l'effet

de la contrainte moyenne, $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$, donnant la durée de vie N_f avec l'effet de

σ_m , en fonction de N^* ne tenant pas compte de l'effet de σ_m . Le modèle de J.Morrow

a été modifié en réduisant la partie décrivant le comportement plastique du matériau pour des durées de vie courtes.

La même référence [5], Smith, Watson et Topper (SWT) ont lié la durée de vie au produit $\sigma_{\max} \varepsilon_a$ qui représente la densité d'énergie. En effet la méthode SWT assume que la durée de vie pour toutes situations de la valeur moyenne de la contrainte dépend du produit $\sigma_{\max} \varepsilon_a$ car $\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m$ (on voit bien que si $\sigma_m = 0$, alors $\sigma_{\max} = \sigma_a$). Dans le cas idéal le produit $\sigma_{\max} \varepsilon_a$ doit être englober le cas particulier $\sigma_a \varepsilon_a$. Le produit $\sigma_a \varepsilon_a$ dans le cas d'un chargement complètement renversé comprend le produit de la relation de Manson-Coffin et la relation de l'extrapolation de la courbe de Wöhler. La déformation est calculée à partir de la relation de Ramberg-Osgood selon l'équation 65. Smith, Watson et Topper, ont multiplié la loi de Manson-Coffin par l'équation 65, et ont obtenu une relation liant la durée de vie à la densité d'énergie, décrite par l'équation 69, appelée la méthode SWT indépendante de la valeur moyenne de la contrainte :

$$\text{équation 68 : } \sigma_{\max}(\varepsilon_a)_{R-O} = \sigma_a(\varepsilon_a)_{M-C}$$

$$\text{équation 69 : } \sigma_{\max} \varepsilon_a = \frac{(\sigma_f')^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma_f' \varepsilon_f' (2N_f)^{b+c}$$

Norman E. Dowling [5] conclut que l'approche de J.Morrow donne de bon résultat dans le cas de l'acier, et lorsqu'elle est modifiée elle s'applique bien aux spécimens contenant une entaille qui ont une courte durée de vie. L'approche SWT donne de bon résultat pour une large gamme d'alliage, et elle est utilisée dans le cas général. Le profil de contrainte déterminé dans le cas uniaxial, flexion simple dans la présente étude,

permet de connaître les valeurs, σ_{\max} et σ_{\min} , dans le matériau et déduire σ_a par l'équation 70:

$$\text{équation 70 : } \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Après, on détermine la valeur de ε_a par la relation de Ramberg-Osgood. Un programme informatique est nécessaire pour le calcul de σ_{\max} , σ_{\min} et σ_a à partir du tenseur de Cauchy puis extraire ε_a et N_f . Les paramètres de l'approche SWT, basée sur le concept de densité d'énergie, dans le cas de l'alliage d'aluminium 7075-T6 sont donnés dans le tableau 8.

tableau 8. Paramètres de l'approche SWT [5]

<i>Alliage</i>	<i>E</i>	<i>H'</i>	<i>n'</i>	σ_f'	ε_f'	<i>b</i>	<i>c</i>
7075-T6 Al	71000 MPa	977 MPa	0,106	1466 MPa	0,262	-0,143	-0,619
Ausformed-H11	207000 MPa	3475 MPa	0,059	3810 MPa	0,0743	-0,0928	-0,7144

L'extraction de N_f demande des techniques numériques car l'équation 69 est non linéaire. La méthode Newton est préconisée. Il s'agit d'une méthode itérative basée sur le calcul numérique de la tangente d'une fonction f en un point x_n , où cette fonction s'annule en un point voisin x_{n+1} . L'itération consiste à diminuer l'erreur par rapport à une solution approchée.

Lorsque l'épaisseur augmente, la contrainte σ_a diminue comme illustré dans le tableau 9. On peut renforcer le matériau dans les régions où la contrainte est élevée et en enlevant de la matière là où la contrainte est faible lors de l'opération d'optimisation, comme dans d'autres travaux de recherche [47]. La figure 13 illustre les données du nombre de cycles à la rupture en fonction de la charge et l'épaisseur de la pièce

triangulaire en alliage d'aluminium 7075-T6 comparées à ceux d'une même plaque en acier Ausformed-H11.

tableau 9. Données des calculs numériques (sinusoïde d'amplitude 4000 N).

Épaisseur en mm	σ_a en MPa	N_f : 7075-T6 Al Modèle SWT	N_f : Acier H-11 Modèle SWT	N_f : 7075-T6 Al Wöhler	N_f : Acier Ausformed-H11 Wöhler
20	548	438	600000000	486,91752	594021393
25	280	61612	8,1E+11	53305,715	8,2468E+11
30	162	2500000	2,6E+14	2446882,14	2,9998E+14
35	102	58000000	4,5E+16	62174450	4,3866E+16
40	68	1000000000	3,8E+18	1059300941	3,4647E+18

N_f = nombre de cycles à la rupture.

Lorsque l'épaisseur augmente, la contrainte locale diminue et la durée de vie de la pièce augmente dans les deux cas. La pièce en acier Ausformed-H11 est plus sécuritaire que celle en alliage d'aluminium 7975-T6, mais plus pesante. Il doit exister une épaisseur équivalente d'une pièce en alliage d'aluminium 7075-T6 plus légère que la pièce en acier Ausformed-H11, donnant le même nombre de cycle à la rupture. La courbe de Wöhler est réalisée pour une éprouvette d'épaisseur 0,48 pouce = 1,22 cm. Un état de contrainte maximale dans une pièce triangulaire d'épaisseur 0,48 pouce donne une durée de vie égale à 49 cycles. Selon la courbe de Wöhler on obtient 69 cycles. Ceci nous permet de conclure que le modèle SWT est calibré par la courbe de Wöhler.

Une pièce en acier Ausformed-H11 d'épaisseur 2 cm a une durée de vie de l'ordre de 6×10^8 selon le modèle SWT. Le poids correspondant est de l'ordre de 7,8 kg. Une pièce en alliage d'aluminium 7075-T6 donnant le même nombre de durée de vie

devrait avoir une épaisseur de l'ordre de 3,75 cm, avec un poids de l'ordre de 5 kg. Dans ce cas on a un gain en poids de 36% comme illustré dans le tableau 10. Cette épaisseur est déterminée aussi dans le cas d'un chargement aléatoire qui représente l'aspect réel de la chaussée. La figure 14 compare la durée de vie obtenue par le modèle SWT avec celle obtenue par la courbe de Wöhler. En effet dans le cas de l'acier Ausformed-H11 les deux valeurs de durée de vie sont presque égales, alors que dans le cas de l'alliage d'aluminium 7075-T6 il y a une différence significative pour les charges élevées.

Une distribution de la densité d'énergie maximale SWT_{max} dans une plaque triangulaire est illustrée par la figure 15. En effet la densité d'énergie maximale SWT_{max} se trouve au lieu où l'excitation de la route s'applique. En ce lieu, le moment de la force d'excitation est maximal. Les résultats montrent que dans le cas d'une pièce de suspension de véhicule en alliage d'aluminium 7075-T6, donnant le même nombre de durée de vie qu'une pièce métallique en alliage d'acier Ausformed-H11, on a un gain en poids appréciable. Les essais de simulation avec un chargement sinusoïdal à amplitude constante ont montré qu'il existe un potentiel de l'utilisation des pièces de suspension en alliage d'aluminium.

tableau 10. Gain en poids une fois l'alliage 7075-T6 Al est utilisé.

Alliage	Épaisseur en cm	N_f	Poids non optimisé	Gain en poids
Acier Ausformed H11	2	6×10^8	7.8 kg	
7075-T6 Al	3,75	6×10^8	5 kg	36%

N_f = nombre de cycles à la rupture.

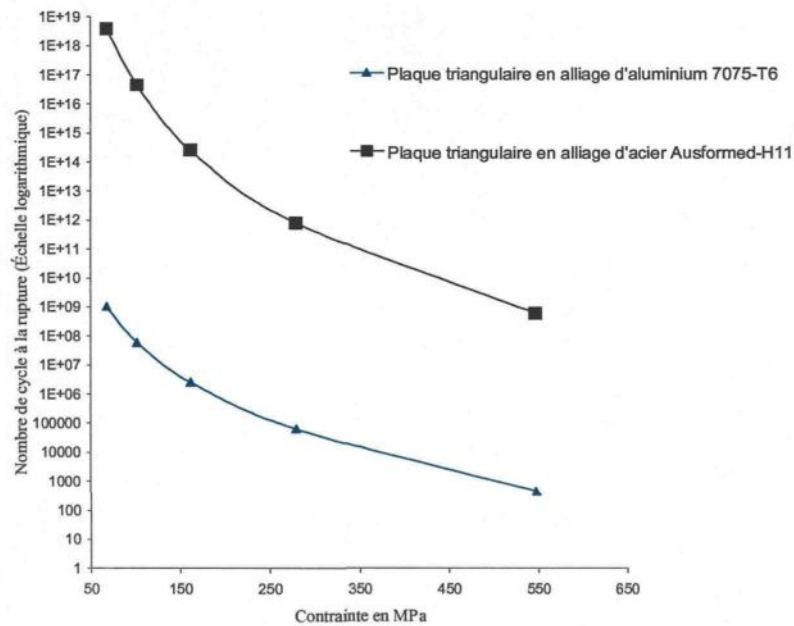


figure 13-a : nombre de cycle à la rupture en fonction de la contrainte σ_a .

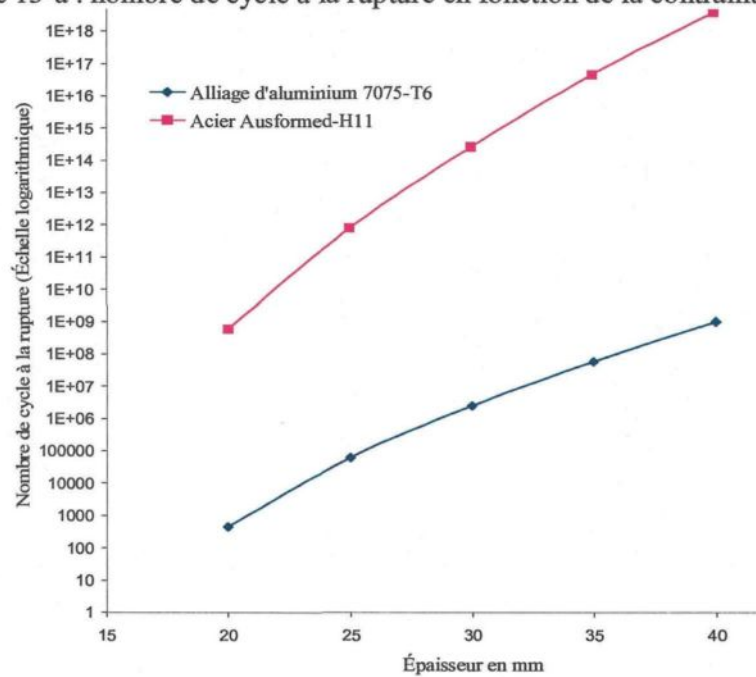


figure 13-b: nombre de cycle à la rupture en fonction de l'épaisseur.

figure 13. Courbe $S-N$ pour deux alliages différents (Sinusoïde de $P_{max}=4000N$).

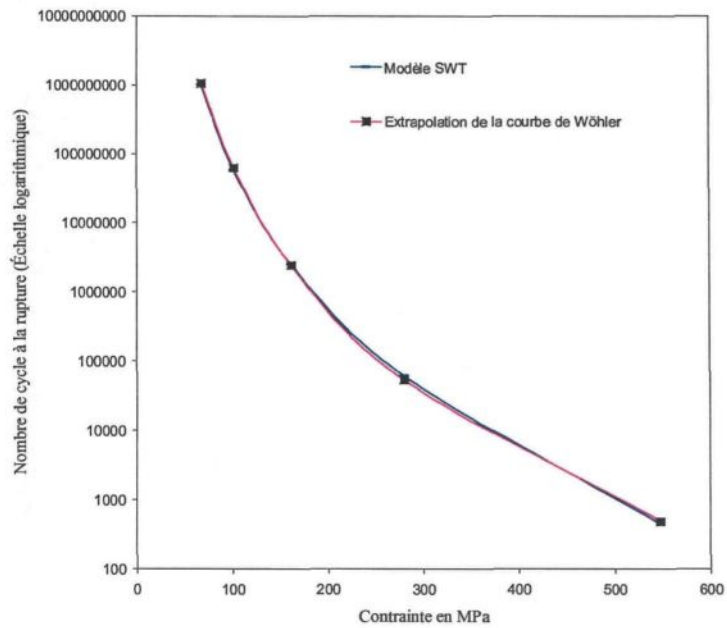


figure 14-a : Alliage d'aluminium 7075-T6.

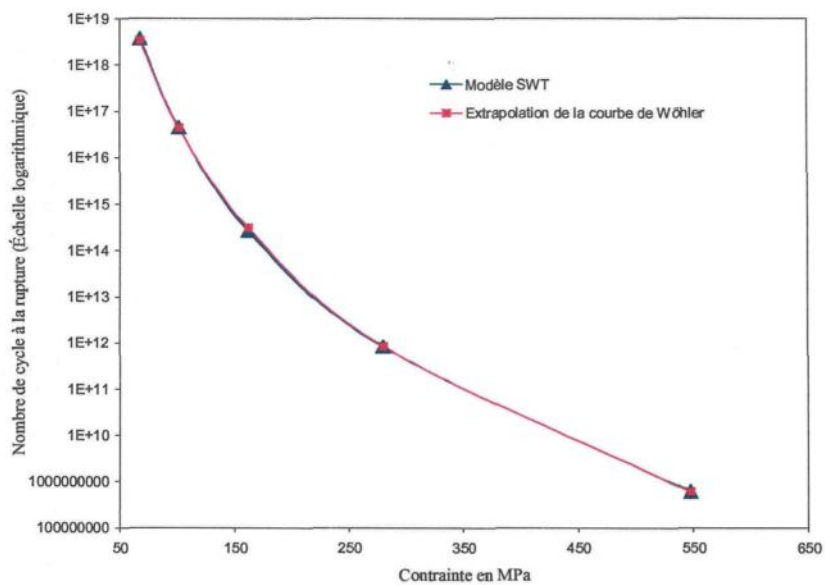


figure 14-b: Acier Ausformed-H11.

figure 14. Courbe S-N: Modèle SWT et Courbe de Wöhler (harmonique sinusoïdale).

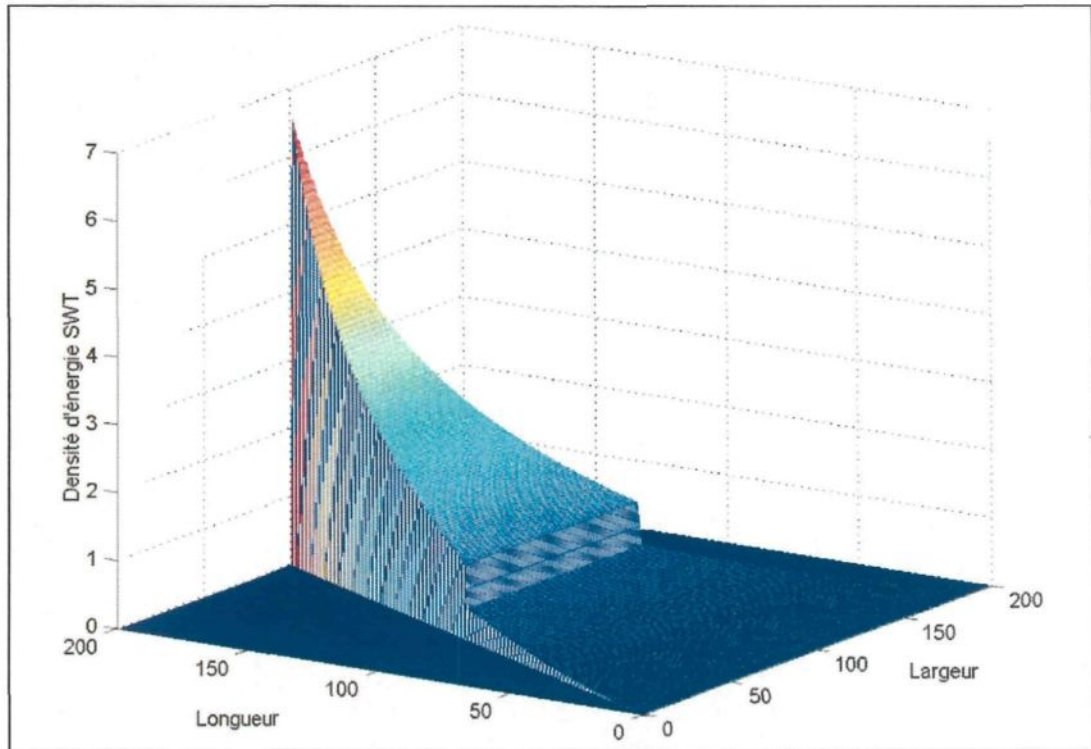


figure 15. Distribution de la densité d'énergie maximale SWT.

Plaque triangulaire d'épaisseur 20mm soumise à une excitation de 4000N.

4.3 Cas multiaxial élastique sous chargement aléatoire :

Dans la section précédente nous avons montré que les alliages d'aluminium peuvent remplacer l'acier en terme de propriété d'endurance tout en gagnant en poids. Cependant, l'état des contraintes dans un bras de suspension d'un véhicule est multiaxial. Pour étudier la durée de vie du bras de suspension inférieur, il faut coupler un modèle de fatigue adéquat avec l'état de contrainte engendré par le comportement dynamique de la suspension d'un véhicule. L'état plan local des contraintes, caractérisé par σ_1 , σ_2 , φ_p et $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ sont respectivement les deux contraintes principales, l'angle de déphasage entre σ_1 et l'axe local ox et le rapport de biaxialité [48], dans un matériau peut prendre les aspects suivants :

- cas uniaxial : $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0$ et φ_p est constant à chaque instant. Dans ce cas on utilise un des modèles uniaxiaux pour calculer la durée de vie d'une pièce comme le modèle de densité d'énergie SWT ;
- cas multiaxial proportionnel : $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ varie dans le temps et φ_p est constant à chaque instant. Dans ce cas on utilise le modèle de la déformation effective [5];
- cas multiaxial non proportionnel : $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ et φ_p varient dans le temps. Dans ce cas on utilise le critère du plan critique ou un autre critère multiaxial [5].

Le cas multiaxial non proportionnel, où on utilise la méthode du plan critique pour calculer la durée de vie d'une pièce, est le plus précis mais coûteux en terme de temps de programmation. Dans la présente étude nous avons choisi le critère multiaxial équivalent au cas uniaxial, en l'occurrence le critère multiaxial de densité d'énergie de déformation. Le code en Fortran, développé dans cette étude, calculant le rapport de biaxialité montre que l'état des contraintes est a priori multiaxial non proportionnel.

Les calculs du tableau 11 montrent que dans le cas de l'alliage 7075-T6 le pourcentage du domaine plastique ne dépasse pas 19% du domaine de la déformation totale. Il est donc intéressant d'étudier le cas multiaxial élastique, puisque pour une pièce de forme géométrique optimisée par rapport à une durée de vie et ses fréquences naturelles, la contrainte maximale ne dépasse pas la limite d'élasticité conventionnelle. Ceci nous permet d'explorer, dans cette section, la solution analytique correspondante à l'encastrement au niveau du joint de suspension, développée dans le cas uniaxial, mais pour un état général de l'état des contraintes. Pour une plaque triangulaire nous avons établi une solution analytique de l'état des contraintes en solutionnant le tenseur de

Cauchy. Ainsi, l'état des contraintes et couplé au modèle de fatigue multiaxial équivalent au cas uniaxial, par le biais de la densité d'énergie de déformation.

tableau 11. Domaine plastique par rapport au domaine élastique [5].

