CHAPITRE II

Théorie de la commande par mode de glissement

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, une présentation générale d'une approche de la commande non linéaire, à savoir, la commande par mode de glissement est brièvement abordée, notre ambition ici n'est pas de faire une présentation exhaustive, la littérature en fait largement part, nous allons seulement donner leurs principes respectifs avec quelques notions et définitions nécessaires à leurs applications.

II.2. Commande par mode de glissement

Pour la commande des systèmes non linéaires plusieurs méthodes de commande ont été développées : commande adaptative, commande par mode glissement,...etc., dans ce contexte, la technique de commande par mode de glissement est spécialement utilisée pour les systèmes incertains.

La commande par mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier d'un système de réglage à structure variable. Il est caractérisé par une commutation continue et périodique entre deux états et, par conséquence, une méthode de réglage non linéaire.

La commande à structure variable a été inspirée par les travaux du mathématicien *A. F. Phlipov* sur la résolution des équations différentielles à second ordre discontinue, et développée, par la suite, par de nombreux chercheurs (Emilianov, Utkin, Soltine, Young, Harashima ...etc), **[3]** et **[4].**

Ce chapitre est divisé en deux grandes parties :

- le premier est consacré à l'élaboration d'une loi de commande par mode glissant statique ou on est confronté au problème de « chattering ».
- la deuxième partie propose une solution pour ce problème de chattering par l'introduction de la dynamique dans la loi de commande, cette idée est la base du concept du mode glissant dynamique.

Pour ces deux parties, l'étude est faite pour les systèmes mono variables et les systèmes multi variables.

II.3. Principe de la commande

Les modes glissants pour les systèmes non linéaires ont été largement étudiés et développés depuis leur introduction. L'objectif de la méthode est, à l'aide d'une commande discontinue, de contraindre et forcer le système à évoluer, au bout d'un temps fini, et se maintenir, sur une surface, dite surface de glissement, ou le comportement résultant correspond aux dynamiques souhaitées.

Le régime du système ainsi commandé est appelé mode glissant et la dynamique de celui-ci peut être rendue insensible aux variations paramétriques, aux erreurs de modélisation et certaines perturbations externes. La loi de commande par mode glissant est de conception relativement simple et elle présente des qualités de robustesse vis-à-vis de perturbations. Cependant, il existe quelques problèmes comme le phénomène de réticence et la brutalité de la commande discontinue, ces inconvénients peuvent être vraiment néfastes pour le systèmes en provoquant un souci important dans les modes de fonctionnement, mais aussi, en excitant des dynamiques de hautes fréquences non modélisées, **[3].**

Il existe, cependant, différentes méthodes pour diminuer ce phénomène dont l'une consiste à remplacer la fonction « sign » par une approximation continue au voisinage de la surface de glissement. Une autre méthode consiste à utiliser les modes de glissements dynamiques.

L'idée directrice de la commande à structure variable (commande par mode glissant) est donc de :

- Définir une surface de glissement, fonction de l'état du système.
- Générer une loi de commande qui commute d'une expression à une autre suivant que l'on se trouve, d'un coté ou d'un autre, de la surface de glissement dans le but de ramener le système sur cette surface.

Le système sera alors plongé dans l'état d'un système réduit déterminé par la surface de glissement, **[4].**

II.4. Notions de base

II.4.1. Régime glissant

On distingue deux sortes de régime glissant, idéal et réel.

- **Régime glissant idéal**

En théorie, l'organe de commutation est supposé idéal, insensible au bruit, et la trajectoire en régime glissant décrit parfaitement l'équation $S(x)=0$, d'où le régime glissant idéale, **[3]**.

Le régime glissant idéal correspond à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle, le point représentatif de l'évolution du système glisse parfaitement sur l'hypersurface de commutation S.

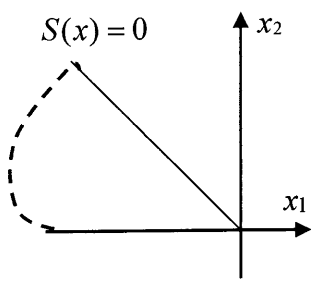

Figure II.1 : Glissement idéal, la fréquence de commutation est infinie avec amplitude nulle.

- **Régime glissant réel**

En pratique, l'organe de commutation est réalisé à partir de relais (pour quelques applications tels que les machines électriques) qui présentent des imperfections, comme les retards de commutation, **[9].**

La trajectoire de phase en régime glissant reste au voisinage da la surface de commutation, donnant naissance à des oscillations indésirable qui diminuent la précision du système, en gardant néanmoins la stabilité.

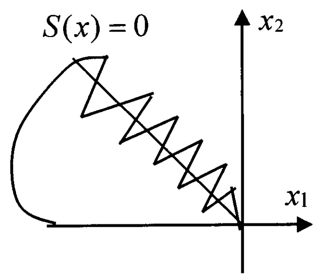

Figure II.2: Glissement réel, la fréquence de commutation finie, amplitude non nulle.

II.4.2. Système mono variable (SISO)

Considérons le système dynamique mono variable suivant :

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(x) + \Delta f(x) + (g(x) + \Delta g(x))u \\ x^{(n)} = f(x) + g(x)u + \Delta(x) \end{cases} \tag{II.1}$$

Avec $X = \left[x, \dot{x}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x^{(n-1)}\right]$: vecteur d'état, $x^{(n)}$ la n$^{\text{iéme}}$ dérivée de x.

$\Delta(x)$: Les incertitudes sur le système supposées bornées par une connue $\overline{\Delta}$.

L'objectif de commande consiste à synthétiser une loi de commande par la technique du mode glissant, assurant la poursuite pour l'état x d'une trajectoire désirée x_d.

$$X_d = \left[x_d, \dot{x}_d, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_d^{(n-1)}\right] \tag{II.2}$$

Pour que la tache de poursuite soit satisfait dans temps fini, l'état initial désiré doit être tel que :

$$x_d(0) = x(0)$$

II.4.2.1. Commande par mode glissant statique

II.4.2.1.1. Surface de glissement

Le premier objectif d'une commande a mode glissant est de diriger les états du système commandé vers une surface S définie et de maintenir le système sur cette surface. Cette surface S contribue à définir une fonction linéaire $S(x)$ appelée fonction de commutation (*switching function*) telle que :

$e = x - x_d$ L'erreur poursuite de la variable x, et $E = x - x_d = \left[e, \dot{e}, \ldots\ldots\ldots\ldots, e^{(n-1)}\right]$ le vecteur de l'erreur de poursuite.

On définit la surface variante dans le temps, dans l'espace d'état R^n, par l'équation scalaire suivante $S(x) = 0$ ou :

$$\begin{cases} S(x,t) = \left(\dfrac{d}{dt} + \lambda\right)^{(n-1)} \cdot e(x) = 0 \\ S(x,t) = e^{(n-1)} + q_{(n-1)} e^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_1 e = 0 \end{cases} \tag{II.3}$$

λ : Constante strictement positive, choisit de façon à assuré la rapidité et la stabilité du système.

En se basant sur la condition initiale, le problème de poursuite $x \equiv x_d$ est équivalent à celui de rester sur la surface $S(t) = 0$; $\forall\, t > 0$. En effet $S(x) = 0$ représente une équation différentielle linéaire dont la solution unique est $e = 0$, avec la condition initiale, **[6]**.

Donc le problème de poursuivre d'un vecteur x_d de dimension n peut être réduit à celui de maintenir la quantité scalaire S à zéro.

II.4.2.1.2. Condition de convergence

Les conditions de convergence permettent aux dynamiques des systèmes de converger vers les surfaces de glissement. Nous retenons de la littérature deux conditions, celle qui correspondent au mode de convergence de l'état d'un système **[5], [6]** et **[1]** :

- **Fonction directe de commutation**

C'est la première condition de convergence, elle est proposée par ***Utkin.*** Elle s'exprime sous la forme suivante:

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \qquad \text{(II.4)}$$

Dans cette condition, il faut introduire pour $S(x)$ et sa dérivée, les valeurs justes à gauche et à droite de la surface de commutation, **[1]**.

- **Fonction de Lyapunov**

Il s'agit de formuler une fonction scalaire positive $V(S) > 0$ pour les variables d'état du système, et de choisir la loi de commande qui fera décroître cette fonction **[5].**

Cette fonction est généralement utilisée pour garantir la stabilité des systèmes non linéaires.

En définissant la fonction de Lyapunov par :

$$V(S) = \frac{1}{2}S^2(x) \qquad \text{(II.5)}$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}(S) = \dot{S}(x)S(x) \qquad \text{(II.6)}$$

Pour que la fonction de lyapunov décroisse, il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative.

Ceci est vérifié si :

$$\dot{V} = S\dot{S} < 0 \qquad \text{(II.7)}$$

Remarque

Pour une convergence en temps fini vers la surface de glissement, la condition d'attractivité définie précédemment (les deux conditions de convergence), qui ne garantit qu'une convergence en temps infinie, est remplacée par une condition plus finie, dite condition de η attractivité, donner par :

$$\dot{V} = S\dot{S} \leq -\eta|S| - h(S)S \tag{II.8}$$

ou :

$$h(s) = \psi\ S \tag{II.9}$$

η, ψ :Constante strictement positive.

Essentiellement cette équation signifie que la distance entre les états et la surface, mesurée par S^2 diminue le long de toutes les trajectoires du système. Donc on contraint les trajectoires de pointer vers la surface S comme illustré dans la figure suivante, **[9]** :

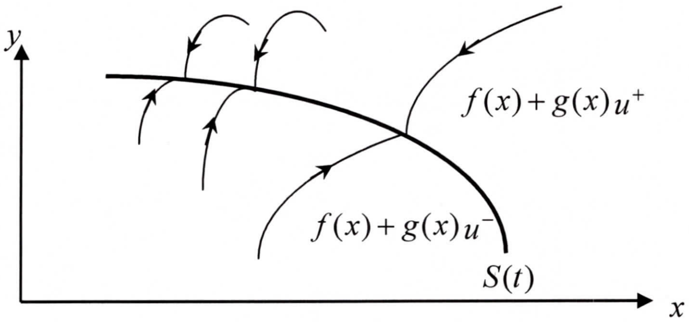

Figure II.3 : Condition de glissement.