Alliage	Code	Limite ultime σ_u en MPa	Limite élastique σ_e en MPa	* Rapport : $\frac{\sigma_u - \sigma_e}{\sigma_u}$ en %
D'aluminium	2024-T351	455	379	*16,70
	2024-T4 Al	476	303	*36,34
	7075-T6 Al	578	469	*18,85

(* calculé)

Une comparaison des résultats analytiques au schéma d'intégration numérique, grâce au code commercial Abaqus, permet une calibration du modèle élastique multiaxial. La méthodologie suivie, lors de l'élaboration du cas multiaxial élastique, est illustrée par la figure 16. On conserve la solution analytique du tenseur de Cauchy déterminée dans la section précédente est :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Vxe}{2I_z} & -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} \\ -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} & 0 \end{pmatrix}$$

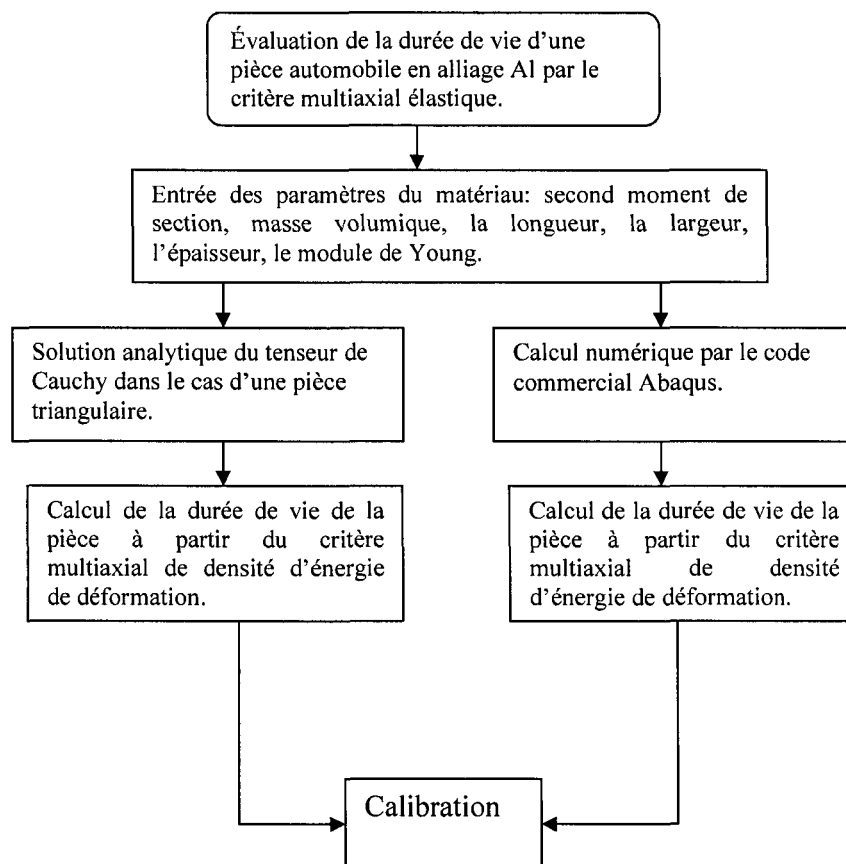


figure 16. Organigramme de l'élaboration du cas multiaxial élastique.

Nous avons calculé la densité d'énergie de déformation multiaxiale, cas général, sous chargement réel via le comportement dynamique. Considérons un élément soumis à un état général de contrainte $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$. Nous appliquons le principe de superposition :

- on applique $\sigma_x = E\varepsilon_{xx}$ au premier lieu : la densité d'énergie de déformation

$$\text{correspondante est : } dU_1 = \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_x d\varepsilon_{xx} = \int_0^{\varepsilon_{xx}} E\varepsilon_{xx} d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} E\varepsilon_{xx}^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x^2}{2E}.$$

- σ_y est appliqué en deuxième lieu : $dU_2 = \int_0^{\varepsilon_{yy}} \sigma_y d\varepsilon_{yy} + \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_x d\varepsilon_{yy}$. En présence

de σ_x nous avons une déformation $\varepsilon_{xy} = -\frac{\nu\sigma_y}{E}$ dans la direction x . En plus

que $\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$, la densité d'énergie de déformation dans ce cas devient :

$$dU_2 = \int_0^{\varepsilon_{yy}} E\varepsilon_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_x \int_0^{\varepsilon_{xy}} d\varepsilon_{xy} = \frac{E\varepsilon_{yy}^2}{2} + \sigma_x \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{E} - \frac{\nu\sigma_x\sigma_y}{E}.$$

- En dernier lieu nous appliquons σ_z qui donnera pour densité d'énergie de

$$\text{déformation : } dU_3 = \frac{\sigma_z^2}{2E} - \frac{\nu\sigma_x\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y\sigma_z}{E}.$$

- Chacune des contraintes de cisaillement entraîne une seule composante de

$$\text{déformation : } dU_4 = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} \tau_{zx} d\gamma_{zx}.$$

Sachant que $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ (E le module de Young, ν coefficient de poisson et G le

module d'élasticité en cisaillement), la densité d'énergie de déformation totale par unité de volume est égale à :

équation 71:

$$U = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

L'état plan des contraintes nous permet de réduire l'équation 71 à :

$$\text{équation 72: } U = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2)$$

l'équation 71 correspond à la densité d'énergie de déformation dans le cas élastique multiaxial. La densité d'énergie de déformation élastique cyclique du cas uniaxial est donnée par l'équation:

$$\text{équation 73: } U = \frac{\sigma_a^2}{2E}$$

la durée de vie N_f de la pièce est déterminée une fois que U , σ_a et ε_a sont calculés comme indiqué dans la figure 17.

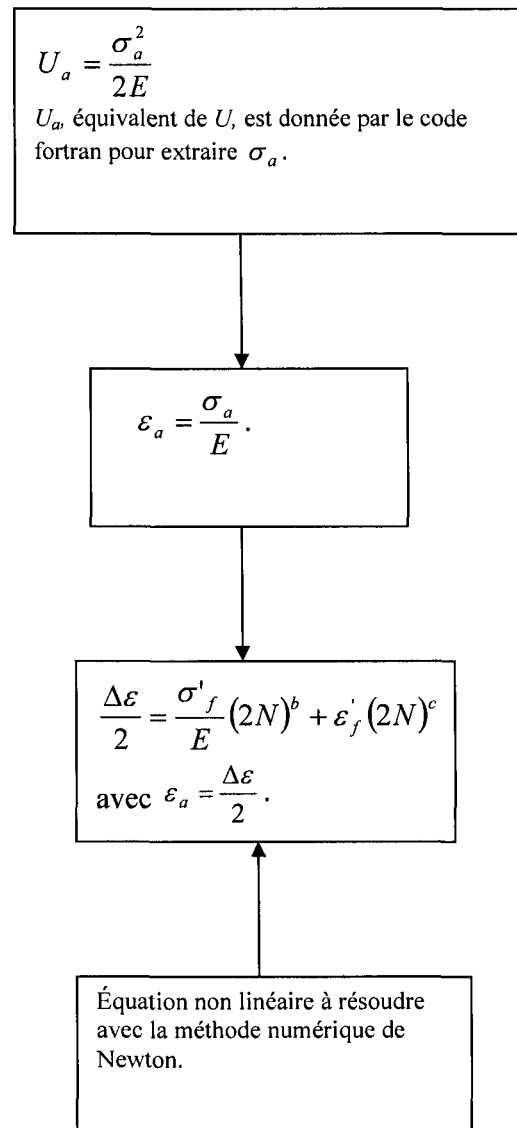


figure 17. Organigramme du calcul de la durée de vie d'une pièce dans le cas multiaxial élastique.

La solution analytique proposée dans cette section est une approximation qui considère l'état des contraintes constant le long de l'épaisseur du spécimen. Par conséquent, cette approche ne serait valable que pour les spécimens à faible épaisseur. Une étude comparant les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et ceux de la solution analytique pour plusieurs spécimens d'épaisseurs différentes, est nécessaire. Nous avons développé une interface Matlab utilisant un signal aléatoire au niveau du pneu et la contre réaction qui stabilise le quart de véhicule (voir annexe 3). Ce dernier code simule la dynamique dans le système de suspension d'un véhicule pendant deux secondes d'excitation.

La rupture par fatigue d'un bras de suspension en alliage métallique peut avoir lieu même si la contrainte maximale est inférieure à la limite d'élasticité. Il est donc important qu'avant d'étudier la durée de vie d'une pièce, de vérifier l'état des contraintes de la pièce par rapport aux hypothèses suivantes :

- le comportement élastique du matériau caractérise un domaine de déformation bien déterminé. En effet les schémas d'intégration numériques par la méthode des éléments finis risque de ne pas converger même dans le cas implicite stable, si on dépasse le domaine élastique imposé dans le modèle numérique.
- l'analyse fréquentielle se rapportant au phénomène de la résonance, prend un autre aspect puisque les fréquences naturelles vont changer avec la haute déformation.

Dans cette section le matériau est supposé avoir un comportement linéaire. Par conséquent la contrainte maximale dans le matériau ne doit pas dépasser la limite d'élasticité conventionnelle. La limite d'élasticité conventionnelle de l'alliage 7075-T6 est de l'ordre de 460MPa. Nous avons respecté la condition que toutes les contraintes :

principale minimale et maximale et la contrainte Mises soient inférieurs en tout temps à 460MPa. Nous nous intéressons à l'étude de la durée de vie du bras de suspension inférieur dans le cas de force concentrée d'une manière analytique et numérique. Le développement du modèle numérique élastique multiaxial est analogue au cas élasto-plastique exposé dans le chapitre 5. La nécessité de déterminer l'élément critique, en l'occurrence ses coordonnées, nous a poussé à choisir une stratégie qui permet d'isoler l'élément ayant la somme des variations positives maximale par filtre. En effet, contrairement au cas statique la valeur maximale brute de la densité d'énergie de déformation dans une courbe ne correspond pas nécessairement à celle de l'élément critique lorsqu'il s'agit de la fatigue correspondant au cas dynamique. Ceci permet d'appliquer l'algorithme de Newton-Raphson dans un seul élément au lieu de l'appliquer dans tous les points de la structure pour extraire le nombre de cycle à la rupture de l'équation non linéaire de Mansson-Coffin. Ce filtre généralise le cas où l'excitation est multipoint décalée dans le temps donnant un enchevêtrement des signaux des contraintes des éléments du maillage du matériau. Le filtre en question est basé sur l'algorithme suivant :

Les coordonnées x_c, z_c de l'élément critique sont ceux ayant :

$$M(i_c, j_c) = M_{nc} \left(\text{Max} \left(\sum_{m=0}^{jf} \Delta U(m, n) \right) \right)$$

Où : $\Delta U(m, n) = U(l, n) - U(p, n)$, lorsque $U(l, n) > U(p, n)$, m = paramètre

du temps, k = durée de la simulation, $t_f = c_k^2 = \frac{k!}{2!(k-2)!}$ et n = paramètre

spatial réunissant les coordonnées i et j en une seule colonne.

En effet c'est la variation de la densité d'énergie de déformation qui entraîne la rupture par fatigue dans le cas des sollicitations dynamiques et non la valeur brute de la densité d'énergie de déformation comme dans le cas statique. Les figures 18, 19, 20 et 21 illustrent l'évolution de la densité d'énergie de déformation dans le temps des éléments critiques filtrés, dans le cas de la solution numérique et la solution analytique. On remarque que l'approche analytique tend vers la solution analytique lorsque l'épaisseur diminue. Les résultats de la solution numérique, sont 3 fois supérieurs à ceux de l'approche analytique dans le cas du spécimen d'épaisseur 30mm. Cette différence diminue dans le spécimen de faible épaisseur en l'occurrence 14mm. D'autres simulations ont montré que la différence entre l'approche analytique et la solution numérique, augmente lorsque le maillage est raffiné, même dans le cas des faibles épaisseurs, ceci s'explique par le fait que dans les calculs numériques le code commercial Abaqus tient compte de la non linéarité géométrique qui introduit un terme non nul dans le second membre des équations donnant les termes du tenseur de Cauchy. Or, dans l'approche analytique on considère un équilibre mécanique permanent traduisant un cas rigide ne donnant pas de flèche. Les figures 22 et 23 illustrent le profil de la somme des variations de la densité d'énergie de déformation selon l'approche analytique, dans les quatre spécimens triangulaires. L'élément critique 19949, filtré dans les quatre cas est situé au sommet de chaque triangle. La figure 25 montre une vue instantanée de l'état de l'énergie de déformation SENER dans le cas du calcul numérique par la MEF et une vue en perspective de l'état de la somme des variations de la SENER dans le spécimen triangulaire d'épaisseur 20mm. Le filtrage des résultats de la somme des variations de densité d'énergie de déformation obtenu par les calculs numériques de la méthode des éléments finis MEF montre que l'élément critique est

aussi situé au sommet de chacun des quatre spécimens triangulaires, comme montré par la figure 26. L'élément critique s'illustre par une nette singularité dans le cas de l'approche analytique comme montré par la figure 25. La figure 27, montre le spectre de la SENER de l'élément critique dans le cas de la MEF et selon l'approche analytique.

4.4 Extraction des cycles «rainflow» d'une PSD :

Étant donné que le chargement est de nature aléatoire, alors on doit procéder au comptage des cycles «rainflow» par la méthode de Markov automatisé par le groupe WAFO (Wave Analysis for Fatigue and Oceanography) en utilisant le logiciel Matlab. En effet, le problème du passage direct de la PSD du processus $\sigma(t)$ au comptage des cycles «rainflow» a été résolu par une théorie rigoureuse basée, d'une part, sur la définition d'un cycle «rainflow» proposée en 1987 par Rychlik et d'autre part, sur la théorie des chaînes de Markov, selon la référence [36]. En effet, un cycle «rainflow», tel qu'il est illustré par la figure 18, peut être mathématiquement caractérisé de la façon suivante: Considérons la contrainte $\sigma(t)$ où $t \in [0, T]$ et le maximum de la contrainte M_i de niveau k se produisant au temps t_i . Nous pouvons définir les étendues (m_i^-, M_i) et (M_i, m_i^+) où:

- m_i^- est le minimum de $\sigma(t)$ qui se trouve entre le dernier passage à pente négative de $\sigma(t)$ par le niveau k et le maximum M_i . Ce minimum se trouve à gauche de M_i et se produit au temps t_i^- .

- m_i^+ est le minimum de $\sigma(t)$ qui se trouve entre M_i et le premier passage à pente positive de $\sigma(t)$ par le niveau k . Ce minimum se trouve à droite de M_i et se produit au temps t_i^+ .

S'il n'existe pas de passage de $\sigma(t)$ par le niveau k avant ou après le temps t_i , alors respectivement $t_i^- = 0$ ou $t_i^+ = T$. Le cycle «rainflow» extrait au temps t_i est alors défini, soit comme l'étendue (m_i^{rfc}, M_i) , soit (M_i, m_i^{rfc}) . Ce minimum m_i^{rfc} est déterminé en appliquant la condition :

$$\text{équation 74 : } m_i^{rfc} = j = \begin{cases} \max(m_i^-, m_i^+) & \text{si } t_i^- > 0 \\ m_i^+ & \text{sinon} \end{cases}$$

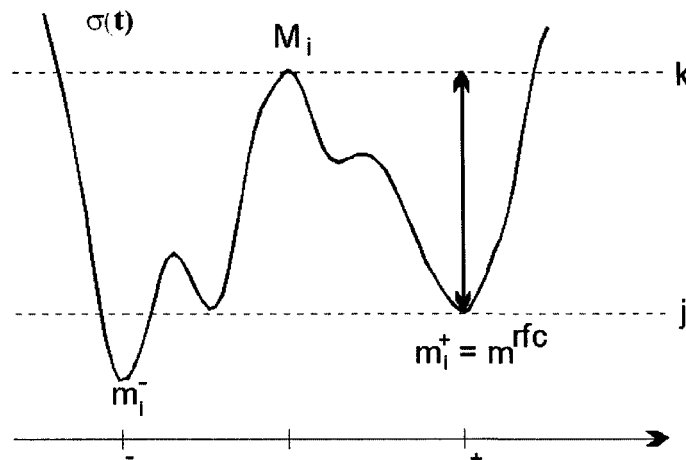


figure 18. Caractérisation mathématique d'un cycle «rainflow».

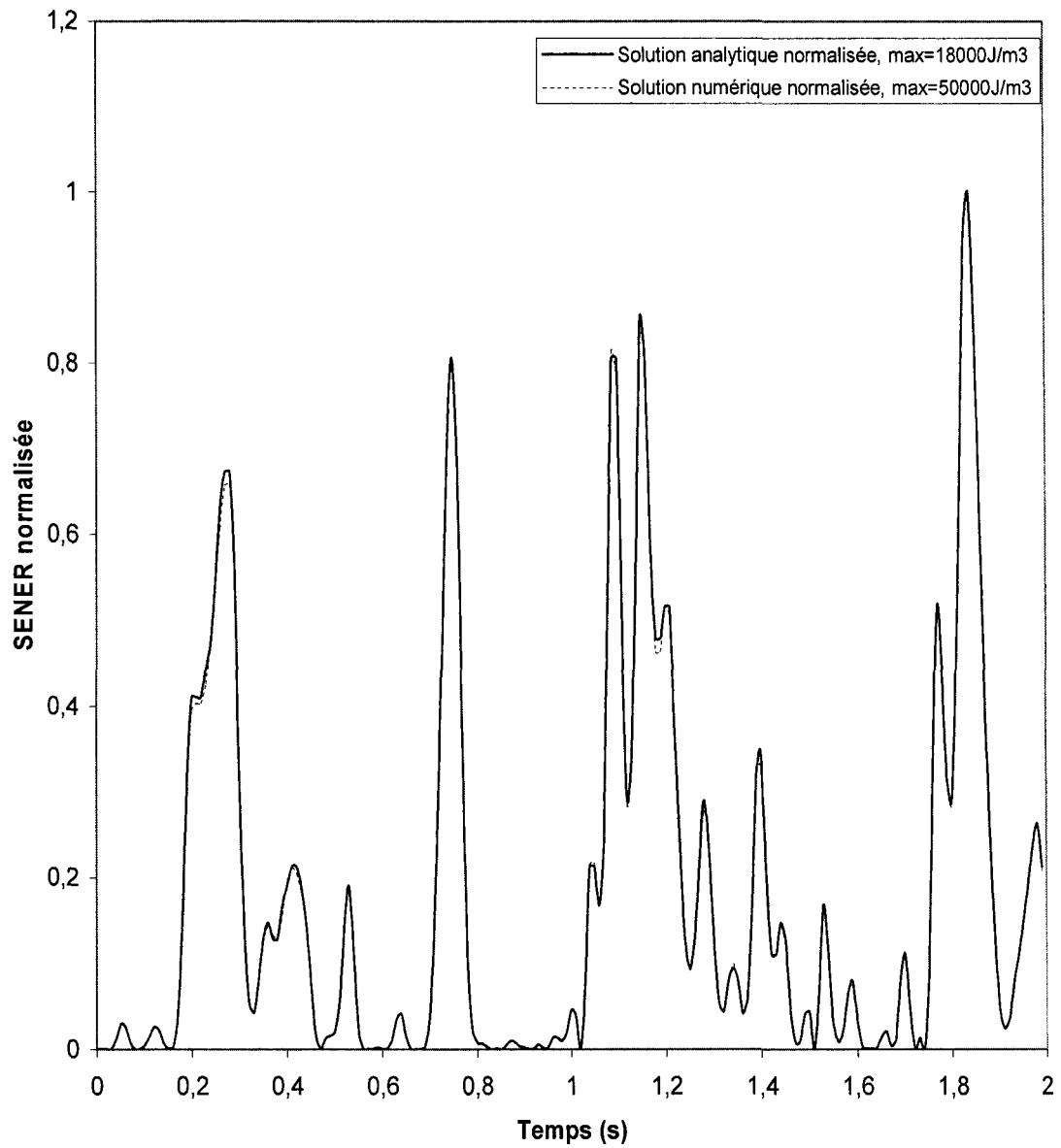


figure 19. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 30mm.