La commande u est construite de façon à ce que les trajectoires du système soient amenées vers la surface de glissement et soient ensuite maintenues dans un voisinage de celle-ci. Le u est une loi de commande à structure variable définie comme suit:

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } S(x,t) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } S(x,t) < 0 \end{cases}, \quad u^+ \neq u^- \tag{II.10}$$

u^+ Et u^- étant des fonctions continues. Il est à noter que c'est le caractère discontinu de la loi de commande qui permet d'obtenir une convergence en temps fini sur la surface, ainsi que des propriétés de robustesse vis-à-vis de certaines perturbations, **[4].**

II.4.2.1.3. Détermination de la loi de commande

Une fois la surface de glissement est déterminée, le prochain pas est de concevoir une loi de commande qui rend la surface de glissement attractive à l'état du système, d'une autre manière, la loi de commande doit être capable de pousser l'état du système vers la surface de glissement.

Si l'état du système reste sur la surface S, la stabilité asymptotique de glissement assurera la convergence vers zéro de l'erreur de poursuite.

Dans la théorie de la commande par mode de glissement (commande à structure variable), il y a différentes manière de choisir les paramètres pour définir une logique de commutation.

Dans la littérature il y a trois types de structures très répandues, **[6], [5]** et **[1]**:

- La commande par contre-réaction linéaire à gain commuté.
- La commande par relais.
- Et la commande équivalente.

Les deux dernière approches, sont les préférées dans la commande des convertisseurs et les machines par ce qu'elles son plus appropriées.

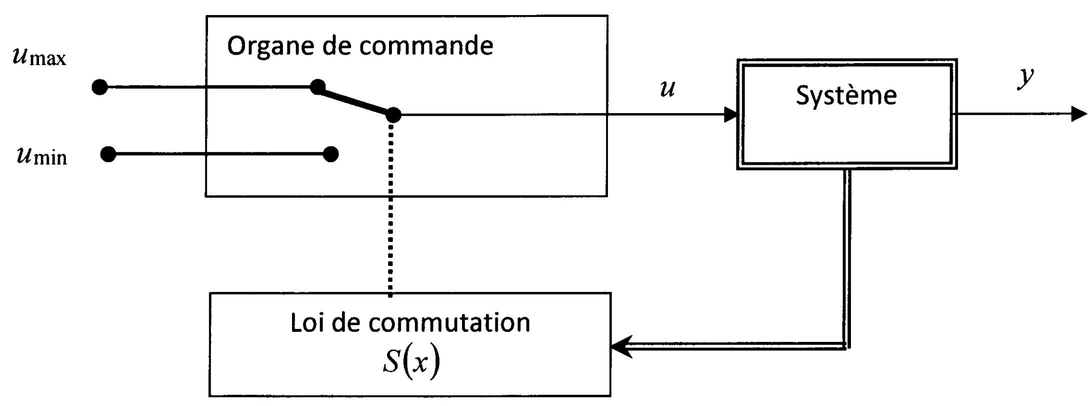

Figure II.4 : Schéma de principe de la commande d'un système à structure variable.

II.4.2.1.4. Expression analytique de la commande

Nous intéressons au calcul de la commande équivalente et par la suite au calcul de la commande attractive définie dans l'espace d'état par l'équation (II.1), le vecteur de commande u est composé par deux grandeurs u_{eq} et u_{gliss}, il s'agit de trouvé l'expression analytique de la commande $u(t)$.

Le vecteur de commande u permet de régler la dynamique à deux modes de fonctionnement, **[4]** :

- Permet d'influer sur le mode approche.
- Ou bien sur le mode de glissement.

Nous avons :

$$\dot{S}(x) = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx}\left\{f(x,t) + g(x,t)\cdot u_{eq}(t)\right\} + \frac{dS}{dt}\left\{g(x,t)\Delta u\right\} \tag{II.11}$$

II.4.2.1.5. Définition des grandeurs de commande

La structure d'un contrôleur comporte deux parties, un premier concerne la linéarisation exacte et une deuxième pour la stabilité.

Cette dernière est très importante dans la technique de commande non linéaire, car elle est utilisée pour éliminer les effets d'imprécision du modèle et les perturbations extérieures, **[13]**. Nous posons :

$$u = u_{eq} + u_{gliss} \tag{II.12}$$

$$u = -g(x)^{-1}\left(f(x) + v + k_0\, S(x) + k_1\, sign(S)\right) \tag{II.13}$$

Notant que la fonction $sign$ donne le signe de S :

$$sign(S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad S > 0 \\ 0 & \text{si} \quad S = 0 \\ -1 & \text{si} \quad S < 0 \end{cases} \tag{II.14}$$

Les coefficients k_0 et k_1 sont positifs.

Si le gain de commande $g(x)$ est différent de zéro le long de la trajectoire d'état du système, la surface S converge exponentiellement vers zéro.

$$\begin{cases} u_{eq} = -g(x)^{-1}(f(x) + \mathrm{v}) \\ u_{gliss} = -g(x)^{-1}\ (k_0 S(x) + k_1 sign(S)) \end{cases} \qquad (II.16)$$

u_{eq} : Correspond à la commande équivalente proposer par *Phlipov et Utkin,* **[5]**. Cette commande est considérée comme la commande la plus directe et la plus simple.

Elle est calculée on reconnaissant que le comportement du système durant le mode de glissement est décrite par : $\dot{S}(x) = 0$.

La commande équivalente peut être interprétée comme la loi de commande continue qui permet de maintenir la condition $\dot{S}(x) = 0$ dans le cas des dynamiques connues, **[6]** et **[12]**.

La commande u_{gliss} est déterminée pour garantir l'attractivité de la variable à contrôler vers la surface et satisfaire les conditions de convergence, en d'autre terme, elle définit le comportement dynamique du système durant le mode de convergence.

II.4.2.1.6. Propriétés de robustesse

De nombreuses techniques de commande ont été développées de façon à être robustes vis-à-vis des incertitudes sur les systèmes considérés, la plupart d'entre elles sont basées sur des méthodes adaptatives, reposant aussi bien sur l'identification ou l'observation, ou sur des méthodes impliquant la stabilité absolue. Bien souvent, elles conduisent à des lois de commande relativement compliquées dont l'implantation se révèle lourde en matière de calculs et de matériels. D'un autre côté, les modes glissants, et ceci peut expliquer l'intérêt croissant pour ces techniques ces dernières années, permettent d'associer qualités de robustesse et réalisation relativement simple, **[4]**.

Reprenons le système (II.1) que l'on suppose maintenant soumis à des perturbations p pouvant représenter des incertitudes paramétriques sur le terme nominal de dérivé f ou des perturbations externes indépendantes de l'état :

$$x^{(n)} = f(x) + g(x)u + p \ x^{(n)} = f(x) + g(x)u + p \qquad (II.17)$$

Le théorème suivant permet d'avoir une description des incertitudes auxquelles le régime glissant sera insensible et a été donné dans sa forme première par Drazenovic, **[9]**.

Théorème II.1 :

Un régime glissant sur S, du système perturbé (II.17), est indépendant du signal de perturbation p, si et seulement si il vérifie :

$$p \in Vect\{g(x)\} \tag{II.18}$$

La condition (II.18) est appelée condition de recouvrement ou « matching condition ».

Il faut noter que le système est insensible à de telles perturbations seulement en régime glissant, mais qu'il reste affecté pendant le régime transitoire, avant que la surface de glissement ne soit atteinte.

Preuve : Puisque la condition (II.18) est vérifiée alors il existe une fonction ξ telle que $p = g(x)\xi$.

La preuve découle simplement de la fonction de projection Π qui annule toute Contribution des vecteurs engendrés par $g(x)$ à la dynamique de la trajectoire en mode glissant.

Nous remarquons ici que, si le régime en mode glissant n'est pas affecté par des perturbations vérifiant la condition de recouvrement, il n'en reste pas moins que celles-ci agissent toujours lors de la phase d'établissement du mode glissant. La robustesse est alors assurée par l'amplitude de la commande discontinue qui « écrase» les perturbations, si celles ci sont bornées.

II.4.2.1.7. Problème de réticence (chattering)

En pratique, la présence de la fonction discontinue $sign(S)$ dans la commande u implique que l'état du système ne peut pas glisser le long de la surface. Mais il oscille le long de la surface de glissement avec la fréquence d'échantillonnage. En générale les réticences ne sont pas un phénomène désiré depuis qu'ils impliquent la haute activité de la commande et qu'ils peuvent exciter des dynamiques de haute fréquence négligées lors de la modélisation **[5], [4]**

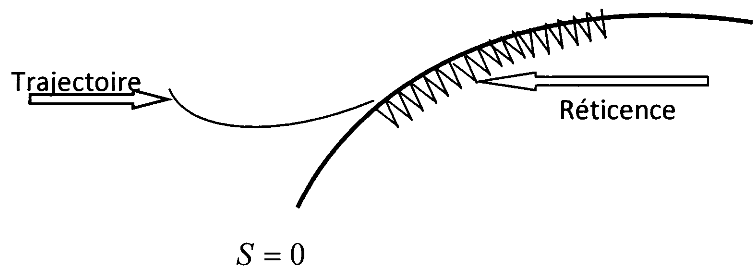

Figure II.5: phénomène de réticence.

En effet, ce phénomène a plusieurs effets indésirables sur la qualité de la commande et sur le système, **[10]**, à savoir : diminution de la précision, produire une grande perte de la qualité des signaux électriques, et provoquer l'échauffement des systèmes et la fatigue des parties mécaniques mobiles pour les cas des systèmes d'entraînement tels que les machines électriques.