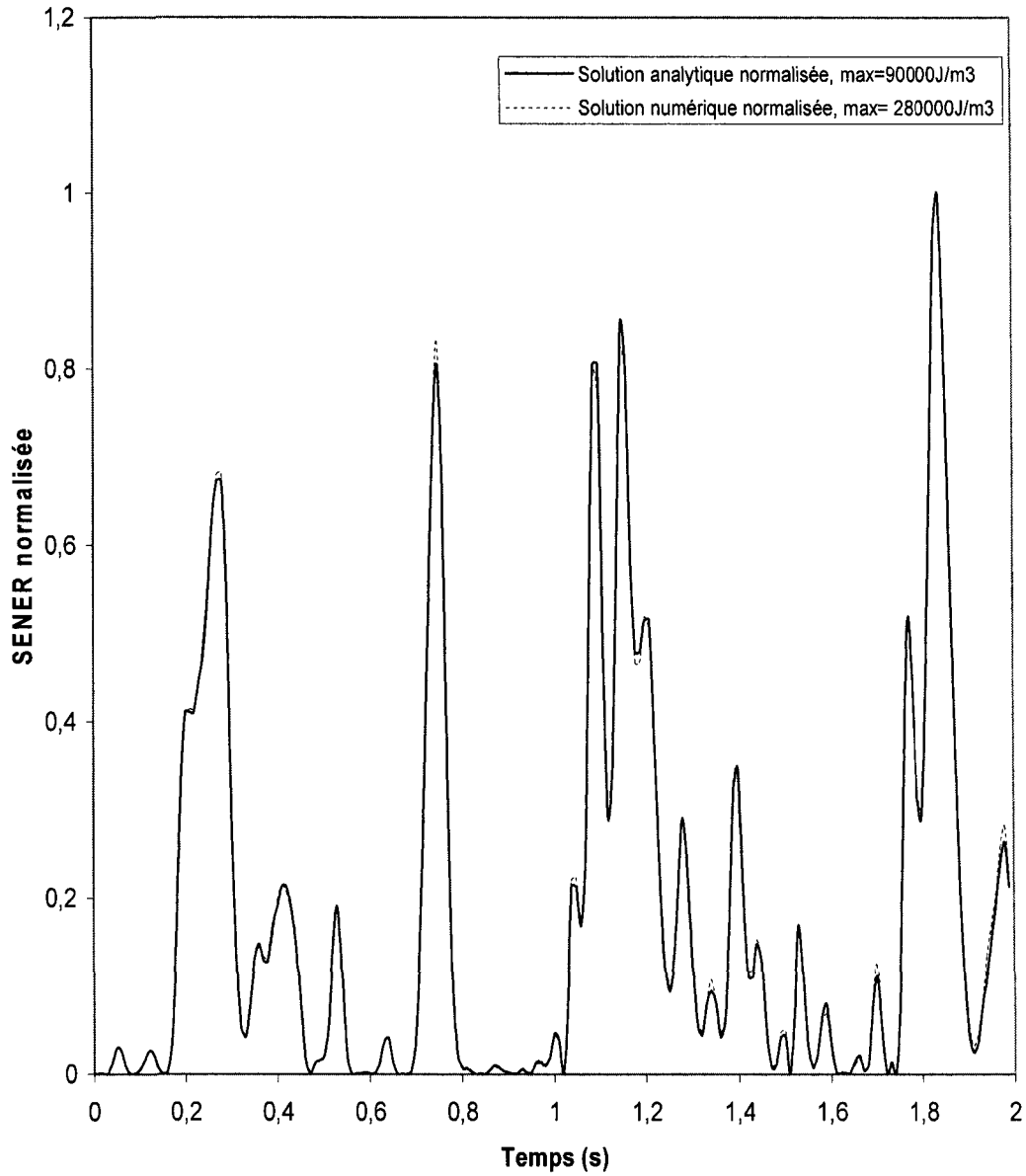


figure 20. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 20mm.

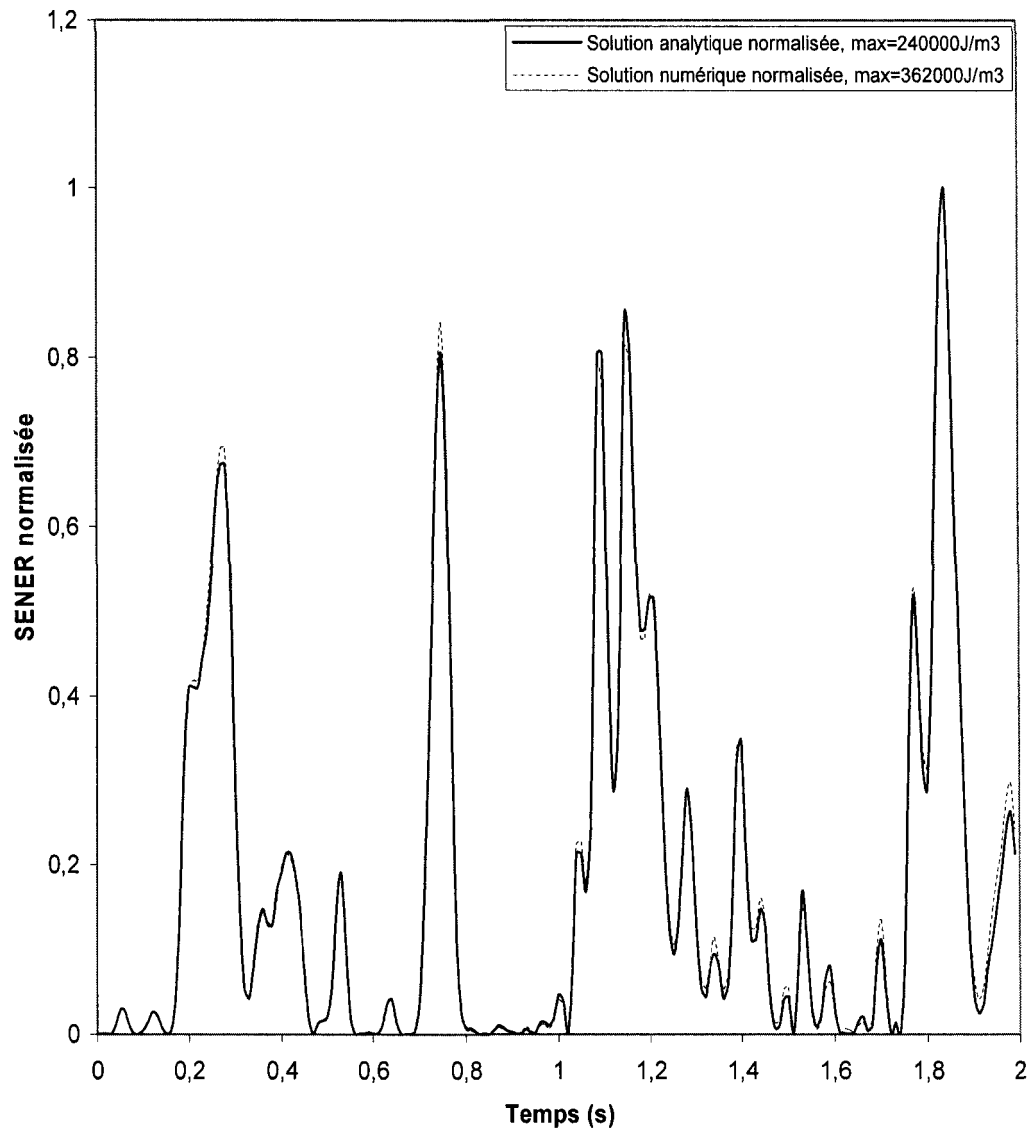


figure 21. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 16mm.

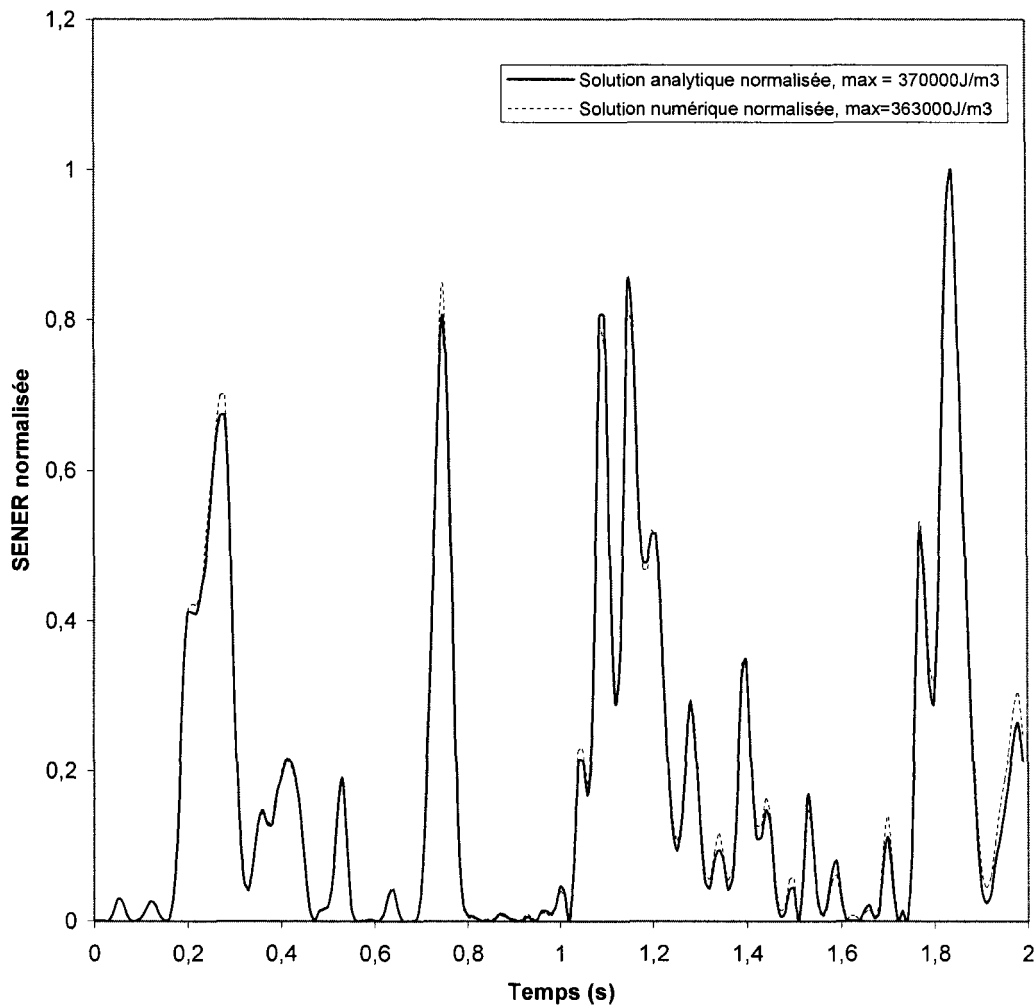


figure 22. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments critiques dans une pièce triangulaire d'épaisseur 14mm.

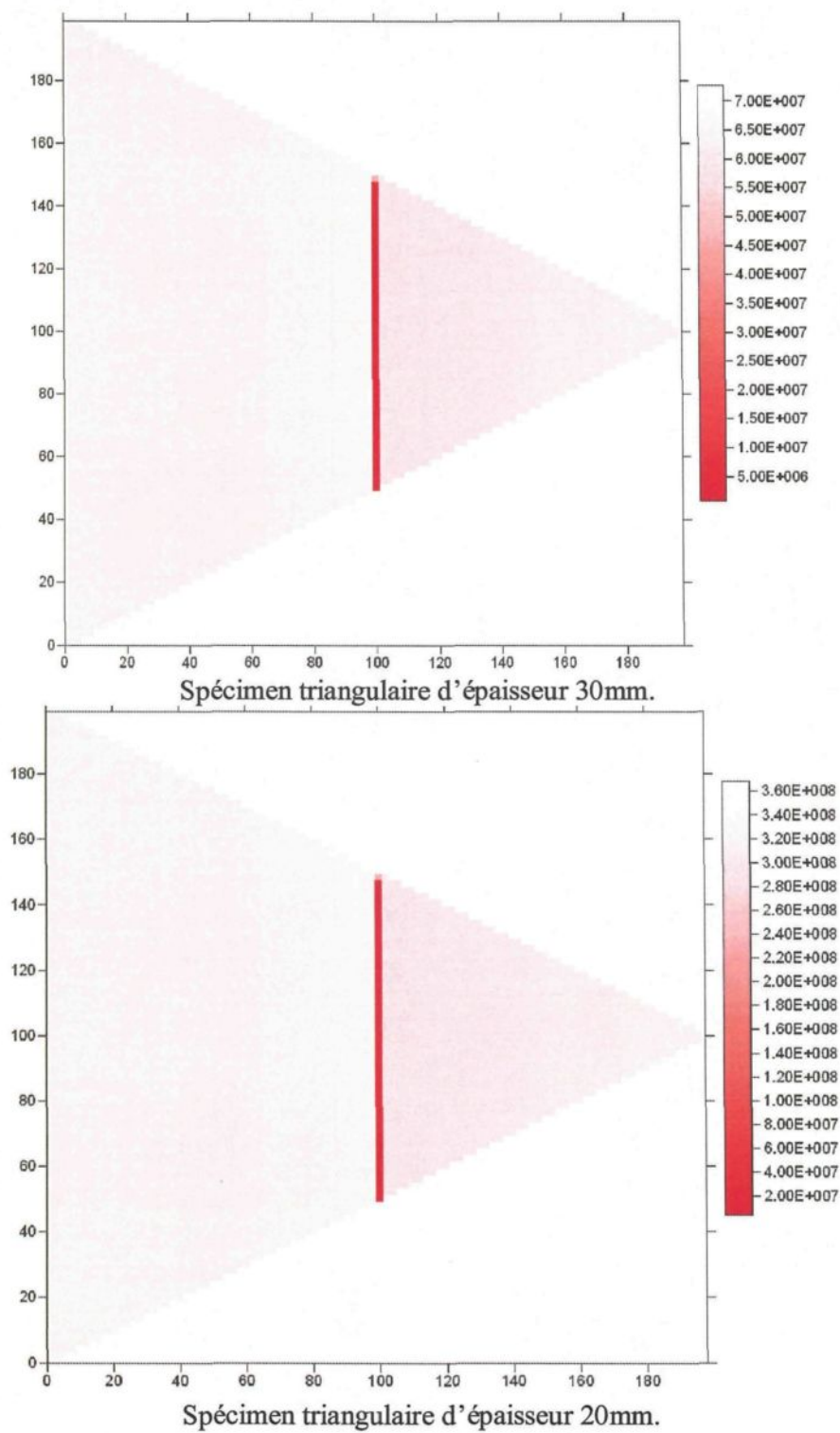


figure 23. Profil de la somme des variations de l'énergie de déformation selon l'approche analytique.

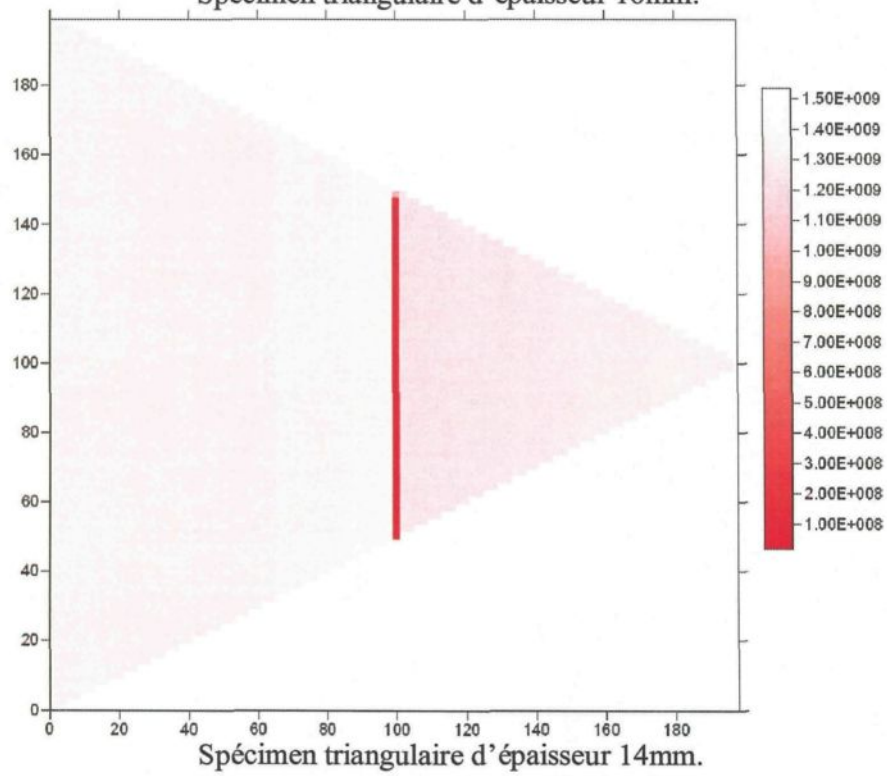
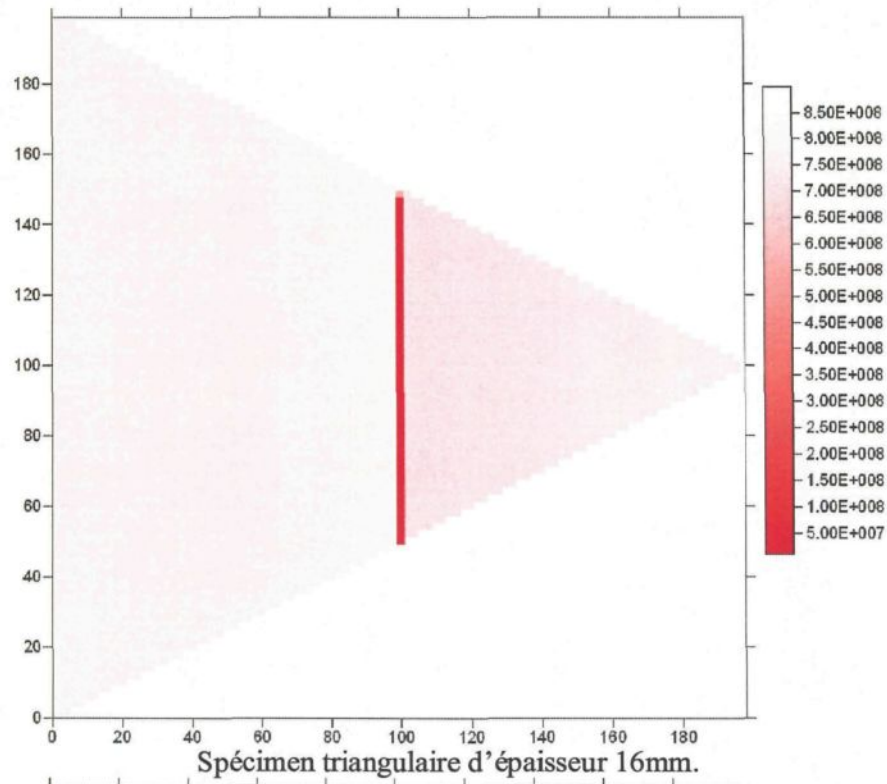
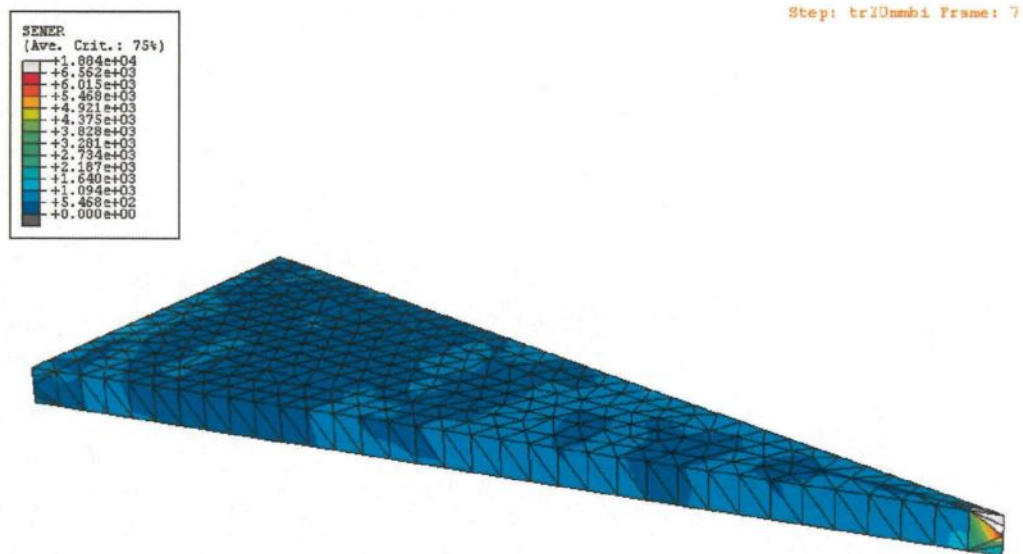
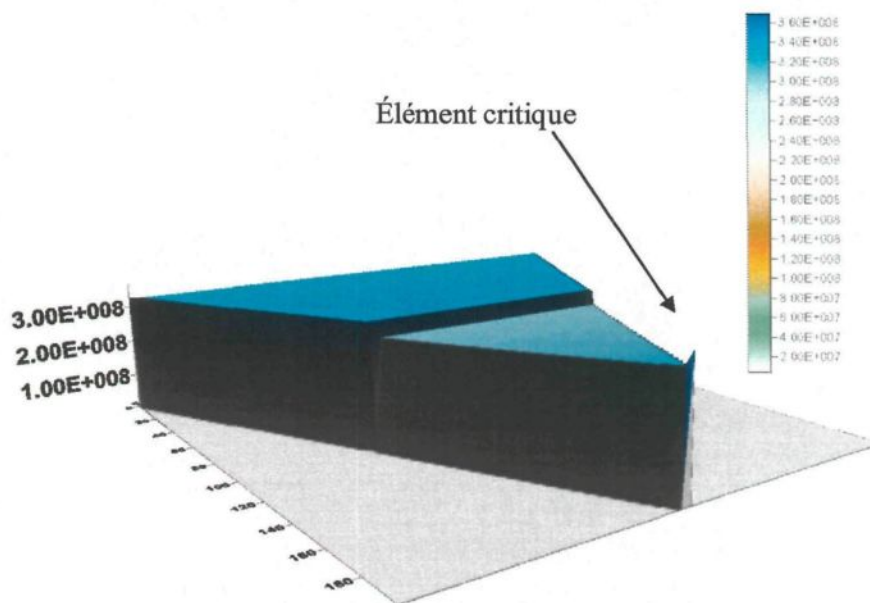


figure 24. Profil de la somme des variations de l'énergie de déformation selon l'approche analytique.

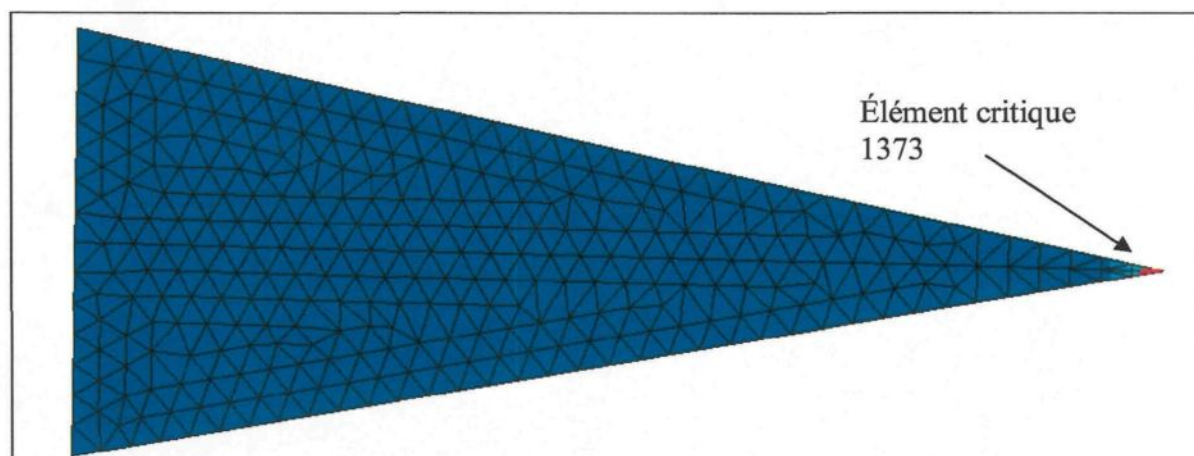


Vue instantanée de l'état de la densité d'énergie de déformation obtenue par la MEF.

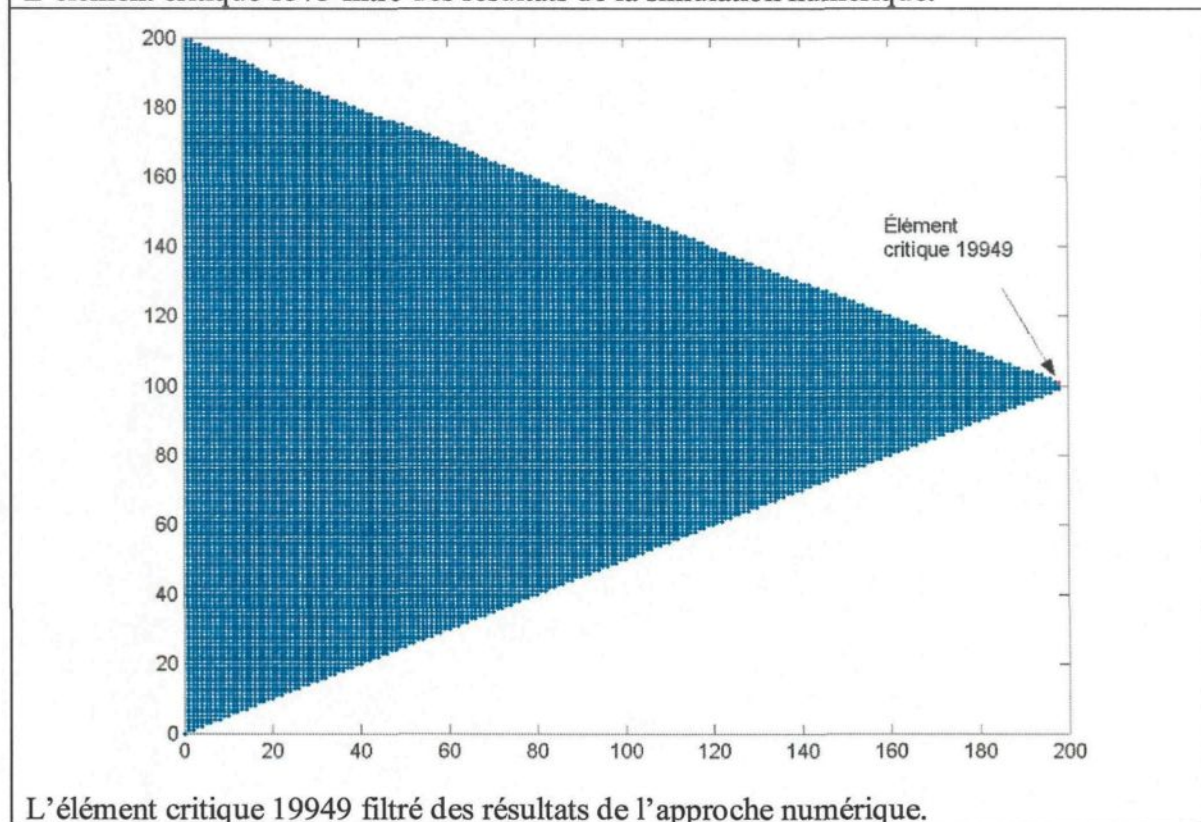


Vue en perspective de la somme des variations de la densité d'énergie de déformation, selon l'approche analytique.

figure 25. Vue en perspective du spécimen triangulaire d'épaisseur 20mm.

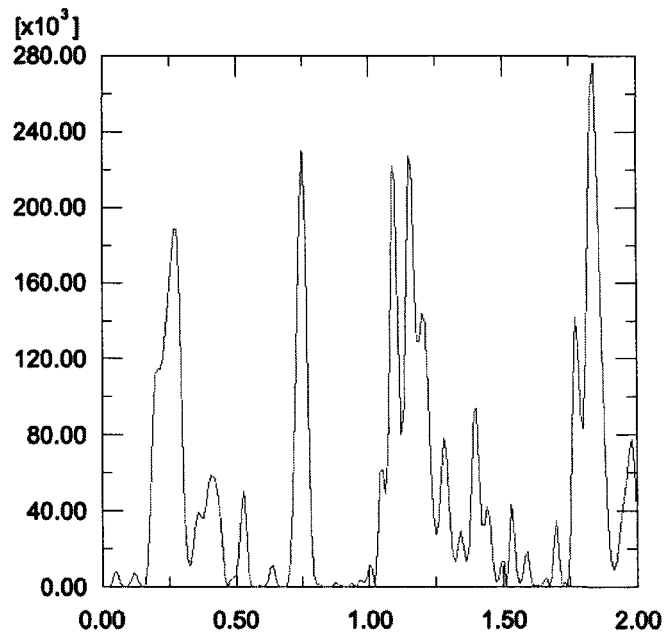


L'élément critique 1373 filtré des résultats de la simulation numérique.

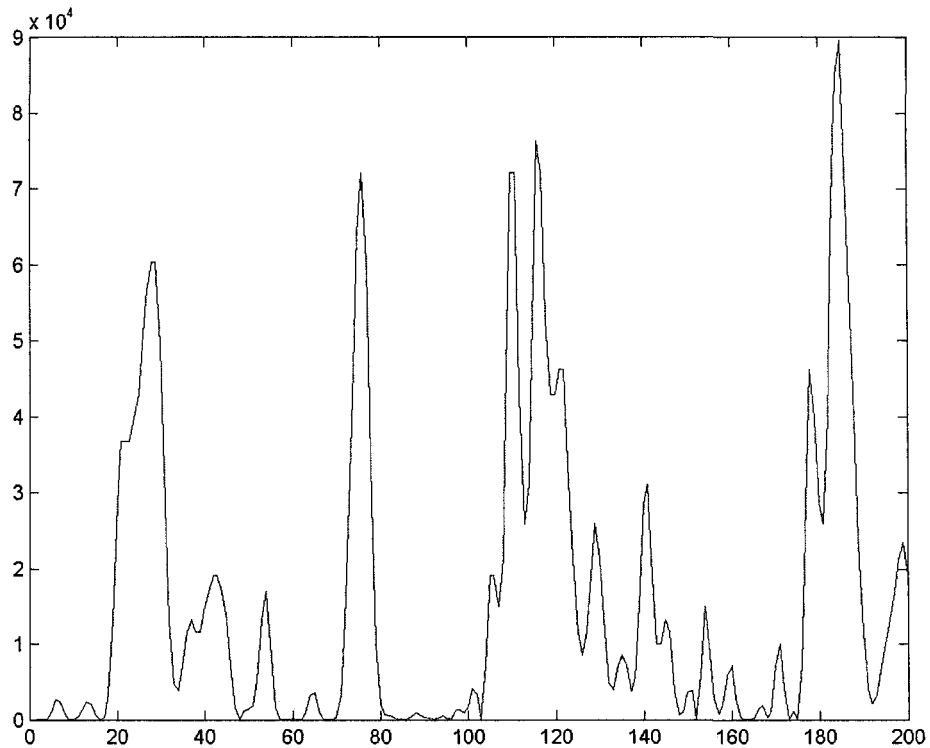


L'élément critique 19949 filtré des résultats de l'approche numérique.

figure 1. Localisation de l'élément critique dans le cas du spécimen d'épaisseur 20mm.



Densité d'énergie de déformation en fonction du temps de l'élément critique cas numérique : maximum $280 \times 10^3 \text{ J/m}^3$.



Densité d'énergie de déformation en fonction du temps de l'élément critique cas selon l'approche analytique : maximum $90 \times 10^3 \text{ J/m}^3$.

figure 27. Spectre de la densité d'énergie de déformation de l'élément critique du spécimen d'épaisseur 20mm.

Il faut noter qu'avant d'extraire les cycles « rainflow », il faut corriger le signal des anomalies qu'il peut contenir pour pouvoir exécuter l'algorithme de Markov. La figure 28 montre le signal brut SENER de l'élément critique selon l'approche analytique, le type d'anomalie qu'on retrouve dans ce signal et un exemple de comptage des cycles « rainflow », du spécimen triangulaire d'épaisseur 20mm. L'anomalie est corrigée par la commande Matlab `[proc,b]=dat2tp(proc,0,'none')` de l'interface WAFO, comme montré par les figures 28-a et 28-b.

4.5 Calcul de l'endommagement

Dans le cas d'un chargement à amplitude variable, on utilise la loi de cumul de l'endommagement selon la loi de Palmgren-Miner. En effet l'endommagement provoqué par un certain niveau d'amplitude est pris comme le quotient du nombre de cycles de chargement n_i à ce niveau par le nombre de cycles à la rupture N_i à ce même niveau, lequel est fourni par la courbe de Wöhler ou par le calcul analytique comme dans le présent travail de recherche. On suppose ensuite que les endommagements se cumulent sans qu'il y ait influence d'un niveau sur l'autre. L'endommagement total est donnée par l'équation suivante :

équation 75:
$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i}$$

La rupture est supposée se produire lorsque $D = 1$. Il faut ainsi trouver le nombre de fois que le cycle à amplitude variable se répète pour que D soit égal à l'unité. Il faut trouver le nombre B_f qu'on doit multiplier par D pour atteindre la rupture. B_f se calcul selon l'équation:

équation 76:
$$B_f = \frac{1}{\sum_i \frac{n_i}{N_i}}, \text{ car } B_f D = B_f \left(\sum_i \frac{n_i}{N_i} \right) = 1$$

Le principal reproche que l'on puisse faire à la loi de Palmgren-Miner est d'ignorer l'ordre dans lequel se succèdent les niveaux de chargement [11]. Or, l'expérience montre que la vitesse de fissuration ne dépend pas seulement de l'amplitude du chargement à l'instant considéré mais encore des amplitudes au cours des cycles précédents. Il y a donc un effet d'un niveau de sollicitation sur les niveaux ultérieurs.

En règle générale, lorsque la structure est d'abord soumise à des cycles de faible amplitude, puis à des cycles d'amplitude plus élevée, l'endommagement D défini par l'équation 75 est supérieur à l'unité lorsque la rupture se produit. Dans le cas contraire la rupture se produit avant que l'endommagement D ait atteint l'unité. Lorsqu'il s'agit d'un chargement aléatoire, on suppose que l'endommagement D est égal à l'unité lorsque la rupture intervient. Dans tous les cas les valeurs du spectre de la SENER dans le cas de la solution numérique sont supérieures à celles de la solution analytique, comme illustré par le tableau 12. Cependant, la durée de vie est presque la même dans le cas de faibles épaisseurs. L'approche analytique proposée dans cette étude surestime la durée d'une pièce automobile en alliage d'aluminium puisque les valeurs du spectre de l'élément critique, calculées par la MEF sont supérieures à ceux de l'approche analytique lorsque l'épaisseur augmente.

tableau 12. Résultats des durées de vie dans le cas numérique et analytique.

Spécimen	30mm		20mm		16mm		14mm	
	A :	N :	A :	N :	A :	N :	A :	N :
Durée de vie	3,5x10 ⁸	1,3x10 ⁸	7x10 ⁷	2,3x10 ⁷	2,6x10 ⁷	2,4x10 ⁷	1,7x10 ⁷	1,7x10 ⁷

(A : solution analytique. N : solution numérique)

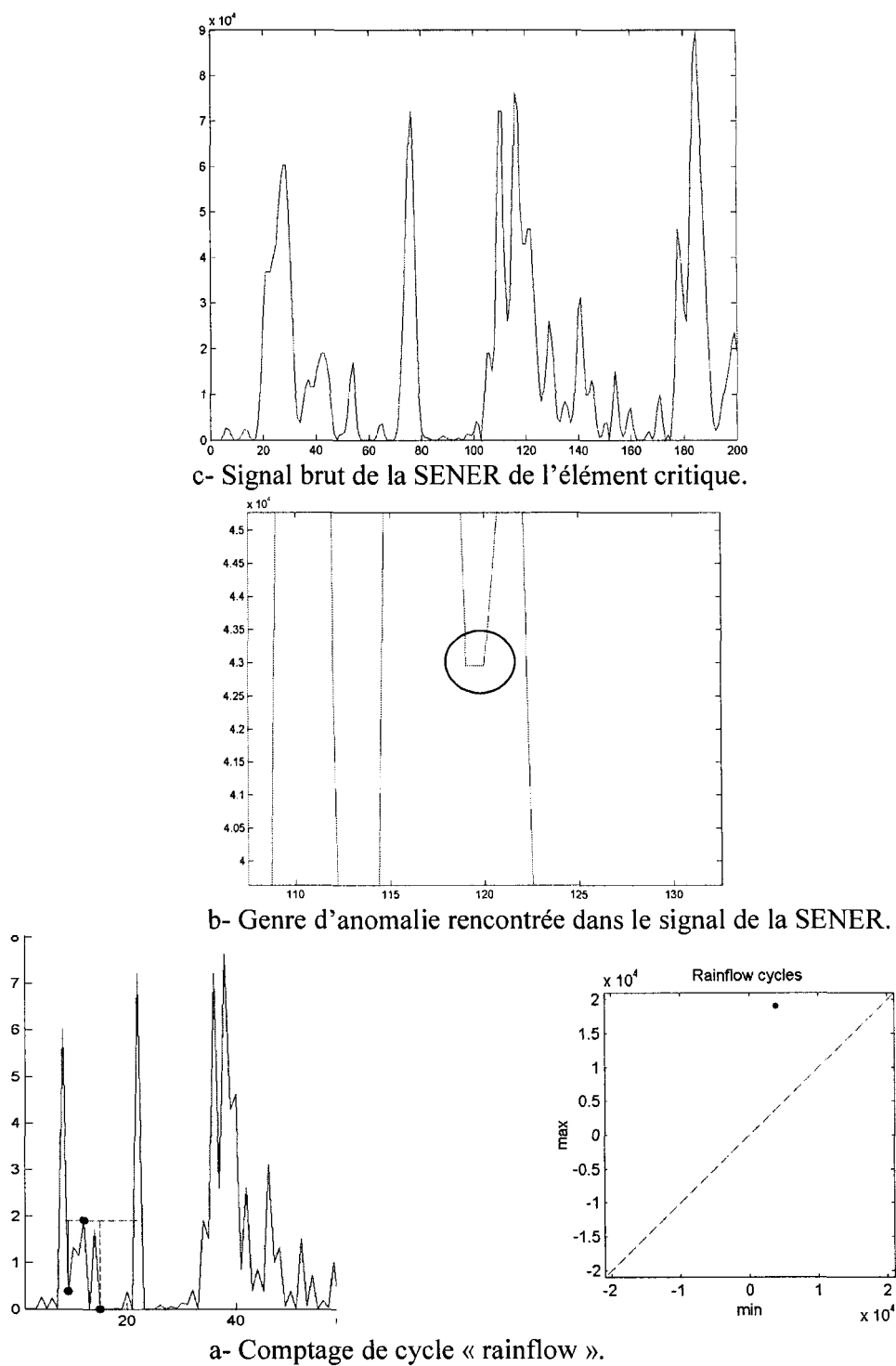


figure 28. Analyse du signal de l'élément critique et extraction des cycles « rainflow ».