Afin de réduire ces réticences, la fonction $sign(S)$ est remplacée par une fonction continue de la forme :

$$Sat(S/\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad S > \Phi \\ -1 & \text{si} \quad S < -\Phi \\ S/\Phi & \text{si} \quad S < |\Phi| \end{cases} \tag{II.19}$$

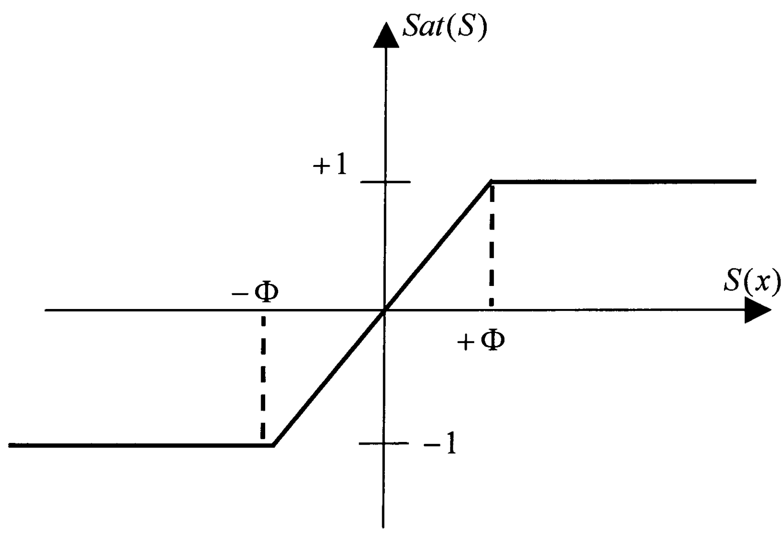

Figure II.6: Fonction de saturation « sat ».

L'effet de la fonction de saturation est, d'ajouter une couche de limite autour d'une surface S. la loi de commande poussera encore l'état du système vers la couche de limite. Plus tard, il n'y aura aucun aiguillage violant dans l'action de la commande à l'intérieure da la limite d'où le broutement ne passera pas. Cependant la condition de glissement n'est plus garantie, en plus si l'état du système est loin de l'état de la cible (surface) la commande peut être saturée et le contrôleur ne peut pas être capable de garder l'état du système sur la surface. Quand la saturation se passe, la surface glissante n'est plus garantie pour être attirante, **[3]**.

Pour quelques systèmes, la saturation peut affecter considérablement les performances et pour remédier ce problème de la saturation, il peut être évité en utilisant une autre solution au problème de réticence.

Cette solution est la commande par mode de glissement dynamique. Autres, la saturation peut même causer l'instabilité.

Une autre solution pour lisser la commande au voisinage de la surface de glissement $S = 0$, est de remplacée dans la bande $|S(t)| < 0$, la fonction discontinue $sign(S)$ par une fonction continue **[3].**

$$Cont(S) = \frac{S}{|S| + \delta} \tag{II.20}$$

Avec : $\delta > 0$

Cette fonction de commutation peut se représentée par la figure suivante :

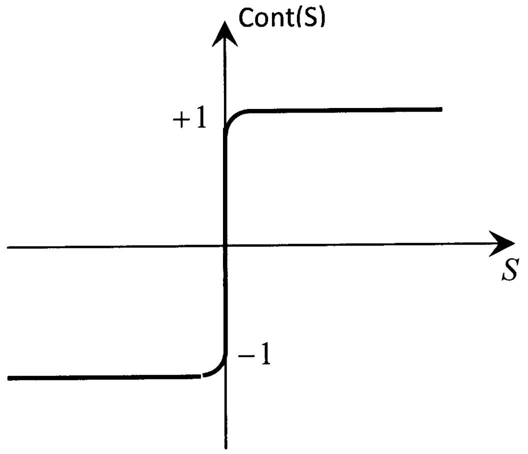

Figure II.7 : Fonction d'adoucissement « cont ».

II.4.2.2. Commande par mode glissant dynamique

Dans le but de réduire les oscillations, nous allons présenter une solution qui repose sur la variation de la commande u de façon à diminuer ou éliminer l'effet de la fonction $sign(S)$, origine du *Chattering.* Les étapes d'élaboration de la commande par mode glissant dynamique sont les mêmes que dans le cas statique, **[3].**

II.4.2.2.1. Surface de glissement

Le chois de la surface de glissement est identique a celui de la commande statique, **[7]** et **[16]**, de l'équation correspondante, on à :

$$\begin{cases} S(x,t) = \left(\dfrac{d}{dt} + \lambda\right)^{(n-1)} = 0 \\ S(x,t) = e^{(n-1)} + \alpha_{(n-1)} e^{(n-2)} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \alpha_1 e = 0 \end{cases} \tag{II.21}$$

λ : Constante strictement positive

II.4.2.2.2. Loi de commande

Dans cette section on veut élaborer une loi de commande par mode de glissement sans chattering. Si les incertitudes sont connues, les objectifs de la commande peuvent être atteints en choisissant, pour le système (II.21) la loi de commande idéale suivante :

$$u^* = -g(x)^{-1}(f(x) + v + \Delta + kS) \tag{II.22}$$

Preuve :

En prenant une fonction de *Lyapunov* de la forme :

$$V = \frac{1}{2}S^2 \tag{II.23}$$

Alors :

$$\dot{V} = S\dot{S} \tag{II.24}$$

Du fait que :

$$S = f + v + \Delta + gu \tag{II.25}$$

L'expression de $\dot{V}$ devient :

$$\dot{V} = S(f + v + \Delta + gu) \tag{II.26}$$

Substituant l'expression de la commande $u(t)$, dans (II.26) On trouve :

$$\dot{V} = -kS^2$$

Dans le but de rendre $\dot{V}$ négatif, il suffit que le coefficient k vérifier : $k > 0$

Ce qui implique que $S \to 0$ quand $t \to \infty$ et ce fait u^* permet d'atteindre les objectifs de commande.