Chapitre 5

Développement du modèle numérique élasto-plastique

En réalité, les alliages d'aluminium présentent un comportement élasto-plastique avec une contribution plastique d'environ 36% dans certains cas, comme illustré dans le tableau 13. Gbadebo M. *et Al.*[49, 50], ont développé une solution analytique approchée dans le cas élasto-plastique. En effet, la matrice des incréments du tenseur déformation totale $(d\varepsilon_{ij}^T)$ est la somme de la contribution élastique $(d\varepsilon_{ij}^e)$ et plastique $(d\varepsilon_{ij}^p)$, selon l'équation 77 :

$$\text{équation 77: } (d\varepsilon_{ij}^T)_m = (d\varepsilon_{ij}^e) + (d\varepsilon_{ij}^p)$$

tableau 13. Comportement élasto-plastique de quelques alliages Al [5].

Alliage	Code	Limite ultime σ_u en MPa	Limite élastique σ_e en MPa	* Rapport : $\frac{\sigma_u - \sigma_e}{\sigma_u}$ en %
D'aluminium	2024-T351	455	379	*16,70
	2024-T4 Al	476	303	*36,34
	7075-T6 Al	578	469	*18,85

(* calculé)

Les relations pour estimer l'incrément moyen de la contrainte et la déformation élastique sont formulées par les modèles de Chen et Li, selon la référence [49]. Ainsi, les composantes de la matrice des incréments des contraintes élastique non renforcée, $(d\sigma_{ij})_m$, peuvent être reliées à la contrainte nominale appliquée, $(d\sigma_{ij})$, par :

$$\text{équation 78: } \begin{aligned} (d\sigma_{ij})_m &= d\sigma_{ij} - V_f C_{klmst(m)} (S_{klst} - I) L^{-1} (C_{klst(f)} - C_{klst(m)}) C_{klst(m)}^{-1} d\sigma_{ij} \\ L &= [(V_f - 1) C_{ijkl(m)} (I - S_{ijkl}) + C_{ijkl(m)} (V_f (S_{ijkl} - I) - S_{ijkl})] \end{aligned}$$

V est la fraction volumique du constituant suscrit, les C_{ijkl} représentent les composantes du tenseur de rigidité du constituant suscrit, I est le tenseur identité et les S_{ijkl} sont les composantes du tenseur de Eshelby qui peuvent être trouvées à partir des inclusions géométrique [49] et la matrice de coefficient de poisson. Les composantes de la matrice des incréments de la déformation élastique sont relatées dans le tenseur de contrainte de la loi de Hooke généralisée :

$$\text{équation 79: } d\varepsilon_{ij(m)}^e = C_{ijk(m)}^{-1} d\sigma_{kl(m)}$$

Par contre, si la matrice des contraintes élastiques est renforcée (la plasticité n'est pas négligée mais l'élément est renforcé de façon à ce que la contrainte soit inférieure de loin à la limite d'élasticité conventionnelle), les composantes de la matrice des incréments de contraintes s'écrit :

$$\text{équation 80: } (d\sigma_{ij})_f = d\sigma_{ij} + V_m C_{klmst(m)} (S_{klst} - I) L^{-1} (C_{klst(f)} - C_{klst(m)}) C_{klst(m)}^{-1} d\sigma_{ij}$$

$$\text{et } d\varepsilon_{ij(f)}^e = C_{ijk(f)}^{-1} d\sigma_{kl(f)}$$

Dans le comportement plastique Gbadebo M. *et Al.* [49] ont développé la théorie endochronique de la plasticité. Ces derniers ont défini les composantes de la matrice des incréments des déformations plastiques d'une manière approximative, comme suit :

$$\Delta \varepsilon_{ij(m)}^p = \frac{a_{ij(m)} \Delta Z}{b}$$

équation 81: où : $a_{ij(m)} = \frac{1}{2} [(\Delta S_{ij(m)})_q + \sum_{r=1}^n (S_{ij(m)}^r)_{q-1} (1 - e^{-\alpha_r \Delta Z})]$

et $b = \sum_{r=1}^n C_r \frac{(1 - e^{-\alpha_r \Delta Z})}{\alpha_r}$

q est le nombre de pas avec lequel on divise la courbe de chargement, $S_{ij(m)}$ sont les composantes de la matrice tenseur de contrainte déviatorique, $S_{ij(m)} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk(m)} \frac{\delta_{ij}}{3}$, où δ_{ij} est delta de Kröner et Z l'échelle intrinsèque du temps associé avec l'historique de la déformation du matériau. C_r et α_r sont des constantes du matériau déterminées par un lissage par les séries de fonctions de Dirichlet, $\rho(z)$, avec n terme en forme de :

$$\rho(z) = \sum_{r=1}^n C_r e^{-\alpha_r z}$$

à la courbe cyclique contrainte-déformation plastique uniaxiale. Par conséquent, dans la présente étude le couplage élasto-plastique multiaxial est assuré par le modèle du code commercial Abaqus. En effet, le module Abaqus a besoin comme entrée le comportement élasto-plastique uniaxial exprimé par la relation de Ramberg-Osgood.

L'analyse numérique du cas non linéaire élasto-plastique est préconisée vu que le code commercial par la méthode des éléments finis, en l'occurrence Abaqus, est disponible. Par conséquent, l'étude du cas non linéaire élasto-plastique dans ce chapitre commence par le montage du modèle par la méthode des éléments finis dans le module Abaqus. Ce modèle prend en considération les deux cas de non linéarité : la non linéarité géométrique (variation de la configuration géométrique du système au cours du temps) et la non linéarité du matériau qui exprime le couplage élasto-plastique. Le schéma d'intégration numérique dépend de la stabilité du schéma, du temps de calcul et

de la précision de la méthode. Le chargement et les conditions aux limites consistent à spécifier les lieux de l'excitation et les degrés de liberté imposés au système. Le maillage prend en considération l'état des contraintes et les points sources : tels que les lieux de chargements et les conditions aux limites. La stratégie globale, après le montage du modèle numérique Abaqus, est illustrée par l'organigramme de la figure 29. En effet, les résultats concernant la densité d'énergie de déformation à partir de l'état des contraintes multiaxiales, du modèle numérique (Abaqus), sont analysés. Nous calculons l'équivalent en mode uniaxial, puisqu'il s'agit de deux tenseurs de même ordre (ordre zéro). L'élément critique est filtré parmi tous les éléments du maillage, donnant la somme des variations positives maximales, puisqu'il s'agit de la fatigue. Le signal du chargement de l'élément critique est corrigé selon la méthode d'extraction des cycles « rainflow », de Markov. Les durées de vie partielles sont calculées par la méthode Newton, étant donné la non linéarité de l'équation de Manson-Coffin. Le nombre de répétition du cycle aléatoire menant la pièce à la rupture est déduit en dernière étape.

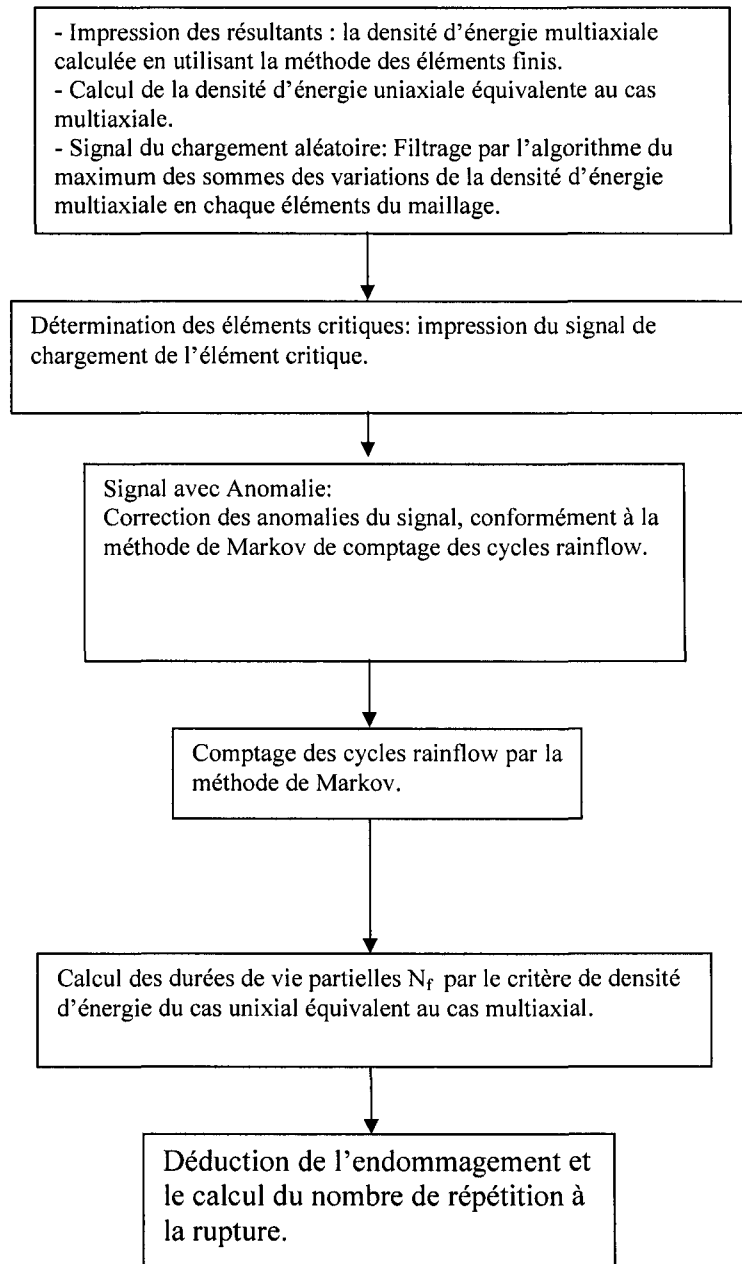


figure 29. Zoom de la partie 3 de l'organigramme principale.

5.1 Critère de fatigue multiaxial dans le cas du couplage élasto-plastique :

Lachowicz [51] a utilisé le critère multiaxial de densité d'énergie sans spécifier la façon de calculer la densité d'énergie de déformation plastique. Pan W-F *et al.*[52] et Lee B.L. *et al.*[53] et B. Li *et al.* [54] ont comparé les résultats expérimentaux de fatigue multiaxiale avec des modèles de critère multiaxial de densité d'énergie déjà existants comme le critère du plan critique qui généralise le modèle uniaxial SWT. Dans le cas multiaxial, on peut ramener l'étude multiaxiale en calculant la durée de vie d'une pièce en mode uniaxial par une quantité d'énergie équivalente à l'énergie multiaxiale, puisqu'il s'agit d'un scalaire en l'occurrence un tenseur d'ordre zéro. En plus, les alliages d'aluminium présentent un comportement plastique important par rapport au comportement élastique (comportement élastique-plastique), le profil non linéaire du matériau est donné par l'équation suivante :

$$\text{équation 82: } \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{1/n'}$$

où $K' = \frac{\sigma_f'}{\varepsilon_f'^{n'}}$: le coefficient de la limite d'endurance, $n' = \frac{b}{c}$ est l'exposant de la dureté cyclique, σ_f' est le coefficient de la résistance à la fatigue, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε_f' est coefficient de la ductilité de la fatigue.

L'énergie totale de déformation par unité de volume au niveau de la région critique, peut-être obtenue à partir du modèle en éléments finis tridimensionnels. Il faut obtenir un équivalent de déformation uniaxiale à partir de la densité d'énergie de déformation totale qu'on peut obtenir de l'analyse contrainte-déformation multiaxiale.

Autrement dit, trouver la déformation uniaxiale équivalente qui cause la même densité d'énergie dans le cas uniaxial. Deux approches sont possibles : la densité d'énergie obtenue par l'analyse élastique et l'autre par l'analyse élastique-plastique. D'autres chercheurs ont montré que pour les entailles profondes, comme dans le cas de la déformation plastique localisée, la distribution de l'énergie dans la zone plastique est aussi la même que pour les matériaux élastiques linéaires. Ceci veut dire qu'en présence de déformation plastique localisée à petite échelle, le profil élastique linéaire grossier du matériau entoure la déformation de l'entaille de contrôle dans la zone plastique. Ainsi, on peut conclure que la densité d'énergie U_σ due au champ contrainte-déformation élastique-plastique local, est approximativement égale à la densité d'énergie U_s due au champ contrainte-déformation élastique:

$$\text{équation 83: } U_s = U_\sigma, \text{ ou } \int^{\epsilon_y} S_{ij} d\epsilon_{ij} = \int^{\epsilon_y} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Dans cette méthodologie l'analyse élastique tridimensionnelle du modèle par éléments finis a été utilisée et la densité totale de l'énergie de déformation dans la majorité de la région critique est déterminée par la sommation des contributions de toutes les composantes contraintes-déformations. Ceci est utilisé pour calculer la déformation équivalente correspondant à la densité d'énergie qui compose les composantes plastiques et élastiques dans le cas uniaxial. Ceci veut dire que la valeur de la densité d'énergie de déformation obtenue à partir de l'analyse en MEF tridimensionnelle est égalisée à la densité d'énergie du cas uniaxial qui compose l'énergie de déformation plastique et élastique. La formulation mathématique de cette méthodologie est la suivante :

l'énergie totale de la déformation uniaxiale par unité de volume, peut-être obtenue par une intégration [17] :

$$\text{équation 84: } U_a = U_{ae} + U_{ap} = \int_0^{\varepsilon_a} \sigma_a d\varepsilon_a$$

on sait que :

$$\text{équation 85: } \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

ainsi :

$$\text{équation 86: } \frac{d\varepsilon_a}{d\sigma_a} = \frac{1}{E} + \frac{\sigma_a^{\left(\frac{1-n'}{n'}\right)}}{n' K'^{\frac{1}{n'}}}$$

Alors que l'équation 14 devient :

$$\text{équation 87: } U_a = \int \sigma_a \left(\frac{1}{E} + \frac{\sigma_a^{\left(\frac{1-n'}{n'}\right)}}{n' K'^{\frac{1}{n'}}} \right) d\sigma_a$$

après simplifications ;

$$\text{équation 88: } U_a = \frac{\sigma_a^2}{2E} + \frac{\sigma_a}{n'+1} \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

La résolution de l'équation 88 permet d'obtenir la contrainte requise pour produire la même densité d'énergie dans le cas uniaxial. En substituant la contrainte dans l'équation 85, la déformation correspondante est obtenue. Ayant la déformation, la prédiction de la fatigue est possible en utilisant l'équation 89 de Manson-Coffin:

$$\text{équation 89: } \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c$$

où $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$ est l'intervalle de déformation, σ'_f est le coefficient de la résistance à la fatigue, N le nombre de cycles, E est le module de Young, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε'_f est coefficient de la ductilité de la fatigue. Les résultats montrent qu'il est clair que cette méthodologie surestime la durée de vie dans la région des bas cycles de fatigue, car la déformation plastique n'est pas comptée proprement. Il faut noter que cette méthodologie est basée sur le fait que la déformation plastique est une petite fraction de la déformation totale, c'est pour cela cette méthode délivre de bonnes estimations dans les régions à haut cycle de fatigue où la déformation élastique contrôle les processus de dommage par fatigue. Donc, cette méthodologie n'est pas unique comme outil de prédiction à bas cycle et haut cycle de fatigue. Dans le cas plus complexe où l'état des contraintes est multiaxial, après avoir extrait la densité d'énergie de déformation du cas multiaxial des calculs numérique de la MEF, on calcule la densité d'énergie de déformation équivalente au cas uniaxial en premier lieu. Le calcul de la densité d'énergie du cas uniaxial équivalent au cas multiaxial est résumé dans l'organigramme de la figure 30 :

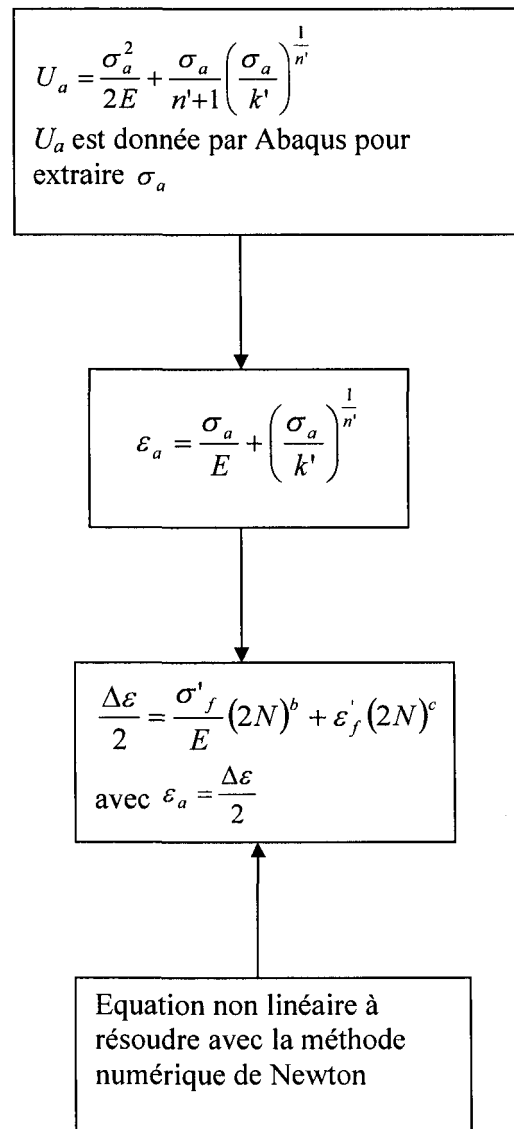


figure 30. Organigramme résumant le calcul de la densité d'énergie uniaxiale équivalente au cas multiaxiale.

5.2 Modèle numérique élasto-plastique (cas rigide : non amorti) :

Dans cette section on traite le cas rigide, sans amortissement, pour connaître le comportement de la pièce dans de telles conditions. En effet, selon H. Rahnejat [45] le bras de suspension ne peut pas supporter une force de contre réaction d'un quart de poids du véhicule qui est de l'ordre de 3750N correspondant au cas rigide comme le montre la figure 31. L'étude de fiabilité concerne une pièce du système de suspension Macpherson d'un véhicule, en alliage d'aluminium 7075-T6. Cette pièce est soumise à l'excitation aléatoire de la route décrite par une PSD et au quart du poids du véhicule qui lui est opposée. Le bout opposé à l'endroit de l'excitation de la route, est lié au joint de suspension de façon à permettre une rotation autour de ce dernier, comme illustré dans le module de chargement et des conditions de limites. Les dimensions de la pièce sont les suivantes : épaisseur 2,5cm, longueur 50 cm et largeur 30 cm. Le design de la pièce est réalisé à l'aide le logiciel Solidwork. Le fichier du design final est sauvegardé sous forme d'une extension qui garde les unités du système international *SI*, puis importé dans le logiciel de traitement numérique par la méthode des éléments finis.

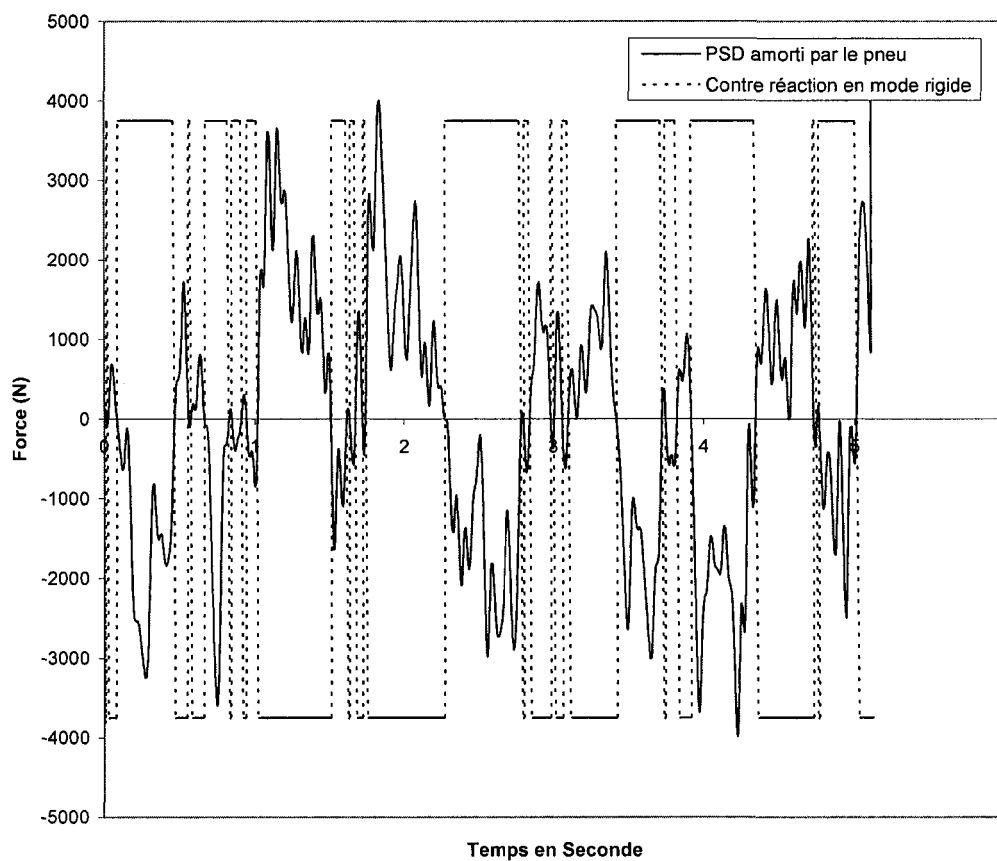


figure 31. Le spectre de chargement en mode rigide.

a- Matériau : couplage élasto-plastique :

Le couplage élasto-plastique est pris en considération en entrant les paramètres élastiques comme le module de Young, le coefficient de poisson et la densité. Le comportement élasto-plastique est décrit par la relation uniaxiale de Ramberg-Osgood. En effet, puisque les alliages d'aluminium présentent un comportement plastique important par rapport au comportement élastique (comportement élastique-plastique), le profil non linéaire est donné par l'équation :

équation 90:
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k'}\right)^{1/n'}$$

où $K' = \frac{\sigma_f'}{\varepsilon_f'^{n'}}$ représente le coefficient de la limite d'endurance, $n' = \frac{b}{c}$ est l'exposant de

la dureté cyclique, σ_f' est le coefficient de la résistance à la fatigue, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε_f' est coefficient de la ductilité de la fatigue.

La figure 32 et le tableau 14 illustrent le comportement élasto-plastique non linéaire du matériau :

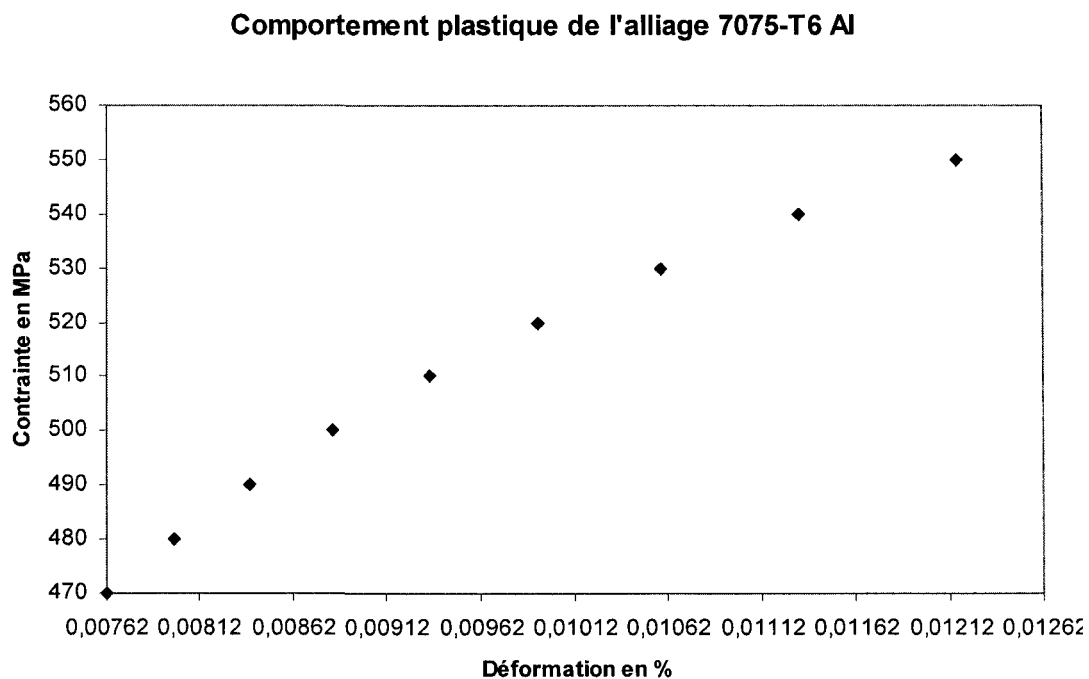


figure 32. Comportement plastique de l'alliage 7075-T6.

tableau 14. Les données de la figure 32

Contrainte en MPa	Déformation en %.
469	0
470	0,007624144
480	0,007985676
490	0,00838959
500	0,008842901
510	0,009353612
520	0,009930821
530	0,010584851
540	0,011327383
550	0,012171606

Le comportement plastique de l'alliage représente presque 19% de la déformation totale. Le module propriété du matériau du logiciel Abaqus permet de prendre en considération le couplage élasto-plastique du matériau, décrivant son comportement non linéaire. Abaqus utilise ainsi le comportement uniaxial non linéaire du matériau, comme a démontré Gbadebo M. *et Al.*[49].

b- Schéma d'intégration :

Comme dans la majorité des méthodes numériques de résolution des équations différentielles, il existe deux schémas d'intégration dans le cas de la méthode des éléments finis : explicite et implicite. Le choix entre la méthode dynamique explicite et implicite est difficile. Cependant, il est recommandé de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes. La méthode implicite utilise la stratégie de l'incrément automatique basée sur la méthode de résolution itérative complète de Newton :

$$\text{équation 91: } \Delta u^{(i+1)} = \Delta u^{(i)} + K_t^{-1} (F^{(i)} - I^{(i)})$$

où K_t est la matrice instantanée tangente de rigidité, F est le vecteur des forces appliquées, I est le vecteur des forces internes et Δu est l'incrément du déplacement

[55, 56]. Selon Sun J.S, Lee K.H. et Lee H.P [55], Hilbert *et al.* ont défini la procédure dynamique implicite par :

$$\text{équation 92: } M\ddot{u}^{(i+1)} + (1 + \alpha)Ku^{(i+1)} - \alpha Ku^{(i)} = F^{(i+1)}$$

où M est la matrice masse, K la matrice de rigidité, F le vecteur des chargements appliqués et u le vecteur déplacement :

$$\text{équation 93: } u^{(i+1)} = u^{(i)} + \Delta t \dot{u}^{(i)} + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}^{(i)} + \beta \ddot{u}^{(i+1)} \right)$$

$$\text{équation 94: } \dot{u}^{(i+1)} = \dot{u}^{(i)} + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{u}^{(i)} + \gamma \ddot{u}^{(i+1)} \right)$$

avec : $\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha^2)$, $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha$, $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0$, $\alpha = -0,05$ est choisi par défaut dans Abaqus comme le plus petit terme d'amortissement qui élimine rapidement le bruit de haute fréquence sans avoir un effet significatif sur la réponse fréquentielle basse [55]. Pour la méthode implicite, le coefficient de tolérance résiduel de demi-incrément HAFTOL est important dans le contrôle de la précision des résultats.

Le schéma d'intégration explicite est basé sur l'implémentation des règles d'intégration avec l'utilisation des éléments diagonaux de la matrice masse. L'équation de mouvement du corps est intégrée en utilisant la règle d'intégration de la différence centrée explicite :

$$\text{équation 95: } u^{(i+1)} = u^{(i)} + \Delta t^{(i+1)} \dot{u}^{(i+1)}$$

$$\text{équation 96: } \dot{u}^{(i+1/2)} = \dot{u}^{(i-1/2)} + \frac{1}{2} (\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}) \ddot{u}^{(i)}$$

Les accélérations au début de l'incrément [56] peuvent être exécutées selon l'équation 97 :

équation 97: $\ddot{u}^{(i)} = M^{-1}(F^{(i)} - I^{(i)}).$

La méthode explicite est conditionnellement stable, contrairement à la méthode implicite. Ainsi, l'incrément du temps doit satisfaire à la condition suivante [55, 57] :

équation 98: $\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}$

où ω_{\max} est la valeur propre maximale de l'élément. Une estimation conservatrice de l'incrément stable du temps est donnée par la valeur minimale de tous les éléments. La limite de stabilité décrite par l'équation 98 peut être écrite comme suit [55] :

$$\Delta t = \min\left(\frac{L_e}{c_d}\right)$$

où L_e caractérise les dimensions de l'élément et c_d est la vitesse dilatationnelle de l'onde effective du matériau. À noter que la procédure explicite ne requière pas d'itérations ni de matrice tangente de rigidité [56]. Dans la présente étude, il s'agit d'une intégration implicite dans un premier temps sans le contrôle du coefficient HAFTOL. La simulation est exécuté pour une période de temps de 5,11 s, un pas de temps de 0,01 s et un nombre maximum d'incrément de 600 pour pouvoir terminer l'analyse. Les variables de sorties, telle que la densité d'énergie multiaxiale, sont imprimées à chaque pas de temps. Le contrôle de la non linéarité géométrique, due à la variation de la configuration géométrique en fonction du temps, est activé dans le module STEP de Abaqus.

c- Chargement :

Le spectre de la route secondaire est normalisé, donc on a multiplié les valeurs de ce spectre par un facteur commun estimé à partir de la quantité de mouvement

échangée entre la route et le pneu d'un quart de véhicule allant avec une vitesse de 75 km/h. En effet sur une route secondaire, la vitesse du véhicule est inférieure à 75 km/h (21 m/s). À cette vitesse, un véhicule de 1400 kg a une quantité de mouvement égale à 29 167 kg.m/s. Ainsi en deux secondes, on peut estimer une force d'excitation maximale de $29\ 167 / 2 = 14583$ N. Cette force distribuée d'une manière égale sur les quatre systèmes de suspension, donne une force partielle $14583/4 = 3645$ N majorée à 4000N. Comme montré dans la figure 33, les forces concentrées sont remplacées par des pressions surfaciques uniformes selon l'équation :

$$\text{équation 99 : } P = \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{F}{S}$$

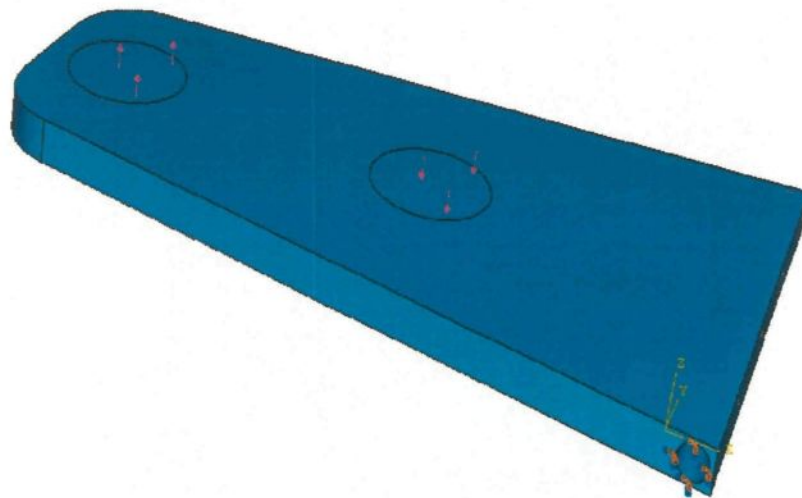


figure 33. Chargement et conditions aux limites dans la pièce en alliage Al 7075-T6.

La force est distribuée sur une surface de rayon ayant une valeur de 4 cm au bord droit de la pièce illustrée dans la figure 33, ce qui nous permet d'obtenir une pression

maximale $P_d = \frac{4000N}{\pi(4 \times 10^{-2})^2 (m^2)} = 7.96 * 10^5 Pa$. De la même manière on obtient une

pression au milieu de la pièce $P_m = \frac{3750N}{\pi(4 \times 10^{-2})^2(m^2)} = 7.46 * 10^5 Pa$. Le système de

contrôle du système de suspension oblige les deux pressions à être de sens opposés. Les données de la PSD concernent le déplacement vertical du pneu du véhicule. Pour pouvoir transformer ces données en pression locale uniforme, on a normalisé ces valeurs en divisant par la valeur maximale, puis multiplié chaque valeur normalisée par P_d . La valeur de la pression P_m , est ainsi multipliée par le signe des valeurs de P_d , comme le montre le tableau 15. La pièce est contrainte à des déplacements et rotations nuls, représentant un état de contrainte extrême.

tableau 15. Normalisation des valeurs pour les 0,28 premières secondes.

temps	PSD(aléatoire)	Normalisation	Poids (P_m)
0	0	0,00E+00	0
0,01	8,01E-04	2,81E-02	1
0,02	-6,75E-04	-2,37E-02	-1
0,03	4,01E-04	1,41E-02	1
0,04	3,03E-03	1,06E-01	1
0,05	4,88E-03	1,71E-01	1
0,06	4,55E-03	1,60E-01	1
0,07	2,62E-03	9,19E-02	1
0,08	6,23E-04	2,19E-02	1
0,09	-7,38E-04	-2,59E-02	-1
0,10	-1,93E-03	-6,77E-02	-1
0,11	-3,40E-03	-1,19E-01	-1
0,12	-4,55E-03	-1,60E-01	-1
0,13	-4,24E-03	-1,49E-01	-1
0,14	-2,43E-03	-8,53E-02	-1
0,15	-8,24E-04	-2,89E-02	-1
0,16	-1,65E-03	-5,79E-02	-1
0,17	-5,61E-03	-1,97E-01	-1
0,18	-1,11E-02	-3,89E-01	-1
0,19	-1,57E-02	-5,51E-01	-1
0,20	-1,79E-02	-6,28E-01	-1
0,21	-1,81E-02	-6,35E-01	-1
0,22	-1,81E-02	-6,35E-01	-1
0,23	-1,86E-02	-6,53E-01	-1
0,24	-1,98E-02	-6,95E-01	-1
0,25	-2,10E-02	-7,37E-01	-1
0,26	-2,22E-02	-7,79E-01	-1
0,27	-2,31E-02	-8,11E-01	-1
0,28	-2,31E-02	-8,11E-01	-1

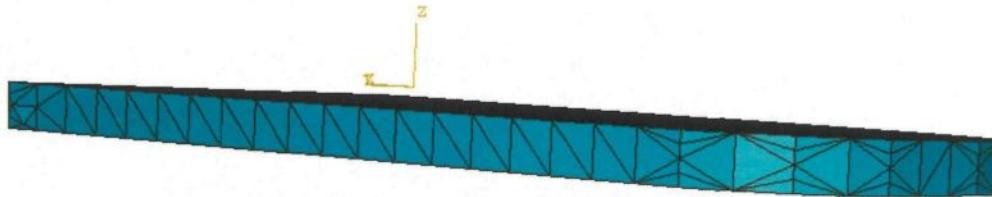
d- Maillage :

Coût du raffinement du maillage:

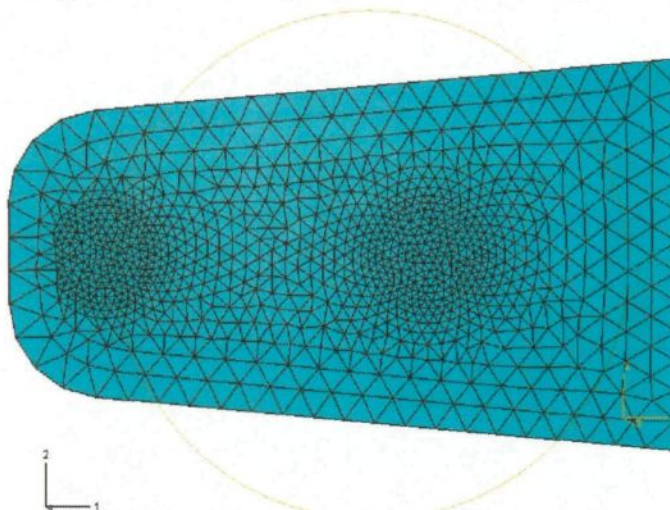
En utilisant la méthode explicite, le coût de programmation est proportionnel au nombre d'éléments et rudement inversement proportionnel à la dimension du plus petit élément. Ainsi, le raffinement du maillage, augmente le coût de la programmation en augmentant le nombre d'éléments et réduisant la dimension du plus petit élément. Bien que la prédiction de l'augmentation du coût avec un raffinement de maillage pour la méthode explicite est directe, il est plus difficile de le prédire lorsqu'on utilise la méthode implicite. La difficulté survient lorsqu'il y a une relation de dépendance dans un problème entre l'élément de connexion et le coût de la solution, cette relation qui n'existe pas dans la méthode explicite. Lorsqu'on utilise la méthode explicite, l'expérience montre que pour plusieurs problèmes le coût de la programmation est approximativement proportionnel au carré du nombre de degrés de liberté. La méthode explicite montre un gain considérable par rapport à la méthode implicite lorsque la grosseur du modèle augmente tant que le maillage est relativement uniforme (voir annexe).

La version Abaqus-6.4 nous offre que des éléments tétraédriques. Un maillage contrôlé est nécessaire pour raffiner le nombre d'élément près des zones critiques : conditions aux limites et près des termes sources, comme indiqué dans la figure 34. En outre, puisqu'il s'agit d'une flexion dans un état de contrainte plan, le maillage au niveau de l'épaisseur doit être raffiné pour mieux représenter l'état des contraintes. En effet, des partitions verticales sont réalisées au niveau de l'épaisseur. Les éléments linéaires de l'intégration réduite tolèrent les distorsions [35], par conséquent l'utilisation d'un maillage raffiné de ces éléments dans n'importe quelle simulation où les niveaux

de distorsion peuvent être très élevés. Ainsi nous avons opté pour des éléments tétraédriques linéaires dans un schéma d'intégration stable en l'occurrence le schéma implicite.