Par la suite on note :

$$\begin{cases} u_0 = -g(x)^{-1}(f(x) + v + kS) \\ \Delta_1 = \dfrac{\Delta(x)}{g(x)} \end{cases} \tag{II.27}$$

La commande idéale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u^* = u_0 - \Delta_1 \tag{II.28}$$

u_0 : représente une commande nominale dans le cas ou les incertitudes son nulles.

Du fait que les incertitudes sont mal connues, l'implantation de la loi de commande idéale u^* est impossible pour cela, notre but est d'approcher la partie qui contient des incertitudes dans la commande idéale u^* par un autre terme noté u_S. Dans ce cas, la nouvelle commande prend la forme :

$$u = u_0 + u_S \tag{II.29}$$

Avec :

u_0 : Commande nominale du système sans incertitudes.

u_S : Partie de la commande à calculer de telle sorte que la commande u converge vers la surface de commande u^*.

Le problème posé consiste à développer une procédure systématique de synthèse de la commande u_S de façons à compenser l'effet de Δ_1. Pour se faire, on définit une surface de glissement convenable S_u, par :

$$S_u = u - u^* \tag{II.30}$$

De l'équation (II.28) et (II.29), (II.30), l'équation (II.30) devient :

$$S_u = u_S + \Delta_1 \tag{II.31}$$

Pour cette surface, on définie la fonction de *Lyapunov* $V(S_u)$ candidate suivante :

$$V(S_u) = \frac{1}{2} S^2 u \tag{II.32}$$

Sa dérivée temporelle est donner par :

$$\dot{V}(S_u) = S_u \dot{S}_u \tag{II.33}$$

La dérivée de $(II.31)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{S}_u = \dot{u}_S + \dot{\Delta}_1$$

Avec $\dot{\Delta}_1$ est supposée borner par :

$$\left|\dot{\Delta}_1\right| \leq \delta(x,u) \tag{II.34}$$

Ou $\delta(x,u)$ est une fonction positive donnée.

On principe, chaque terme en fonction de u^* est difficile à êtres utiliser dans la commande, c'est pourquoi, on est obliger de chercher pour S_u une nouvelle formulation indépendante de u^*, si on ajoute et on retranche gu^* dans (II.25) on aura :

$$\begin{cases} \dot{S} = f + gu + v + \Delta + gu^* - gu^* \\ \dot{S} = f + g(u - u^*) + v + \Delta + g\left[-\frac{1}{g}(f + v + \Delta + kS) \right] \\ \dot{S} = -kS + gS_u \end{cases} \tag{II.35}$$

$$S_u = \frac{\dot{S} + kS}{g} \tag{II.36}$$

D'où :

$$sign(S_u) = sign\left(\frac{\dot{S}+kS}{g}\right) \tag{II.37}$$

Remarque II.2 :

Le calcule de l'amplitude de la commande u n'est possible sauf si le gain g(x) est non nul sur toute la trajectoire de x.

Remarque II.3 :

Dans ce cas, l'effet de la fonction *sign* est réduit après intégration de u_S, car l'intégration se comporte comme un filtre passe bas.

II.4.3. Système multi variable (MIMO)

Cette section présente l'extension du développement antérieur aux systèmes multi variables, considérons un système non linéaire multi variables de la forme :

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u + \Delta(x) \tag{II.38}$$

Avec :

$$\begin{cases} F(x) = \left[f_1(x),\ldots\ldots\ldots f_m(x)\right] \\ G(x) = \left[b_{ij}(x)\right], \quad \text{avec} \quad \mathrm{i}=1\ldots..\mathrm{m} \quad \mathrm{j}=1\ldots..\mathrm{m} \\ \overline{\Delta} = \left[\overline{\Delta}_1\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{\Delta}_\mathrm{m}\right] \\ u = \left[u_1\ldots\ldots\ldots\ldots u_m\right] \end{cases} \tag{II.39}$$

et

$$\left|\Delta_\mathrm{i}(x)\right| \le \Delta_\mathrm{i} \tag{II.40}$$

Le vecteur d'état x est composé de x_i et leur premier dérivée sont exprimés à l'aide de la notation $(n_i - 1)$, on peut alors écrire le système sous la forme suivante, **[10]:**

$$x_i^{(n_i)} = f_i(x) + \Delta_i(x) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x)u_{ij}, \ \mathrm{i}=1\ldots\ldots\ldots\mathrm{m} \text{ et } \mathrm{j}=1\ldots..\mathrm{m} \tag{II.41}$$

Nous nous intéressons toujours au problème de poursuite d'une trajectoire désirée $x \equiv x_d$.