Maillage au niveau de l'épaisseur : Partition « edge number ».



Maillage surfacique contrôlé près des termes sources.

figure 34. Le maillage contrôlé pour mieux représenter l'état des contraintes.

e- Résultats des calculs numériques obtenus par Abaqus :

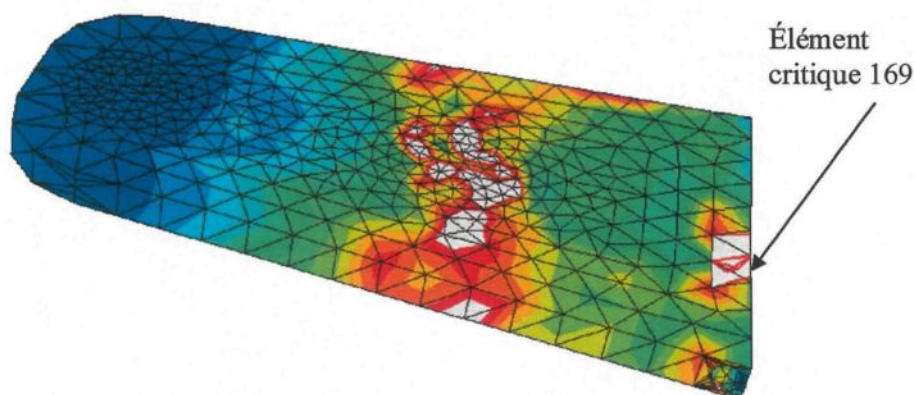
La rupture par fatigue d'un bras de suspension en alliage métallique peut avoir lieu même si la contrainte maximale est inférieure à la limite d'élasticité. Il est donc important qu'avant d'étudier la durée de vie d'une pièce, de vérifier l'état des contraintes de la pièce par rapport aux hypothèses suivantes :

- le couplage élasto-plastique du matériau caractérise un domaine de déformation bien déterminé. En effet les schémas d'intégration numériques par la méthode des éléments finis risque de ne pas converger même dans le cas implicite stable, si on dépasse le domaine élasto-plastique imposé dans le modèle numérique.
- l'analyse fréquentielle se rapportant au phénomène de la résonance, prend un autre aspect puisque les fréquences naturelles vont changer avec la haute déformation.

Dans cette section le matériau est supposé avoir un comportement non linéaire. Par conséquent la contrainte maximale dans le matériau ne doit pas dépasser la limite de rupture. La limite d'élasticité conventionnelle de l'alliage 7075-T6 est de l'ordre de 460 MPa et la limite de rupture est de l'ordre de 578 MPa. Pour rester dans le domaine à haut cycle de fatigue, loin du comportement oligocyclique en fatigue, donnant une pièce mécanique sécuritaire nous avons respecté la condition que toutes les contraintes : principale minimale et maximale et la contrainte Von Mises soient inférieurs en tout temps à 460MPa.

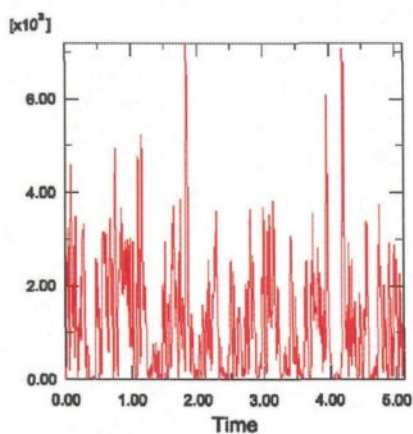
La figure 35-a illustre les résultats de l'état de la densité d'énergie de déformation (SENER) dans la pièce. L'énergie de déformation est critique aux alentours des conditions aux limites. L'organigramme partiel fait un zoom de la partie 3 de l'organigramme principal cité dans l'introduction. En effet il s'agit des détails des traitements des résultats depuis le calcul de la densité d'énergie du cas multiaxial, jusqu'au calcul de la durée de vie partielle de la pièce dans le cas d'un chargement aléatoire et par suite la nombre de répétitions du chargement jusqu'à la rupture. La densité d'énergie de déformation (SENER) atteint une valeur maximale dans un élément du maillage. Cette valeur maximale est comprise entre 15 et 20 KJ/m³. Pour choisir

l'élément critique il faut filtrer l'élément, ou les éléments, dont la somme des variations de la densité d'énergie de déformation est maximale comme montré par l'organigramme de la figure 36. Il s'agit de l'élément étiqueté 169. La figure 35-a montre l'emplacement de l'élément 169 dans la pièce. La figure 35-b montre l'évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation multiaxiale dans le centroïde de cet élément. L'élément critique est situé dans la région où la pièce est encastrée.



Densité d'énergie de déformation instantanée dans le spécimen (25mm).

(a)



L'évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation de l'élément critique numéro 169.

(b)

figure 35. Les résultats de la simulation numérique.

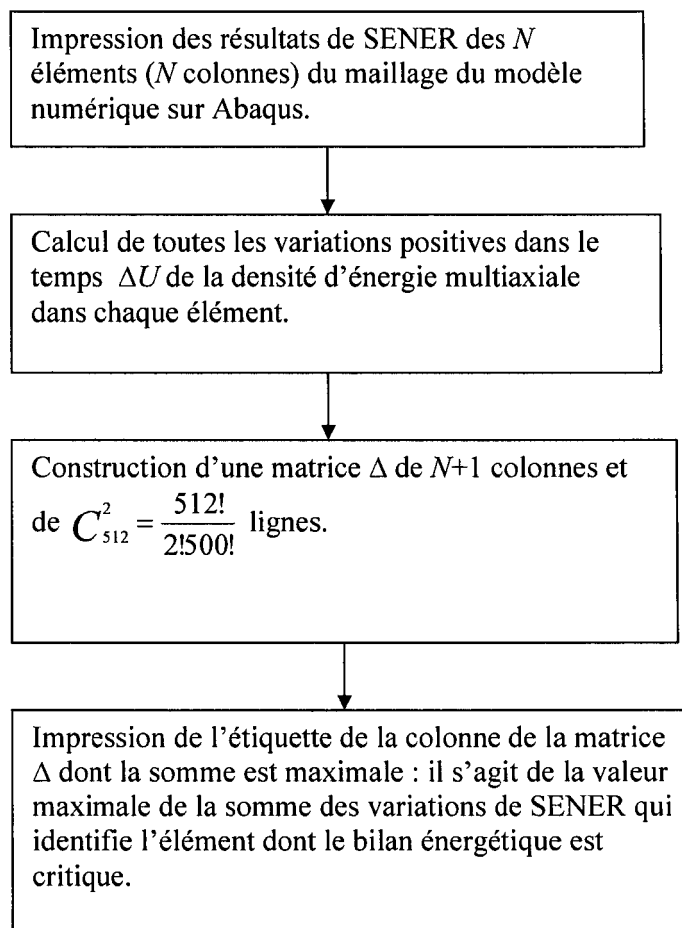


figure 36. Organigramme du programme de l'interface Matlab de filtrage.

Le signal de chargement dans l'élément critique 169 peut présenter des anomalies qui peuvent faire défaut au comptage des cycles « rainflow » par la méthode de Markov. La figure 37-a et la figure 37-b, montre le signal de chargement brut et corrigé au point critique 169. La figure 38 illustre le comptage des cycles « rainflow » dans le cas de l'élément critique 169.

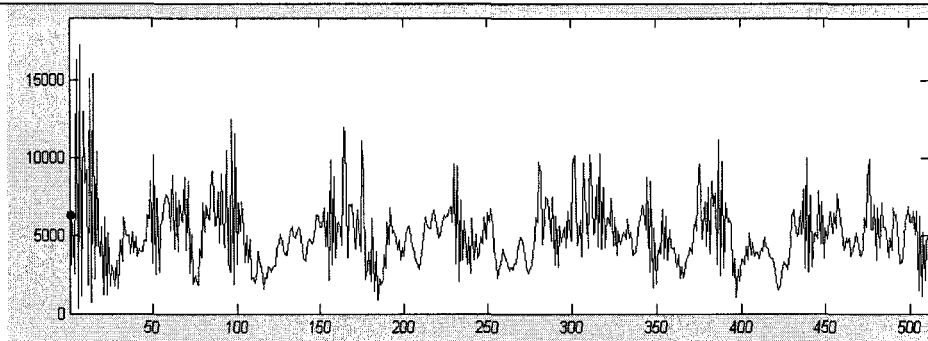


figure 37-a. Signal brut de SENER au point critique 169.

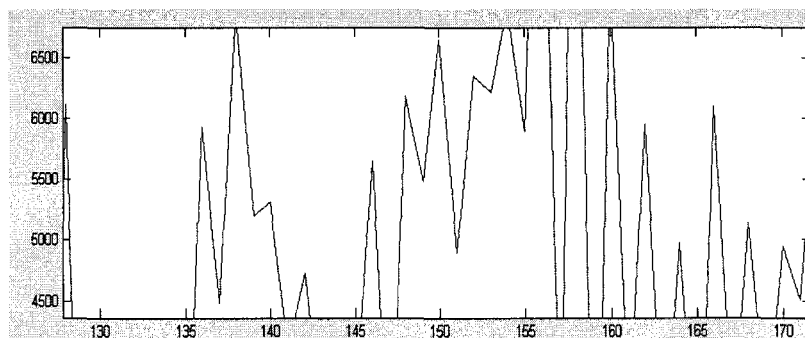


figure 37-b. Signal SENER au point critique 169, corrigé.

figure 37. Signaux brut et corrigé de SENER au point critique 169.

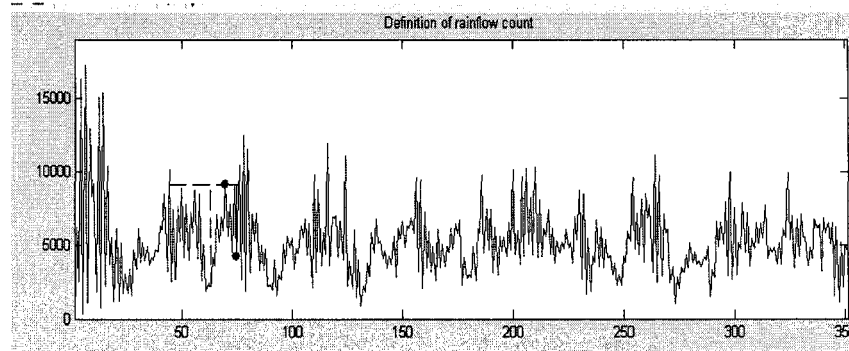


figure 38-b. Comptage des cycles « rainflow ».

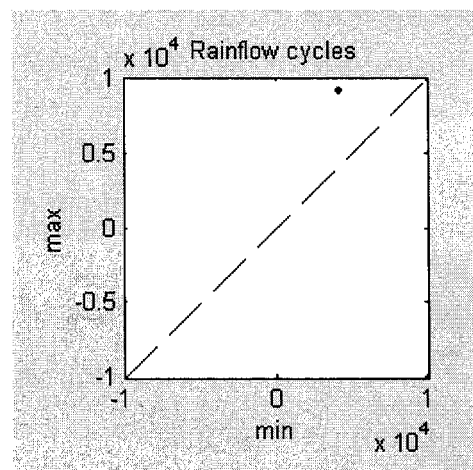


figure 38-c. Résultat d'un comptage.

figure 38. Comptage de cycles «rainflow».

Dans le cas multiaxial élasto-plastique, A. Elmarakbi *et al.*[17], ont aussi ramené l'étude multiaxiale en calculant la durée de vie d'une pièce, en mode uniaxial par une quantité d'énergie équivalente au cas multiaxial, puisqu'il s'agit d'un scalaire en l'occurrence un tenseur du même ordre zéro. Comme démontré au début de la section, le nombre de cycles à la rupture est calculé à partir de la densité d'énergie de déformation du cas uniaxial, équivalente au cas multiaxial :

équation 100:
$$U_a = \frac{\sigma_a^2}{2E} + \frac{\sigma_a}{n'+1} \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

et la relation Manson-Coffin :

équation 101:
$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c$$

où $K' = \frac{\sigma'_f}{\varepsilon'^{n'}}$: le coefficient de la limite d'endurance, $n' = \frac{b}{c}$ est l'exposant de la dureté

cyclique, σ'_f est le coefficient de la résistance à la fatigue, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue, ε'_f est coefficient de la ductilité de la fatigue, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$ est l'intervalle de déformation, σ'_f est le coefficient de la résistance à la fatigue, N le nombre de cycle, E est le module de Young, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε'_f est coefficient de la ductilité de la fatigue. Le calcul de N_f est résumé dans l'organigramme de la figure 39.

tableau 16. Les paramètres métallurgiques de fatigue de l'alliage d'aluminium 7075-T6

<i>Module de Young : E</i>	<i>H</i>	<i>n'</i>	<i>σ'_f</i>	<i>ε'_f</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
71000 MPa	977 MPa	0,106	1466 MPa	0,262	-0,143	-0,619

Le tableau 16 montre les paramètres métallurgiques de fatigue de l'alliage d'aluminium Al 7075-T6 constituant la pièce automobile étudiée. La durée de vie partielle N_f est obtenue par la résolution numérique de l'équation non linéaire de Manson-Coffin par

la méthode de Newton-Raphson, comme illustré par l'organigramme de la figure 39. Il s'agit d'une méthode itérative basée sur le calcul numérique de la tangente d'une fonction f en un point x_n , où cette fonction s'annule en un point voisin x_{n+1} . L'itération consiste à diminuer l'erreur par rapport à une solution approchée. En effet :

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}, \text{ or } f(x_{n+1}) = 0, \text{ on déduit alors :}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Les résultats obtenus lors de l'extraction des cycles « rainflow » sont en annexe

4. Il s'agit du de U_{\max} , U_{\min} et $U_a = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2}$ nécessaire pour le calcul de la durée de vie partielle par la densité d'énergie du cas uniaxial équivalente au cas multiaxial. Le calcul du dommage selon la loi de Palmgren-Miner pour un chargement aléatoire est résumé en annexe 4. Les résultats montrent que le signal de chargement étudié doit se répéter $8,86 \times 10^{11}$ fois jusqu'à la rupture de la pièce, en alliage d'aluminium 7075-T6 ayant une épaisseur de 2,5cm. La contrainte maximale $(\sigma_a)_{\max}$ du cycle « rainflow » de l'élément critique, filtrée par une interface Matlab, est de l'ordre de 31MPa et une déformation maximale correspondante de l'ordre de $4,3 \times 10^{-4}$. Ces valeurs, légèrement faibles, peuvent être encore atténuées pour sécuriser la pièce en la renforçant aux points critiques. Une optimisation de la forme de la pièce permettra d'augmenter le nombre de répétitions jusqu'à la rupture, afin de sécuriser le véhicule et diminuer plus son poids à des endroits non critiques.

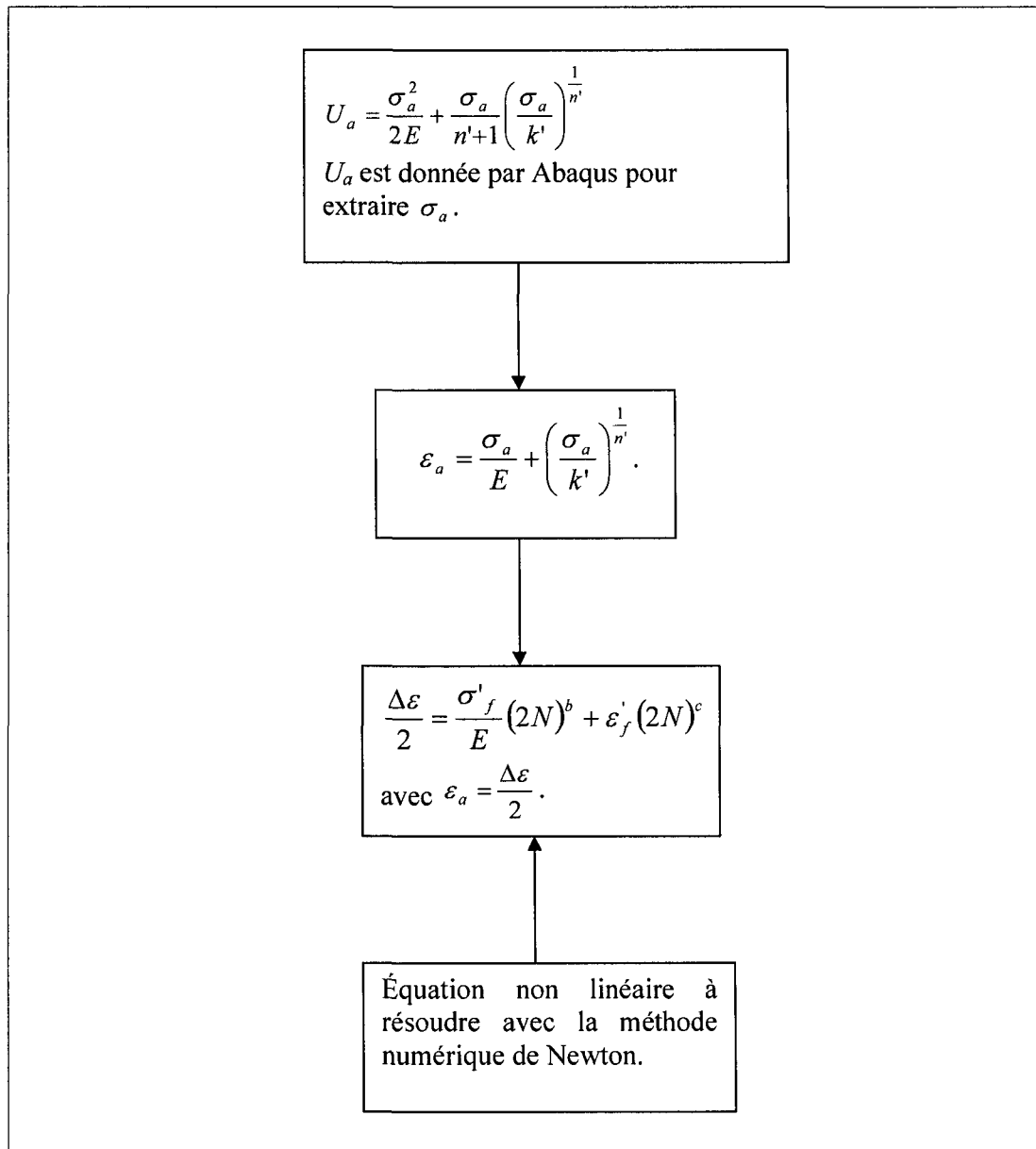


figure 39. Organigramme de l'extraction du nombre de cycle à la rupture.

5.3 Modèle numérique élasto-plastique (cas de l'amortissement) :

Nous avons réalisé plusieurs tests de simulation dans le cas rigide. Ces tests ont montré que l'élément critique est situé dans la région de l'encastrement de la pièce. La figure 40 montre le profil de la densité d'énergie de déformation SENER obtenu lors des différentes simulations dans le cas rigide, ainsi que la localisation des éléments critiques par le filtre développé dans la présente étude. En effet, nous avons varié l'épaisseur de la pièce pour étudier l'emplacement des points critiques de la pièce. Dans les trois cas, l'élément critique se situe au niveau du joint de suspension où la pièce est encastree. La figure 41 montre le signal de SENER de chaque élément critique. Le signal de SENER diminue d'une manière monotone de 75% en passant d'une pièce d'épaisseur 25mm à une autre d'épaisseur 35mm. La durée de vie passe respectivement de $8,86 \times 10^{11}$ (25mm) à $1,26 \times 10^{14}$ (35mm), correspondant à une augmentation de presque 100%. La durée de vie dans le cas de la pièce intermédiaire d'épaisseur 30mm est de l'ordre de $2,49 \times 10^{12}$. Les différentes positions de l'élément critique d'un spécimen à un autre sont dues aux différentes épaisseurs et maillages. Cette durée de vie peut être augmenté si on renforce localement la pièce aux points critiques.