II.4.3.1. Commande par mode de glissement statique

II.4.3.1.1. Surface de glissement

Soit : $e_i(t)$, $\mathrm{i}=1,\ldots\ldots\ldots,\mathrm{m}$, l'erreur de poursuite est donnée par :

$$e_i = x_i - x_{d_i}$$

Soit un vecteur S de composante S_i donné par :

$$\begin{cases} S_i(x,t) = \left(\dfrac{d}{dt} + \lambda_i\right)^{(n-1)} \cdot e_i \\ S_i(x,t) = e_i^{(n_i-1)} + e_{i,(n_i-1)} e_i^{(n_i-2)} e_i^{(n_i-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{i,1} e_i = 0, \qquad \lambda_i > 0, \qquad i = 1,\ldots\ldots\ldots m \end{cases} \tag{II.42}$$

II.4.3.1.2. Condition de convergence

Comme dans le cas mono variable on cherche une loi de commande u vérifiant la condition de glissement suivante :

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{2} S^T S > 0 \\ \dot{V} = S^T \dot{S} = \sum\limits_{i=1}^{m} S_i \dot{S}_i \leq 0 \end{cases} \tag{II.43}$$

Remarque II.4:

Pour assuré une attractivité dans un temps fini on définie la condition de convergence de la manière suivante :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{m} S_i \dot{S}_i \leq -\sum_{i=1}^{m} (\eta_i |S_i| + h_i(S) S_i) \tag{II.44}$$

Où :

$h_i(S) = \psi_i S_i$ Avec : $\eta_i, \psi_i >\ 0, \mathrm{i}=1\ldots\ldots\ldots,\mathrm{m}$

II.4.3.1.3. Loi de commande

Considérons la surface $S = [S_1 \cdots\cdots\cdots\cdots S_m]^T$ définie par l'équation (II.42) et soit la loi de commande $u(t)$:

$$u = -G(x)^{-1}\left[F(x)+V+k_0S+k_1 sign(S)\right] \tag{II.45}$$

Où :

$$sign(S) = \left[sign(S_1)..........sign(S_m)\right]$$

$$\begin{cases} k_1 = \text{diag}\left[k_{11}............k_{1m}\right],\ k_{1i} > 0 \ \text{ pour i} = 1........\text{m} \\ k_0 = \text{diag}\left[k_{01}............k_{0m}\right],\ k_{0i} > 0 \ \text{ pour i} = 1.......\text{m} \end{cases}$$

$$V = \left[V_1............V_m\right]^T$$

Si la matrice $G(x)$ est réversible, la surface S est globalement attractive et invariante, **[12].**

Preuve :

Soit la fonction de *Lyapunov* définie par :

$$V = \frac{1}{2}S^T S \tag{II.46}$$

Où :

$$S = \left[S_1 ....S_m\right]^T$$

Sa dérivée temporelle est donc :

$$\dot{V} = S^T \dot{S} \tag{II.47}$$

De plus, la dynamique $\dot{S}_i$ est explicitée de la relation de la surface de glissement (II.42) ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \dot{S}_i = e_i^{n_i} + \alpha_{i,n_i-1}e_i^{(n_i-1)} + ... + \alpha_{i,1}\dot{e}_i \\ \dot{S}_i = x_i^{n_i} - x_{d_i}^{(n_i)} + \alpha_{i,n_i-1}e_i^{(n_i-1)} + ... + \alpha_{i,1}\dot{e}_i \end{cases} \tag{II.48}$$

Prenons

$$V_i = -x_{d_i}^{(n_i)} + \alpha_{i,n_i-1}e_i^{(n_i-1)} + ... + \alpha_{i,1}\dot{e}_i V_i$$

Donc : (II.48) devient :

$$S_i = x_i^{n_i} + V_i \tag{II.49}$$

$$\dot{S}_i = f_i(x) + V_i(x) + \Delta_i(x) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x) u_j \qquad \text{pour } i = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots m \tag{II.51}$$

En remplacent $x_i^{(n_i)}$ par son expression obtenue de (II.41), la relation précédente, ou encore sous la forme matricielle, devienne:

$$\dot{S} = F(x) + V(x) + \Delta(x) + G(x)u \tag{II.52}$$

En choisissant la loi de commande donnée par l'expression (II.45), c-à-d :

$$u = G(x)^{-1}\left[F(x) + V(x) + k_0 S + k_1 sign(S)\right] \tag{II.53}$$

La dynamique de la surface exprimée par (II.52) se réduit à :

$$\dot{S} = \Delta(x) - k_0 S - k_1 sign(S) \tag{II.54}$$

II.4.3.2. Commande par mode de glissement dynamique

II.4.3.2.1. Surface de glissement

Considérons la surface $S = [S_1 \ldots\ldots\ldots\ldots S_m]^T$ décrite par :

$$\begin{cases} S_i(x,t) = \left(\dfrac{d}{dt} + \lambda_i\right)^{(n-1)} e(x) = 0 \\ S_i(x,t) = e_i^{(n_i-1)} + e_{i,(n_i-1)} e_i^{(n_i-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{i,1} e_i = 0, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots\ldots, \mathrm{m} \end{cases} \tag{II.55}$$

II.4.3.2.2. Loi de commande

Si les incertitudes $\Delta(x)$ dans (II.38) sont connus la loi de commande idéale suivant assurera les objectifs de commande

$$u^* = -G(x)^{-1}\left[F(x) + V + \Delta(x) + kS\right] \tag{II.56}$$

Avec :

$$\begin{cases} u^* = \left[u_1^* \ldots\ldots\ldots\ldots u_m^*\right]^T \\ S = \left[S_1 \ldots\ldots\ldots\ldots S_m\right]^T \\ k = \mathrm{diag}\left[k_1 \ldots\ldots\ldots\ldots k_m\right], \qquad\qquad k_i > 0 \text{ pour } i = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots m \\ V = \left[V_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots V_m\right]^T \end{cases}$$