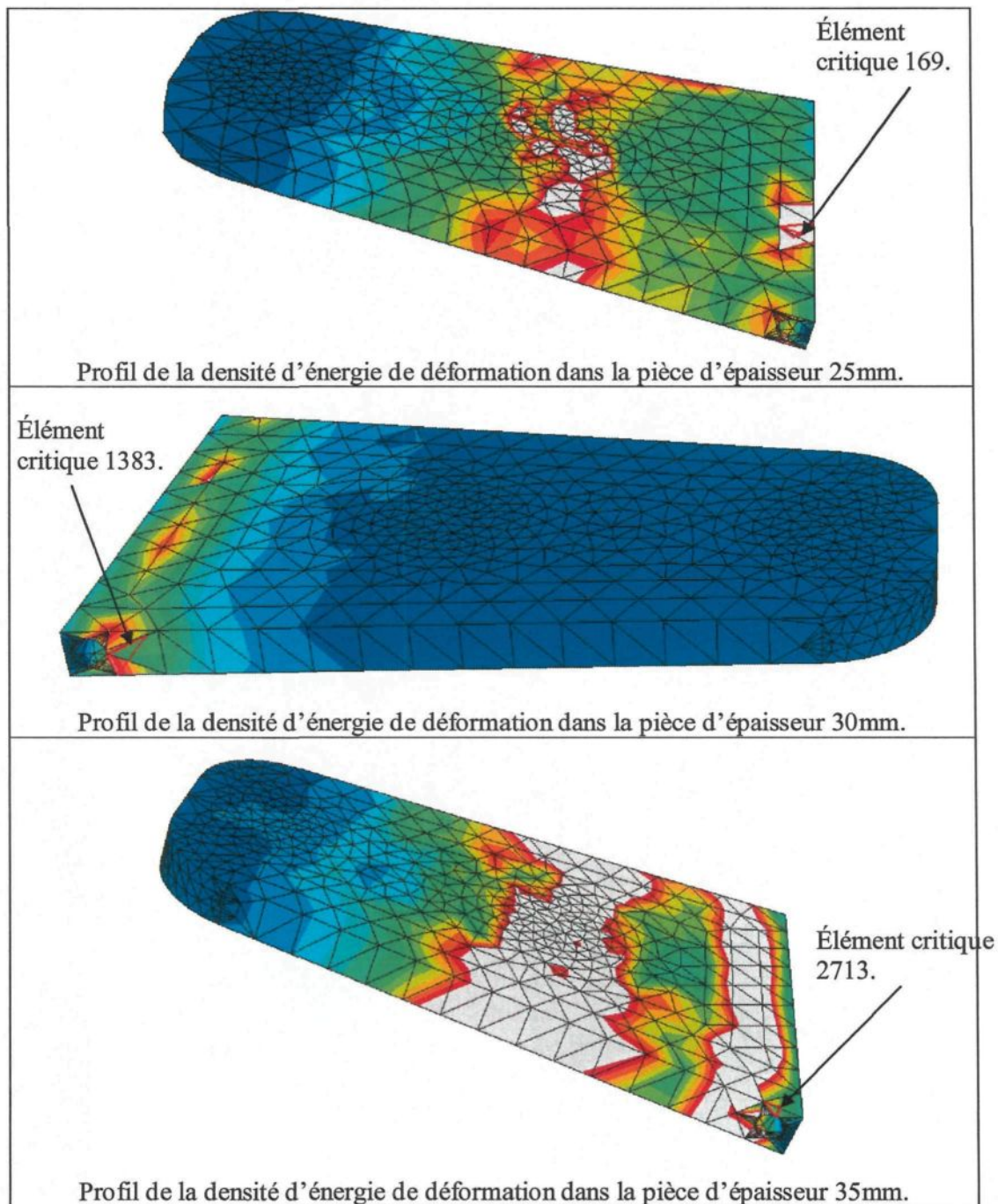


figure 40. Localisation de l'élément critique dans le cas rigide.

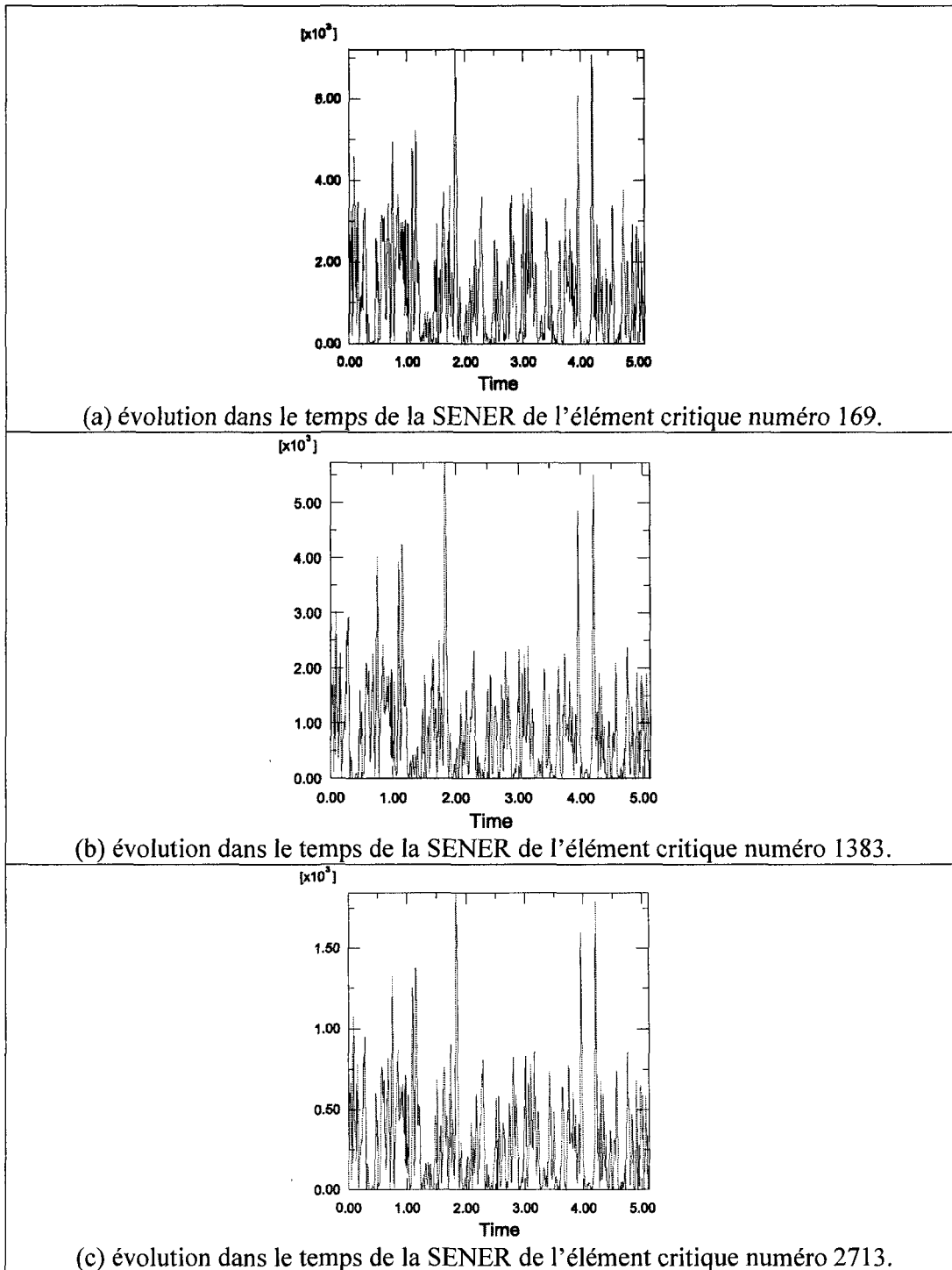


figure 41. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments critiques.

(a) pièce d'épaisseur 25 mm (b) pièce d'épaisseur 30 mm (c) pièce d'épaisseur 35 mm.

Nous avons démontré dans le chapitre 3 consacré à la dynamique du véhicule, que l'amortissement de la suspension diminue largement la contrainte appliquée dans la chaîne de retour au milieu de la pièce de suspension. En effet, le poids du véhicule est estimé à 3750N ne dépassant pas en valeur absolue la valeur $F_1 = 1200\text{N}$ dans le cas de l'amortissement par un ressort et un amortisseur comme le montre la figure 42. Cette force opposée dans la chaîne de retour à l'excitation aléatoire de la route amortie par le pneu de raideur $K = 160\,000\text{ N/m}$, de valeur maximale $F_{2max} = 4000\text{N}$. La chaîne de retour en contre-réaction à F_2 , utile pour stabiliser le véhicule ne compensera pas F_2 en terme de contrainte puisque la différence entre F_1 et F_2 dans le cas de l'amortissement est supérieure au cas rigide. Ceci est confirmé par une augmentation de la densité d'énergie de déformation SENER comme illustrée dans la figure 43. L'élément critique filtré dans les deux cas est l'élément 169 situé au niveau de l'encastrement, puisqu'il s'agit de la même pièce et du même maillage, comme illustrée par la figure 44. Par conséquent, la durée de vie de la pièce dans le cas de l'amortissement sera inférieure à celle du cas rigide. Une optimisation du poids de la pièce, consisterait à ôter de la matière dans les régions à faible densité d'énergie de déformation pour contrôler le facteur de rigidité flexurale EI , où E est le module de Young de l'alliage et I le second moment de section de la pièce qui dépend de sa géométrie, la masse m et les fréquences naturelles. Ceci sera abordé dans le chapitre 6 consacré à l'optimisation du poids de deux pièces réelles d'automobiles de géométries complexes, sans affecter leur durée de vie ni leurs fréquences naturelles.

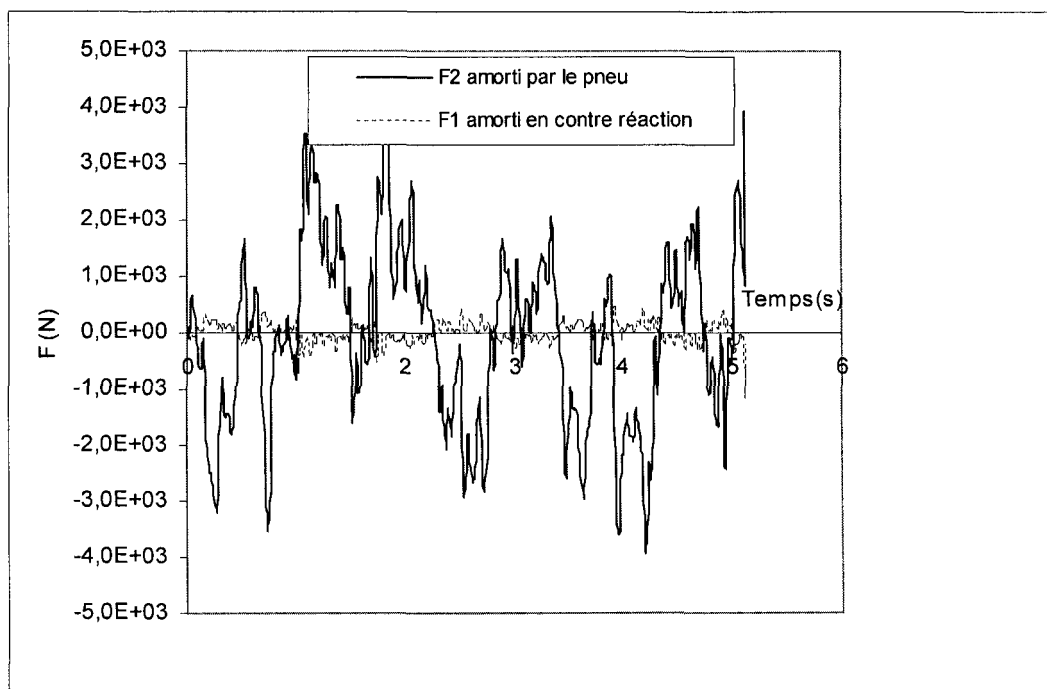


figure 42. Signaux des chargements après amortissement.

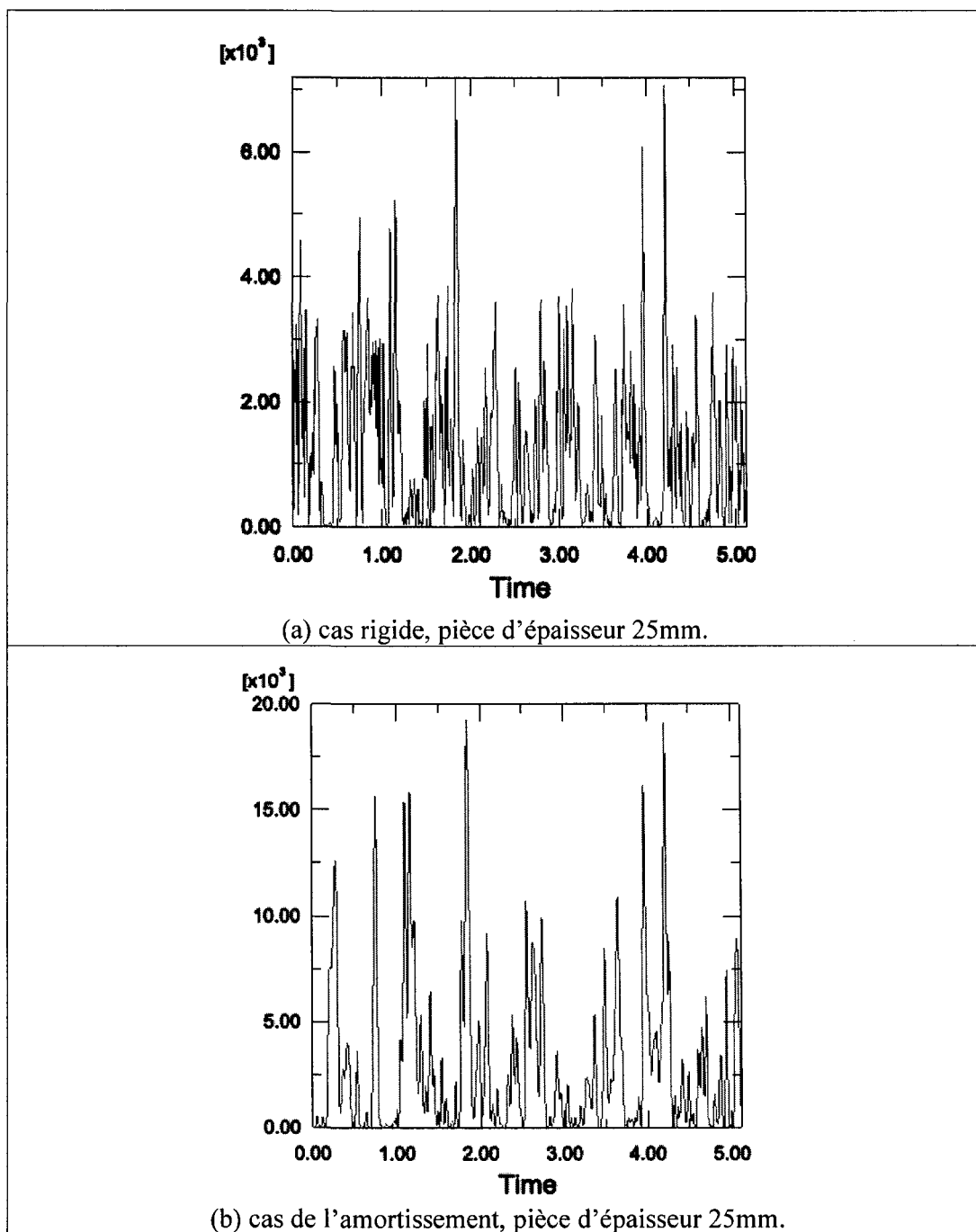


figure 43. Signal SENER dans le cas rigide et dans le cas de l'amortissement.

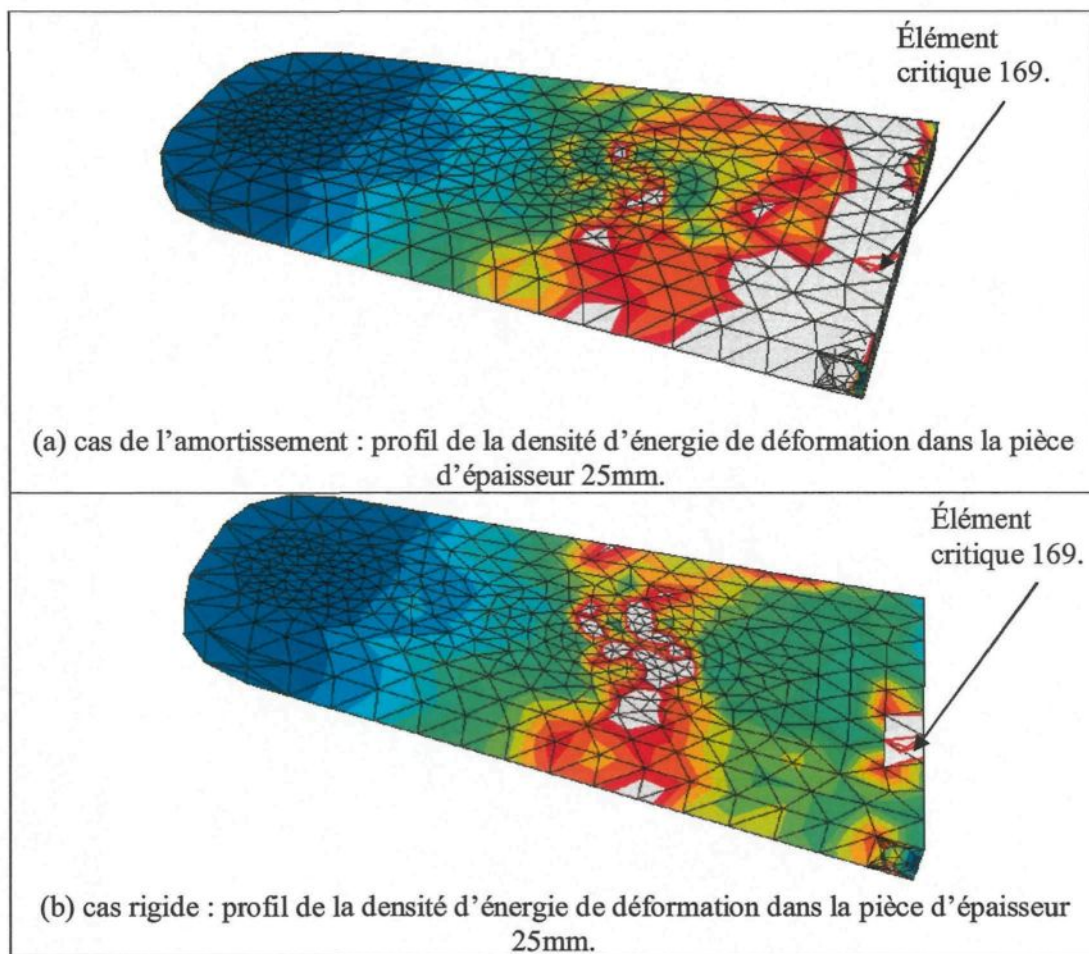


figure 44. Profil de la densité d'énergie de déformation SENER dans le cas rigide et de l'amortissement.