Preuve :

Considérons la fonction de *Lyapunov* candidate suivante :

$$V = \frac{1}{2} S^T S \tag{II.57}$$

Sa dérivée temporelle est exprimée par :

$$\dot{V} = S^T \dot{S} \tag{II.58}$$

En utilisant la relation $(II.52)$, la dérivée temporelle de S est alors donner par :

$$\dot{S} = F(x) + V(x) + \Delta(x) + G(x)u \tag{II.59}$$

Avec :

$$\begin{cases} V = \left[V_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots V_m\right] \\ V_i = -x_{d_i}^{(n_i)} + \alpha_{i,n_i-1} e_i^{(n_i-1)} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{i,1}\dot{e}_i \quad , \quad i = 1 \ldots\ldots m \end{cases}$$

Si la commande u prend la valeur de u^*, formulée par la relation $(II.56)$, la dynamique se réduit alors à la forme :

$$\dot{S} = -kS \tag{II.60}$$

En introduisant $(II.60)$ dans $(II.58)$, celle-ci prend l'expression finale :

$$\begin{cases} \dot{V} = -kS^T S \\ \dot{V} = -\sum_{i=1}^{m} k_i S_i^2 \end{cases} \tag{II.61}$$

Ce implique que $S_i \to 0$ quant $t \to \infty$ par conséquence e_i et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n tendent vers zéro. On peut écrire cette loi de commande dans une forme réduite comme suit :

n_{i-1} Convergent vers zéro.

$$u^* = u_0 - \Delta_1 \tag{II.62}$$

Où :

$$\begin{cases} u_0 = [u_{01} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_{0m}]^T \\ \Delta_1 = [\Delta_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta_{1m}]^T \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} u_0 = -G^{-1}(x)[F(x) + V(x) + kS] \\ \Delta_1 = G^{-1}(x)\Delta(x) \end{cases} \tag{II.63}$$

u_0 : représente la commande nominale (glissement) dans le cas ou les incertitudes sont nulles.

La réalisation de cette loi de commande est impossible car les incertitudes sont mal connues, pour cette raison, on doit approcher la partie qui contient ces incertitudes par une commande u_S, ce qui implique une nouvelle forme de la commande, soit :

$$u = u_0 + u_S \tag{II.64}$$

Avec :

$$\begin{cases} u = [u_1 \cdots\cdots\cdots\cdots u_m]^T \\ u_S = [u_{S1} \ldots\ldots\ldots\ldots u_{Sm}]^T \end{cases}$$

Le problème posé consiste à développer une procédure systématique de synthèse de la commande u_S de façon à compenser les effets de Δ_i, pour se faire, **[10],** on définit une surface de glissement convenable S_u, telle que :

$$S_u = u - u^* \qquad (II.65)$$

De (II.65) et (II.64), l'expression (II.62) devient :

$$S_u = [S_{u1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots S_{um}]^T$$

$$S_u = u_S + \Delta_1 \qquad (II.66)$$

Pour cette surface, on définie la fonction de *Lyapunov* $V(S_u)$ candidate suivante :

$$V(S_u) = \frac{1}{2} S_u^T S_u \qquad (II.67)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\dot{V}(S_u) = \frac{1}{2} S_u^T \dot{S}_u \qquad (II.68)$$

La dérivée de (II.66) peut être écrite sous la forme :

$$\dot{S}_u = \dot{u}_S + \dot{\Delta}_1 \qquad (II.69)$$

Avec :

$\dot{\Delta}_1$ est supposée borner par :

$$\left|\dot{\Delta}_{1i}\right| \le \delta_i(x,u), \quad \mathrm{i} = 1 \dots\dots\dots \mathrm{m} \qquad (II.70)$$

Où :

$\delta(x,u) = [\delta_1 \dots\dots\dots \delta_m]^T$ et δ_i des fonctions positivent données.

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et développé la stratégie de la commande par mode de glissement statique et dynamique pour une classe des systèmes non linéaires mono variable et multi variables.

Les deux approches sont caractérisées par la simplicité de mise en œuvre qui se fait dans trois étapes :

- Choix d'une surface convenable.
- Etablissement des conditions de convergence.
- Détermination de loi commande qui assure l'attractivité de la surface.

Dans la stratégie de commande par mode de glissement statique, la présence de la fonction « signe » dans la loi de commande cause des oscillations haute fréquences appelées « réticences » pour remédier ce problème et réduire les oscillations, dans la seconde et la troisième approche ; le problème de réticence est résolu, par la modification de la loi de commande de telle sorte que la fonction discontinue « signe » intervient dans la loi de commande à travers une fonction intégrale qui se comporte comme un filtre passe bas.

Dans le troisième chapitre, nous allons essayer d'appliquer la commande par mode de glissement sur notre système électrique, qui est une machine asynchrone, la charge est considérée comme perturbation sur le modèle .